SZILÁGYI ZSOLT

MATEMATIKAI ANALÍZIS

FELADATGYŰJTEMÉNY

PRESA UNIVERSITARĂ CLUJEANĂ

Szilágyi Zsolt

•

Matematikai analízis feladatgyűjtemény

Szilágyi Zsolt

Matematikai analízis feladatgyűjtemény

PRESA UNIVERSITARĂ CLUJEANĂ
2023

Referenți științifici:

Conf. univ. dr. László Tamás

Asist. univ. dr. Lukács Andor

ISBN 978-606-37-1836-6

Universitatea Babeş-Bolyai
Presa Universitară Clujeană
Director: Codruța Săcelean
Str. Hasdeu nr. 51
400371 Cluj-Napoca, România
Tel./fax: (+40)-264-597.401
E-mail: editura@editura.ubbcluj.ro
http://www.editura.ubbcluj.ro/

Tartalomjegyzék

Előszó

A feladatgyűjtemény a Babeş-Bolyai Tudományegyetem Magyar Matematika és Informatika Intézet informatikus hallgatóinak tanított *Matematikai analízis* tárgyához készült segédanyag. A tananyag nagysága miatt szemináriumokon sokszor témánként csak pár feladat megoldására jut idő. A könyv célja, hogy további megoldott feladatokkal szolgáljon az anyag elmélyítéséhez és a vizsgákra készüléshez.

Minden témához tartozik egy rövid elméleti áttekintő rész, amely tömören összefoglalja az értelmezéseket és a feladatok megoldásában használt főbb tulajdonságokat, tételeket. Az elméleti részek Finta Zoltán *Matematikai Analízis* [5] könyvéből lettek összeválogatva. Mivel ezen könyvnek nem célja az elméleti részek alapos bemutatása, ezért az olvasó számára ajánljuk az előbb említett könyvből a megfelelő elméleti részek és példák átolvasását.

Adott téma rövid elméleti áttekintője után következnek a feladatok, melyek jórészt Stan Chiriţă *Probleme de Matematici Superiorare* [3] példatárából lettek összegyűjtve. A feladatok után következnek a megoldások. Törekedtem a minél részletesebb megoldásokra, hogy könnyebben követhetők legyenek. Egy feladat általában több módszerrel is megoldható, ezért lehetőleg több megoldást adtam rájuk.

A feladatok összeválogatásában és az elméleti áttekintők összeállításban támaszkodtam Lukács Andor munkásságára, aki korábban tanította a *Matematikai analízis* tárgyhoz tartozó szemináriumot.

Kolozsvár, 2023 június. A szerző.

1. fejezet

Sorozatok határértéke

1.1. Elméleti összefoglaló

Jelölje $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ a természetes számok és $\mathbb{R}$ a valós számok halmazát. Használjuk az $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1, 2, 3, \dots\}$ jelölést. Egy $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ függvényt *valós számsorozatnak* nevezünk. Az $a_n = f(n)$ tagot a sorozat n-dik tagjának vagy általános tagjának nevezzük. A sorozatra az $(a_n)_{n\geq 1}$ vagy (a_n) jelölést használjuk. Például, $(2^n)_{n\geq 1}$ a 2 hatványainak sorozata, ahol $a_1 = 2$ a sorozat első tagja, $a_2 = 2^2 = 4$ a sorozat második tagja, illetve $a_n = 2^n$ a sorozat n-dik (vagy általános tagja). Az $f : \mathbb{N} \setminus \{1, 2, \dots, k-1\} \to \mathbb{R}$ függvényeket is valós számsorozatnak tekintjük, ebben az esetben az $(a_n)_{n\geq k}$ jelölést használjuk. Az $(a_n)_{n\geq 1}$ sorozat konstans, ha $a_n = a$, minden $n \geq 1$ esetén.

Az $(a_n)_{n\geq 1}$ sorozat *növekvő*, ha $a_n \leq a_{n+1}$, minden $n \geq 1$ esetén, vagyis $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \dots$. Az $(a_n)_{n\geq 1}$ sorozat *szigorúan növekvő*, ha $a_n < a_{n+1}$, minden $n \geq 1$ esetén, vagyis $a_1 < a_2 < \dots < a_n < a_{n+1} < \dots$. Az $(a_n)_{n\geq 1}$ sorozat *csökkenő*, ha $a_n \geq a_{n+1}$, minden $n \geq 1$ esetén, vagyis $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq a_{n+1} \geq \dots$. Az $(a_n)_{n\geq 1}$ sorozat *szigorúan csökkenő*, ha $a_n > a_{n+1}$, minden $n \geq 1$ esetén, vagyis $a_1 > a_2 > \dots > a_n > a_{n+1} > \dots$. Az $(a_n)_{n\geq 1}$ sorozat *monoton*, ha növekvő vagy csökkenő, illetve *szigorúan monoton*, ha szigorúan csökkenő vagy szigorúan növekvő.

Az $(a_n)_{n\geq 1}$ sorozat *felülről korlátos*, ha létezik egy $K_1 \in \mathbb{R}$ szám úgy, hogy minden $n \geq 1$ esetén $a_n \leq K_1$. Ekkor a K_1 számot a sorozat egy *felső korlátjának* nevezzük. Az $(a_n)_{n\geq 1}$ sorozat *alulról korlátos*, ha létezik egy $K_2 \in \mathbb{R}$ szám úgy, hogy minden $n \geq 1$ esetén $a_n \geq K_2$. Ekkor a K_2 számot a sorozat egy *alsó korlátjának* nevezzük. A sorozat *korlátos*, ha alulról és felülről is korlátos. A sorozat korlátossága egyenértékű azzal, hogy létezik egy $K > 0$ szám úgy, hogy $-K \leq a_n \leq K$, minden $n \geq 1$ esetén, vagyis $|a_n| \leq K$, minden $n \geq 1$ esetén.

Egy $V \subseteq \mathbb{R}$ halmaz az $x \in \mathbb{R}$ valós szám egy környezete, ha létezik $\delta > 0$ szám úgy, hogy $(x - \delta, x + \delta) \subseteq V$. Az x pont környezeteinek halmazát $\mathcal{V}(x)$-szel jelöljük.

