ACTA DIDACTICA Vol. 14.

Matematică
Ghid pentru formarea inițială și continuă a profesorilor pentru învățământul primar

Ioana Magdaș

Presa Universitară Clujeană

Ioana Magdaș

Matematică

Ghid pentru formarea inițială și continuă a profesorilor pentru învățământul primar

Presa Universitară Clujeană

2019

Colecția *Acta Didactica*
este coordonată de Liliana Ciascai și Maria Eliza Dulamă.

Referenţi ştiinţifici:
Prof. univ. dr. Liliana Ciascai
Conf. univ. dr. Iuliana Zsoldos-Marchiș

ISBN 978-606-37-0556-4

Universitatea Babeş-Bolyai
Presa Universitară Clujeană
Director: Codruţa Săcelean
Str. Hasdeu nr. 51
400371 Cluj-Napoca, România
Tel./fax: (+40)-264-597.401
E-mail: editura@editura.ubbcluj.ro
http://www.editura.ubbcluj.ro/

CUPRINS

Introducere

În pregătirea oricărui cadru didactic pentru învățământul primar cunoștințele de matematică sunt esențiale. În această lucrare ne-am propus să abordăm cele mai importante noțiuni matematice necesare profesorilor pentru învățământul primar în activitatea lor. La baza tematicii din volumul de față stă programa pentru examenul de Definitivat al învățătorilor/ institutorilor/ profesorilor pentru învățământul primar. Lucrarea a fost concepută sub forma unui ghid didactic în care se întrepătrund aspecte teoretice cu exemple și probleme propuse pentru rezolvare. Pentru ca cititorii să își poată verifica achizițiile științifice, pe parcursul lucrării sunt oferite două teste de autoevaluare cu rezolvări. De asemenea sunt sugerate pentru rezolvare trei teste de verificare a cunoștințelor, două pe parcurs și unul final. În întregul volum conținuturile sunt organizate ierarhic, în ordinea creșterii gradului de dificultate, respectând logica matematicii.

Lucrarea este structurată pe șapte capitole acoperind conținuturi referitoare la: Mulțimi, Mulțimea numerelor naturale și operații cu acestea, Divizibilitate, Fracții ordinare și zecimale și operații cu acestea, Ecuații, inecuații și sisteme de două ecuații liniare cu două necunoscute, Mărimi și unități de măsură, Elemente de geometrie.

Ghidul se adresează cu precădere studenților specializării Pedagogia Învățământului Primar și Preșcolar și învățătorilor/ institutorilor/ profesorilor pentru învățământul primar care se pregătesc pentru examenul de definitivare în învățământ. Totodată lucrarea este valoroasă și pentru cadrele didactice din învățământul primar aflate în diferite etape ale carierei didactice care vor (re)găsi în conținutul acesteia cunoștințe, aplicații, exerciții și probleme utile în activitatea lor la catedră.

Cluj-Napoca, aprilie 2019 **Autoarea**

1. Mulțimi

1.1. Noțiunea de mulțime

Teoria mulțimilor a apărut în perioada 1871 – 1883, inițiatorul ei fiind matematicianul german Georg Cantor. Noţiunea de mulţime face parte din categoria noţiunilor primare, care nu se definesc ci doar se descriu. Totuși prin **mulţime** putem înțelege *o colecţie de obiecte grupate pe baza anumitor proprietăţi comune*. Tot o noțiune primară este și noțiunea de **apartenență** (relația de a fi element al unei mulțimi).

Exemple. Mulțimea elevilor unei clase; Mulțimea literelor cuvântului „MATEMATICA”.

Notații.

- pentru mulțimi se folosesc literele mari de tipar: *A, B, C,...M,...X, Y, Z;*
- pentru elementele mulțimilor se folosesc literele mici de tipar: *a, b, c,...m,...x, y, z*;
- pentru apartenență:

  $a \in A$, care se citește: „elementul a aparține mulțimii A”;

  $A \ni a$, care se citește: „mulțimea A conține elementul a”;
- pentru non-apartenență:

  $a \notin A$, care se citește: „elementul a nu aparține mulțimii A”.

Reprezentarea mulțimilor. Mulţimile pot fi **reprezentate** prin: înșiruirea elementelor, proprietate caracteristică sau prin diagramă Venn-Euler.

Exemplu. Mulțimea literelor cuvântului “ALFABET” se poate scrie astfel:

- **prin înșiruirea (enumerarea) elementelor**:

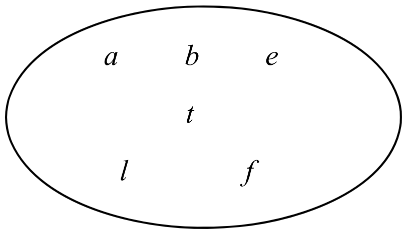
  $A = \{a, b, e, f, l, t\}$;

Observaţie: Elementele unei mulţimi sunt distincte, adică un acelaşi element nu se poate repeta de mai multe ori.

- **prin proprietate caracteristică**:

  A={ x/ x este literă a cuvântului *alfabet};*

- **prin diagrama Venn-Euler**:



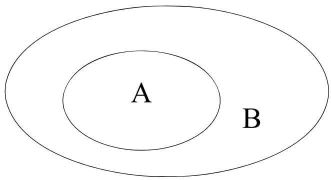
Definiție. Mulțimea fără nici un element se numește mulțimea vidă și se notează ϕ.

Între două mulțimi se stabilesc două **relații**: cea de incluziune și cea de egalitate.

1.2. Relația de incluziune

Definiție. Dacă toate elementele unei mulțimi A aparțin și unei alte mulțimi B, vom spune că A este o **submulțime** (parte) a mulțimii B și vom scrie acest lucru: A ⊂ B. Simbolul ⊂ semnifică o incluziune strictă, astfel încât, cu siguranță mulțimea B, are cel puțin un element care nu există și în mulțimea A.

Definiție. Spunem că mulțimea **A este inclusă**, în sens larg, **în mulțimea B** (sau că A este o **submulţime** a mulţimii B) şi scriem A ⊆ B dacă orice element al mulțimii A este și element al mulțimii B. Reprezentarea prin diagramă Venn-Euler a relaţiei A ⊆ B este:



Exemplu. Fie mulţimile: $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ *şi* $B = \{x \mid x \in N$ *şi* $x < 10\}$.

Scriem mulţimea B prin enumerarea elementelor sale astfel:

B={0,1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}. Atunci "*A este inclusă strict în B*" şi scriem: $A \subset B$, pentru că orice element (cifră pară) al mulţimii A este şi element (cifră) al mulţimii B şi există elementul 3 al lui B care nu aparţine lui A.

Proprietăţile relaţiei de incluziune a mulţimilor sunt:

1) $\phi \subseteq A$;

2) *Reflexivitate:* $A \subseteq A$;

3) *Tranzitivitate:* Dacă $A \subseteq B$ şi $B \subseteq C$ atunci $A \subseteq C$.

1.3. Egalitatea mulţimilor

Definiție. Spunem că mulțimile A și B sunt **egale** și scriem: A = B dacă și numai dacă $A \subseteq B$ și $B \subseteq A$.

Exemplu. Fie mulţimile: A = {0, 1, 2, 3, 4} şi $B = \{x \in \boldsymbol{N} \mid x \leq 4\}$. Mulţimile A şi B sunt egale şi scriem: $A = B$, pentru că au aceleaşi elemente.

Proprietăţile egalităţii mulţimilor sunt:

1) *Reflexivitate:* $A = A$;

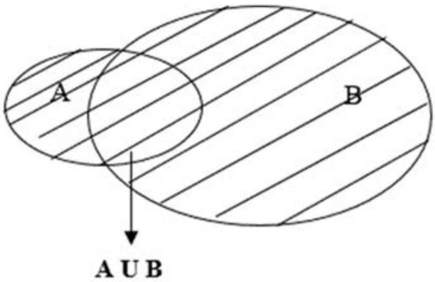
2) *Simetrie:* Dacă $A = B$ atunci şi $B = A$;

3) *Tranzitivitate:* Dacă $A = B$ şi $B = C$ atunci şi $A = C$.

1.4. Operații cu mulțimi

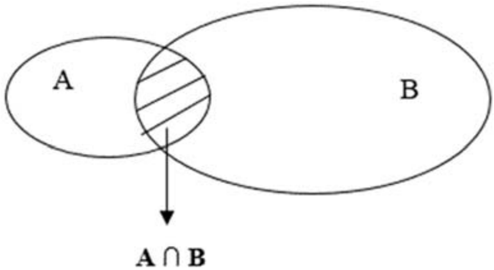
Definiție. Reuniunea a două mulțimi A și B, notată $A \cup B$, reprezintă mulțimea elementelor care aparțin sau lui A sau lui B.
Astfel:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \ \ sau \ \ x \in B\}.$$



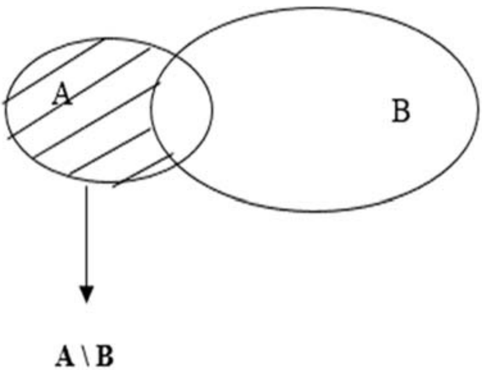
Definiție. Intersecția a două mulțimi A și B, notată $A \cap B$, reprezintă mulțimea elementelor care aparțin atât mulțimii A cât și mulțimii B. Astfel:

$$A \cap B = \{x / x \in A \text{ și } x \in B\}.$$



Definiție. Diferența a două mulțimi A și B, notată $A \setminus B$ sau $A - B$, reprezintă mulțimea ale cărei elemente aparțin mulțimii A dar nu aparțin mulțimii B. Astfel:

$$A \setminus B = \{x / x \in A \text{ și } x \notin B\}.$$



Exemplu. Fie mulţimile: $A = \{c, i, f, r, ă\}$ şi $B = \{n, u, m, ă, r\}$.

Reuniunea mulţimilor A şi B este: $A \cup B = \{c, i, f, r, ă, n, u, m\}$.

Intersecția mulțimilor A şi B este: $A \cap B = \{r, ă\}$.

Diferența dintre mulțimea A și B este: $A \setminus B = \{c, i, f\}$.

Definiție. Complementara unei mulţimi. Dacă $A \subseteq E$ atunci $E \setminus A$ se numește complementara mulţimii A faţă de E și se notează $C_E A$.

Definiție. Produsul cartezian a două mulțimi A și B, notat $A \times B$, reprezintă mulțimea formată din perechile ordonate de două elemente, primul element aparținând mulțimii A, iar cel de al doilea mulțimii B. Astfel:

$$A \times B = \{(x,y) / x \in A \text{ și } y \in B\}.$$

Definiție. O submulţime a produsului cartezian $A \times B$ se numește **relaţie** intre elementele mulţimilor A și B.

Exemplu. Fie $A=\{1,2\}$ şi $B=\{1,2,3\}$. Observăm că $A \subseteq B$. Atunci avem:

$C_B A = \{3\}$;

$A \times B = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3)\}$ şi

$B \times A = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2)\}$.

Se observă că: $A \times B \neq B \times A$, deci produsul cartezian nu este comutativ.

Definiție. Se numește **partiţie** a unei mulţimi o mulţime de submulţimi disjuncte a mulţimii date cu proprietatea că reuniunea acestora este mulţimea dată.

Proprietăţile operaţiilor cu mulţimi (selecție):

1) *Comutativitate*: $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$;

2) *Asociativitatea reuniunii*: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;

3) *Asociativitatea intersecției*: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;

4) *Distributivitatea reuniunii faţă de intersecţie*:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C);$$

5) *Distributivitatea intersecţiei faţă de reuniune*:

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

6) *Alte proprietăţi*:

$A \cup A = A$; $A \cap A = A$;

$A \cup \phi = A$; $A \cap \phi = \phi$;

$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;

$C_E(A \cup B) = C_E(A \cap B)$;

$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$;

$C_E(A \cap B) = C_E(A \cup B)$;

$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$;

$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$;

$A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$.

Probleme propuse.

1. Se dau mulţimile:

$A=\{x / x \in N, x < 6\}$, $B =\{x / x \in N, 3 < x < 7\}$

$C=\{x / x \in N, 6 \leq x < 10\}$, $D=\{x / x = 2n, n \in N, n \leq 6\}$,

$E=\{x / x = 2n + 1, n \in N, n \leq 6\}$

a) Scrieţi mulţimile indicând elementele lor.

b) Calculaţi:

- $A \cup B$, $A \cup C$, $A \cap B$, $A \cup C$, $A \cap C$;
- $A \cup B \cup C$, $A \cap B \cap C$, $D \cup E$, $D \cap E$;
- $(A \cup C) \cap D$, $(A \cap C) \cup D$;
- $A \setminus B$, $A \setminus C$, $A \setminus D$, $A \setminus E$, $B \setminus A$;
- $B \setminus C$, $B \setminus D$, $B \setminus E$, $D \setminus E$, $E \setminus D$;
- $A \times B$, $A \times C$, $B \times A$, $B \times C$.

c) Pentru mulţimile date verificaţi egalităţile:

- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$;
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;
- $C \cup (D \cap E) = (C \cup D) \cap (C \cup E)$;
- $C \cap (D \cup E) = (C \cap D) \cup (C \cap E)$;
- $A \setminus (D \cap E) = (A \setminus D) \cup (A \setminus E)$;
- $A \setminus (D \cup E) = (A \setminus D) \cap (A \setminus E)$.

2. Determinaţi mulţimile A şi B ştiind că sunt îndeplinite simultan condiţiile:

   a) $A \cup B = \{a, b, c, d, e\}$; $A \cap B = \{a, b\}$; $A \setminus B = \{c, d\}$.

   b) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$; $A \cap B = \{1, 2\}$; $A \setminus B = \{5\}$.

   c) $A \cup B \cup C = \{a, b, c, d, e\}$; $A \cap B = \{a, b, e\}$; $A \cap C = \{b, c\}$; $A \setminus B = \{c, d\}$ și $A \setminus C = \{d, e\}$.

3. Se consideră mulțimile $A = \{x \in N /\ 19 \leq x \leq a\}$ și

   $B = \{y \in N /\ y \text{ este număr par}\}$.

   a) Pentru a = 24 scrieți elementele mulțimii A;

   b) Pentru a = 25 determinați numărul elementelor mulțimii $A \cap B$ precizând totodată elementele mulțimii A;

   c) Dacă mulțimea A are 8 elemente, determinați elementele mulțimii $A \setminus B$ precizând totodată explicit elementele mulțimii A.

(Definitivat, 2017)

4. Într-o clasă sunt 25 de elevi. Aceştia participă la două activităţi: şah şi baschet. Ştiind că:

   a. 12 elevi participă la şah, 18 elevi participă la baschet, aflaţi câţi elevi participă atât la şah cât şi la baschet.

   b. 5 elevi participă la ambele activităţi, 7 elevi participă doar la şah, aflaţi câţi elevi participă la baschet.

2. Mulţimea numerelor naturale și operații cu numere naturale

Matematica contemporană utilizează două căi la fel de riguroase pentru introducerea unui concept: *metoda constructivă* şi *metoda axiomatică*.

2.1. Numărul natural ca număr cardinal

Metoda constructivă de introducere a mulţimii numerelor naturale a fost sugerată de Frege (1848-1925) şi preluată ulterior de Russell (1872-1970), din acest motiv vorbim de *teoria lui Frege-Russell* a numerelor naturale. Această metodă evidenţiază aspectul cardinal al numerelor naturale și se bazează pe mulțimi echipotente.

Vom considera mulţimea tuturor mulţimilor. Pe această mulţime vom defini o relaţie după cum urmează:

Definiţie. Fie A şi B două mulţimi. Vom spune că cele două mulţimi sunt **echipotente** (și vom nota $A \sim B$) dacă există o bijecţie (corespondenţă unu la unu) între cele două mulţimi.

Proprietăţile relaţiei de echipotenţă.

1) *Reflexivitate:* A ~ A;

2) *Simetrie*: Dacă A ~ B atunci şi B ~ A;

3) *Tranzitivitate*: Dacă A ~ B şi B ~ C atunci A ~ C.

Definiţie. O relaţie care este reflexivă, simetrică şi tranzitivă se numeşte *relaţie de echivalenţă*.

Corolar. Relaţia de echipotenţă este o relaţie de echivalenţă.

Observaţie. Totalitatea mulţimilor se împarte prin relaţia de echipotenţă în clase disjuncte, numite *clase de echivalenţă.* Într-o clasă de echivalenţă intră deci toate mulţimile echipotente cu o mulţime dată.

Definiţie. Se numeşte **cardinalul mulţimii A** (notat *Card A* sau $|A|$) clasa de echivalenţă căreia îi aparţine A, determinată de relaţia ~.

Pornind de la mulţimea vidă Ø, se consideră şirul: Ø, {Ø}, {Ø, { Ø}}, {Ø, { Ø}, {Ø, { Ø}}},... în care fiecare termen, începând cu al doilea, este mulţimea termenilor anteriori.

Definiţie. Se numesc *numere naturale*, cardinalele mulţimilor din şirul de mai sus şi le notăm cu următoarele simboluri: 0 = Card Ø, 1 = Card {Ø}, 2 = Card {Ø, { Ø}}etc. iar mulţimea numerelor naturale este: $N = \{ 0, 1, 2, 3, \ldots\}$. Se notează cu $N^* = N \setminus \{0\}$.

Observație. Numărul natural introdus pe această cale arată *aspectul cardinal* al numerelor naturale (numărul natural răspunde la întrebarea *câte sunt?*).

Definiție. Fie două mulțimi disjuncte ($A \cap B = \emptyset$). Definim suma cardinalelor astfel: $|A| + |B| = |A \cup B|$.

Definiție. Fie două mulțimi A și B. Definim produsul cardinalelor astfel: $|A| \cdot |B| = |A \times B|$.

Proprietăți.

1) $|A \cup B| + |A \cap B| = |A| + |B|$;

2) *Comutativitatea.* $|A| + |B| = |B| + |A|$; $|A| \cdot |B| = |B| \cdot |A|$;

3) *Asociativitatea.* $(|A| + |B|) + |C| = |A| + (|B| + |C|)$;

$$(|A| \cdot |B|) \cdot |C| = |A| \cdot (|B| \cdot |C|);$$

4) *Elementul neutru.* $|A| + 0 = |A|$; $|A| \cdot 1 = |A|$;

5) *Distributivitatea înmulțirii față de adunare.*

$$|A| \cdot (|B| + |C|) = |A| \cdot |B| + |A| \cdot |C|.$$

2.2. Axiomatica lui Peano

Giuseppe Peano (1858-1932) a pus bazele axiomatice ale mulţimii numerelor naturale prin axiomele care îi poartă numele.

Dacă în teoria constructivă elementele mulţimii N au fost construite, acum vom presupune că ele sunt date apriori. Astfel considerăm drept **noţiuni primare**: zero, notat 0 şi **conceptul de număr natural**. Presupunem dată o singură **relaţie primară**, cea de succesor; succesorul unui număr natural a se va nota cu $s(a)$. Vom mai folosi simbolurile = şi în sensul şi cu proprietăţile identităţii logice.

Axiomele lui Peano (1891):

Se numeşte **mulţimea numerelor naturale** o mulţime N pe care se defineşte o funcţie $s: N \rightarrow N$ numită **funcţie succesor** şi care satisface proprietăţile:

P1) În N există un element (numit zero şi notat cu 0) care nu este succesorul nici unui element;

P2) Funcţia succesor s este injectivă (adică două elemente diferite din N au succesorii diferiţi);

P3) Dacă o submulţime P a lui N are proprietatea că dacă $0 \in P$ şi $n \in P$ implică $s(n) \in P$atunci $P = N$.

Observaţii.

1) Se poate arăta că există un singur triplet $(N, 0, s)$ care satisface proprietăţile de mai sus.

2) Funcţia succesor este: $s(0)=1, s(1)=2, s(2)=3$ etc.

3) Proprietatea P3) se numeşte *axioma* sau *principiul inducţiei matematice* şi pe baza ei se fac demonstraţiile prin inducţie matematică.