1.1. Értelmezés

Az $\ell \in \mathbb{R}$ szám az $(a_n)_{n\geq 1}$ sorozat *határértéke*, ha az ℓ szám bármely $V \in \mathcal{V}(\ell)$ környezetére létezik olyan $N_V \in \mathbb{N}$ (a V környezettől függő) index, hogy $a_n \in V$, minden $n \geq N_V$ esetén. Jelölés: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell$.

1.2. Értelmezés

Az (a_n) sorozat *határértéke* $+\infty$ ($\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$), ha minden $K > 0$ esetén létezik $N_K \in \mathbb{N}$ (K-tól függő index) úgy, hogy $a_n > K$, minden $n \geq N_K$ esetén.

1.3. Értelmezés

Az (a_n) sorozat *határértéke* $-\infty$ ($\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$), ha minden $K > 0$ esetén létezik $N_K \in \mathbb{N}$ (K-tól függő index) úgy, hogy $a_n < -K$, minden $n \geq N_K$ esetén.

Ha az $(a_n)_{n\geq 1}$ sorozatnak létezik $\ell \in \mathbb{R}$ határértéke, akkor a sorozatot *konvergensnek* nevezzük. Egy sorozat *divergens*, ha nem konvergens. Tehát egy sorozat divergens, ha létezik határértéke, amely egyenlő $+\infty$ vagy $-\infty$-nel, vagy ha nem létezik határértéke. Minden sorozatnak csak egyetlen egy határértéke létezhet.

1.4. Tulajdonság
Az $\ell \in \mathbb{R}$ szám az $(a_n)_{n\geq 1}$ sorozat határértéke akkor és csakis akkor, ha minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ index úgy, hogy minden $n \geq N_\varepsilon$ esetén $|a_n - \ell| < \varepsilon$.

1.5. Példa
Minden konstans sorozat sorozat konvergens. ◇

1.6. Példa
Az $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ sorozat konvergens és $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, mivel minden $\varepsilon > 0$ esetén, ha $N_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ (az $\frac{1}{\varepsilon}$ egész része plusz 1), akkor minden $n > N_\varepsilon$ esetén

$$\frac{1}{\varepsilon} < \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1 = N_\varepsilon < n,$$

ahonnan következik, hogy $\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$. ◇

1.7. Példa
Az $(\ln n)_n \geq 1$ sorozatnak van határértéke és $\lim\limits_{n\to\infty} \ln n = +\infty$. Valóban, minden $K > 0$ esetén, ha $N_K = [e^K] + 1$, akkor minden $n > N_K$ esetén

$$n > N_K = \left[e^K\right] + 1 > e^K,$$

ahonnan $\ln n > \ln(e^K) = K$. ◇

A sorozat konvergenciájának értelmezéséből adódik a következő tulajdonság.

1.8. Tulajdonság (Nullához tartó sorozat jellemzése)

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \iff \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0.$$

1.9. Példa
A $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)_{n\geq 1}$ sorozat konvergens és határértéke 0, mivel $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. ◇

Ha egy sorozatnak van két részsorozata (például a páros, illetve a páratlan indexű tagok részsorozata), amelyeknek van határértéke, de a két határérték nem egyezik meg, akkor az eredeti sorozatnak nincs határértéke.

1.10. Példa
Az $a_n = (-1)^n$, $n \geq 1$ általános tagú sorozat páratlan indexű tagjainak részsorozata, $b_n = a_{2n-1} = (-1)^{2n-1} = -1$, $n \geq 1$, konvergens $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -1$ határértékkel, illetve páros indexű tagjainak részsorozata, $c_n = a_{2n} = (-1)^{2n} = 1$, $n \geq 1$ szintén konvergens $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1$ határértékkel. Mivel a két határérték nem egyezik meg, ezért az $((-1)^n)_{n\geq 1}$ sorozat divergens. ◇

Minden konvergens sorozat korlátos, így ha egy sorozat nem korlátos, akkor divergens.

1.11. Tulajdonság

(i) Minden monoton és korlátos sorozat konvergens.

(ii) Minden növekvő és felülről korlátos sorozat konvergens.

(iii) Minden csökkenő és alulról korlátos sorozat konvergens.

1.1.1. Műveletek konvergens sorozatokkal

Legyenek $(a_n)_{n\geq 1}$ és $(b_n)_{n\geq 1}$ konvergens sorozatok. Ekkor teljesülnek a következő tulajdonságok.

(i) Az $(a_n + b_n)_{n\geq 0}$ sorozat is konvergens és $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

(ii) A $(k \cdot a_n)_{n\geq 1}$ sorozat konvergens és $\lim\limits_{n\to\infty} k \cdot a_n = k \cdot \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, minden $k \in \mathbb{R}$ esetén.

(iii) Az $(a_n \cdot b_n)_{n\geq 0}$ sorozat is konvergens és $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = (\lim\limits_{n\to\infty} a_n)\cdot(\lim\limits_{n\to\infty} b_n)$.

(iv) Ha $b_n \neq 0$, minden $n \geq 1$ esetén, és $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$, akkor az $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\geq 1}$ sorozat konvergens és határértéke $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$.

(v) Ha $a_n > 0$, minden $n \geq 1$ esetén és $p \in \mathbb{R}$, akkor az $(a_n^p)_{n\geq 1}$ sorozat konvergens és $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^p = (\lim\limits_{n\to\infty} a_n)^p$.

(vi) Ha $p \in \mathbb{R}$, $p > 0$, akkor a $(p^{a_n})_{n\geq 1}$ sorozat konvergens és $\lim\limits_{n\to\infty} p^{a_n} = p^{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}$.