4) Numărul natural introdus astfel arată **aspectul ordinal al numerelor naturale (al câtelea este?)**

Temă de reflecţie. Cum influenţează teoriile ştiinţifice referitoare la introducerea mulţimii numerelor naturale metodologia introducerii numerelor naturale în învățământul preșcolar și primar?

2.3. Sisteme și baze de numerație

De-a lungul timpului au fost folosite diferite *reprezentări pentru numere* (hieroglife, semne cuneiforme, litere romane, greceşti sau slave etc.), diferite *sisteme de numeraţie şi baze de numeraţie* (cele mai cunoscute baze fiind 10, 2, 5 şi 60). Scrierea cu litere slave a fost folosită în ţara noastră până la mijlocul secolului al XIX-lea, dar în perioada dintre secolul al XVIII-lea şi al XIX-lea această scriere a fost folosită în paralel cu cifrele moderne.

Sistemul de numerație reprezintă o modalitate de grupare a elementelor unei mulțimi în scopul numărării și reprezentării lor.

De-a lungul timpului au fost utilizate diferite sisteme de numerație ca de exemplu:

- **Sistemul aditiv de scriere cu cifre romane**. Acest sistem de numerație se bazează pe utilizarea a 7 simboluri care semnifică fiecare câte o valoare astfel: I=1, V=5, X=10, L=50, C=100, D=500, M=1000 și care are la bază adunarea valorilor simbolurilor pentru obţinerea numărului. Scrierea numerelor are mai multe reguli:

- Simbolurile V, L, D poate apărea o singură dată în număr;
- Simbolurile I, X, C, M poate apărea consecutiv de maxim 3 ori;
- Un numeral de valoare mai mică așezat după un numeral de valoare mai mare sau egală, se adaugă (se adună) acestuia din urmă;
- Un numeral de valoare mai mică așezat înaintea unui numeral de valoare mai mare, se scade din acesta din urmă, dar V, L și D nu pot fi folosite pentru a micșora valoarea unui numeral mai mare.

Exemple. DCC = 500 + 100 + 100 = 700;

CD = 500 – 100 = 400;

MDCCXDIX = 1000 + 500 + 100 + 100 + 50 − 10 + 10 − 1 = 1749.

- **Sistemul pozițional** care utilizează diferite simboluri (cifre) a căror valoare diferă în funcție de poziția pe care cifra o ocupă în cadrul numărului. **Baza** unui sistem de numerație pozițional se definește ca fiind *numărul unităților de același ordin de mărime care formează o unitate de ordin imediat superior*. Altfel spus, **baza** unui sistem de numerație reprezintă *numărul de semne distincte* necesare *scrierii* unui număr. De-a lungul timpului s-au impus câteva baze de numerație folosite curent în viața de zi cu zi (*baza de numerație zecimală și hexazecimală*) sau în unele domenii specifice (*baza de numerație binară, octală, hexazecimală*).

- **Sistemul zecimal pozițional** este sistemul de numerație utilizat în viață de zi cu zi. El utilizează 10 simboluri (cifrele de la 0 la 9) deci utilizează baza 10 iar valoarea unei cifre este dată de poziția pe care cifra o ocupă în cadrul numărului. Cifrele moderne provin din cifrele arabe de apus „gobar”, sec. IX şi care la rândul lor îşi au originea în scrierea hindusă. Pentru a ordona şi sistematiza cifrele în cadrul unui număr, fiecărei cifre îi va corespunde un ***ordin*** ce reprezintă poziţia ocupată de cifră în cadrul numărului, poziţie numărată de la dreapta spre stânga. În funcție de acest ordin valoarea cifrei în cadrul numărului este egală cu $10^{\text{ordin-1}}$. Astfel fiecare poziție indică o valoare de 10 ori mai mare decât poziția din dreapta sa (*zece unități* formează *o zece*, *zece zeci* formează *o sută*, *zece sute* formează *o mie* etc.). Fiecare poziție are o denumire în cadrul numărului: *unități, zeci, sute, unități de mii, etc.* Trei ordine consecutive formează o grupă numită ***clasă***. Avem clasa unităților, clasa miilor, clasa milioanelor, etc. Procedeul se poate continua cu unităţi de miliarde, zeci de miliarde, sute de miliarde care formează clasa miliardelor, şi în principiu acest proces se poate continua. Așadar la baza acestor numere stau noţiunile de *ordin* şi *clasă*.

Unităţi de milioane	*Sute de mii*	*Zeci de mii*	*Unităţi de mii*	*Sute*	*Zeci*	*Unităţi*
…	$sm\times10^5$	$zm\times10^4$	$um\times10^3$	$s\times10^2$	$z\times10^1$	$u\times10^0$

Exemplu. În numărul 373 (în baza 10) cifra 3 de pe prima poziție (a sutelor) ia valoarea 100, iar cifra 3 de pe ultima poziție (a unităților) ia valoarea 3. Astfel $373 = 3 \times 10^0 + 7 \times 10^1 + 3 \times 10^2$, adică numerele în baza 10 se scriu ca sumă de puteri ale lui 10.

- **Sistemul binar pozițional** utilizează două simboluri: cifrele 0 și 1 iar valoarea unei cifre este dată de poziția pe care cifra o ocupă în cadrul numărului. Astfel șirul numerelor naturale scris în baza 2 este:

Baza 10	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	…
Baza 2	0	1	10	11	100	101	110	111	1000	1001	1010	…

Sistemul binar este utilizat la computere. Astfel, pentru a efectua calcule, cele mai simple calculatoare de buzunar mai întâi transformă numerele din baza 10 în baza 2, efectuează calculele în baza 2, apoi convertesc rezultatul în baza 10 și îl afișează.

Pentru a **transforma un număr din baza 2 în baza 10** trebuie scris ca sumă de puteri ale lui 2 pornind de la ultima cifră spre prima, astfel: $1011_{(2)} = 1 \times 2^0 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^3 = 1 + 2 + 0 + 8 = 11_{(10)}$.

Transformarea un număr din baza 10 în baza 2 se face prin împărţiri succesive la 2, astfel:

- Se împarte numărul în baza 10 la 2. Restul împărţirii poate fi 0 sau 1;
- Câtul primei împărţiri se împarte din nou la 2. Restul împărţirii poate fi 0 sau 1;
- Se continuă procedeul până când câtul este 0;
- Numărul în baza 2 se obţine prin citirea în ordine inversă a resturilor obţinute prin împărţirea la 2

Exemplu.

11 : 2 = 5, r 1

5 : 2 = 2, r 1

2 : 2 = 1, r 0

1 : 2 = 0, r 1 – ne oprim pentru că am obținut câtul 0.

Numărul scris în baza 2 se scrie de jos în sus astfel: $11_{(10)} = 1011_{(2)}$.

2.4. Operații cu numere naturale

Propoziţie. Există o unică lege de compoziţie ϕ pe N ($\phi: N \times N \to N$) astfel ca:

A1. $\phi(m, 0) = m, \forall m \in N$;

A2. $\forall m, n \in N: \phi(m, s(n)) = s(\phi(m, n))$.

Definiție. Legea de compoziţie ϕse numeşte **adunarea numerelor naturale**, se notează: $\phi(m, n) = m + n$ și se citește *m plus n* sau *m adunat cu n*. *m* şi *n* se numesc *termenii adunării,* iar rezultatul adunării se numeşte *suma* sau *totalul* numerelor *m* şi *n.*

Proprietăţile adunării.

1) *Asociativitate:* $(m+n)+p=m+(n+p), \forall m,n,p \in N$;
2) *Comutativitate:* $m+n=n+m, \forall m,n \in N;$
3) *Elementul neutru:* $m+0=0+m=m, \forall m \in N;$
4) *Legea de reducere:* $m+n=m+p \Rightarrow n=p.$

Notație și denumiri. Operația de scădere se notează $m-n$ și se citește *m minus n*. *m* se numește *descăzut*, *n* se numește *scăzător*, iar rezultatul scăderii se numește *diferență* sau *rest*.

Observaţie. În „matematica ştiinţă", scăderea numerelor naturale nu se defineşte în *N* ci numai în *Z* astfel: $x-y=x+(-y)$.

Propoziţie. Există o unică lege de compoziţie δ pe *N* ($\delta: N \times N \rightarrow N$) astfel ca:
I1) $\delta(m,0)=0, \forall m \in N$;
I2) $\forall m,n \in N: \delta(m,s(n))=\delta(m,n)+m.$

Definiție. Legea de compoziţie δ se numeşte **înmulţirea numerelor naturale**, se notează: $\delta(m,n)=m \cdot n=m \times n=mn$ și se citește *m înmulţit cu n* sau *produsul lui m cu n*. *m* şi *n* se numesc *factorii înmulţirii*, iar rezultatul înmulțirii se numeşte *produsul* numerelor.

Proprietăţile înmulţirii.

1) *Asociativitate:* $(m \cdot n) \cdot p=m \cdot (n \cdot p), \forall m,n,p \in N;$
2) *Comutativitate:* $m \cdot n=n \cdot m, \forall m,n \in N;$
3) *Elementul neutru:* $m \cdot 1=1 \cdot m=m, \forall m \in N;$
4) *Distributivitatea înmulţirii faţă de adunare:*
   - *la stânga:* $m \cdot (n+p)=m \cdot n+m \cdot p, \forall m,n,p \in N;$

   sau utilizând comutativitatea:
   - *la dreapta:* $(n+p) \cdot m=n \cdot m+p \cdot m, \forall m,n,p \in N;$
5) *Legea de simplificare:* $m \cdot n=m \cdot p, m \neq 0 \Rightarrow n=p.$

Notație și denumiri. Operația de împărțire se notează *m:n* și se citește *m împărțit la n*. *m* se numește *deîmpărțit*, *n* se numește *împărțitor*.

Teorema împărţirii cu rest. Pentru orice două numere naturale mşi $n, n \neq 0$ există în mod unic numerele naturale$q$şi$r$numite *cât* şi *rest* astfel încât: $m=n \cdot q+r$şi $r<n$.

Cazuri particulare:

- Dacă restul unei împărțiri este 0, atunci spunem că *împărțirea este exactă*;
- Dacă deîmpărţitul este 0**,** rezultatul împărţirii lui 0 la orice număr diferit de 0 este 0;
- Dacă împărţitorul este 1**,** rezultatul împărţirii unui număr la 1 este acel număr.

Atenție. Nu se poate efectua împărţirea la 0**.**

Proprietățile împărțirii.

Distributivitatea împărțirii față de adunare și scădere la dreapta:

$$(n \pm p): m = n: m \pm p: m, \forall m, n, p \in N.$$

2.5. Relația de ordine pe *N*

Definiţie. Pe mulţimea numerelor naturale *N* se defineşte relaţia "*mai mic sau egal cu*", notată $\leq$, astfel: $m \leq n$dacă $\exists d \in N: n = m + d$.

Definiție. Spunem că $m < n$şi citim *m mai mic decât n* dacă $m \leq n$ şi $m \neq n$.

Proprietăţi. Relaţia $\leq$ are următoarele proprietăţi:

1) *Reflexivitate:* $n \leq n, \forall n \in N$*;*
2) *Antisimetrie: Dacă* $n \leq m$ *şi* $m \leq n$ *atunci* $m = n$*;*
3) *Tranzitivitate: Dacă* $m \leq n$ *şi* $n \leq p$ *atunci* $m \leq p$*;*
4) *Tricotomie: Dacă* $m, n \in N$ *atunci* $m < n$ *sau* $m = n$ *sau* $m > n$.

Definiţie. O relaţie se numeşte **relaţie de ordine** dacă este reflexivă, antisimetrică şi tranzitivă. Relaţia se numeşte de *ordine totală* dacă în plus are loc proprietatea de tricotomie.

Propoziţie. Relaţia $\leq$ este o relaţie de ordine totală pe *N*.

Proprietăţile relaţiei $\leq$ faţă de adunare şi înmulţire sunt:

1) Dacă $m \leq n$ atunci $m + p \leq n + p, \forall p \in N$;
2) Dacă $m \leq n$ şi $p \in N^*$ atunci $m \cdot p \leq n \cdot p$.

Reguli privind ordinea efectuării operaţiilor.

Regula 1. Dacă exerciţiul nu conţine paranteze se efectuează mai întâi operaţiile de ordinul II (înmulțirea și împărțirea), apoi cele de ordinul I (adunarea și scăderea) în ordinea în care sunt scrise de la stânga spre dreapta;

Regula 2. Dacă exerciţiul conţine paranteze se efectuează calculele din parantezele mici, apoi din cele mari (drepte) şi la final din acolade conform regulii 1;

Regula 3. După efectuarea calculelor dintr-o paranteză, acea paranteză se înlocuieşte cu rezultatul, şi se obişnuieşte, deşi nu este obligatoriu, ca paranteza în care era inclusă, dacă nu mai conţine şi alte paranteze, să se transforme:
- dacă este mare în paranteză mică,
- dacă este acoladă în paranteză mare.

Exemplu. Calculaţi $80-\{(8+2)\times[5+7\times(15-5\times 2)]\}:5$.

Rezolvare. Respectând regulile de calcul prima dată se vor face calculele în parantezele mici, apoi în paranteza mare şi la sfârşit în acoladă.

$$80-\{(8+2)\times[5+7\times(15-5\times 2)]\}:5=$$
$$=80-\{10\times[5+7\times(15-5\times 2)]\}:5=$$
$$=80-\{10\times[5+7\times(15-10)]\}:5=$$
$$=80-[10\times(5+35)]:5=80-(10\times 40):5=80-400:5=$$
$$=80-80=0.$$

Probleme propuse.

1. Scrieţi cu cifre numerele: două sute de mii trei, cincizeci de mii opt.
2. Pentru fiecare dintre numerele: 6808; 202; 5555:
   a) denumiți semnificația cifrelor și valoarea lor în cadrul numărului;
   b) scrieți numerele ca sumă de puteri ale lui 10;
   c) scrieți predecesorul și succesorul numărului;
   d) rotunjiţi, aproximaţi prin lipsă și adaos la: unități, zeci, sute, mii.

3. Ordonaţi crescător numerele: 16804, 16084, 16800, 6804, 6145, 108, 16800. Apoi subliniaţi cu o linie numere pare, și cu două linii numerele impare.
4. Scrieți numărul a cărui descompunere în sumă de produse este: $93 \times 10000 + 72 \times 10$.
5. Transformați următoarele numere scrise în baza 10 în baza 2: $15_{(10)}$; $19_{(10)}$; $23_{(10)}$; $50_{(10)}$.
6. Transformați următoarele numere scrise în baza 2 în baza 10: $10010_{(2)}$; $11101_{(2)}$; $100011_{(2)}$; $11011011_{(2)}$.
7. Găsiţi cel mai mare număr natural de trei cifre distincte care are cifra sutelor egală cu diferenţa celorlalte două cifre.
8. Câte numere naturale de trei cifre diferite au suma cifrelor egală cu 5?
   a) 5; b) 10; c) 6; d) 8; e) 12

(Concursul *Lumina Math*, 2008, cl. a IV-a)

9. Calculaţi:
   a) $184 - 96 + 39$;
   b) $128 - 93 - 2$;
   c) $2018 - 1989 + 11$;
   d) $2001 - 889 - 11$;
   e) $3468 : 17$;
   f) $38114 : 19$;
   g) $84 - 10 : 2 \times 5$;
   h) $84 - 2 \times 10 : 5$;
   i) $52 + 8 \times 5$;
   j) $101 \times 1007 - 1007 \times 101$;
   k) $999 + 999 \times 9$;
   l) $989 + 2 \times 989 + 3 \times 989$;
   m) $(32 - 32 : 8) \times (190 - 1)$;
   n) $1 + 2 \times [3 + 4 \times (2 + 404 : 4 - 306 : 3)]$;
   o) $2 + 2 \times [15 + 3 \times (112 + 112 : 2 - 219 : 3)]$;

p) $2 \times [92 + 8 \times (1004 - 4 \times (8:2 \times 2 - 4 \times 2:2)]\}$;

q) $950 - \{25:5 + 15:3 \times [265 - (50:25 + 2) \times 65] \times 15\}$.

10. Aflaţi descăzutul știind că scăzătorul este 28, iar diferenţa este 99.
11. Aflaţi scăzătorul știind că descăzutul este 203 iar diferenţa este 87.
12. Determinaţi câtul şi restul împărţirii numerelor şi efectuaţi proba:

    a) 658 şi 8; b) 8521 şi 23; c) 72010 şi 30.
13. Aflaţi împărţitorul dacă deîmpărţitul este 2848, câtul 15 iar restul 13.
14. Aflaţi deîmpărţitul dacă împărţitorul este 13, câtul 78, iar restul 10.
15. Ce resturi se pot obţine la împărţirea cu 2? Dar la împărţirea cu 5?
16. Aflaţi toate numerele care împărţite la 13 dau câtul 4 și apoi aflaţi suma lor.
17. Împărţind un număr natural nenul la 5 obţinem câtul egal cu restul. Aflaţi numărul. (Daţi toate soluţiile)
18. Să se afle cel mai mic, respectiv cel mai mare număr natural de două cifre care împărţit la un număr de o cifră dă restul 12.
19. Să se afle toate numerele naturale nenule care împărţite la 7 dau restul cu 2 mai mic decât câtul.
20. Calculaţi (mai rapid) folosind proprietăţile operaţiilor cu numere naturale:

    a) $2118 - 499$;

    b) $727 + 728 + 729 - 427 - 428 - 429$;

    c) $2 + 3 + \cdots + 2019 - 1 - 2 - \cdots - 2018$;

    d) $3 + 5 + \cdots + 2019 - 2 - 4 - 6 - \cdots - 2018$;

    e) $2019 \times 2020 - 2020 \times 2018$;

    f) $99 \times 189 + 189 \times 98 - 97 \times 189$.

3. Divizibilitatea în N

Definiție. Despre un număr natural ***b*** spunem că este **divizor** al unui număr natural ***a*** dacă există un număr natural ***c*** astfel încât $a = b \cdot c$**.**
Se mai spune ca *a* este un **multiplu** al lui *b*.
Notăm ***b* | *a*** sau ***a* ⋮ *b*** şi citim *b divide a*; *b este divizor al lui a* sau *a este divizibil cu b*.

Proprietăţile relaţiei de divizibilitate.

1. Oricare ar fi numărul natural *a*, atunci $a \mid a$, unde *a* este diferit de zero.
2. Oricare ar fi numărul natural *a*, atunci $a \mid 0$, unde *a* diferit de zero şi $1 \mid a$.
3. Oricare ar fi numerele naturale *a* şi *b*, atunci $a \mid a \cdot b$ şi $b \mid b \cdot a$ (produsul a 2 numere naturale este divizibil cu fiecare factor al produsului), unde *a* şi *b* diferite de zero.
4. Oricare ar fi numerele naturale *a, b, c,* dacă $a \mid b$ şi $b \mid c$, atunci $a \mid c$, unde *a* şi *b* diferite de zero.
5. Oricare ar fi numerele naturale *a, b, c*, dacă $a \mid b$ şi $a \mid c$, atunci $a \mid (b \pm c)$, unde *a* diferit de zero.
6. Oricare ar fi numerele naturale *a, b, c*, dacă $a \mid b$, atunci $a \mid c \cdot b$, unde *a* diferit de zero.

Definiție. Pentru un număr natural, numărul 1 și el însuși se numesc **divizori proprii**, iar ceilalți divizori se numesc **divizori improprii**.

Definiție. Se numește **număr prim** un număr natural mai mare decât 1 care are doar divizori proprii, adică se divide doar cu 1 și cu el însuși. În caz contrar numărul se numește **compus**.

Observații.

- Primul și singurul număr prim par este 2.
- Șirul numerelor prime este infinit.
- Numerele prime până la 50 sunt: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47.

Criterii de divizibilitate:

Teoremă. Un număr natural este **divizibil cu 2** dacă ultima sa cifră a este pară (0, 2, 4, 6 sau 8).

Teoremă. Un număr natural este **divizibil cu 3** dacă suma cifrelor sale se divide cu 3.

Exemplu: 32139 se divide cu 3 pentru că 3 + 2 + 1 + 3 + 9 = 18 care se împarte exact la 3.

Teoremă. Un număr natural este **divizibil cu 9** dacă suma cifrelor sale se divide cu 9.

Exemplu. 21543057 se divide cu 9 pentru că 2 + 1 + 5 + 4 + 3 + 0 + 5 + 7 = 27 care se împarte exact la 9.

Teoremă. Un număr natural este **divizibil cu 4** dacă numărul format din ultimele două cifre ale numărului este divizibil cu 4.

Exemple. 4 | 2032 pentru că 4 | 32; 4 | 128 pentru că 4 | 28.

Teoremă. Un număr natural este **divizibil cu 5** dacă ultima cifră a sa este 0 sau 5.

Teoremă. Un număr natural este **divizibil cu 25** dacă numărul format din ultimele două cifre ale numărului este divizibil cu 25.

Exemplu. 25 | 3850 pentru că 25 | 50.

Teoremă. Un număr natural este **divizibil cu 10** dacă ultima cifră a sa este 0, cu 100 dacă ultimele două cifre ale sale sunt 00, cu 1000 dacă ultimele trei cifre ale sale sunt 000, cu 10.000 dacă ultimele patru cifre ale sale sunt 0000, ş.a.m.d.

Definiţie. Cel mai mare divizor comun a două numere naturale (c.m.m.d.c.) *a* şi *b* este *d* dacă şi numai dacă:

- $d \mid a$ şi $d \mid b$;
- dacă $d' \mid a$ şi $d' \mid b$ atunci $d' \mid d$.

Notaţie. *C.m.m.d.c.* a două numere se notează *(a, b).*

Algoritmul de aflare a c.m.m.d.c. a două numere este:

- se descompun în factori primi numerele;

- se iau factorii comuni la puterea cea mai mică și se înmulțesc între ei.

Definiție. Cel mai mic multiplu comun a două numere naturale (c.m.m.m.c.) *a* și *b* este *m* dacă și numai dacă:

- *a* | *m* și b | *m*;
- dacă a | *m'* și b | *m'* atunci *m* | *m'*.

Notație. *C.m.m.m.c.* al două numere se notează *[a, b]*.

Algoritmul de aflare a c.m.m.m.c. a două numere este:

- se descompun în factori primi numerele;
- se iau factorii comuni și necomuni la puterea cea mai mare și se înmulțesc între ei.

Proprietate. *(a, b) · [a, b] = a · b.*

Probleme propuse.

1. Divizorii naturali ai numărului 15 sunt …..
2. Dintre numerele 12, 7, 15, 21, 36 şi 48, multiplii numărului 6 sunt…
3. Cel mai mic număr natural divizibil cu 2 şi 5 este …..
4. Dintre numerele 204, 1500, 185, 364, 18, 219, 540 şi 416:
   a) numerele divizibile cu 2 sunt ….
   b) numerele divizibile cu 5 sunt …..
   c) numerele divizibile cu 10 sunt ….
   d) numerele divizibile cu 4 sunt ….
   e) numerele divizibile cu 3 sunt ….
   f) numerele divizibile cu 9 sunt ….
5. Scrieţi numerele divizibile cu 5 cuprinse între 18 şi 31.
6. Scrieţi două numere de forma $\overline{43y}$ divizibile cu 2.
7. Aflați c.m.m.d.c. și c.m.m.m.c. pentru perechile de numere:
   a) 240 și 600; b) 245 și 21; c) 125 și 30.
8. Se consideră mulţimile $A = \{x \in N / \ a < x < 11\}$ şi

$B = \{y \in N /\ y\ este\ divizor\ al\ lui\ 9\}$.

a) Pentru a = 0 , calculați $A \cap B$.

b) Pentru a = 3, determinaţi numărul elementelor mulţimii A - B, precizând totodată explicit elementele mulțimii A.

c) Dacă mulțimea A are 10 elemente, determinați numărul elementelor mulţimii C obţinută prin intersecția mulţimii A cu mulţimea numerelor naturale pare, precizând totodată explicit elementele mulțimii C. (Definitivat, 2016)

9. Cel mai mare divizor comun a două numere este 7, iar produsul lor 980. Să se afle cel mai mic multiplu comun al numerelor și cele două numere.

10. Într-o pungă sunt bomboane. Dacă bomboanele se împart în mod egal la 4 copii, în pungă rămân 3 bomboane. Dacă bomboanele se împart în mod egal la 7 copii, în pungă rămân 6 bomboane.

a) Verificați dacă în pungă pot fi 55 de bomboane.

b) Care poate fi cel mai mic număr de bomboane din pungă, înainte ca acestea să fie împărțite copiilor?

11. La un concurs participă 108 fete și 135 băieți. Toți participanții sunt grupați în echipe care au același număr de copii, iar fiecare echipă are același număr de fete.

a) Arătați că se pot forma 3 echipe.

b) Arătați că nu se pot forma 5 echipe.

c) Care este numărul maxim de echipe care se pot forma?

12. Numărul păsărilor dintr-o gospodărie este mai mare decât 70 dar mai mic decât 80. O treime din numărul pasărilor sunt găini, un sfert sunt rațe, iar restul sunt gâște. Determinați numărul gâștelor din gospodărie.

4. Fracții ordinare, zecimale și operații cu fracții

4.1. Fracții ordinare și operații cu ele

Pentru introducerea mulţimii numerelor raţionale pozitive se consideră mulţimea fracţiilor ca fiind:

$$E = N \times N^* = \{(p,q)/\, p \in N, q \in N^*\}.$$

Definiție. O pereche *(p,q)* din mulţimea *E* se numeşte **fracţie**. Numărul *p* se numeşte *numărător* iar *q* *numitor*. Uzual se foloseşte în loc de scrierea sub formă de pereche (p,q) scrierea $\frac{p}{q}$.

Definiție. Pe mulţimea *E* s e defineşte relaţia „~” astfel: $(p,q)\sim(p',q')$ dacă şi numai dacă $pq' = p'q$.

Teoremă. Relaţia ~ este o relaţie de echivalenţă.

Demonstraţie. Se arată că relaţia ~ are următoarele proprietăţi:

1) *Reflexivitate:* $(p,q)\sim(p,q)$;

2) *Simetrie:* Dacă $(p,q)\sim(p',q')$ atunci şi $(p',q')\sim(p,q)$;

3) *Tranzitivitate:* Dacă $(p,q)\sim(p',q')$ şi $(p',q')\sim(p'',q'')$ atunci $(p,q)\sim(p'',q'')$.

Corolar. Relaţia ~ determină o partiţie a mulţimii E în clase de echivalenţă, numite numere raţionale pozitive.

Definiție. Vom nota prin $Q_+ = N \times N^*/\sim$ mulţimea claselor de echivalenţă în care este partiţionată mulţimea *E*.

Definiție. Un *număr raţional,* notat $\frac{p}{q}$, este o clasă de echivalenţă şi reprezintă mulţimea tuturor fracţiilor echivalente cu o fracţie dată, deci: $\frac{p}{q} = \{(x,y)/\, (p,q)\sim(x,y)\}$.

Observaţii.

- nu se face diferenţa prin scriere între fracţie şi numărul raţional, ambele fiind notate prin $\frac{p}{q}$. La fel, deşi scrierea $\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'}$ se referă la egalitatea a două mulţimi (clase de echivalenţă), semnul egal

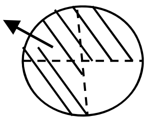
„=” se foloseşte atât pentru fracţii înlocuind semnul „~” cât şi pentru numerele raţionale.

- orice număr natural este considerat raţional şi vom scrie $n = \frac{n}{1}$. Avem deci incluziunea $N \subset Q_{+}$.

Reprezentarea grafică a fracțiilor. Pentru reprezentarea fracției $\frac{p}{q}$ se împarte un întreg în q părți egale din care se iau în considerare p părți.

Exemplu. Reprezentarea a trei pătrimi ($\frac{3}{4}$) dintr-un cerc se face prin împărţirea cercului în 4 părţi egale şi haşurarea a 3 părţi astfel:

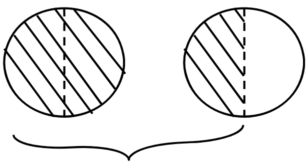
trei pătrimi



Clasificarea fracțiilor.

- **Fracții subunitare** sunt fracțiile $\frac{p}{q}$, care au $p < q$;
- **Fracţii supraunitare** sunt fracțiile $\frac{p}{q}$, care au $p > q$;
- **Fracţii echiunitare** sunt fracțiile care au numărătorul egal cu numitorul.

Exemplu. Fracția $\frac{3}{2}$ este o fracție supraunitară a cărei reprezentare grafică este:



$\frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$

Regulă de calcul. Pentru **a scoate întregii** dintr-o fracție supraunitară se împarte numărătorul la numitor, câtul reprezintă întregii, iar restul reprezintă numărătorul fracției rămase.

Exemplu. Pentru a scoate întregii din fracția $\frac{7}{2}$ vom efectua împărțirea 7 : 2 și vom obține câtul 3 și restul 1. Astfel $\frac{7}{2} = 3\ \frac{1}{2}$.

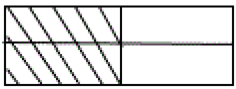
Regulă de calcul. Pentru **a introduce întregii** într-o fracție se înmulțește numitorul fracției cu întregii, se adună cu numărătorul fracției iar rezultatul se trece la numărător.

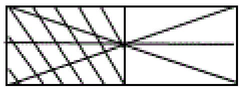
Exemplu. $3\ \frac{1}{2} = \frac{3 \cdot 2+1}{2} = \frac{7}{2}$.

Definiție. Două fracții $\frac{p}{q} < \frac{p'}{q'}$ și $\frac{p'}{q'}$ se numesc **egale** și se notează $\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'}$ dacă și numai dacă $pq' = p'q$.

Observație. Verificarea egalităţii a două fracţii la clasele din învățământul primar se face prin reprezentări.

Exemplu. Are loc egalitatea fracțiilor: $\frac{2}{4} = \frac{4}{8}$ întrucât $2 \cdot 8 = 4 \cdot 4$.
Prin reprezentări se observă în figurile de mai jos că ambelor fracții le corespunde aceeași zonă hașurată, deci fracțiile sunt egale.

$\frac{2}{4}$ 

$\frac{4}{8}$ 

Definiție. Prin **amplificarea** respectiv **simplificarea unei fracții** cu un număr se înțelege înmulțirea respectiv împărțirea numărătorului și numitorului fracției cu acel număr. Semnul de amplificare respectiv de simplificare se pune într-o paranteză sus în stânga respectiv dreapta fracției.

Teoremă. Prin amplificarea sau simplificarea unei fracții cu un număr se obține o fracție egală cu fracția inițială.

Exemple.

- prin amplificarea fracției $\frac{4}{8}$ cu 5 obținem : ${}^{5)}\frac{4}{8} = \frac{20}{40}$.
- prin simplificarea fracției $\frac{4}{8}$ cu 4 avem : $\frac{4^{(4}}{8} = \frac{1}{2}$.

Pe mulţimea numerelor raţionale pozitive se introduce şi relaţia „**mai mic**” (<) astfel:

Definiție. $\frac{p}{q} < \frac{p'}{q'}$ dacă şi numai dacă $pq' < p'q$.

Teoremă. Relaţia < este o relaţie de ordine pentru că este: reflexivă, simetrică şi tranzitivă.

Pe mulţimea numerelor raţionale se introduc operaţiile de adunare, scădere, înmulţire şi împărţire astfel:

Definiție. **Adunarea** se introduce astfel: $\frac{p}{q} + \frac{p'}{q'} = \frac{pq'+p'q}{qq'}$. Adunarea fracţiilor este asociativă, comutativă și are elementul neutru 0.

Exemplu. $\frac{2}{3} + \frac{5}{2} = \frac{4+15}{6} = \frac{19}{6}$.

Definiție. **Scăderea** se introduce în mulţimea numerelor raţionale ca adunare dintre număr şi opusul său: $\frac{p}{q} - \frac{p'}{q'} = \frac{p}{q} + \left(-\frac{p'}{q'}\right)$. Din motive didactice însă, scăderea se introduce şi în mulţimea numerelor raţionale pozitive dar numai în cazul în care descăzutul este mai mare decât scăzătorul.

Exemplu. $\frac{11}{3} - \frac{5}{2} = \frac{22-15}{6} = \frac{7}{6}$.

Definiție. **Înmulţirea** se introduce astfel: $\frac{p}{q} \cdot \frac{p'}{q'} = \frac{pp'}{qq'}$. Înmulţirea fracţiilor este asociativă, comutativă, are elementul neutru 1 şi fiecare fracţie cu excepţia lui 0 are o inversă (inversa fracţiei $\frac{p}{q}$ este $\frac{q}{p}$). De asemenea înmulţirea este distributivă faţă de adunare.

Exemplu. $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{2} = \frac{2\cdot5}{3\cdot2} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$.

Definiție. **Împărţirea** se introduce astfel: $\frac{p}{q} : \frac{p'}{q'} = \frac{p}{q} \cdot \frac{q'}{p'} = \frac{pq'}{qp'}$.

Exemplu. $\frac{2}{3} : \frac{10}{9} = \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{10} = \frac{18}{30} = \frac{3}{5}$.

Observație. Ordinea efectuării operațiilor se face ca la operațiile cu numere naturale.

Probleme propuse.

1. Reprezentaţi grafic fracţiile, iar pentru fracţiile supraunitare scoateţi întregii din fracţie: o doime; trei sferturi; şapte zecimi; $\frac{5}{8}, \frac{8}{3}, \frac{3}{10}, \frac{2}{3}, \frac{7}{4}, \frac{1}{4}, \frac{3}{2}$.
2. Introduceţi întregii în fracţie şi reprezentaţi grafic: $2\frac{1}{2}, 3\frac{2}{3}, 12\frac{5}{6}, 13\frac{3}{4}, 4\frac{3}{5}$.
3. Care din următoarele fracţii $\frac{4}{6}, \frac{2}{6}, \frac{3}{6}, \frac{6}{9}, \frac{22}{33}, \frac{4}{8}$ este egală cu fracţia $\frac{2}{3}$? De ce?
4. Scrieţi câte trei fracţii egale cu fracţia: a) $\frac{15}{35}$; b) $\frac{8}{28}$; c) $\frac{2}{3}$.
5. Ordonaţi crescător fracţiile:
   a) $1\frac{3}{4}, \frac{7}{4}, \frac{5}{6}, \frac{5}{8}, \frac{7}{3}, \frac{2}{3}$. ; b) $\frac{2}{3}, \frac{5}{5}, \frac{4}{5}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \frac{5}{6}$.
6. Care sunt vecinii numărului $\frac{3}{4}$? Alegeţi varianta corectă şi justificaţi.

a) $\frac{2}{4}$ şi $\frac{3}{5}$; b) $\frac{3}{5}$ şi 1; c) 0,74 şi 0,76; d) 0,749 şi 0,751; e) Nu are vecini.

7. Aflaţi: a) $\frac{2}{5}$ din 155; b) $\frac{3}{7}$ din 140; c) $\frac{5}{8}$ din 240.
8. Cât este un număr dacă:

   a) $\frac{4}{5}$ din el este 100; b) $\frac{3}{5}$ din el este 1200; c) $\frac{4}{3}$ din el este 96.

9. Calculaţi:
   a) $\frac{11}{25} + \frac{4}{15}$;
   b) $\frac{11}{25} - \frac{4}{15}$;
   c) $1\frac{3}{4} + \frac{1}{3}$;
   d) $\frac{7}{4} + \left(\frac{4}{7} + 1\right)$;
   e) $\frac{7}{4} - \left(1 - \frac{1}{3}\right)$;

f) $\frac{7}{4}-\left(1-\frac{3}{8}\right)$;

g) $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}$;

h) $1-\frac{1}{3}-\frac{1}{9}-\frac{1}{27}$;

i) suma numerelor:

$A=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2019}$ și $B=1+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\cdots+\frac{2018}{2019}$.

j) diferența numerelor:

$A=2+\frac{3}{2}+\frac{4}{3}+\cdots+\frac{2019}{2018}$ și $B=1+\frac{2}{4}+\frac{2}{6}+\cdots+\frac{2}{4036}$.

k) $\frac{15}{12}\cdot\frac{4}{5}$;

l) $\frac{12}{15}:\frac{4}{5}$;

m) $\frac{7}{4}-\left(1-\frac{1}{6}\right)$;

n) $\frac{11}{15}+\frac{4}{5}:\frac{2}{3}$;

o) $\frac{7}{8}+\frac{7}{8}:\frac{14}{8}+\frac{1}{2}\cdot 2$;

p) $\frac{11}{7}+\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{3}-\frac{3}{7}:3\frac{1}{3}$;

q) $\left(3+2\cdot\frac{1}{6}\right):3\frac{1}{3}\cdot 2$;

r) $\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot 1\frac{1}{2}\right)\right]$;

10. Arătaţi egalităţile:

a) $\frac{1}{1\cdot 2}=1-\frac{1}{2}$; b) $\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$; c) $\frac{1}{3\cdot 4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$.

11. Calculaţi sumele:

a) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}$; b) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{9\cdot 10}$;

c) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{2018\cdot 2019}$.

4.2. Fracții zecimale și operații cu ele

Definiție. Se numește fracție zecimală o fracție al cărei numitor este putere a lui 10 (10, 100, 1000 ș.a.m.d.).

O fracție zecimală se poate scrie:

- cu linie de fracție ca de exemplu: $\frac{237}{100}$;
- cu virgulă 2,37.

Definiție. Fracțiile zecimale cu numitorul 100 se mai numesc și **procente** și se notează astfel: $\frac{p}{100} = p\%$. Paragraful următor este alocat special pentru procente.

Definiție. La scrierea cu virgulă numărul din stânga virgulei se numește **partea întreagă** a numărului, iar cel din dreapta virgulei se numește **parte zecimală**.

Exemplu. Semnificația cifrelor numărului 5012,374.

partea întreagă					*,*	*partea zecimală*			
...	*cifra miilor*	*cifra sutelor*	*cifra zecilor*	*cifra unități lor*	*,*	*cifra zecimi lor*	*cifra sutimi lor*	*cifra miimi lor*	...
	5	0	1	2	,	3	7	4	

Pentru **a transforma o fracție ordinară în fracție zecimală** se efectuează împărțirea numărătorului la numitor.

Se pot obține:

- **Fracții zecimale simple** care au un număr finit de zecimale.

Exemplu. $\frac{237}{100}$= 2,37.

- **Fracții zecimale periodice simple**, la care partea zecimală are o infinitate de zecimale în care o cifră sau un grup de cifre se repetă.

Exemple. $\frac{1}{3}$= 0,33… = 0,(3); $\frac{45}{99}$= 0,4545… = 0,(45).

- **Fracții zecimale periodice mixte** la care partea zecimală are o infinitate de zecimale din care imediat după virgulă există un grup de cifre care nu se repetă, urmate de o cifră sau un grup de cifre se repetă

Exemplu. $\frac{5}{6}$= 0,8333… = 0,8(3).

Transformarea unei fracții zecimale în fracție ordinară se face după următoarele reguli:

- **La fracțiile zecimale simple** la numărător scrieți numărul fără virgulă, iar la numitor scrieți 1 urmat de atâtea zerouri câte cifre se găsesc după virgulă.

Exemplu. 2,134 = $\frac{2134}{1000}$.

- **La fracții zecimale periodice simple** la numărător scrieți numărul fără virgulă din care scădeți numărul aflat înaintea perioadei, iar la numitor scrieți atâția de 9 câte cifre aveți în perioadă

Exemplu. 2,(134)= $\frac{2134-2}{999} = \frac{2132}{999}$.

- **La fracțiile zecimale periodice mixte** la numărător scrieți numărul fără virgulă din care scădeți numărul aflat înaintea perioadei (scris fără virgulă), iar la numitor scrieți atâția de 9 câte cifre se găsesc în perioadă și atâția de zero câte cifre se găsesc între virgulă și perioadă:

Exemplu. 2,1(34) = $\frac{2134-21}{990} = \frac{2113}{990}$.

Operațiile cu fracții zecimale scrise cu virgule se efectuează în general doar pentru fracțiile zecimale simple astfel:

- **Adunarea și scăderea** se efectuează adunând/scăzând unitățile de același ordin.

Exemplu. 0,25 + 1,7 = 0,25 + 1,70 =1,95.