1.12. Tulajdonság
Ha az $(a_n)_{n\geq 1}$ számsorozat esetén $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ vagy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, akkor

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e.$$

Majorálási kritérium, fogó tétel

1.13. Tulajdonság

(i) Legyenek $(a_n)_{n\geq 1}$ és $(b_n)_{n\geq 1}$ konvergens sorozatok. Ha létezik $n_0 \in \mathbb{N}$ úgy, hogy $a_n \leq b_n$ (vagy $a_n < b_n$), minden $n > n_0$ esetén, akkor

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n.$$

(ii) Legyenek $(a_n)_{n\geq 1}$ és $(b_n)_{n\geq 1}$ számsorozatok, amelyekre létezik $n_0 \in \mathbb{N}$ úgy, hogy $a_n \leq b_n$ minden $n > n_0$. Ekkor, ha $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$, illetve ha $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

(iii) Legyen $\ell \in \mathbb{R}$ egy szám, illetve $(a_n)_{n\geq 1}$ és $(b_n)_{n\geq 1}$ két számsorozat. Ha $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ és létezik olyan $n_0 \in \mathbb{N}$, hogy minden $n > n_0$ esetén

$$|a_n - \ell| \leq b_n,$$

akkor az $(a_n)_{n\geq 1}$ sorozat konvergens és $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ell$.

1.14. Tétel (Fogó tétel)
Legyen $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$, $(c_n)_{n\geq 1}$ három számsorozat, amelyekre létezik $n_0 \in \mathbb{N}$ úgy, hogy minden $n > n_0$ esetén

$$a_n \leq b_n \leq c_n.$$

Ha az $(a_n)_{n\geq 1}$ és $(c_n)_{n\geq 1}$ sorozatok konvergensek, és $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$, akkor a $(b_n)_{n\geq 1}$ sorozat is konvergens és

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n.$$

1.15. Tulajdonság
Ha az $(a_n)_{n\geq 1}$ sorozat korlátos, illetve a $(b_n)_{n\geq 1}$ sorozat konvergens és határértéke $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, akkor az $(a_n \cdot b_n)_{n\geq 1}$ sorozat is konvergens és a határértéke $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = 0$.

1.1.2. Cesaro–Stolz-tétel

1.16. Tétel (Cesaro-Stolz)
Ha $(a_n)_{n\geq 1}$ egy tetszőleges számsorozat, $(b_n)_{n\geq 1}$ egy szigorúan monoton, nem korlátos sorozat, és létezik a $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$ határérték, akkor létezik a $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$ határérték is és

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}.$$

1.17. Tulajdonság
Ha $(a_n)_{n\geq 1}$ pozitív tagú sorozat (vagyis $a_n > 0$, minden $n \geq 1$ esetén) és $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = a$.

1.1.3. Fundamentális sorozat

1.18. Értelmezés
Az $(a_n)_{n\geq 1}$ számsorozat *fundamentális* (vagy *Cauchy-sorozat*), ha bármely $\varepsilon > 0$ számhoz létezik $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ küszöbszám úgy, hogy minden $m, n \geq N_\varepsilon$ indexek esetén $|a_m - a_n| < \varepsilon$.

1.19. Tétel (Cauchy)
Egy (a_n) valós számsorozat pontosan akkor konvergens, ha fundamentális.

A Cauchy-tétel alapján elég igazolni, hogy egy sorozat fundamentális ahhoz, hogy belássuk, hogy konvergens. Ahhoz, hogy belássuk egy sorozatról, hogy fundamentális nem szükséges sejteni a határértékét.

1.20. Tulajdonság
Ha az $(a_n)_{n\geq 1}$ sorozatra létezik egy olyan $(b_n)_{n\geq 1}$ sorozat és egy olyan $n_0 \in \mathbb{N}$ index, amelyekre

(i) $|a_m - a_n| \leq b_n$, $\forall\, m \geq n \geq n_0$,

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$,

akkor az $(a_n)_{n\geq 1}$ sorozat fundamentális.

1.21. Tulajdonság
Ha az $(a_n)_{n\geq 1}$ sorozatra létezik egy olyan $c > 0$ szám és olyan $(m_k)_{k\geq 1}$,$(n_k)_{k\geq 1}$ szigorúan növekvő természetes számsorozatok, hogy $|a_{m_k} - a_{n_k}| \geq c$, minden $k \geq k_0$ esetén, akkor az (a_n) sorozat nem fundamentális.

1.2. Feladatok

1.2.1. Sorozatok határértéke

1.1. Feladat. Számoljuk ki a következő határértékét, ha léteznek:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3+n^2+n-1}{2n^3-3}$;

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+n-1}}{\sqrt[3]{2n^3+3}}$;

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[5]{2n^2+3n-1}}{\sqrt{5n^3-n+2}}$;

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^3+3n^2+2}{\sqrt{5n^5+n-2}}$;

(e) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$;

(f) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}$;

(g) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n(n+1)}-n)$;

(h) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+3n+1}-\sqrt{n^2+1})$;

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt[k]{n+1}-\sqrt[k]{n})$, ahol $k \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$;

(j) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n+(-3)^n}{4^n}$;

(k) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n+(-3)^n}{4^n+5^n}$;

(l) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n$;

(m) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^3+n}{n^3+1}\right)^n$;

(n) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{\cos n\pi}{n}\right)^n$;

(o) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)^n$;

(p) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2+4+\cdots+2n}{1+3+\cdots+(2n-1)}$;

(q) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^2+4^2+\cdots+(2n)^2}{1^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2}$;

(r) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{1}{n\cdot(n+1)}$;

(s) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\dfrac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

1.2. Feladat. Igazold, hogy a következő általános tagú sorozatok konvergensek (felhasználható a monoton és korlátos sorozatokra vonatkozó 1.11. Tulajdonság):

(a) $s_n = \dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}+\ldots+\dfrac{1}{n^2}$;

(b) $s_n = \dfrac{1}{1^a}+\dfrac{1}{2^a}+\ldots+\dfrac{1}{n^a}$, ahol $a \geq 2$;

(c) $s_n = \dfrac{1}{1^a}+\dfrac{1}{2^a}+\ldots+\dfrac{1}{n^a}$, ahol $1 < a \leq 2$;

(d) $a_n = \dfrac{n^n}{(n!)^2}$;

(e) $a_n = 1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\ldots+(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n}$;

(f) $a_n = \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2n)}$;

(g) $a_n = \dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{n+n}$.