- La **înmulțire** se înmulțesc numerele scrise fără virgule, iar la rezultat se pune virgula astfel încât partea zecimală să aibă un număr de cifre egal cu suma numărului de zecimale al celor doi factori.

Exemplu. Pentru a calcula 0,25 · 1,7 se efectuează mai întâi 25 · 17 = 425 și apoi se pune virgula peste 3 cifre numărate de la dreapta la stânga.

Se obține că: 0,25 · 1,7 = 0,425.

- La **împărțire** dacă împărțitorul este cu virgulă mai întâi se înmulțesc cei doi factori cu puteri ale lui 10 astfel încât împărțitorul să devină număr natural. Apoi se efectuează împărțirea ca și o împărțire de numere naturale plasând virgula la rezultat atunci când se ajunge la ea.

Exemplu. Pentru a calcula 0,25 : 1,7 se înmulțesc ambele numere cu 10 pentru ca împărțitorul să devină număr natural și apoi se efectuează împărțirea.

Deci 0,25 : 1,7 = 2,5 : 17 = 0,147…

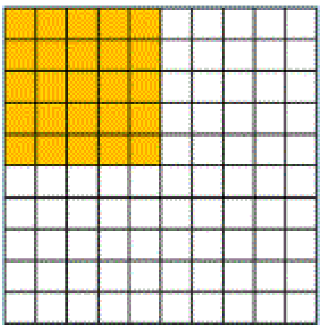
4.3. Procente

Definiție. Fracțiile zecimale cu numitorul 100 se mai numesc și **procente** și se notează astfel: $\frac{p}{100} = p\%$.

Exemple. $1\% = \frac{1}{100}$; $100\% = \frac{100}{100} = 1$.

Reprezentarea grafică a procentelor se face considerând un întreg divizat în 100 de părți egale, de exemplu un pătrat cu latura de 10 unități.

Exemplu. 25% este reprezentat de zona galbenă din figura de mai jos:



Transformările în și din procente se vor face astfel:

- **Transformarea procentelor p% în fracții ordinare se face scriind p%=** $\frac{p}{100}$.

Exemplu. 17% = $\frac{17}{100}$.

- **Transformarea unei fracții zecimale scrisă cu virgulă în procente** se face înmulțînd numărul cu 100 și se adaugă la dreapta semnul de %.

Exemplu. $0,375 = 0,375 \cdot 1 = 0,375 \cdot 100\% = 37,5\%$.

- **Transformarea unei fracții ordinare în procent** se face astfel:

◦ **Dacă numitorul este un divizor al lui 100** se amplifică fracția pentru a obține numitorul 100.

Exemplu. $^{5)}\frac{3}{20} = \frac{15}{100} = 15\%$.

sau

◦ **Se împarte numărătorul la numitor și se înmulțește rezultatul cu 100%.**

Exemplu. $\frac{3}{8} = 0,375 = 0,375 \cdot 100\% = 37,5\%$.

Procentele sunt folosite pentru a exprima cât de mare sau de mică este o cantitate în raport cu o altă cantitate.

Definiție. Pentru a calcula un *procent p* dintr-un număr *n* se scrie:

$$p\% \text{ din } n = \frac{p}{100} \cdot n = \frac{p \cdot n}{100}.$$

Exemple.

1. *Prețul unei ciocolate este 8 lei. Aflați prețul ciocolatei după o ieftinire cu 10%.*

Rezolvare. Ciocolata se ieftinește cu 10% din 8, adică $\frac{10}{100} \cdot 8 = \frac{80}{100} =$ 0,80 (lei). Noul preț este: 8 – 0,80 = 7, 20 (lei).

2. *Prețul unei ciocolate costă la un magazin 8 lei iar la un alt magazin costă 10 lei.*

a) *Cât la sută reprezintă prețul de la primul magazin față de cel de al doilea?*
b) *Cu cât la sută este mai mare prețul la cel de al doilea magazin față de primul?*

Rezolvare.

a) Rezolvarea se poate face în două moduri astfel:
- direct, făcând împărțirea 8:10 = 0,8 = 80%
- prin scrierea unei ecuații: p%·10 = 8, de unde avem: $\frac{p \cdot 10}{100} = 8$ => p = 80 => 80%.

b) Se face mai întâi diferența între cele două prețuri: 10 – 8 = 2 (lei) și apoi se calculează cât la sută reprezintă 2 din 8, adică 2 : 8 = 0,25 = 0,25 ·100% = 25%. Deci la al doilea magazin ciocolata este cu 25% mai scumpă față de primul magazin.

Probleme propuse.

1. Transformați fracţiile ordinare în fracții zecimale scrise cu virgulă: $\frac{5}{6}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \frac{3}{3}, \frac{5}{4}, \frac{9}{4}, \frac{13}{4}, \frac{3}{2}, \frac{7}{2}, \frac{4}{3}, \frac{8}{3}, \frac{4}{4}, \frac{2}{1}$.
2. Transformați fracțiile zecimale în fracții ordinare: 1,25; 2,237; 5,(3); 12,(6); 1,2(6); 1,2(63).
3. Scrieți fracțiile sub formă de procente: 0,25; 0,33; ¾, $\frac{3}{8}, \frac{3}{3}, \frac{5}{4}, \frac{9}{4}, \frac{4}{5}, \frac{3}{2}, \frac{4}{8}, \frac{1}{4}, \frac{3}{6}$.
4. Calculați:

   a) *12,75 + 1, 275 ;*

   b) *12,75 - 1, 275 ;*

   c) *5,8 − 2,9 + 0,37 ;*

   d) *41,3 + 15,9 − 20,7 ;*

   e) *12,75 · 3,2 ;*

   f) *12,75 · 0,1 ;*

   g) *12,75 · 0,01;*

   h) *3,25 · 100;*

   i) *12,75 : 5;*

j) $12,75 : 0,5$;

k) $12,75 : 0,05$;

l) $12,75 : 10$;

m) $12,75 : 100$;

n) $(0,2 + 0,8 \cdot 0,1) + 0,001$;

o) $(1,3 - 0,5 \cdot 0,1) \cdot 0,01$;

p) $(3,27 + 0,73) \cdot 0,31$;

q) $2,45 \cdot 1,2 - 0,7963$;

r) $10 \cdot [0,57 + (20,03 - 7,5) \cdot 10]$;

s) $[13,4 + 0,5 \cdot (147,8 - 1,25 \cdot 100)] \cdot 10 - 13,41$;

ƒ) $0,5 : 0,02 - (6 + 3 \cdot 0,5)$.

5. Calculați:
   a) 5% din 120;
   b) 125% din 75;
   c) Un număr știind că 75% din el este 90;
   d) Numărul cu 15% mai mare decât 18;
   e) Ce procent reprezintă 125 din 80.

6. Prețul unui televizor este de 1200 lei. Calculați prețul televizorului după:
   a) O mărire de preț de 10%.
   b) O micșorare de preț de 15%.
   c) O mărire de preț de 10% urmată de o micșorare de preț de 15%.

7. Un televizor costă la un magazin 1200 lei, iar la altul 1300 de lei.
   a) Cât la sută reprezintă prețul de la primul magazin față de cel de al doilea?
   b) Cu cât la sută este mai mare prețul la cel de al doilea magazin față de primul?

5. Ecuații, inecuații și sisteme de două ecuații liniare cu două necunoscute

5.1. Ecuații liniare de gradul I în Q

Definiție. Se numește **ecuație** o propoziție matematică cu o variabilă în care apare o singura dată semnul egal.

Definiție. Se numește **soluție** sau **rădăcină** a ecuației numărul care prin înlocuire fac propoziția să devină adevărată.

Definiție. O ecuație liniară de gradul I este o ecuație reductibilă la forma: $a\,x + b = c$, unde *a, b și c* sunt constante, iar x este necunoscuta ecuației.

Rezolvarea unei ecuații liniare de gradul I se face astfel:

- Dacă ecuația are paranteze se desfac mai întâi parantezele;
- Se separă necunoscuta, trecând termenii dintr-o parte în alta cu semn schimbat, apoi ecuația se împarte la coeficientul lui x.

Exemple.

a) $3x-5=10 \Leftrightarrow 3x = 10+5 \Leftrightarrow 3x= 15 \Leftrightarrow x= 5.$

b) $3(x+4)=15 \Leftrightarrow 3x + 12 = 15 \Leftrightarrow 3x = 15-12 \Leftrightarrow 3x = 3 \Leftrightarrow x=1.$

c) $7(8 - x) = 2(x + 2) \Leftrightarrow 56 - 7x = 2x + 4 \Leftrightarrow -7x - 2x = 4 - 56 \Leftrightarrow -9x = -52 \Leftrightarrow x=52/9.$

Probleme propuse. Rezolvați ecuațiile:

1. $7x + 4 = 5(x + 1) + x + 1.$
2. $5x + 3(x - 6) = 7x + 13.$
3. $5(1 - 2x) + 1 = 4(x + 3) + 8.$
4. $7(x + 2) - 3(x - 4) - x = 2(x + 5) + 46.$
5. $6 = 4(x + 1) - 2(x + 2).$
6. $x + 2x + 3x + \cdots + 50x = 3825.$

7. $\frac{1}{2}x - \frac{1}{3} = x - 1.$

8. $\frac{2x-1}{3} - \frac{x+2}{2} = \frac{1}{6}$.

9. $\frac{3x-2}{3} - \frac{2x+1}{2} = 5x - \frac{11}{6}.$

10. $1\frac{2}{5}(x+3) - 2\frac{1}{3} = \frac{4}{5}(x-1) - x.$

5.2. Inecuații liniare de gradul I în N

Definiție. Se numește inecuație o propoziție matematică cu o variabilă în care apare o singură dată unul din semnele: $<$, $>$, $\leq$ sau $\geq$.

Definiție. Se numesc **soluții** sau **rădăcini** ale ecuației numerele care prin înlocuire fac propoziția să fie adevărată.

Definiție. O inecuație de gradul I este o inecuație reductibilă la una din formele:

> $a\,x + b < c$, $a\,x + b > c$, $a\,x + b \leq c$ *sau* $a\,x + b \geq c$, unde a, b *și* c sunt constante, iar x este necunoscuta ecuației.

Rezolvarea unei inecuații liniare de gradul I se face astfel:

- Dacă inecuația are paranteze se desfac mai întâi parantezele;

- Se separă necunoscuta, trecând termenii dintr-o parte în alta cu semn schimbat, apoi ecuația se împarte la coeficientul lui x. Prin împărțire cu un număr negativ sensul inecuației se schimbă din $<$ în $>$ sau invers; respectiv din $\leq$ în $\geq$ sau invers;

- Se găsesc soluțiile inecuației în mulțimea N.

Exemple. Să se rezolve în mulțimea *N* inecuațiile:

a) $3x-5<10 \Leftrightarrow 3x < 10+5 \Leftrightarrow 3x < 15 \Leftrightarrow x< 5 \Leftrightarrow S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

b) $3(x+4) >15 \Leftrightarrow 3x + 12 > 15 \Leftrightarrow 3x > 15-12 \Leftrightarrow 3x > 3 \Leftrightarrow x>1 \Leftrightarrow S = \{2, 3, 4, ...\}$.

c) $7(8 - x) \geq 2(x + 2) \Leftrightarrow 56 - 7x \geq 2x + 4 \Leftrightarrow -7x - 2x \geq 4 - 56 \Leftrightarrow -9x \geq -52 /\cdot (-1) \Leftrightarrow x \leq 52/9 \Leftrightarrow S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

Probleme propuse. Rezolvaţi în mulţimea *N* inecuaţiile:

1. $5(x + 2) < 3x + 28.$
2. $5(x - 2) < 2x + 14.$
3. $10x - 37 \leq 3(x - 5).$
4. $5x - 2(3x - 7) < 3x - 8.$
5. $12 - 4[3 + 2(x + 1)] \geq 3(x - 17).$
6. $2x - \frac{x+1}{3} > 0.$
7. $\frac{5x-1}{2} \leq \frac{3(x+1)}{6}.$
8. $\frac{2x-3}{7} > 1 - \frac{x-1}{3}.$
9. $\frac{1-x}{5} - \frac{2-x}{2} \leq 0.$
10. $\frac{x-3}{-6} + \frac{3x-2}{3} \geq \frac{2x-1}{12} - 3.$
11. $\frac{8-x}{x} > 0.$
12. $\frac{21}{-x+7} > 0.$

5.3. Sisteme de două ecuații liniare cu două necunoscute

Definiție. Se numește **sistem de două ecuații liniare cu două necunoscute** un sistem de două ecuații reductibil la forma:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}, unde\ a, b, c, d, e, f \in R;\ \ x = ?, y = ?$$

Definiție. Se numește **soluție** a sistemului perechea de numere (x_0, y_0) care prin înlocuire fac propozițiile sistemului să devină adevărate.

Există două metode consacrate de rezolvare a acestor sisteme și anume:

Metoda reducerii la care se procedează astfel:

1. Se înmulțesc termenii unei ecuații cu un număr, iar termenii

celeilalte ecuații cu un alt număr (dacă e cazul) astfel încât prin adunarea sau scăderea egalităților să se anuleze termenii ce conțin una din necunoscute;

2. Se rezolvă ecuația cu o singură necunoscută obținută prin adunare/scădere;

3. Se introduce valoarea necunoscutei aflate într-una dintre ecuațiile sistemului și se rezolvă ecuația obținută. (sau se poate rezolva tot prin reducere pentru a afla a doua necunoscută.)

4. Perechea de numere obținută este soluția sistemului.

Observație. Este posibil ca în urma înmulțirii și adunării/scăderii celor două ecuații să se anuleze toți termenii ce conțin necunoscutele. În acest caz sistemul este fie incompatibil (mulțimea soluțiilor este ϕ), fie are o infinitate de soluții.

Metoda substituției la care se procedează astfel:

1. Se scoate o necunoscută din una din ecuații cu ajutorul celeilalte necunoscute;

2. Se introduce necunoscuta aflată în a doua ecuație;

3. Se află una dintre necunoscute;

4. Necunoscuta aflată se înlocuiește într-una din ecuațiile inițiale și se află a doua necunoscută.

Exemplu. Să se rezolve sistemul prin ambele metode:

$$\begin{cases} 3x + y = 13 \\ 2x - 3y = 5 \end{cases}, x = ?, y = ?$$

Metoda reducerii. Ca să reducem necunoscuta y înmulțim prima ecuație cu 3 și apoi adunăm ecuațiile membru cu membru:

$$\begin{cases} 3x + y = 13 / \cdot 3 \\ 2x - 3y = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9x + 3y = 39 \\ 2x - 3y = 5 \end{cases}$$

-------------------- (+)

$$11\,x = 44.$$

Obținem că: $x = 4$. Înlocuim valoarea obținută pentru x în prima ecuație și aflăm valoarea lui y:

$$3 \cdot 4 + y = 13;$$

$$y = 1.$$

Soluția sistemului este perechea: $(x,\ y) = (4,\ 1)$, deci mulțimea soluțiilor sistemului este: $S = \{(4,\ 1)\}$.

Metoda substituției. Scoatem necunoscuta y din prima ecuație cu ajutorul lui x astfel: $y = 13 - 3x$ și o înlocuim în a doua ecuație.

Obținem următoarea ecuație de gradul I:

$$2\,x - 3\,(\,13 - 3x) = 5.$$

Se rezolvă ecuația și se obține valoarea lui x:

$$2\,x - 39 + 9x = 5;$$

$$11\,x = 44;$$

$$x = 4.$$

Se înlocuiește în y valoarea obținută și se obține valoarea lui y :

$$y = 13 - 3 \cdot 4;$$

$$y = 1.$$

Soluția sistemului este perechea: $(x,\ y) = (4,\ 1)$, deci mulțimea soluțiilor sistemului este: $S = \{(4,\ 1)\}$.

Probleme propuse. Rezolvați următoarele sisteme de două ecuații cu două necunoscute prin metoda reducerii și prin metoda substituției:

1. $\begin{cases} x + 3y = 6 \\ -2x + 5y = -1 \end{cases}.$
2. $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ -2x + 5y = -17 \end{cases}.$
3. $\begin{cases} 2x - 1 = -5(2y - 1) \\ x + 2 = 0 \end{cases}.$

4. $\begin{cases} 3(2x-3)-2y=-1 \\ 5(x+2)-7y=6 \end{cases}$.

5. $\begin{cases} 2x-\frac{3y-2}{5}=3 \\ 3y+\frac{2x+3}{3}=-1\frac{1}{3} \end{cases}$.

5.4. Probleme care se rezolvă cu ajutorul mulțimilor, ecuațiilor sau sistemelor de două ecuații liniare cu două necunoscute

Multe probleme cu enunț din viața de zi cu zi permit o rezolvare algebrică. Rezolvarea acestor probleme se face prin transpunerea limbajului cotidian în limbaj matematic prin scrierea modelului matematic al problemei.

Algoritmul rezolvării algebrice a unei probleme este următorul:

1. Înțelegerea enunțului prin identificarea datelor cunoscute și necunoscute, a legăturilor dintre ele;

2. Se fixează necunoscutele- adică se notează prin litere una, mai multe sau toate necunoscutele problemei;

3. Se efectuează judecata problemei și se scrie modelul matematic al problemei: ecuația sau sistemul de ecuații;

4. Rezolvarea ecuației sau a sistemului de ecuații;

5. Transferul rezultatelor de la modelul matematic la problema inițială prin verificarea şi interpretarea rezultatului găsit în textul inițial.

Pentru scrierea modelului matematic trebuie cunoscute semnificațiile anumitor formulări ca de exemplu:

- Operația de adunare o recunoaștem din următoarele formulări: *cu atât mai mult*, *total, mărim cu..., suma dintre…etc.*
- Operația de adunare o recunoaștem din următoarele formulări: *cu atât mai puţin, micșorat cu…, diferența etc.*
- Operația de înmulțire o recunoaștem din următoarele formulări: *de ... ori mai mult*, *mărit de … ori, produsul dintre …, din, etc.*

- Operația de împărțire o recunoaștem din următoarele formulări: *de ... ori mai puțin, micșorat de ... ori, împărțind..., jumătate, o treime, sfert, zecime etc.*

Observații.

- Dacă numărul necunoscutelor este egal cu numărul de relații date între ele în problemă şi relațiile nu se contrazic, atunci avem o *problemă bine determinată și cu condiţii optimale.*

- Dacă numărul necunoscutelor este mai mic decât numărul de relații date între ele în problemă şi relațiile nu se contrazic, atunci avem o *problemă bine determinată*, *dar cu condiţie / condiţii superflue*.

- Dacă numărul necunoscutelor este mai mare decât numărul de relații date între ele în problemă şi relațiile nu se contrazic, atunci avem o *problemă nedeterminată cu mai multe soluții*.

- Dacă relațiile (informațiile) date în problemă se contrazic sau dacă soluția/soluțiile problemei nu corespund datelor acesteia atunci avem o *problemă imposibilă*. Nu contează dacă numărul necunoscutelor problemei este mai mic, egal sau mai mare decât numărul relațiilor.

Probleme rezolvate.

1. *Într-o livadă sunt meri şi peri. Ştiind că în total sunt 69 de pomi, iar numărul perilor este cu 13 mai mare decât al merilor, să se afle câţi meri şi câţi peri sunt în livadă?*

Rezolvare: Se observă în problemă sunt două necunoscute și tot atâtea relații între ele, ca urmare numărul de informații este necesar și suficient. Notăm cu m numărul de meri. Întrucât peri sunt cu 13 mai mulți decât meri, rezultă că numărul de peri este $m + 13$. Conform enunţului numărul total de pomi este 69, deci vom obține ecuația: $m + (m + 13) = 69$. Rezolvând ecuația obținem $m = 28$, de unde numărul de peri este $28 + 13 = 41$. Așadar problema este bine determinată și cu condiţii optimale.

Observație. Această problemă se poate rezolva și prin sistem de două ecuații cu două necunoscute, dar și aritmetic prin metoda grafică.

2. *Într-un bloc sunt 23 de apartamente cu două şi cu trei camere. Să se afle câte apartamente cu două camere şi câte cu trei camere sunt în acest bloc, dacă (în total) numărul camerelor este 64.*

Rezolvare: Notăm cu x numărul apartamentelor cu două camere şi cu y numărul apartamentelor cu trei camere. Atunci, conform enunţului, obținem următorul sistem de două ecuații cu două necunoscute :

$$\begin{cases} x + y = 23 \\ 2x + 3y = 64 \end{cases}$$

Vom rezolva sistemul prin metoda substituției. Din prima ecuație scoatem $y = 23 - x$ și o înlocuim în a doua ecuație. Se obține : $2x+3(23 - x)=64$. Rezolvând ecuația obținem că : $x = 5$, de unde $y = 18$. Deci vor fi 5 apartamente cu două camere și 18 apartamente cu 3 camere. Problema este bine determinată și cu condiţii optimale.

Observație. Această problemă se poate rezolva aritmetic prin metoda falsei ipoteze.

3. *Într-o livadă sunt 84 de meri și peri. Numărul merilor este cu 60 mai mic decât al perilor, iar peri sunt de 6 ori mai mulți decât meri. Câţi meri şi câţi peri sunt în livadă?*

Rezolvare: Se observă în problemă sunt două necunoscute și trei relații între ele, ca urmare se dau prea multe informații. Trebuie să aflăm dacă ele se contrazic sau nu. Știind că în total sunt 84 de pomi, iar meri cu 60 mai mulți decât peri, putem afla că sunt 12 meri și 72 peri. Aceste valori verifică și ultima informație aceea că peri sunt de 6 ori mai mulți decât meri. Ca urmare deși datele problemei sunt mai multe decât era necesar, problema este bine determinată dar cu condiții superflue.

Observații. Pentru a nu avea date superflue trebuie să renunțăm la una dintre cele trei condiții.

4. *Într-o livadă sunt 84 de meri, peri și pruni. Numărul merilor este cu 40 mai mic decât al perilor, iar pruni cu 25 mai mulți decât peri. Câţi meri, peri și pruni sunt în livadă?*

Rezolvare: Se observă în problemă sunt trei necunoscute și trei relații între ele, ca urmare se dă un număr de informații necesar și suficient pentru rezolvare. Notând cu m numărul merilor, avem că numărul perilor este $m + 40$, iar al prunilor $m + 65$. Scriind ecuația obținem că: $m + (m + 40) + (m + 65) = 85$, de unde obținem că $3m + 105 = 85$, ceea ce este imposibil. Ca urmare problema nu are soluție și este așadar imposibilă.

5. *Într-o livadă sunt 84 de meri, peri și pruni. Numărul merilor este cu 40 mai mic decât al perilor. Câţi meri, peri și pruni sunt în livadă?*

Rezolvare: Se observă în problemă sunt trei necunoscute și doar două relații între ele, ca urmare se dă un număr de informații insuficient pentru rezolvare. Trebuie să vedem dacă datele nu se contrazic. Vom nota cu m numărul merilor, iar cu p numărul prunilor. Avem că numărul perilor este $m + 40$. Se obține o ecuație cu două necunoscute și anume: $m + (m + 40) + p = 84$, de unde obținem că: $2m + p = 44$. Așadar avem o problemă nedeterminată cu mai multe soluții. Mulțimea soluțiilor problemei este alcătuită din tripletele de numere: $(m, m + 40, 44 – 2m)$, unde $m \in \{0, 1, ..., 22\}$.

Probleme propuse.

1. Suma a patru numere consecutive este 110. Aflaţi cel mai mic număr.

2. Cristina a cumpărat 8 kg de pere şi 3 kg de banane, plătind 34 de lei. Ştiind că un kg de banane costă de 3 ori mai mult decât un kg de pepeni, aflaţi cât costă un kg din fiecare fel de fructe.

3. Un elev a cumpărat 10 caiete cu linii şi pătrăţele plătind 76 de lei. El plăteşte 7 lei pentru un caiet cu pătrăţele şi 9 lei pentru unul cu linii. Câte caiete de fiecare fel a cumpărat?

4. O persoană are o sumă de bani. În prima zi cheltuie 1/3 din ea, a doua zi 1/4, iar a treia zi 2/5. Ştiind că după cele trei zile îi mai rămân 100 de lei, aflaţi ce sumă de bani a avut persoana la început.

5. Preţul unui telefon mobil a scăzut cu 10%, iar după o săptămână cu încă 10% ajungând la 81 de lei. Cât a costat telefonul la început? Cu ce procent s-a micşorat preţul final faţă de cel iniţial?

6. Un casier fiind întrebat cât a încasat într-o zi a răspuns: „dacă aş fi încasat încă un sfert din cât am încasat şi încă 500 de lei, atunci aş fi încasat 5500 de lei”. Cât a încasat casierul în acea zi?
7. Mama are 32 de ani, iar fiul 8 ani. Peste câţi ani mama va avea de trei ori vârsta fiului?
8. Dacă mărim cu 2 numărătorul şi numitorul unei fracţii obţinem fracţia $\frac{5}{7}$, iar dacă micşorăm numărătorul şi numitorul aceleiaşi fracţii cu 1, obţinem fracţia $\frac{1}{2}$. Aflaţi fracţia.
9. Pentru a confecţiona 3 bluze şi 2 rochii sunt necesari 12 m de pânză, iar pentru a confecţiona 5 bluze şi o rochie de acelaşi fel sunt necesari 13 m de pânză.
   a) Aflaţi câţi m de pânză se folosesc pentru o bluză şi câţi m pentru o rochie.
   b) Câte bluze şi câte rochii se pot confecţiona din 28 de m de pânză?
10. Un vas se umple cu apă până la $\frac{1}{6}$ din capacitatea sa şi cântăreşte 12 kg. Acelaşi vas umplut cu apă până la $\frac{1}{4}$ din capacitate cântăreşte 17 kg. Cât cântăreşte vasul gol?
11. Un jucător de tenis primeşte după fiecare meci câştigat 200 de lei, iar după fiecare meci pierdut plăteşte 150 de lei. După 18 meciuri jucate el are 100 de lei. Câte meciuri a pierdut şi câte a câştigat?
12. Pe un raft sunt cu 9 cărţi mai multe decât pe al doilea. Dacă se mută de pe primul raft pe al doilea 12 cărţi, atunci pe al doilea raft vor fi de două ori mai multe cărţi decât pe primul. Câte cărţi sunt pe fiecare raft?
13. Mai mulţi copii vor să cumpere un obiect. Dacă fiecare participă cu câte 25 de lei, atunci lipsesc 15 lei. Dacă fiecare participă cu câte 30 de lei atunci sunt în plus 5 lei. Aflaţi câţi copii sunt şi cât costă obiectul.
14. Un tată este cu 39 de ani mai în vârstă decât fiul său, iar peste 7 ani va avea de 4 ori vârsta fiului. Câţi ani are fiecare?

TEST DE AUTOEVALUARE – *Mulțimi de numere și aplicații*

1. Se dau mulţimile:
   $A = \{x/x \in N, x\ număr\ impar, x \leq 6\}, B = \{1,4,5,9\},$
   $C = \{x/x \in N, 4 < x \leq 10\}$
   a) Scrieţi mulţimile A şi C indicând elementele lor.
   b) Calculaţi: $A \cup B, A \cap C, A \setminus (B \cap C)$.
   c) Pentru mulţimile date verificaţi egalitatea:
   $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
2. Calculaţi: $1 + 2 \times [3 + 4 \times (2 + 303:3 - 204:2)]$.
3. Calculaţi: $\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{6}\right) : 3\ ½ \times 2$.
4. Rezolvaţi ecuaţia: $2(1 + 7x) - 5x = 20$.
5. Rezolvaţi în mulţimea N inecuaţia: $\frac{2x-3}{7} < 1 - \frac{x-1}{3}$.
6. Rezolvaţi sistemul: $\begin{cases} 2(2x-1) - 3y = 68 \\ 5x - 3(y+1) = 98 \end{cases}$
7. Rezolvaţi algebric problema: *Un tată este cu 28 de ani mai în vârstă decât fiul său, iar peste 7 ani va avea de 3 ori vârsta fiului. Câţi ani are fiecare?*

Timp de lucru: 50 min.

Barem de notare: 1. si 7. 2 pt. ; 2. – 6. câte 1 pt; 1 pt. oficiu.

Rezolvare:

1. a) A = {1, 3, 5}; C = {5, 6, 7, 8, 9, 10}
   b) $A \cup B = \{1,3,5,6,7,8,9,10\}; A \cap C = \{5\}; A \setminus (B \cap C) = A \setminus \{5,9\} = \{1,3\}$.
   c) $A \cap (B \cup C) = A \cap \{1,4,5,6,7,8,9,10\} = \{1,5\}; (A \cap B) \cup (A \cap C) = \{1,5\} \cup \{5\} = \{1,5\}$.
2. 15 ; 3. $\frac{11}{21}$; 4. 2; 5. S = {0, 1, 2}; 6. S = {(31, 18)}.
7. Se notează cu *t*, respectiv *f* vârsta actuală a tatălui, respectiv a fiului. Se obține următorul sistem de ecuații: $\begin{cases} t = f + 28 \\ t + 7 = 3\,(f + 7) \end{cases}$ de unde prin rezolvare se află că vârsta tatălui este 35 ani, iar a fiului 7 ani.

TEST RECAPITULATIV – *Mulțimi de numere și aplicații*

1. Se dau mulţimile:

$$A = \{x/x \in N, x\ număr\ par, x \leq 4\}, B = \{2, 3, 6, 8\},$$
$$C = \{x/x \in N, 1 < x \leq 8\}$$

   a) Scrieţi mulţimile A şi C indicând elementele lor.

   b) Calculaţi: $A \cup B, A \cap C, A \setminus (B \cap C)$.

   c) Pentru mulţimile date verificaţi egalitatea:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

2. Calculaţi: $2 + 2 \times [2 + 2 \times (212 - 212 : 2 - 177 : 3)]$.
3. Calculaţi: $\left(\frac{3}{6} + \frac{1}{8}\right) : 3\,¼ \times 2$.
4. Rezolvaţi ecuaţia: $3(1 - 2x) - 4x = 13$.
5. Rezolvaţi în mulţimea N inecuaţia:

$$\frac{2x+1}{5} < 3 - \frac{x+1}{3}\ .$$

6. Rezolvaţi sistemul: $\begin{cases} 3(2x - 3) - 5y = -36 \\ -14x - 5(y + 2) = 3 \end{cases}$.
7. Un tată este cu 36 de ani mai în vârstă decât fiul său, iar peste 6 ani va avea de 5 ori vârsta fiului. Câţi ani are fiecare?

Timp de lucru: 50 min.

Barem de notare: 1. si 7. 2 pt. ; 2. – 6. câte 1 pt; 1 pt. oficiu.

6. Mărimi și unități de măsură

Unităţile de măsură reprezintă un standard de măsurare a cantităţilor fizice. În fizică şi în metrologie, e necesară o definiţie clară şi univocă asupra aceleaşi cantităţi, pentru a garanta utilitatea şi reproductibilitatea rezultatelor experimentale, ca bază a metodei ştiinţifice. Sistemele de măsură ştiinţifice sunt o formalizare a conceptului de greutăţi şi măsuri, care s-au dezvoltat iniţial cu scopuri comerciale, în special pentru a crea o serie de instrumente cu care vânzătorii şi cumpărătorii să poată măsura în manieră univocă o cantitate de marfă tranzacţionată. Sistemul cel mai folosit în ziua de azi e Sistemul Internaţional, care are şapte unităţi de măsură de bază („fundamentale"), din care toate celelalte sunt derivate.

În 1960 Sistemul Internaţional (abreviat SI) a introdus şapte mărimi fundamentale din care toate celelalte mărimi sunt derivate. Aceste mărimi fundamentale sunt:

1. **Lungimea.** Unitatea de măsură standard pentru lungime este metru, având simbolul *m*, şi se defineşte ca distanţa parcursă de lumină în vid în 1/299 792 458 secunde. La Biroul Internaţional al Greutăţilor şi Mărimilor (BIGM) se păstrează o bară din platină şi iridium cu lungimea de un metru.

2. Masa. Unitatea de măsură standard pentru masă este kilogramul, cu simbolul *kg*, şi se defineşte de prototipul de platină şi iridium având un kilogram şi păstrat de BIGM;

3. Timpul. Unitatea de măsură standard pentru timp este secunda, cu simbolul *s*;

4. Intensitatea curentului electric. Unitatea de măsură standard pentru intensitatea curentului electric este amperul, cu simbolul *A*;

5. Intensitatea luminoasă. Unitatea de măsură standard pentru intensitatea luminoasă este candela, având simbolul *cd*;

6. Cantitatea de substanţă. Unitatea de măsură standard pentru cantitatea de substanţă este molul, simbolizat prin *mol*;

7. Temperatura termodinamică. Unitatea de măsură standard pentru temperatură este Kelvinul, simbolizat *K*.

Definirea tuturor acestor unităţi de măsură standard depăşeşte cadrul acestei lucrări, de aceea am prezentat doar modul de definire al primelor două. Pe lângă unităţile de măsură standard, există multiplii şi submultiplii ale acestora, precum şi unităţi de măsură nestandard cu care se operează în viaţa de zi cu zi.

Pe lângă mărimile fundamentale există şi mărimi derivate. Acestea sunt:

- **Aria.** Cele mai folosite unităţi de măsură pentru arie sunt: hectarul şi metrul pătrat.
- **Volumul.** Cele mai folosite unităţi de măsură pentru volum sunt: litrul şi metrul cub.
- **Temperatura.** Cele mai folosite unităţi de măsură pentru temperatură sunt: gradul Celsius şi gradul Fahreinheit.

În învăţământul preşcolar şi primar mărimile care se studiază la matematică sunt: lungimea, masa, volumul, timpul şi valoarea. În continuare vom prezenta unităţile de măsură pentru fiecare din ele.

Lungimea. Unitatea de măsură standard este metrul (m). Submultiplii acestuia sunt milimetrul (mm), centimetrul (cm), decimetrul (dm). Multiplii metrului sunt decametrul (dam), hectometrul (hm) şi kilometrul (km). Prefixele utilizate la denumirile submultiplilor şi a multiplilor au următoarele semnificaţii:

kilo (k) semnifică $10^3 = 1000$;

hecto (k) semnifică $10^2 = 100$;

deca (da) semnifică 10;

deci (k) semnifică $\frac{1}{10} = 0,1$;

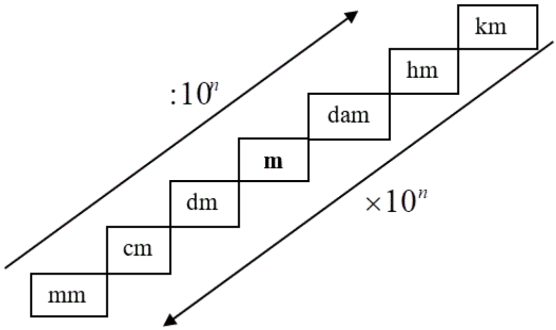
centi (c) semnifică $\frac{1}{10^2} = 0,01$;

mili (m) semnifică $\frac{1}{10^3} = 0,001$.

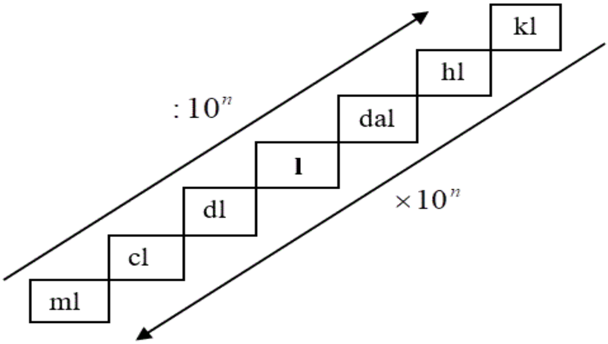
Reguli de transformare.

- pentru a transforma dintr-o unitate de măsură mai mare într-una mai mică se înmulţeşte valoarea cu 10 la numărul de trepte care se coboară;
- pentru a transforma dintr-o unitate de măsură mai mică într-una mai mare se împarte valoarea cu 10 la numărul de trepte care se urcă.

Ţinând cont de semnificaţia prefixelor, putem realiza schema de mai jos în care se arată modul de transformare dintr-o unitate de măsură într-alta prin împărţiri respectiv înmulţiri cu puteri ale lui 10.

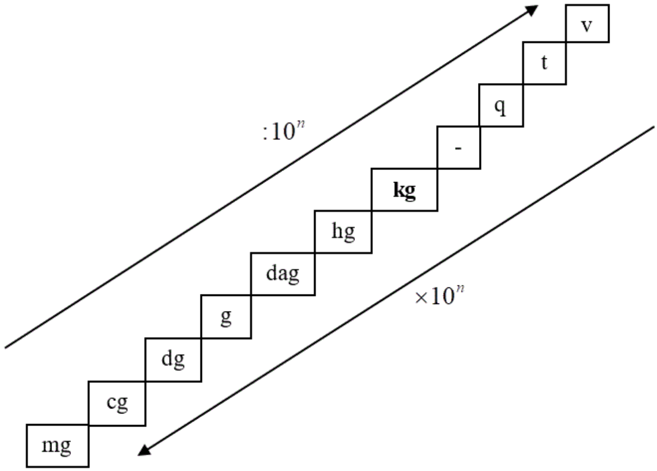


Volumul. Unitatea de măsură convențională este litrul (l). Pentru multiplii şi submultiplii litrului se utilizează aceleaşi prefixe ca la metru. Astfel submultiplii litrului sunt mililitrul (ml), centilitrul (cl), decilitrul (dl). Multiplii litrului sunt decalitrul (dal), hectolitrul (hl) şi kilolitrul (kl). Se obţine astfel o schemă asemănătoare celei de la lungime:



Deşi în clase primare nu se studiază, o altă unitate de măsură folosită pentru măsurarea volumelor este metrul cub (m^3) cu multiplii şi submultiplii acestuia. Avem egalitatea: $1l = 1dm^3$ care semnifică faptul că într-o cutie cubică cu latura de 1 dm intră exact un litru de lichid.

Masa. Unitatea de măsură standard este kilogramul (kg). Multiplii kilogramului sunt: chintalul (q) egal cu 100 kg, tona (t) egală cu 1000 kg şi vagonul (v) egal cu 10000 kg. Aşa după cum sugerează numele 1 kg reprezintă 1000 grame, el fiind aşadar un multiplu al gramului (g). Raportându-ne la gram acesta are ca multiplii decagramul (dag), hectogramul (hg) şi kilogramul (kg). Submultiplii gramului sunt decigramul (dg), centigramul (cg) şi miligramul (mg). Aşadar schema cu unităţile de măsură pentru masă este:



Timpul. Unitatea de măsură pentru timp este secunda (s). Multiplii acesteia sunt:

- **minutul (min)**: 1 min= 60 s
- **ora (h)**: 1 h= 60 min
- **ziua**: 1 zi = 24 h
- **săptămâna**: 1 săptămână= 7 zile (luni, marţi, miercuri, joi, vineri, sâmbătă, duminică)
- **luna**: 1 lună = 28, 29, 30 sau 31 zile depinzând de lună (ianuarie: 31 zile, februarie: 28 sau 29 zile în anii bisecţi, martie: 31 zile, aprilie: 30 zile, mai: 31 zile, iunie: 30 zile, iulie: 31 zile, august: 31 zile, septembrie: 30 zile, octombrie: 31 zile, noiembrie: 30 zile, decembrie: 31 zile)
- **anotimpurile**: 4 anotimpuri a câte 3 luni fiecare astfel:
    - primăvara este alcătuită din lunile: martie, aprilie, mai;
    - vara: iunie, iulie, august;
    - toamna: septembrie, octombrie, noiembrie;
    - iarna: decembrie, ianuarie, februarie

- **anul**: 1 an = 12 luni = 365 sau 366 zile (în anii bisecţi – adică anii ai căror număr se împarte la 4, de exemplu: 2004, 2008, 2012 etc.)
- **cincinalul**: 1 cincinal = 5 ani
- **deceniul**: 1 deceniu = 10 ani
- **secolul**: 1 secol = 100 ani (în prezent suntem în secolul XXI care ţine de la 1 ianuarie 2001 până la 31 decembrie 2100)
- **mileniul**: 1 mileniu = 1000 ani

Valoarea. Această unitate de măsură derivată se foloseşte la tranzacţiile de vânzare-cumpărare ale obiectelor. Valoarea unui obiect este dată în general de costurile pe care le implică procesul de producţie a acestuia şi se reflectă în preţul de vânzare-cumpărare. Preţul unui obiect poate uneori să nu reflecte preţul de producţie ci să intervină nişte factori care cresc sau scad preţul acestuia (ca de exemplu o licitaţie, obiectul a aparţinut unei personalităţi, vechimea obiectului, cererea pieţei faţă de acel obiect, numele firmei care a fabricat produsul etc.). Fiecare ţară îşi are propria unitate monetară, care în România este leul cu submultiplul său banul, 1 leu = 100 bani. Pentru valori sunt emise bancnote şi monede cu valori diverse. În prezent avem monede de: 50 bani, 10 bani, 5 bani şi 1 ban şi bancnote de: 1 leu, 5 lei, 10 lei, 50 lei, 100 lei, 200 lei, 500 lei.