1.3. Feladat. Igazold, hogy az alább megadott általános tagú (a_n) számsorozatoknak nem létezik határértéke (elég találni két részsorozatot, amelyeknek különböző a határértéke):

(a) $a_n = 1+(-1)^n$, $(n \geq 0)$;

(b) $a_n = (1+(-1)^n)\cdot \ln n$, $(n \geq 1)$;

(c) $a_n = 2+(-2)^n$, $(n \geq 0)$;

(d) $a_n = p^n$, ahol $p < -1$, $n \geq 1$;

(e) $a_n = n^3 \cdot \sin\left(n\dfrac{\pi}{2}\right)$, $n \geq 0$;

(f) $a_n = (1+\cos n\pi)\cdot \dfrac{n}{n+1}$, $(n \geq 1)$.

1.4. Feladat. Adottak az $e_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ és $e'_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$ általános tagú sorozatok.

(a) Igazold, hogy az $(e'_n)_{n\geq 1}$ sorozat csökkenő és alulról korlátos, ezért konvergens!

(b) Igazold, hogy az $(e_n)_{n\geq 1}$ sorozat monoton növekvő!

(c) Igazold, hogy $e_n < e'_n$, minden $n \geq 1$ esetén és ezért $e_n < e'_1 = 4$, minden $n \geq 1$ esetén! Igazold, hogy az $(e_n)_{n\geq 1}$ sorozat konvergens!

(d) Ha $e = \lim\limits_{n\to\infty} e_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$, akkor igazold, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} e'_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1} = e.$

1.2.2. Majorálási kritérium, fogó tétel

1.5. Feladat. Igazold, hogy $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\cdots+\dfrac{1}{n!}\right) = e.$

1.6. Feladat. Igazold, hogy

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} 1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n} = +\infty;$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} 1+\dfrac{1}{2^p}+\dfrac{1}{3^p}+\cdots+\dfrac{1}{n^p} = +\infty$, ahol $p<1$.

1.7. Feladat. Számítsd ki a következő határértékeket (felhasználható az 1.14. fogó tétel):

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin n}{n};$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\cos n}{\ln n};$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{q^n}{n!}$, ahol $q\in\mathbb{R}$;

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^n + n^2\cdot\sin\left(\dfrac{\pi}{2^n}\right);$

(e) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\cos n\pi)\cdot\dfrac{n}{n^2+1};$

(f) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right);$

(g) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^n}{(n!)^2};$

(h) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot\ldots\cdot(2n-1)^2}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdot\ldots\cdot(2n)^2};$

(i) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2n)};$

(j) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(n+1)}{\ln n};$

(k) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\ldots(1+a^n)}$, ahol $a>0$.

1.2.3. Cesaro–Stolz-tétel

1.8. Feladat. Számold ki a következő határértékeket (felhasználható az 1.16. Cesaro-Stolz–tétel):

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{n};$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{3^n};$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{(n+1)^{k+1}}$, $k\in\mathbb{N}^*$;

(d) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^2+4^2+\ldots+(2n)^2}{1^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2};$

(e) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{n};$

(f) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{n^a}$, ahol $a\geq 1$;

(g) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\left(\frac{1^2}{5^1}+\frac{2^2}{5^2}+\frac{3^2}{5^3}+\ldots+\frac{n^2}{5^n}\right);$

(h) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{n};$

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$;

(j) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \cdots + \frac{1}{\ln n}\right)$.

1.9. Feladat. Számold ki a következő határértékeket:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{n}{1}\cdot\ln 2 + \frac{n-1}{2}\cdot\ln 3 + \ldots + \frac{1}{n}\cdot\ln(n+1)}{n\cdot\ln 2 + (n-1)\cdot\ln 3 + \cdots + 1\cdot\ln(n+1)}$;

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(\ln 2)^2 + (\ln 3)^2 + \cdots + (\ln n)^2}{n^a}$, $(a > 0)$.

1.10. Feladat. Számold ki a következő határértékeket:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{p}$, $(p > 0)$;

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$;

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}$;

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$;

(e) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\ln n}$;

(f) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\ln(n!)}$;

(g) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)\cdot(n+2)\cdot\ldots\cdot(n+n)}$;

(h) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{3^{3n}(n!)^3}{(3n)!}}$;

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$, ha $a_n > 0$, úgy, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

1.2.4. Fundamentális sorozatok

1.11. Feladat. Igazold, hogy a következő általános tagú sorozatok fundamentálisak (így az 1.19. Cauchy-tétel alapján konvergensek):

(a) $s_n = \dfrac{\cos x}{1\cdot 2} + \dfrac{\cos 2x}{2\cdot 3} + \dfrac{\cos 3x}{3\cdot 4} + \cdots + \dfrac{\cos nx}{n\cdot(n+1)}$, $(x \in \mathbb{R})$;

(b) $a_n = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2}$;

(c) $b_n = \dfrac{\sin x}{3} + \dfrac{2\sin 2x}{3^2} + \ldots + \dfrac{n\sin nx}{3^n}$, $(x \in \mathbb{R})$;

(d) $c_n = \dfrac{\cos x}{1^2} + \dfrac{\cos 2x}{2^2} + \ldots + \dfrac{\cos nx}{n^2}$, $(x \in \mathbb{R})$;

(e) $d_n = \dfrac{\operatorname{arctg} x}{1!} + \dfrac{\operatorname{arctg} 2x}{2!} + \ldots + \dfrac{\operatorname{arctg} nx}{n!}$, $(x \in \mathbb{R})$;

(f) $g_n = 1 + \dfrac{x^1}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!}$, $(x \in \mathbb{R})$.

1.12. Feladat. Igazold, hogy a következő általános tagú sorozatok nem fundamentálisak (így az 1.19. Cauchy-tétel alapján nem konvergensek):

(a) $a_n = (-1)^n$;

(b) $b_n = \sin n$;

(c) $c_n = \cos n$;

(d) $d_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n}$.

1.2.5. Rekurzívan értelmezett sorozatok határértéke

1.13. Feladat. Tanulmányozd a következő sorozatok konvergenciáját, és ha konvergensek, számítsd ki a határértéküket:

(a) $a_n = \dfrac{1}{1+a_{n-1}}$, $a_0 = 0$;

(b) $a_n = \sqrt{2+a_{n-1}}$, $a_0 = 0$;

1.14. Feladat. Legyen $a_0 > 0$ tetszőleges. Igazold, hogy minden $a > 0$ szám esetén az

$$a_n = \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{a}{a_{n-1}}\right)$$

rekurzióval értelmezett sorozat konvergens és határértéke $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sqrt{a}$.

1.15. Feladat. Legyen x_1 és y_1 két olyan pozitív valós szám, amelyekre $x_1 < y_1$. Értelmezzük az $x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}$ és $y_{n+1} = \frac{x_n+y_n}{2}$ képletekkel az $(x_n)_{n\geq 1}$ és $(y_n)_{n\geq 1}$ valós számsorozatokat. Bizonyítsd be, hogy mindkét sorozat konvergens és a határértékeik megegyeznek!

1.3. Megoldások

1.3.1. Sorozatok határértéke

1.1. Feladat. Számoljuk ki a következő határértékét, ha léteznek:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3+n^2+n-1}{2n^3-3}$;

Megoldás. Kiemeljük a számlálóból és a nevezőből is a legmagasabb fokú tagokat:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+n^2+n-1}{2n^3-3} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3\cdot\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^3}\right)}{n^3\cdot\left(2-\frac{3}{n^3}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^3}}{2-\frac{3}{n^3}} =$$
$$= \frac{1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}}{2-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n^3}} = \frac{1+0+0-0}{2-0} = \frac{1}{2}.$$

□

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+n-1}}{\sqrt[3]{2n^3+3}}$;

Megoldás. Kiemeljük a számlálóból és a nevezőből is a legmagasabb fokú tagokat:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^3+n^2-1}}{\sqrt[3]{2n^3+3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^3}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^3}}}{\sqrt[3]{n^3}\cdot\sqrt[3]{2+\frac{3}{n^3}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{3}{2}}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^3}}}{n^{\frac{3}{3}}\cdot\sqrt[3]{2+\frac{3}{n^3}}} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^3}}}{\sqrt[3]{2+\frac{3}{n^3}}} = \lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{2}}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^3}}}{\sqrt[3]{2+\frac{3}{n^3}}} = +\infty\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{2}} = +\infty.$$

□

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[5]{2n^2+3n-1}}{\sqrt{5n^3-n+2}}$;

Megoldás. Kiemeljük a számlálóból és a nevezőből is a legmagasabb fokú tagokat:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[5]{2n^2+3n-1}}{\sqrt{5n^3-n+2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[5]{n^2}\cdot\sqrt[5]{2+\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}}}{\sqrt{n^3}\cdot\sqrt{5-\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^3}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{2}{5}}}{n^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{\sqrt[5]{2+\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}}}{\sqrt{5-\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^3}}} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} n^{-\frac{11}{10}}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[5]{2+\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}}}{\sqrt{5-\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^3}}} = 0\cdot\frac{\sqrt[5]{2}}{\sqrt{5}} = 0.$$

□

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^3+3n^2+2}{\sqrt{5n^5+n-2}}$;

Megoldás. Kiemeljük a számlálóból és a nevezőből is a legmagasabb fokú tagokat:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3+3n^2+2}{\sqrt{5n^5+n-2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3\cdot\left(2+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^3}\right)}{\sqrt{n^5}\cdot\sqrt{5+\frac{1}{n^4}-\frac{2}{n^5}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{\sqrt{n^5}}\cdot\frac{2+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^3}}{\sqrt{5+\frac{1}{n^4}-\frac{2}{n^5}}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{2}} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^3}}{\sqrt{5+\frac{1}{n^4}-\frac{2}{n^5}}} = +\infty \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = +\infty.$$

□

(e) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$;

Megoldás. Ha egyből határértékre térnénk, akkor a „$\infty - \infty$” határozatlansági esethez jutnánk. Az $a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b)$ rövidített számítási képletet fogjuk használni a gyökök különbségének eltüntetésére, ezért bővítjük a törtet $(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$-nel.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1}-\sqrt{n} \overset{„\infty-\infty"}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\cdot\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{n+1}\right)^2-\left(\sqrt{n}\right)^2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0,$$

mivel az utóbbi tört nevezője tart végtelenbe. □

(f) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}$;

Megoldás. Ha egyből határértékre térnénk, akkor a „$\infty-\infty$” határozatlansági esethez jutnánk. Az $a^3-b^3=(a-b)\cdot(a^2+ab+b^2)$ rövidített számítási képletet fogjuk használni a gyökök különbségének eltüntetésére, ezért bővítjük a törtet $\left(\sqrt[3]{n+1}^2+\sqrt[3]{n+1}\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n}^2\right)$-tel.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n} \overset{„\infty-\infty"}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{n+1}^2+\sqrt[3]{n+1}\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n}^2\right)}{\left(\sqrt[3]{n+1}^2+\sqrt[3]{n+1}\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n}^2\right)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt[3]{n+1}\right)^3-\left(\sqrt[3]{n}\right)^3}{\left(\sqrt[3]{n+1}^2+\sqrt[3]{n+1}\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n}^2\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)-n}{\left(\sqrt[3]{n+1}^2+\sqrt[3]{n+1}\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n}^2\right)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\sqrt[3]{n+1}^2+\sqrt[3]{n+1}\sqrt[3]{n}+\sqrt[3]{n}^2\right)} = 0,$$

mivel az utóbbi tört nevezője tart végtelenbe. □

(g) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n(n+1)}-n)$;

Megoldás.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n(n+1)}-n = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n(n+1)}-n)\cdot(\sqrt{n(n+1)}+n)}{\sqrt{n(n+1)}+n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n(n+1)})^2-n^2}{\sqrt{n(n+1)}+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)-n^2}{\sqrt{n(n+1)}+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n(n+1)}+n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n\cdot(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

□

(h) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+3n+1}-\sqrt{n^2+1})$;