Probleme propuse.

1. Efectuaţi transformările:

   a) *120 dam = … m = … km;*

   b) *25 km= …cm = … dam;*

   c) *2 t 5 kg = …kg;*

   d) *180 dl = … l = … hl;*

   e) *1500 ml = …l = … hl;*

   f) *3 zile 3 ore 3 min = … min;*

   g) *6 luni = … zile = … min = … s;*

   h) *2850 min = … h … min;*

i) *18700 s = ...h ... min ... s;*

j) *0,4 ore = ... min;*

k) *6,25 h = ... min.*

2. Calculaţi:

   a) *5200 cm + 12 dam = ... m;*

   b) *3 km 250 m – 1km 800 m = ... km ... m;*

   c) *3 km 250 m + 1 km 800 m = ... km ... m;*

   d) *340 kg + 1,2 t = ... kg;*

   e) *120 dl + 4 dal + 300 cl + 3000 ml = ... l;*

   f) *3000 s + 300 min= ... h ... min ... s;*

   g) *1 zi + 37 ore + 1150 min = ... zile ... ore ... min;*

   h) *45 min 55 s + 18 min 20 s = ... h ... min... s;*

   i) *3 h 24 min 35 s – 1 h 25 min 50 s = ... h ... min... s.*

3. Pe o hartă distanţa de 1 cm reprezintă 1000 m în realitate.

   a) Distanţa dintre două orașe pe hartă este de 7 cm. Câţi km sunt între cele două orașe în realitate?

   b) Distanța dintre două orașe este de 12 km. Câți cm sunt pe hartă între cele două orașe?

4. Un ceas digital afișează ora cu patru cifre de la 00:00 până la 23:59. De câte ori într-o zi ceasul afișează ora utilizând toate cifrele: 1, 0, 3, 8?

5. Ceasul digital arată 20:17. După cât timp vor apărea cel mai repede din nou aceste cifre?

6. Mama e născută în 5 aprilie 1970, iar fiica ei e născută în data de 7 iunie 2004. Ce diferență de vârstă este între mamă și fiică (în ani, luni și zile)?

7. Un spectacol durează 150 de minute. A început la ora 17:30, iar la mijlocul lui a fost întrerupt de două reclame, una de 18 minute și alta de 15 minute. La ce oră s-a terminat filmul?

7. Elemente de geometrie

7.1. Noțiuni de bază ale geometriei euclidiene

Geometria euclidiană este cea mai veche formalizare a geometriei, și în același timp cea mai familiară și mai folosită în viața de zi cu zi. Prima prezentare axiomatică a geometriei dată de Euclid (365- 300 î.Ch.) a servit ca model pentru cărţile de geometrie până la sfârşitul secolului al XIX-lea. Studiul axiomatic al geometriei constă în dezvoltarea geometriei pe baza unor noţiuni fundamentale şi axiome.

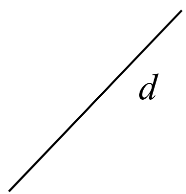
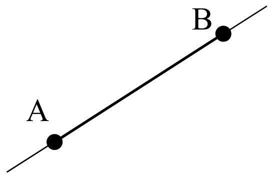
La baza studiului axiomatic al geometriei stau:

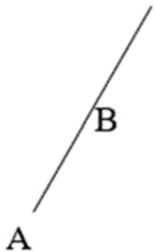
- **Noţiunile fundamentale** (sau primare) sunt acele noţiuni care nu se definesc ci doar se descriu. Ele sunt abstrase dintr-o realitate obiectivă. Există diverse posibilităţi de a alege noţiunile fundamentale, noi însă le vom considera pe următoarele: *punctul, dreapta, planul, distanţa (între două puncte), măsura unghiurilor.* Aceste noțiuni nu se definesc științific, ele se pot doar descrie sau defini într-un mod intuitiv (a se vedea tabelul de mai jos).

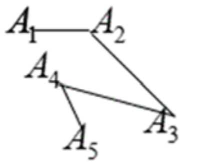
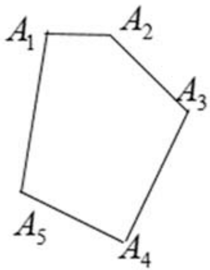
- **Axiomele** sunt adevăruri pe care le putem accepta ca evidenţe. Axiomele sunt în general grupate în categorii ca: axiome de incidenţă, axioma riglei, axioma de separare a planului, axiomele unghiului, axioma de congruenţă şi axioma paralelelor (care stă la baza geometriei euclidiene). O modificare a axiomei paralelor ne conduce spre geometriile neeuclidiene.

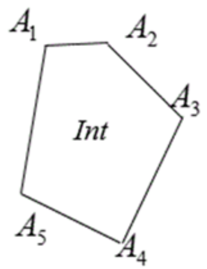
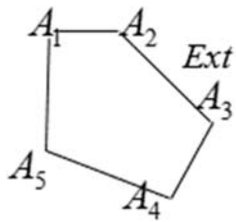
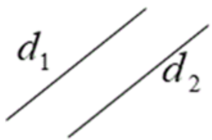
- **Definiţiile** constau în reconstituirea noţiunii astfel încât să fie precizate *conţinutul* (adică totalitatea proprietăţilor ei) şi *sfera* (adică totalitatea obiectelor reprezentate de acea noţiune).

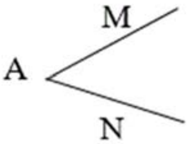
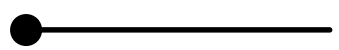
În tabelul de mai jos sunt prezentate cele mai importante **noțiuni geometrice** atât din punct de vedere intuitiv cât și din punct de vedere științific:

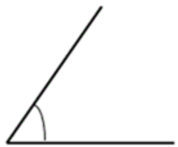
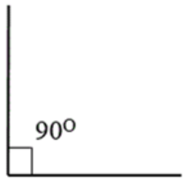
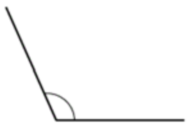
Noţiuni de geometrie	**Reprezentare geometrică**	**Definire intuitivă/ reprezentări din viața cotidiană**	**Aspecte ştiinţifice**
Punct	**A .**	Stropii de ploaie, urma lăsată de vârful ascuţit al unui creion pe hârtie, stelele de pe cer, un nod făcut pe o aţă perfect întinsă (după ce se discută conceptul de dreaptă).	Noţiune primară (nu se defineşte). Notaţii. Se folosesc literele mari de tipar: A, B, C, …
Dreaptă		Fir de cablu sau fir de aţă perfect întins şi nesfârşit, o şină de cale ferată, urma de fum lăsată pe cer de un avion cu reacţie.	Noţiune primară (nu se defineşte). Notaţii. - se folosesc literele mici de tipar; - dreapta determinată de două puncte A şi B o notăm cu *AB*.
Segment		- Porţiunea de cablu dintre doi stâlpi, bucata de aţă cuprinsă între două noduri ale acesteia, o coardă bine întinsă etc. - O porţiune dintr-o dreaptă limitată la ambele capete.	Definiţie. [AB]=(AB)= {M/ M este situat între punctele A şi B}.

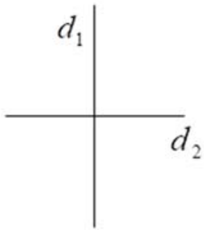
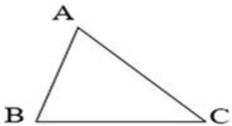
Distanţă dintre două puncte (lungimea unui segment)	Este un număr, nu se desenează	Se măsoară distanţa cu ajutorul instrumentelor pentru lungime: rigla gradată, metrul de croitorie etc.	Noţiune primară (nu se defineşte), admitem deci că oricare ar fi punctele A şi B există un unic număr notat cu AB sau d(A,B) care se numeşte distanţa dintre punctele A şi B. Definiție. Două segmente [AB] și [A’B’] se numesc congruente și se notează $[AB] \equiv [A'B']$ dacă au aceeași lungime.
Semidreaptă		- În cazul în care cablul bine întins se rupe pe un stâlp, bucata de cablu care a rămas în funcţiune sugerează o semidreaptă. Ea are un capăt (un punct de pornire) numit origine şi este nemărginită într-o singură direcţie; - O porţiune dintr-o dreaptă limitată la unul din capete şi nelimitată la celălalt capăt.	Definiţie. [AB= (AB = {M/ M şi B se găsesc pe dreaptă în aceeaşi parte faţă de punctul A}. Denumiri. A se numeşte originea semidreptei.
Linie frântă		- Drumul pe care îl parcurge un copil de acasă până la şcoală;	Definiţie. Se numeşte linie frântă o mulţime de forma: $[A_1A_2] \cup [A_2A_3] \cup \dots \cup [A_nA_{n+1}]$.

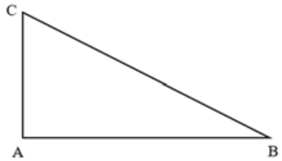
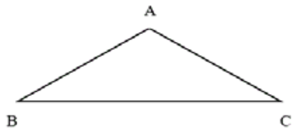
		- O linie alcătuită din mai multe segmente care „se continuă” unul pe celălalt.	
Poligon		- Traseul pe care îl parcurge un autobuz de la plecare până la sosire, cu condiţia ca traseul să nu se intersecteze; - O linie frântă închisă (care are ca punct de sosire punctul de plecare) şi care nu se autointersectează.	<u>Definiţie.</u> Se numeşte *poligon* o mulţime de forma $[A_1A_2] \cup [A_2A_3] \cup \dots \cup \left[A_{\,n}A_1\right]$ cu proprietatea că oricare două laturi nevecine nu au puncte comune şi două laturi vecine au un singur punct comun şi nu sunt în prelungire. <u>Notaţie.</u> $[A_1A_2 \dots A_n]$. <u>Denumiri.</u> Punctele $A_k$se numesc *vârfuri*, segmentele $[A_1A_2], \dots$ se numesc *laturile poligonului*. <u>Observaţie.</u> Poligonul are numărul de vârfuri egal cu numărul de laturi.
Interiorul unui poligon/ figuri geometrice		-Zona pe care poligonul/ figura geometrică o înconjoară; sau	<u>Definiţie.</u> Se numeşte *interior* al poligonului intersecţia semiplanelor deschise limitate de laturile poligonului şi care conţin toate celelalte laturi.

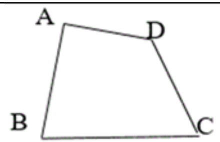
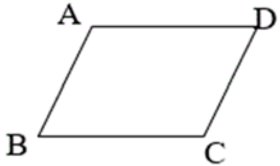
		-Zona care se găseşte în interiorul figurii.	<u>Observaţie.</u> De multe ori se face confuzie între poligon şi *suprafaţa poligonală* care este reuniunea dintre poligon şi interiorul acestuia. Suprafaţa poligonală se notează: $[A_1A_2 \dots A_n]$.
Exteriorul unui poligon / figuri geometrice		Zona rămasă în afara poligonului / figurii geometrice.	<u>Definiţie.</u> Se numeşte *exterior* al poligonului punctele planului care nu sunt nici pe poligon nici în interiorul acestuia.
Drepte paralele		- Şinele de cale ferată; - Două drepte pe care oricât le-am prelungi nu se întâlnesc.	<u>Definiţie.</u> Două drepte care nu au nici un punct comun se numesc *drepte paralele.* <u>Notaţie.</u> $d_1 \| d_2$.

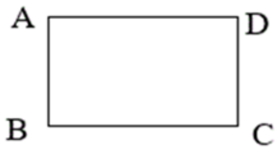
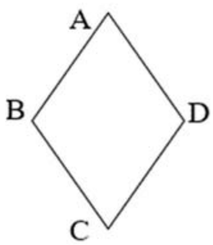
Unghi		- De pe un stâlp pornesc fire electrice spre două case alăturate. Figura formată de aceste fire se numeşte unghi. - Figura geometrică formată de acele unui ceasornic.  - Figura geometrică formată de două semidrepte cu aceeaşi origine.	<u>Definiţie.</u> Reuniunea a două semidrepte închise care au aceeaşi origine se numeşte *unghi*. <u>Notaţie:</u> $\sphericalangle A$ sau $\hat{A}$ sau $\sphericalangle MAN$. <u>Denumiri.</u> Semidreptele [AM şi [AN se numesc laturile unghiului. <u>Măsura unghiurilor.</u> Unitatea de măsură pentru unghiuri este *gradul* (^{O}). Submultiplii gradului sunt *minutul* și *secunda*. Un grad are 60 de minute iar un minut are 60 de secunde. <u>Proprietate.</u> Un unghi are măsura de la 0^{o} până 180^{o}. <u>Observaţie.</u> Două drepte care se intersectează formează 4 unghiuri două ascuţite congruente şi două obtuze congruente, sau patru unghiuri drepte.
Unghi nul		- Atunci când acele ceasornicului se suprapun se obține un unghi nul, de exemplu la ora 12:00.	<u>Definiţie</u>. Un unghi cu măsura de 0^{o}.

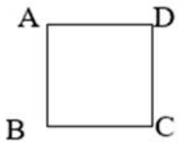
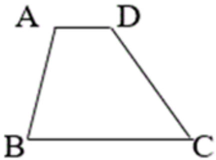
Unghi ascuțit			<u>Definiţie</u>. Un unghi cu măsura mai mică de 90º.
Unghi drept		- Două muchii ale clasei, muchiile tablei etc. - Unghiul format de acele ceasornicului care indică ora 9:00. - Dacă deschiderea unghiului este la fel de mare ca cea mai mare deschidere a echerului atunci spunem că unghiul este drept. Acest lucru se constată prin suprapunere.	<u>Definiţie</u>. Un unghi cu măsura de 90º.
Unghi obtuz			<u>Definiţie</u>. Un unghi cu măsura mai mare de 90º.

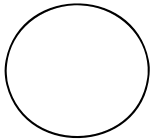
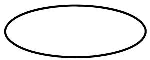
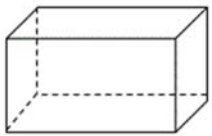
Unghi alungit		- Unghiul format de acele ceasornicului care indică ora 6:00.	<u>Definiţie</u>. Un unghi cu măsura de 180º.
Drepte perpendiculare		- Prin îndoirea unei foi de hârtie dreptunghiulare pe jumătate atât pe lungime cât şi pe lăţime se obţin două drepte care sunt perpendiculare.	<u>Definiţie.</u> Două drepte care formează un unghi drept (cu măsura de 90º) se numesc *drepte perpendiculare*. <u>Notaţie:</u> $d_1 \perp d_2$. <u>Proprietate:</u> două drepte perpendiculare formează patru unghiuri drepte. <u>Exprimare greşită:</u> Dreptele perpendiculare sunt dreptele care formează (patru) unghiuri drepte. <u>Observaţie.</u> Se explică elevilor că dacă unul din cele patru unghiuri pe care le formează două drepte este drept atunci şi celelalte trei unghiuri sunt drepte.
Triunghi	- Ascuțitunghic: 	- Forma unui acoperiş, imaginea stilizată a pânzelor unei bărci etc.	<u>Definiţie:</u> Poligonul cu trei vârfuri se numeşte *triunghi*. <u>Notaţie:</u> ΔABC. <u>Descrierea triunghiului:</u> Triunghiul are trei laturi şi trei vârfuri.

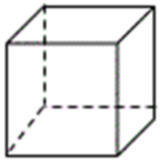
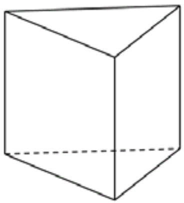
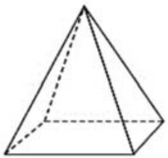
	- Dreptunghic:  - Obtuzunghic:  		<u>Exprimare greşită:</u> Poligonul cu trei laturi şi trei unghiuri se numeşte triunghi. <u>Proprietate.</u> Suma unghiurilor unui triunghi este 180°. <u>Clasificarea triunghiurilor după laturi:</u> -Triunghi oarecare sau scalen; -Triunghi isoscel: are două laturi congruente; -Triunghi echilateral: are toate laturile congruente și implicit toate unghiurile congruente egale cu 60°. <u>Clasificarea triunghiurilor după unghiuri:</u> - Triunghi ascuțitunghic: triunghiul cu toate unghiurile ascuțite; -Triunghi dreptunghic: triunghiul cu un unghi drept; -Triunghi obtuzunghic: triunghiul cu un unghi obtuz și implicit cu celelalte două unghiuri ascuțite.

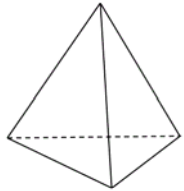
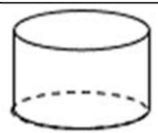
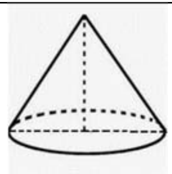
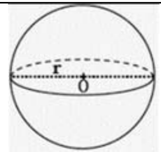
Patrulater		- exemple din mediul înconjurător: zmeu de hârtie, rama unei uşi etc.	Definiţie. Poligonul cu patru laturi se numeşte *patrulater*. Notaţie. ABCD.
Paralelogram		- exemple din mediul înconjurător; - dreptunghi înclinat.	Definiţie. Patrulaterul cu laturile opuse paralele două câte două se numeşte *paralelogram*. Descrierea paralelogramului. paralelogramul are laturile opuse paralele şi de lungimi egale. Exprimare greşită. Paralelogramul este patrulaterul cu laturile opuse paralele şi de lungimi egale. Proprietăţi: - laturile opuse sunt congruente două câte două; - unghiurile opuse sunt congruente, iar cele alăturate sunt suplementare (au suma 180º); - diagonalele se înjumătăţesc.
Dreptunghi		- Forma uşii, ramele de tablou etc.	Definiţie. Paralelogramul cu un unghi drept se numeşte *dreptunghi*.

			<u>Descrierea dreptunghiului</u>. Dreptunghiul are laturile opuse paralele două câte două şi toate unghiurile drepte. <u>Exprimare greşită.</u> Dreptunghiul este patrulaterul cu laturile opuse paralele două câte două şi toate unghiurile drepte. <u>Proprietăţi.</u> - toate unghiurile dreptunghiului sunt drepte; - diagonalele sunt congruente.
Romb		- Zmeu, forma de pe cărțile de joc, trei romburi pe sigla Mitsubishi.	<u>Definiţie.</u> Paralelogramul cu două laturi alăturate congruente se numeşte *romb*. <u>Descrierea rombului.</u> Rombul are toate laturile de lungimi egale. <u>Exprimare corectă.</u> Rombul este patrulaterul cu toate laturile de lungimi egale. (dacă noţiunea de paralelogram se introduce după cea de romb) <u>Proprietăţi.</u>

			- rombul are toate laturile congruente; - rombul are diagonalele perpendicu-lare.
Pătrat		- Fețele unui zar, căsuțele tablei de șah etc.	Definiţie: Se numeşte *pătrat* dreptunghiul cu două laturi alăturate congruente sau rombul cu un unghi drept. Descrierea pătratului. Pătratul are toate laturile de lungimi egale. Exprimare greşită. Pătratul este dreptunghiul cu toate laturile de lungimi egale.
Trapez		- Forma unui acoperiș, a feței unui cort etc.	Definiţie. Patrulaterul cu două laturi paralele şi două neparalele se numeşte *trapez*.
Perimetrul unui poligon	Este un număr	Lungimea obţinută prin înconjurarea poligonului.	Definiţie. Suma lungimilor laturilor unui poligon se numeşte *perimetrul poligonului*.