Megoldás.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n^2+3n+1}-\sqrt{n^2+1}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+3n+1}-\sqrt{n^2+1})(\sqrt{n^2+3n+1}+\sqrt{n^2+1})}{\sqrt{n^2+3n+1}+\sqrt{n^2+1}}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+3n+1})^2-(\sqrt{n^2+1})^2}{\sqrt{n^2+3n+1}+\sqrt{n^2+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+3n+1)-(n^2+1)}{\sqrt{n^2+3n+1}+\sqrt{n^2+1}}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{\sqrt{n^2+3n+1}+\sqrt{n^2+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{n\cdot\left(\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right)}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=\frac{3}{1+1}=\frac{3}{2}.$$

□

(i) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[k]{n+1}-\sqrt[k]{n})$, ahol $k\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$;

Megoldás. Ha egyből határértékre térnénk, akkor a „$\infty-\infty$" határozatlansági esethez jutnánk. Az $a^k-b^k=(a-b)\cdot(a^{k-1}+a^{k-2}b+a^{k-3}b^2+\cdots+a^2b^{k-3}+ab^{k-2}+b^{k-1})$ rövidített számítási képletet fogjuk használni a gyökök különbségének eltüntetésére, ezért bővítjük a törtet $\left(\sqrt[k]{n+1}^{k-1}+\sqrt[k]{n+1}^{k-2}\sqrt[k]{n}+\cdots+\sqrt[k]{n+1}\sqrt[k]{n}^{k-2}+\sqrt[k]{n}^{k-1}\right)$-gyel.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[k]{n+1}-\sqrt[k]{n}\overset{„\infty-\infty"}{=}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt[k]{n+1}-\sqrt[k]{n}\right)\cdot\left(\sqrt[k]{n+1}^{k-1}+\sqrt[k]{n+1}^{k-2}\sqrt[k]{n}+\cdots+\sqrt[k]{n+1}\sqrt[k]{n}^{k-2}+\sqrt[k]{n}^{k-1}\right)}{\sqrt[k]{n+1}^{k-1}+\sqrt[k]{n+1}^{k-2}\sqrt[k]{n}+\cdots+\sqrt[k]{n+1}\sqrt[k]{n}^{k-2}+\sqrt[k]{n}^{k-1}}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt[k]{n+1}\right)^k-\left(\sqrt[k]{n}\right)^k}{\sqrt[k]{n+1}^{k-1}+\sqrt[k]{n+1}^{k-2}\sqrt[k]{n}+\cdots+\sqrt[k]{n+1}\sqrt[k]{n}^{k-2}+\sqrt[k]{n}^{k-1}}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)-n}{\sqrt[k]{n+1}^{k-1}+\sqrt[k]{n+1}^{k-2}\sqrt[k]{n}+\cdots+\sqrt[k]{n+1}\sqrt[k]{n}^{k-2}+\sqrt[k]{n}^{k-1}}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[k]{n+1}^{k-1}+\sqrt[k]{n+1}^{k-2}\sqrt[k]{n}+\cdots+\sqrt[k]{n+1}\sqrt[k]{n}^{k-2}+\sqrt[k]{n}^{k-1}}=0,$$

mivel az utóbbi tört nevezője tart végtelenbe. □

(j) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n+(-3)^n}{4^n}$;

Megoldás. Kiemeljük a számlálóból és nevezőből is az abszolút értékben a legnagyobb alapú tagot:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+(-3)^n}{4^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(-3)^n}{4^n}\cdot\frac{\frac{2^n}{(-3)^n}+1}{1}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{-3}{4}\right)^n\cdot\frac{\left(\frac{2}{-3}\right)^n+1}{1}=0\cdot\frac{0+1}{1}=0,$$

ahol felhasználtuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{-3}{4}\right)^n=0$ és $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{-3}\right)^n=0$, mert $\left|\frac{-3}{4}\right|<1$ és $\left|\frac{2}{-3}\right|<1$. □

(k) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n + (-3)^n}{4^n + 5^n}$;

Megoldás. Kiemeljük a számlálóból és nevezőből is az abszolút értékben a legnagyobb alapú tagot:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n + (-3)^n}{4^n + 5^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{5^n}{5^n} \cdot \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^n + \left(\frac{-3}{5}\right)^n}{\left(\frac{4}{5}\right)^n + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^n + \left(\frac{-3}{5}\right)^n}{\left(\frac{4}{5}\right)^n + 1} = \frac{0+0}{0+1} = 0,$$

ahol felhasználtuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{-3}{5}\right)^n = 0$ és $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n = 0$, mert $\left|\frac{2}{5}\right| < 1$, $\left|\frac{-3}{5}\right| < 1$ és $\left|\frac{4}{5}\right| < 1$. □

(l) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n$;

Megoldás.

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{-n}\right)^{-n}\right]^{-1} = \left[\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{-n}\right)^{-n}\right]^{-1} = e^{-1} = \frac{1}{e},$$

az 1.12. Tulajdonság alapján, esetünkben $a_n = -n$. □

(m) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^3 + n}{n^3 + 1}\right)^n$;

Megoldás.

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^3 + n}{n^3 + 1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{n-1}{n^3 + 1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{n^3+1}{n-1}}\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{n^3+1}{n-1}}\right)^{\frac{n^3+1}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n^3+1} \cdot n} = \lim_{n\to\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{n^3+1}{n-1}}\right)^{\frac{n^3+1}{n-1}}\right]^{\frac{n(n-1)}{n^3+1}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n(n-1)}{n^3+1}} = e^0 = 1,$$

ahol az $a_n = \frac{n^3+1}{n-1}$, $n \geq 2$ általános tagú sorozatra használjuk az 1.12. Tulajdonságot, mivel $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3+1}{n-1} = +\infty$. □

(n) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{\cos n\pi}{n}\right)^n$;

Megoldás. Ha $n = 2k$ páros, akkor $f_{2k} = \left(1 + \frac{\cos 2k\pi}{2k}\right)^{2k} = \left(1 + \frac{1}{2k}\right)^{2k}$, minden $k \geq 1$ esetén és az $f_n = \left(1 + \frac{\cos n\pi}{n}\right)^n$ általános tagú sorozat páros indexű tagjainak (f_{2k}) részsorozatára kapjuk, hogy

$$\lim_{k\to\infty} f_{2k} = \lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2k}\right)^{2k} = e.$$