(Linie) curbă		- Curbe deschise: urma de fum lăsată pe cer de un avion în demonstraţii, panglică. - Curbe închise: sens giratoriu, lanţ.	Nu avem o definiţie riguroasă ci numai în cazuri particulare: cerc, elipsă, parabolă etc.
Cerc		- Un cerc pentru gimnastică, breloc pentru chei etc.	<u>Definiţie.</u> Mulţimea punctelor din plan aflate la aceeaşi distanţă r de un punct dat O se numeşte *cerc*. <u>Denumiri.</u> O se numeşte centru, r se numeşte rază.
Oval		- Forma unui avocado, a unui ou, a unui pepene roşu, a unei mingi de rugby etc.	Nu avem această denumire în matematică, ci doar aceea de elipsă.
Paralelipiped dreptunghic (cuboid)		- O cutie goală, forma unui bloc.	<u>Definiţie.</u> O prismă care are baza dreptunghi se numeşte *paralelipiped dreptunghic*. <u>Proprietate</u>. Toate feţele paralelipipedului dreptunghic sunt dreptunghiuri.

			Descriere. Paralelipipedul dreptunghic are 6 feţe în formă de dreptunghi, 8 vârfuri şi 12 muchii.
Cub		- Zar gol pe dinăuntru, cub de zahăr, cubul Rubik etc.	Definiţie. Paralelipipedul dreptunghic cu baza şi o faţă laterală pătrate se numeşte *cub*. Proprietate. Cubul are toate feţele pătrate.
Prisma	-triunghiulară 	- Forma unei cutii de ciocolată Toblerone etc.	Depăşeşte cadrul în care lucrăm.
Piramidă	- pătratică 	- Piramidele din Egipt.	Depăşeşte cadrul în care lucrăm.

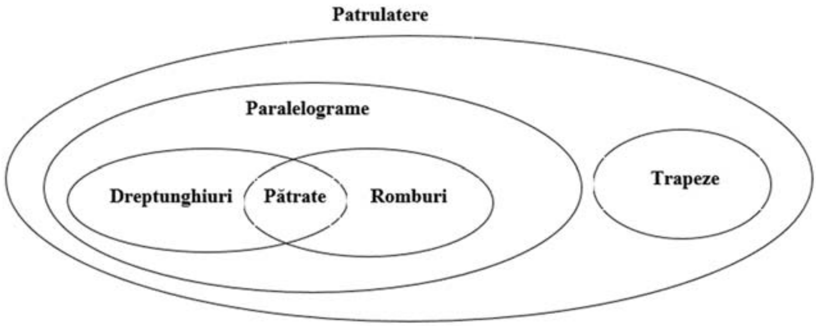
	- triunghiulară 		
Cilindru		- O cutie de conserve, forma unei căni, forma unei baterii, un mosor de ață etc.	Depăşeşte cadrul în care lucrăm.
Con		- Un coif, o pâlnie, un con de înghețată etc.	Depăşeşte cadrul în care lucrăm.
Sferă		- O minge, o bilă etc.	Mulţimea punctelor din spaţiu aflate la aceeaşi distanţă r de un punct dat O. Denumiri: O se numeşte centru iar r rază.

Pentru a defini o noţiune, în geometrie vom proceda în mai multe feluri astfel:

Definiţia prin gen proxim şi diferenţă specifică:

- **genul proxim** este o noţiune mai generală decât cea pe care o definim (şi nu există una intermediară între cele două), iar
- **diferenţa specifică** arată care este proprietatea caracteristică noţiunii de definit. Este foarte important atunci când utilizăm acest tip de definiţie să nu încercăm să definim prin supraabundenţă.

Exemple. Genul proxim şi diferenţa specifică în cazul patrulaterelor. În diagrama Venn-Euler de mai jos am reprezentat mulţimile de patrulatere:



Din această diagramă putem să identificăm genul proxim şi diferenţa specifică pentru fiecare din aceste patrulatere astfel:

Noţiunea	Genul proxim	Diferenţa specifică
Paralelogram	Patrulater	Laturile paralele două câte două
Dreptunghi	Paralelogram	Un unghi drept
	Paralelogram	Diagonalele congruente
Romb	Paralelogram	Două laturi alăturate congruente
Pătrat	Dreptunghi	Două laturi alăturate congruente
	Romb	Un unghi drept
Trapez	Patrulater	Două laturi paralele şi două neparalele

Ca urmare nu vom defini dreptunghiul ca fiind *paralelogramul cu toate unghiurile drepte* întrucât este suficient să considerăm că are un unghi drept, faptul că celelalte unghiuri sunt drepte deducându-se logic. De asemenea nu vom defini dreptunghiul nici ca *patrulaterul cu laturile paralele două câte două şi un unghi drept* pentru că între noţiunea de patrulater şi cea de dreptunghi se interpune noţiunea de paralelogram care este genul proxim.

Definiţia prin enumerare constă în enumerarea completă sau parţială a obiectelor din sfera noțiunii.

Exemple. Definiţia patrulaterului particular ”Prin paralelogram particular ne vom referi la: dreptunghi, pătrat sau romb”

Definiţia constructivă care arată modul de formare a obiectului la care se referă definiţia.

Exemple. definiţia cercului, a sferei etc.

Pe baza noţiunilor primare şi a axiomelor prin deducţii logice se obţin **leme, propoziţii, teoreme, consecinţe, corolare** sunt adevăruri care trebuie demonstrate. Matematicienii obişnuiesc să numească *leme* şi *propoziţii* acele rezultate „mai simple” care ajută la demonstrarea teoremelor, *consecinţe* acele rezultate care rezultă uşor dintr-o teoremă iar ca şi *corolare* acele rezultate care particularizează o teoremă. Pentru a putea demonstra o teoremă se identifică mai întâi ipoteza (ceea ce se dă) şi concluzia (ceea ce se cere) şi apoi prin inferenţe logice se face demonstraţia teoremei.

7.2. Selecție de teoreme ale geometriei euclidiene

Teoremă. Suma unghiurilor unui triunghi este 180°.

Definiție. Două triunghiuri se numesc congruente dacă au laturile și respectiv unghiurile congruente două câte două.

Cazuri de congruență ale triunghiurilor:

- **Latură-Unghi-Latură (LUL)**. Dacă două triunghiuri au două laturi și unghiul cuprins între ele respectiv congruente atunci triunghiurile sunt congruente.
- **Unghi-Latură-Unghi (ULU).** Dacă două triunghiuri au două

unghiuri și latura cuprinsă între ele respectiv congruente atunci triunghiurile sunt congruente.

- **Latură- Latură-Latură (LLL).** Dacă două triunghiuri au două laturi și unghiul cuprins între ele respectiv congruente atunci triunghiurile sunt congruente.

Consecințe.

- Un triunghi isoscel are cele două unghiuri alăturate bazei unghiuri congruente.
- Un triunghi echilateral are toate cele trei unghiuri congruente.

Definiție. Mediatoarea unui segment este dreapta perpendiculară pe mijlocul segmentului.

Teoremă. Cele trei mediatoare ale unui triunghi se intersectează într-un punct care este **centrul cercului circumscris** triunghiului.

Definiție. Bisectoarea unui unghi este semidreapta care împarte un unghi în două unghiuri congruente.

Teoremă. Cele trei bisectoare ale unui triunghi se intersectează într-un punct care este **centrul cercului înscris** triunghiului.

Definiție. Înălțimea unui triunghi este dreapta care trece printr-un vârf al triunghiului și este perpendiculară pe latura opusă.

Teoremă. Cele trei înălțimi ale unui triunghi se intersectează într-un punct care se numește **ortocentrul** triunghiului.

Definiție. Mediana unui triunghi este segmentul care unește un vârf al triunghiului cu mijlocul laturii opuse.

Teoremă. Cele trei mediane ale unui triunghi se intersectează într-un punct care se numește **centrul de greutate** al triunghiului și are proprietatea că se găsește la două treimi de vârf și o treime de bază.

Teoremă. Într-un triunghi dreptunghic mediana corespunzătoare ipotenuzei este egală cu jumătate din aceasta.

✎ **Activitate practică.** Reprezentați într-un desen punctele importante în triunghi. Se vor desena câte trei triunghiuri pentru fiecare punct și anume: un triunghi ascuțitunghic, unul dreptunghic și unul obtuzunghic.

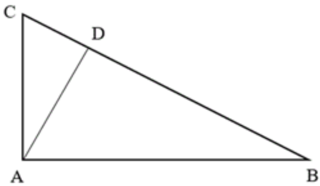
Aria triunghiului este semiprodusul dintre o latură a triunghiului și înălțimea corespunzătoare ei.

Aria dreptunghiului este produsul dintre lungimea și înălțimea dreptunghiului.

Aria pătratului este pătratul laturii.

Definiție. Într-un triunghi dreptunghic latura opusă unghiului drept se numește *ipotenuză* și este cea mai mare. Celelalte două laturi se numesc *catete*.

Exemplu. În triunghiul dreptunghic ABC (din figura de mai jos) cu unghiul drept ∢A, [AB] și [AC] sunt catete, iar [BC] este ipotenuza.



Într-un triunghi dreptunghic au loc **trei relații metrice** astfel:

Teorema catetei. Cateta unui triunghi dreptunghic este medie geometrică a proiecției catetei pe ipotenuză și ipotenuză.

Matematic scriem: $AB^2 = BD \cdot BC$.

Teorema înălțimii. Înălțimea unui triunghi dreptunghic este medie geometrică a proiecțiilor catetelor pe ipotenuză.

Matematic scriem: $AD^2 = BD \cdot DC$.

Teorema lui Pitagora. Într-un triunghi dreptunghic suma pătratelor catetelor este egală cu pătratul ipotenuzei.

Matematic scriem: $AB^2 + AC^2 = BC^2$.

Teorema 30-60-90. Într-un triunghi dreptunghic în care un unghi este de 30^o cateta opusă acestui unghi este jumătate din ipotenuză.

Teoremă. Înălțimea corespunzătoare ipotenuzei unui triunghi dreptunghic este egală cu produsul lungimilor catetelor împărțit la lungimea ipotenuzei. Matematic scriem: $AD = \frac{AB \cdot AC}{BC}$.

Probleme propuse.

1. Pe o dreaptă se consideră punctele A, B, C, D în această ordine, astfel încât AD = 15 cm, BC = 3 cm și AB = CD. Calculați lungimea segmentului AB.
2. Raportul măsurilor a două unghiuri complementare (adică având suma măsurilor egală cu 90^{o}) este 1/3. Aflați măsurile unghiurilor.
3. În Δ ABC, m(∢A) = 65^{o}, m(∢B) = 45^{o}. Calculați măsura unghiului ascuțit format de înălțimea dusă din A și bisectoarea ∢ C.
4. Fie Δ ABC, dreptunghic în A, AD⊥BC, D∈BC astfel încât BD = 3cm și CD = 12cm. Aflați lungimea segmentului [AD].
5. Fie Δ ABC, dreptunghic în A având lungimea ipotenuzei de 10 cm, iar m(∢B) = 30^{o}. Aflați lungimile catetelor, înălțimea și mediana corespunzătoare ipotenuzei.
6. În rombul ABCD se consideră AC ∩ BD = {O}. Dacă BD = 18cm și proiecția lui [OB] pe AB are lungimea de 5,4 cm, calculați perimetrul și aria rombului ABCD.
7. În exteriorul pătratul ABCD cu latura de 8 cm se consideră triunghiul echilateral DCE.
   a) Să se arate că segmentele [AE] și [BE] sunt congruente.
   b) Calculați lungimea distanței de la punctul E la latura [AB].
8. Un dreptunghi are dimensiunile AB = 12 cm, BC = 10 cm.
   a) Calculați aria dreptunghiului.
   b) Determinați perimetrul și aria triunghiului APD, unde P este mijlocul laturii [BC].
   c) Aflați cât la sută din aria dreptunghiului reprezintă aria triunghiului APD.
9. Suprafaţa unui dreptunghi *ABCD* cu *AB* =12 dm si *BC* = 8 dm se acoperă cu pătrate având latura de 4 dm.
   a) Calculaţi perimetrul dreptunghiului ABCD.
   b) Determinaţi numărul de pătrate necesare pentru a acoperi suprafaţa dreptunghiului.
   c) Calculaţi lungimea diagonalei *AC*.

(Definitivat învățători, 2013)

10. Se consideră cubul ABCDA'B'C'D' cu AB' = $3\sqrt{2}$ m.
   a) Calculaţi lungimea muchiei cubului.
   b) Calculaţi aria patrulaterului ACC'A'.
   c) Determinaţi distanţa de la punctul C la dreapta AC'.

(Definitivat învățători, 2014)

TEST DE AUTOEVALUARE – Mărimi, unități de măsură și elemente de geometrie

1. Stabiliţi valoarea de adevăr a următoarelor afirmaţii:
   a) Triunghiul este un poligon.
   b) Paralelogramul are laturile alăturate inegale.
   c) Diagonalele paralelogramului au lungimi egale.
   d) Dreptunghiul este un trapez.
   e) Diagonalele dreptunghiului au lungimi egale.

2. Completaţi afirmaţiile de mai jos:
   a) Triunghiul este un .... cu trei laturi.
   b) Patrulaterul are ... vârfuri.
   c) Paralelogramul are laturile opuse ...
   d) Dreptunghiul are diagonalele...
   e) Rombul are diagonalele ...

3. Efectuaţi: *1520 hg = ...kg =... g= ... t .*

4. Calculaţi: *500 cm + 120 dam = ... m.*

5. Cangurul Jumpi a observat că în fiecare iarnă se îngraşă cu 5 kg şi în fiecare vară slăbeşte cu 4 kg. Primăvara şi toamna nu-şi schimbă greutatea. În primăvara anului 2008 el cântăreşte 100 kg. Cât cântărea Jumpi în toamna anului 2004?
   a) 92 g ; b) 108 kg; c) 100 kg; d) 96 kg; e) 109 kg.
   (Concursul *Cangurul,* 2008)

6. Un triunghi dreptunghic are catetele de lungimi 12 cm și 5 cm. Să se afle lungimea ipotenuzei și a înălțimii corespunzătoare ipotenuzei.

Timp de lucru: 50 min.

Barem de notare: 1. și 2. – câte 1pt; 3.- 6.câte 1,50 pt., 1 pt. oficiu.

Rezolvare:

1. a) A; b) F; c) F; d) F; e) A.
2. a) poligon; b) 4; c) paralele și congruente; d) congruente; e) perpendiculare.
3. 1520 hg =152 kg = 152 000 000g= 0,152 t.
4. a)
5. 13 cm; 60/13 cm.

TEST RECAPITULATIV – Mărimi, unități de măsură și elemente de geometrie

1. Stabiliţi valoarea de adevăr a următoarelor afirmaţii:
   a) Triunghiul este un patrulater.
   b) Rombul are laturile alăturate congruente.
   c) Diagonalele paralelogramului se înjumătățesc.
   d) Dreptunghiul este un paralelogram.
   e) Pătratul este romb.
2. Completaţi afirmaţiile de mai jos:
   a) Paralelogramul este un .... cu patru laturi.
   b) Cubul are ... vârfuri.
   c) Trapezul are două laturi … și două laturi ...
   d) Cilindrul are două … în formă de …..
   e) Rombul are laturile ...
3. Efectuați: *169000 s = ... zile ... h ... min ... s.*
4. Calculaţi: *4 km 350 m – 2km 700 m = ... km ... m.*
5. Astăzi 12 martie 2012, rățuștele bunicului meu au împlinit 20 de zile. În ce dată au ieșit din ouă?
   a) Pe 26 februarie ; b) Pe 22 februarie; c) Pe 24 februarie;
   d) Pe 25 februarie; e) Pe 27 februarie.
   (Concursul Cangurul, 2012)
6. Un triunghi echilateral are laturile de lungimi 12 cm. Să se afle lungimea unei înălțimi și aria triunghiului.

Timp de lucru: 50 min.

Barem de notare: 1. și 2. – câte 1pt; 3.- 6.câte 1,50 pt., 1 pt. oficiu.

TEST FINAL

1. Se dau mulţimile: $M = \{1,2,3,4,5,9\}$; $N = \{4,5\}$; $P = \{5,6,7,8,9\}$
   a) Reprezentaţi prin diagramă Venn-Euler cele trei mulţimi.
   b) Calculaţi: $M \cap N; M \cup P$.
   c) Verificaţi egalitatea: $M\backslash(P \cap N) = (M\backslash P) \cup (M\backslash N)$.

2. Calculaţi: (2036 - 784) : 2 × 13 .

3. Calculaţi: $\frac{7}{8} + \frac{7}{8} : \frac{14}{8} + \frac{1}{2} \cdot 12$.

4. Rezolvaţi în N inecuaţia: $2(1 + 3x) - 3x < 17$.

5. Rezolvaţi sistemul: $\begin{cases} 5(2x - 3) + 2y = 19 \\ 4x - 7(y + 2) = 23 \end{cases}$

6. a) Unitatea standard pentru lungime este ....Multiplii şi submultiplii acesteia sunt:…….
   b) Efectuați transformările: *7050 cm = ... mm =... dam.*

7. a) Desenaţi un dreptunghi şi daţi definiţia acestuia.
   b) *Un dreptunghi cu perimetrul de 40 cm are lungimea cu 4 cm mai mare decât lăţimea.*
      - Aflaţi dimensiunile dreptunghiului;
      - Aflaţi aria dreptunghiului;
      - Aflaţi diagonala dreptunghiului.

8. La un magazin un televizor care costa 1250 lei se ieftinește cu 10%, ia după o lună se scumpește cu 5%. Cât va costa televizorul la final?

9. Rezolvaţi algebric problema: *Într-o bibliotecă sunt 560 de manuale de Matematică, Ştiinţe şi Limba engleză. Manualele de Limba engleză sunt cu 253 mai puţine decât cele de Matematică, iar cele de Ştiinţe sunt cu 22 mai multe decât cele de Limba engleză. Câte manuale sunt de fiecare fel?*

Timp de lucru: 60 min.

Barem de notare: Fiecare subiect se notează cu 1 pt. şi se acordă 1 pt. din oficiu**.**

Anexa 1. Mulţimi de numere - Recapitulare teoretică şi aplicaţii

1. Se consideră mulţimile $A = \{x \in Z \;/\; x = 3n + 1, n \in Z\}$ şi $B = \{1, 2, 3, 4, \dots, 23\}$.
   a) Precizaţi dacă numărul 101 aparţine mulţimii A. Justificați.
   b) Determinaţi elementele mulţimii $A \cap B$.
   c) Ştiind că $\{3a + 1, 3b + 1\} = \{-8, -5\}$ determinaţi suma numerelor întregi a şi b.

2. Adunarea - terminologie; Proprietățile adunării numerelor naturale; Distributivitatea înmulțirii față de adunare.

3. Calculați: $2018 + 2 \cdot 2018 + 3 \cdot 2018 + 4 \cdot 2018$.

4. Doime, treime, pătrime, zecime - definiție, scriere și reprezentări prin desen.

5. Calculați: $\left(3 + 2 \cdot \frac{1}{8}\right) : 3\frac{1}{4} \cdot 2$.

6. Rezolvați în Q ecuația: $\frac{2x-3}{3} + \frac{3x-2}{2} = \frac{4x+3}{4} - \frac{5}{12}$.

7. Rezolvați în N inecuația: $4\left(x + \frac{3}{8}\right) < x + 5\frac{1}{2}$.

8. Rezolvați sistemul: $\begin{cases} 2x + 1 = -y \\ x + y + 2 = -3x - y \end{cases}$.

9. Se dau numerele $x = 2a$ şi $y = 3a$, unde a este un număr natural.
   a) Comparaţi numerele x şi y.
   b) Determinaţi numărul natural a, ştiind că $x = 32$.
   c) Determinaţi numărul natural a, ştiind că $x \cdot y = 216$.

10. Să se afle trei numere naturale ştiind că primul este $\frac{3}{5}$ din al doilea, al doilea este $\frac{4}{5}$ din al treilea, iar produsul dintre primul şi ultimul este 6200.