Ha $n = 2k + 1$ páratlan, akkor $f_{2k+1} = \left(1 + \frac{\cos(2k+1)\pi}{2k}\right)^{2k} = \left(1 + \frac{-1}{2k}\right)^{2k}$, minden $k \geq 1$ esetén és az (f_n) részsorozat páros indexű tagjainak (f_{2k+1}) sorozatára kapjuk, hogy

$$\lim_{k\to\infty} f_{2k+1} = \lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{-1}{2k}\right)^{2k} = \lim_{k\to\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{-2k}\right)^{-2k}\right]^{-1} = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

Mivel a két konvergens részsorozat határértéke nem egyezik meg, ezért az (f_n) sorozatnak nem létezik határértéke. □

(o) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)^n$;

Megoldás. Az 1.12. Tulajdonság alapján

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{-n^2}\right)^{-n^2\cdot\frac{n}{-n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{-n^2}\right)^{-n^2}\right]^{\frac{n}{-n^2}}=$$
$$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{-n^2}}=e^0=1.$$

□

(p) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2+4+\cdots+2n}{1+3+\cdots+(2n-1)}$;

Megoldás. Használni fogjuk az $1+2+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}$ összegzést.

$$\begin{aligned}\frac{2+4+\cdots+2n}{1+3+\cdots+(2n-1)}&=\frac{2(1+2+\cdots+n)}{1+2+3+4+\cdots+(2n-1)+2n-(2+4+\cdots+2n)}\\&=\frac{2(1+2+\cdots+n)}{1+2+\cdots+2n-2(1+2+\cdots+n)}\\&=\frac{2\cdot\frac{n(n+1)}{2}}{\frac{2n(2n+1)}{2}-2\cdot\frac{n(n+1)}{2}}=\frac{n(n+1)}{n(2n+1)-n(n+1)}\\&=\frac{n+1}{2n+1-(n+1)}=\frac{n+1}{n}.\end{aligned}$$

Tehát

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2+4+\cdots+2n}{1+3+\cdots+(2n-1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1.$$

□

(q) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^2+4^2+\cdots+(2n)^2}{1^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2}$;

Megoldás. Használni fogjuk az $1^2+2^2+\cdots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ összegzést.

$$\frac{2^2+4^2+\cdots+(2n)^2}{1^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2}=$$
$$=\frac{4(1^2+2^2+\cdots+n^2)}{1^2+2^2+3^2+4^2+\cdots+(2n-1)^2+(2n)^2-[2^2+4^2+\cdots+(2n)^2]}=$$
$$=\frac{4(1^2+2^2+\cdots+n^2)}{1^2+2^2+\cdots+(2n)^2-4(1^2+2^2+\cdots+n^2)}=$$
$$=\frac{4\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{\frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6}-4\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}=\frac{4(n+1)}{2(4n+1)-4(n+1)}=\frac{4n+4}{4n-2}$$

Tehát

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^2+4^2+\cdots+(2n)^2}{1^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n+4}{4n-2}=1.$$

□

(r) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{1}{n\cdot(n+1)}$;

Megoldás. Minden $n \geq 1$ esetén

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{(n-1)\cdot n} + \frac{1}{n\cdot(n+1)} \\
&= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\
&= \frac{1}{1} \underbrace{- \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}_{0} \underbrace{- \frac{1}{3} + \frac{1}{3}}_{0} - \ldots \underbrace{- \frac{1}{n} + \frac{1}{n}}_{0} - \frac{1}{n+1} \\
&= 1 - \frac{1}{n+1},
\end{aligned}$$

Így $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$ □

(s) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \dfrac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}.$

Megoldás. Minden $k \in \mathbb{N}^*$ szám esetén az $\frac{1}{k\cdot(k+1)\cdot(k+2)}$ tört felbontható, mint

$$\frac{1}{k\cdot(k+1)\cdot(k+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k\cdot(k+1)} - \frac{1}{(k+1)\cdot(k+2)}\right).$$

Ezt felhasználva kapjuk, hogy minden $n \geq 1$ esetén

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)} \\
&= \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{2\cdot 3}\right) + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2\cdot 3} - \frac{1}{3\cdot 4}\right) + \ldots + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{(n-1)\cdot n} - \frac{1}{n\cdot(n+1)}\right) + \\
&\quad + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{n\cdot(n+1)} - \frac{1}{n\cdot(n+2)}\right) \\
&= \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{1\cdot 2} \underbrace{- \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3}}_{0} - \ldots \underbrace{- \frac{1}{n\cdot(n+1)} + \frac{1}{n\cdot(n+1)}}_{0} - \frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)}\right) \\
&= \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)}\right),
\end{aligned}$$

ahonnan

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2\cdot(n+1)\cdot(n+2)}\right) = \frac{1}{4}.$$

□

1.2. Feladat. Igazold, hogy a következő általános tagú sorozatok konvergensek (felhasználható a monoton és korlátos sorozatokra vonatkozó 1.11. Tulajdonság):

(a) $s_n = \dfrac{1}{1^2} + \dfrac{1}{2^2} + \ldots + \dfrac{1}{n^2};$

Megoldás. Az (s_n) sorozat monoton növekvő, mert

$$s_{n+1} = s_n + \underbrace{\frac{1}{(n+1)^2}}_{>0} > s_n \quad \forall\, n \geq 1.$$

A sorozat felülről korlátos, mivel minden $k \geq 2$ esetén $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{(k-1)\cdot k}$, ezért minden $n \geq 1$ esetén

$$s_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n\cdot n} < \frac{1}{1^2} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(n-1)\cdot n} = 1 + 1 - \frac{1}{n} \leq 2$$

az 1.1. Feladat (r) alpontja alapján. Tehát az (s_n) sorozat (szigorúan) növekvő és felülről korlátos, ezért konvergens. □

(b) $s_n = \dfrac{1}{1^a} + \dfrac{1}{2^a} + \ldots + \dfrac{1}{n^a}$, ahol $a \geq 2$;

Megoldás. Az (s_n) sorozat monoton növekvő, mert $s_{n+1} = s_n + \frac{1}{(n+1)^a} > s_n$ minden $n \geq 1$ esetén.