11. Se consideră mulţimile $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ şi $B = \{3, 6, 9, 12, 15\}$.
    a) Reprezentaţi prin diagramă Venn-Euler cele două mulţimi.
    b) Determinaţi $A \cup B,\ A \cap B,\ A - B,\ B - A,\ A \cup (B \cap C)$.
    c) Calculaţi numărul elementelor divizibile cu 3 ale mulţimii A.

d) Determinaţi mulţimea $C = \{a, b\}$ ştiind că $A \cap C = \emptyset$ şi că suma elementelor mulţimii $A \cup C$ este egală cu suma elementelor mulţimii B.

12. Înmulțirea - terminologie; Proprietățile înmulțirii numerelor naturale.

13. Calculați: $99 \cdot 980 + 210 \cdot 98 - 110 \cdot 980$.

14. Procent - definiție; sutime, 25%, 50%, 75% - reprezentări prin desen.

15. Calculați: $\left(3\,\frac{1}{2} - 4 \cdot \frac{1}{6}\right) : 4\,\frac{1}{4} \cdot 2$.

16. Rezolvați în Q ecuația:

$$3(4x - 5) - 3(2x + 7) + 32 = 2(2x + 1) + 14\,.$$

17. Rezolvați în N inecuația: $12 - 4\left(x + \frac{3}{8}\right) \geq x + 5\,\frac{1}{2}$.

18. Rezolvați sistemul: $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 2(x + y) - 3x = 5 \end{cases}$

19. Se consideră numerele $a = \frac{8}{11}$, b = 7,3 și $c = \frac{5}{4}$.
    a) Calculați produsul numerelor a și c;
    b) Scrieți numerele a, b, c în ordine crescătoare;
    c) Determinați a 1888-a zecimală a numărului a, scriind explicit numărul a ca fracție zecimală.

20. Trei elevi au o sumă de bani. Primul are 2/3 din cât are al doilea, al doilea are 3/4 din cât are al treilea. Ei fac o excursie în care cheltuiesc 2187 lei, fiecare contribuind egal. Știind că primul copil a rămas cu jumătate din banii cu care a plecat, aflaţi câţi bani avea fiecare copil la început.

21. Se consideră mulţimile A = $\{x \in N \,/\, 1 \leq x < 28\}$ şi B = $\{y \in N \,/\, y \text{ este multiplu al lui } 7\}$.
    a) Scrieți elementele mulţimii $A \cap B$.
    b) Determinaţi numărul elementelor mai mici decât 47 ale mulţimii B - A , precizând totodată explicit elementele mulțimii A.

c) Determinaţi numărul elementelor mulţimii D, obţinută prin reuniunea mulţimii A cu mulţimea C care este formată din numerele impare cuprinse între 20 şi 34, precizând totodată explicit elementele mulțimii C.

22. Împărțirea - terminologie; Teorema împărții cu rest (proba împărțirii); Distributivitatea împărțirii față de adunare și scădere la dreapta.

23. Calculați:
$$9500 - \{250:5 + 15:3 \cdot [265 - (50:25 + 2) \cdot 65] \cdot 150\}.$$

24. a) Formula de aflare a unei fracții dintr-un întreg.
b) Aflați 25% din 120;
c) Aflați un număr știind că 75% din el este 273.

25. Calculați: $\left(4\frac{1}{8} - 5 \cdot \frac{1}{6}\right) : 7\frac{9}{10} \cdot 2.$

26. Rezolvați în Q ecuația: $\frac{3}{5}\left(x + \frac{11}{2}\right) = x + \frac{1}{2}.$

27. Rezolvați în N inecuația: $4\left(x + \frac{13}{8}\right) \geq 7x + 2\frac{1}{3}.$

28. Rezolvați sistemul: $\begin{cases} 2x - y = 5 \\ 2(x - y) + 3x = 11 \end{cases}$

29. Se consideră numerele $x = 1{,}235$, $y = 1{,}2(35)$ şi $z = 1{,}(235)$.
a) Comparaţi numerele x, y şi z.
b) Determinaţi a 50-a zecimală a numărului z.
c) Calculaţi suma primelor 50 de zecimale ale numărului z.

30. Se dă numărul 147.
a) Aproximați acest număr la ordinul sutelor;
b) Determinați toate numerele $\overline{ab}$ și $\overline{ac}$, cu a, b, c cifre distincte, care verifică relația: $\overline{ab} + \overline{ac} = 147$
c) Suma dintre un număr natural x, jumătatea lui și sfertul lui este egală cu 147. Aflați numărul x.

31. Se consideră mulțimile $A = \{x \in N / 19 \leq x \leq a\}$ și $A = \{y \in N /\ y\ număr\ par\}$.
a) Pentru a = 24 scrieți elementele mulțimii A;

b) Pentru a = 25 determinați numărul elementelor mulțimii $A \cap B$ precizând totodată elementele mulțimii A;
c) Dacă mulțimea A are 8 elemente, determinați elementele mulțimii$A \setminus B$ precizând totodată elementele mulțimii A.

32. Scăderea - terminologie; Probele scăderii; Distributivitatea înmulțirii față de scădere.

33. Calculați: $2 + 2 \cdot [15 + 3 \cdot (112 + 112 : 2 - 219 : 3)]$.

34. Fracție - definiție, terminologie și scriere; Fracție subunitară, echiunitară, supraunitară – definiții.

35. Calculați: $\left(7\,\frac{1}{2} + \ 5 \cdot \frac{1}{6}\right) : 3\,\frac{1}{3} \cdot 2$.

36. Rezolvați în Q ecuația: $\frac{3}{4}\left(x - \frac{7}{2}\right) = x - 3$.

37. Rezolvați în N inecuația: $14 - 3\left(x + \frac{5}{6}\right) > x + 1\,\frac{1}{3}$.

38. Rezolvați sistemul: $\begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = \frac{1}{6} \\ \frac{x}{5} + \frac{y}{2} = \frac{4}{5} \end{cases}$.

39. Pentru realizarea unor obiecte artizanale, la o şezătoare s-au utilizat mărgele din patru cutii, fiecare cu acelaşi număr de mărgele. Din prima cutie s-au consumat $\frac{1}{3}$, din a doua $\frac{7}{24}$, din a treia $\frac{7}{12}$, iar din a patra cutie $\frac{7}{8}$ din numărul de mărgele. La sfârşitul şezătorii, mărgelele rămase au fost aşezate completând, pe rând, fiecare cutie la numărul iniţial de mărgele.
a) Scrieţi numărul care nu este nici cel mai mic şi nici cel mai mare dintre următoarele numere: $\frac{7}{24}, \frac{7}{12}, \frac{7}{8}$.
b) Calculaţi de câte ori este mai mic numărul de mărgele utilizate din a doua cutie decât numărul celor utilizate din a patra cutie.
c) Explicaţi în câte cutii se pun mărgele rămase.

40. Într-o clasă sunt 25 de elevi. Aceştia participă la două activităţi: şah şi baschet. Ştiind că: 12 elevi participă la şah, 18 elevi participă la baschet, iar 3 elevi nu participă la nici o activitate, aflaţi câţi elevi participă atât la şah cât şi la baschet.

Anexa 2. Elemente de geometrie, mărimi și unități de măsură - Recapitulare teoretică și aplicații

1. a) Unitatea de măsură standard pentru lungime, multiplii și submultiplii acesteia – schemă.
   b) Efectuați: *4 km 350 m – 2700 m = ... km ... m.*
2. Pătrat - definiție, desen și proprietăți.
3. Piramidă triunghiulară, piramidă pătratică - doar desene.
4. Lungimea unei laturi a unui patrulater este $\frac{3}{11}$ din perimetrul său, iar lungimea altei laturi este $\frac{4}{11}$ din perimetru. Calculaţi perimetrul patrulaterului dacă suma lungimilor acestor două laturi este 28 cm.
5. În triunghiul echilateral ABC , AB = 6 cm şi punctul M este mijlocul segmentului BC .
   a) Arătaţi că AM = 3 $\sqrt{3}$ cm.
   b) Calculaţi aria triunghiului ABC .
   c) Determinaţi distanţa de la punctul M la dreapta AC.
6. a) Unitatea de măsură standard pentru masă, multiplii și submultiplii acesteia - schemă.
   b) Efectuați: *4 kg 32 g – 2300 g = ... kg ... g.*
7. Dreptunghi - definiție, desen și proprietăți.
8. Cub, Paralelipiped dreptunghic (numit și cuboid) - doar desene și formule pentru volume.
9. Aflaţi lungimile laturilor unui triunghi ştiind că dacă le adunăm două câte două se obţine pe rând: 17 m, 18 m şi 25 m.
10. Punctul O este intersecţia diagonalelor pătratului MNPQ şi MO =4 $\sqrt{2}$ cm . Punctul R este piciorul perpendicularei din punctul O pe latura NP.
    a) Arătaţi că MN =8 cm.
    b) Calculaţi perimetrul patrulaterului MNRO .
    c) Demonstraţi că RO este mediatoarea segmentului QM.

11. a) Unitatea de măsură standard pentru volum, multiplii și submultiplii acesteia - schemă.
    b) Efectuați 12 *l* = … *dl;* 12 *l* 50 *ml* + 3 *l* 980 *ml* = … *l* ... *ml.*

12. Paralelogram - definiție, desen și proprietăți.

13. Prismă triunghiulară și pătratică - doar desene.

14. Rezolvați problema explicând raționamentul: Unele luni au câte 5 zile de „luni”. Aceste luni nu pot avea:
    a) 5 zile de „sâmbătă” ; b) 5 zile de „duminică”;
    c) 5 zile de „marţi”; d) 5 zile de „miercuri”; e) 5 zile de „joi”.

15. Se consideră pătratul ABCD cu AB = 4 cm. Pe laturile AB și BC se consideră punctele E și respectiv F, astfel încât AE = BF.
    a) Realizați desenul la scară și calculaţi lungimea diagonalei pătratului ABCD .
    b) Arătați că DE = AF.
    c) Demonstrați că dreptele AF și DE sunt perpendiculare.

16. a) Unitatea de măsură standard pentru timp și multiplii acesteia.
    b) Efectuați *3h 50min 58s + 4h 47min 22s = ... h ... min... s.*

17. Punct, dreaptă, segment, semidreaptă, line frântă - definiții și desene.

18. Cilindru, con, sferă - doar desene.

19. a) O cutie de pizza cântărește 352 de grame. Cutia goală cântărește 48 de grame. Cât cântărește pizza din cutie? Știind că pizza e împărţită în 8 felii cât cântărește fiecare felie?
    b) Pentru pregătirea unei pizza sunt necesare 5 minute, iar pentru coacerea ei este nevoie de 10 minute. Vlad face comanda la ora 14:15. La ce oră va primi Vlad pizza?

20. Într-un spațiu de joacă în forma unui dreptunghi ABCD cu lungimea de 6 m iar lățimea de de 4 m se pun dale.
    a) Realizați desenul la scară
    b) Aflați diagonala dreptunghiului.
    c) Câți m^2 are spațiul de joacă?
    d) Câte dale se pun știind că ele sunt în formă de pătrat cu latura de 25 cm?

21. a) Unitatea de măsură standard pentru masă, multiplii și submultiplii acesteia - schemă.
    b) Efectuați: *3 t 40 q 35 kg - 1850 kg = ...t ... kg*.

22. Trapez - definiție, desen, tipuri de trapeze.

23. Triunghi - definiție și desen, clasificarea triunghiurilor după unghiuri și după laturi- desene.

24. Pentru o excursie a unei clase cu 28 de copii s-a cumpărat apă astfel: 80 de sticluţe de 250 ml, 60 de sticluţe de 350 ml și 28 de sticle de 500 ml. Câţi litri de apă s-au cumpărat? La finalul excursiei au mai rămas 10 sticluţe de 250 ml, 30 sticluţe de 350 de ml și nicio sticlă de 500 ml. Câtă apă au băut în total copiii și câtă apă a băut în medie un copil?

25. În triunghiul ABC dreptunghic în A, AB = 6 cm şi BC = 9 cm. Pe latura AB se consideră punctul D, astfel încât m ($\sphericalangle$ ACD) = 30°, şi se construieşte DE , bisectoarea $\sphericalangle$BDC, cu E∈(BC).
    a) Calculaţi perimetrul triunghiului ABC.
    b) Calculaţi lungimea segmentului CD.
    c) Demonstrați că m($\sphericalangle$ ACD) = $\frac{m(\sphericalangle BDE)}{2}$.

26. a) Unitatea de măsură standard pentru lungime, multiplii și submultiplii acesteia - schemă.
    b) Efectuați: *4 km 3 hm 50 m – 2805 m = ... km ... hm…m.*

27. Romb - definiție, desen și proprietăți.

28. Relații metrice în triunghiul dreptunghic.

29. Mama cumpără de la un magazin 2 kg de mere, 500 g de griș, un sfert de kg de cafea și 6 pachete de biscuiţi. Știind că plasa plină cântărește 373 dag, iar plasa goală 80 g, aflaţi câte g cântarește un pachet de biscuiţi.

30. Fie ABCD un pătrat cu latura de 4 m și un punct M pe segmentul (DC) astfel încât DM = 1 cm.
    a) Realizați desenul la scară;
    b) Calculați perimetrul triunghiului ABM.
    c) Determinați distanța de la punctul A la dreapta MB.

31. a) Unitatea de măsură standard pentru timp și multiplii acesteia.

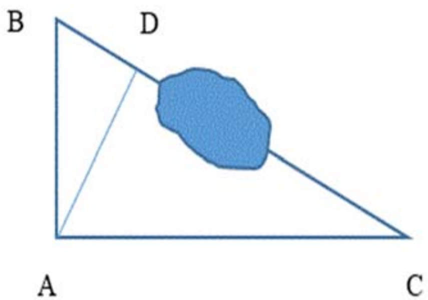
b) Efectuați *168200 sec. = ... zile ... ore ... min ... sec.*

32. Perimetrul unui poligon - definiție; Perimetrul triunghiului, dreptunghiului, pătratului - formule.

33. Unghi; unghi ascuțit, drept și obtuz - definiție și desen.

34. Un tren parcurge în jumătate de oră 25 km, iar un vapor în 1/4 de oră parcurge 5 km. În cât timp vaporul va parcurge distanța pe care trenul o face în 6 ore?

35. Un topograf vrea să determine distanță dintre doi pomi B și C situați de o parte și de alta a unui iaz ca în desenul alăturat. Topograful determină AB = 300 m, m (∢CAD) = 60º, m(∢BAC) = 90º, unde D este proiecția lui A pe BC.



a) Arătați că m (∢ABD) = 60º.
b) Calculați lungimea segmentului AD.
c) Determinați distanța dintre pomii B și C.

Bibliografie

1. Arsinte, V., (1996), *Matematică-clasele III, IV, V, (Teme de casă)*, Editura Gil, Zalău.
2. Asaftei, P. (coord), Romilă, A., Chirilă, C., (2004), *Ghid de pregătire pentru examenul de definitivat la matematică învăţători/institutori*, Ed. Caba.
3. Bălăucă, A., Negrescu, A., Gându, G., Chirilă, C., Pârlog, L., Gloambeș, L., (2008), *Matematică. Teme pentru activităţi opţionale*, ediţia a II-a, Editura Taida, Iași.
4. Brânzei, D., Onofraș, E., Anița, S., Isvoranu, G., (1985), *Bazele raționamentului geometric*, Editura Academiei, București.
5. Cârjan, F., (1999), *Matematică pentru examenele de definitivat şi gradul II, învăţători şi institutori*, Editura Paralela 45, Piteşti.
6. Cârjan F., Săvulescu D., (1999), *Curs de matematică-pentru colegiile de institutori*, Editura Fundaţiei Humanitas, Bucureşti.
7. Dăncilă, E., Dăncilă, I., (2008), *Matematică pentru învingători, clasele III-IV*, Editura Erc Press, București.
8. Dăncilă, E., Dăncilă, I., (2008), *Matematică pentru învingători, clasele V-VI*, Editura Erc Press, București.
9. Dumitru, A., (coord.), (2013), *Concursul „Fii InteligenT la matematică": clasa a III-a*, Editura Nomina, Pitești.
10. Enescu, B., Ghioca, A., Oprea, A., Șerbănescu, D. (coord.), (2002), *Capacitate 2002*, Editura Gil, Zalău.
11. *International* Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA), (2013), *Grade 4 Released Mathematics Items TIMSS 2011,* on line la: *https://nces.ed.gov/timss/pdf/TIMSS2011_G4_Math.pdf*
12. English, R., (2012), *Teaching Arithmetic in Primary Schools: Audit and Test. Learning Matters*. Sage Publications.
13. Jorgensen, R.; Dole, S,. (2011), *Teaching Mathematics in Primary Schools*, Allen & Unwin.

14. Magdaş, I., (2014), *Didactica matematicii pentru învăţământul primar şi preşcolar- actualitate şi perspective*, ediţia a II-a revizuită, Editura Presa Universitară Clujeană, Cluj-Napoca.

15. Magdaş, I., (2017), *Probleme de matematică pentru pregătirea didactică în învățământul primar. Ghid pentru studenți,* Presa Universitară Clujeană, Cluj-Napoca, disponibilă online la adresa: http://www.editura.ubbcluj.ro/bd/ebooks/pdf/2206.pdf

16. Magdaş, I., (2013), *Greşeli tipice în predarea-învăţarea elementelor de geometrie în învăţământul preşcolar şi primar*, Volumul: Probleme actuale ale Didacticii Ştiinţelor Reale, Conferinţa ştiinţifico-didactică naţională cu participare internaţională consacrată aniversării a 80-a de la naşterea profesorului universitar Andrei Hariton, Chişinău, 4-6 oct. 2013, p. 53-61.

17. Magdaş, I., (2010), *Respectarea caracterului ştiinţific al matematicii în învăţamântul primar şi preşcolar*, Volumul: Tradiţii, valori şi perspective în ştiinţele educaţiei, Editura. Casa Cărţii de Ştiinţă, Cluj-Napoca, pp. 301-305.

18. Manolescu, M., (2004), *Curriculum pentru învăţământul primar şi preşcolar, Teorie şi practică*, Univ. Bucureşti, Ed. Credis.

19. *MEN,* Centrul Naţional de Evaluare și Examinare, Subiecte pentru *Evaluarea naţională la finalul claselor a II-a și a IV-a, Matematică.*

20. *MEN,* Centrul Naţional de Evaluare și Examinare, *Subiecte date la Examenul național de definitivare (învățământ primar)*.

21. *MEN,* (2000), *Programa de matematică pentru examenul de definitivare în învățământ pentru institutori/învățători.*

22. *MEN,* (2013), *Programa școlară pentru disciplina Matematică și Explorarea Mediului*, clasa pregătitoare, clasa I și clasa a II-a, București.

23. *MEN,* (2014), *Programa școlară pentru disciplina Matematică,* clasele a III-a - a IV-a, București.

24. *MEN,* (2016), *Programa școlară pentru disciplina Matematică,* clasele a V-a - a VIII-a, București.
25. Miron, R., Brânzei, D., (1983), *Fundamentele aritmeticii și geometriei*, Editura Academiei, București.
26. Mogoș, M., (2014), *Matematică, clasa a IV-a: competenţe și performanţă*, Ed. Paralela 45, Pitești.
27. Pârâială, V., Pârâială, D., Pârâială, C.-G., (2005 / 2009), *Matematică; Culegere-auxiliar al manualelor. Teste de evaluare pentru conţinut obligatoriu, clasa a III-a/ a IV-a*, Editura Euristica, Iași.
28. Roşu, M., (2006), *Matematică I, II, III*, Proiectul pentru învăţământul rural, Ministerul Educaţiei și Cercetării.
29. Stoica, A., (coord), (2001), *Evaluarea curentă şi examenele. Ghid pentru profesori*, Editura ProGnosis, Bucureşti.
30. Vălcan, D., (2005), *Metodologia rezolvării problemelor de aritmetică*, Editura Casa cărţii de ştiinţă, Cluj-Napoca, 2005.
31. Zanoschi, A., Ilie, G. (coord.), (2016), *Probleme de aritmetică pentru performanţă: metode de rezolvare, teste și subiecte de concurs, clasele III-IV*, ediţia a V-a, Editura Paralela 45, Pitești.
32. *** Concursul internaţional de matematică aplicată *Cangurul.*
33. *** Concursul de matematică *Evaluarea în educaţie.*
34. *** Concursul de matematică *Lumina Math.*

ISBN: 978-606-37-0556-4