Az (s_n) sorozat felülről korlátos, mivel $\frac{1}{k^a} \leq \frac{1}{k^2}$ minden $k \geq 1$ és $a \geq 2$ esetén, ezért minden $n \geq 1$ esetén

$$s_n = \frac{1}{1^a} + \frac{1}{2^a} + \frac{1}{3^a} + \ldots + \frac{1}{n^a} \leq \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \leq 2$$

az (a) alpont alapján. Tehát az (s_n) sorozat (szigorúan) növekvő és felülről korlátos, ezért konvergens.

□

(c) $s_n = \dfrac{1}{1^a} + \dfrac{1}{2^a} + \ldots + \dfrac{1}{n^a}$, ahol $1 < a \leq 2$;

Megoldás. Az (s_n) sorozat monoton növekvő, mert $s_{n+1} = s_n + \frac{1}{(n+1)^a} > s_n$, minden $n \geq 1$ esetén.

A korlátosságot a következőképpen láthatjuk be. Legyen $N = [\log_2(n)] + 1$, ahonnan $n < 2^N$, vagyis $n \leq 2^N - 1$. Ekkor

$$\begin{aligned}
s_n &\leq s_{2^N-1} \\
&= \frac{1}{1^a} + \left(\frac{1}{2^a} + \frac{1}{3^a}\right) + \left(\frac{1}{4^a} + \frac{1}{5^a} + \frac{1}{6^a} + \frac{1}{7^a}\right) + \ldots + \\
&\quad + \left(\frac{1}{(2^{N-1})^a} + \frac{1}{(2^{N-1})^a + 1} + \cdots + \frac{1}{(2^{N-1})^a + 2^{N-1} - 1}\right) \\
&\leq \frac{1}{1^a} + \left(\frac{1}{2^a} + \frac{1}{2^a}\right) + \left(\frac{1}{4^a} + \frac{1}{4^a} + \frac{1}{4^a} + \frac{1}{4^a}\right) + \ldots + \\
&\quad + \underbrace{\left(\frac{1}{(2^{N-1})^a} + \frac{1}{(2^{N-1})^a} + \cdots + \frac{1}{(2^{N-1})^a}\right)}_{2^{N-1}} \\
&= \frac{1}{1^a} + \frac{2}{2^a} + \frac{4}{4^a} + \frac{8}{8^a} + \cdots + \frac{2^{N-1}}{(2^{N-1})^a} \\
&= 1 + \frac{1}{2^{a-1}} + \frac{1}{(2^{a-1})^2} + \frac{1}{(2^{a-1})^3} + \cdots + \frac{1}{(2^{a-1})^{N-1}} \\
&= \frac{1 - \left(\frac{1}{2^{a-1}}\right)^N}{1 - \frac{1}{2^{a-1}}} \\
&\leq \frac{1}{1 - \frac{1}{2^{a-1}}},
\end{aligned}$$

mivel $a > 1$, ezért $\frac{1}{2^{a-1}} < 1$.

Tehát az (a_n) sorozat monoton növekvő és felülről korlátos, ezért konvergens. Megjegyezzük, hogy ezzel módszerrel azt is igazoltuk, hogy (a_n) konvergens, minden $a > 1$ esetén. □

(d) $a_n = \dfrac{n^n}{(n!)^2}$;

Megoldás. A monotonitás eldöntésére vizsgáljuk az $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ törtet, mivel

- ha $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$, minden $n \geq 1$ esetén, akkor a sorozat monoton növekvő;
- ha $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$, minden $n \geq 1$ esetén, akkor a sorozat monoton csökkenő.

Ekkor

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{[(n+1)!]^2}}{\frac{n^n}{(n!)^2}} = \frac{(n+1)^{n+1}}{[(n+1)!]^2} \cdot \frac{(n!)^2}{n^n} = \frac{(n+1)^{n-1}}{n^n} = \frac{1}{n+1} \cdot \underbrace{\frac{(n+1)^n}{n^n}}_{e_n} \leq \frac{4}{n+1} \leq 1,$$

minden $n \geq 3$ esetén, ahol felhasználtuk, hogy $\frac{(n+1)^n}{n^n} \leq 4$, minden $n \geq 1$ esetén (lásd az 1.4. Feladatot). Tehát az $n = 3$ tagtól kezdve a sorozat csökkenő.

Az $(a_n)_{n\geq 3}$ sorozat alulról korlátos, mivel minden tagja pozitív, vagyis $a_n > 0$, minden $n \geq 3$ esetén.

Beláttuk, hogy az $(a_n)_{n\geq 3}$ sorozat monoton csökkenő és alulról korlátos, ezért konvergens. A konvergenciát nem befolyásolja véges sok tag hozzáadás, megváltoztatása, ezért az $(a_n)_{n\geq 1}$ sorozat is konvergens. □

(e) $a_n = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n+1}\dfrac{1}{n}$;

Megoldás. Az (a_n) sorozatot szétszedjük a páratlan és páros indexű tagok részsorozatára és igazoljuk, hogy mindkettő konvergens ugyanazzal a határértékkel.

A páros indexű tagok részsorozata: minden $k \geq 1$ esetén legyen

$$\begin{aligned} b_k = a_{2k} &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{2k}\frac{1}{2k-1} + (-1)^{2k+1}\frac{1}{2k} \\ &= \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{(2k-1)\cdot 2k}. \end{aligned}$$

A (b_k) sorozat monoton növekvő

$$b_{k+1} = b_k + \underbrace{\frac{1}{(2k+1)\cdot(2k+2)}}_{>0} > b_k, \quad \forall\, k \geq 1.$$

Ez a sorozat felülről korlátos, mert minden $k \geq 1$ esetén

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{(2k-3)\cdot(2k-2)} + \frac{1}{(2k-1)\cdot 2k} \\ &\leq \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{(2k-3)\cdot(2k-2)} + \frac{1}{(2k-2)\cdot(2k-1)} + \frac{1}{(2k-1)\cdot 2k} \\ &= \frac{1}{1} - \frac{1}{2k} \\ &< 1. \end{aligned}$$

Mivel a (b_k) sorozat monoton növekvő és felülről korlátos, ezért konvergens.

Legyen $c_k = a_{2k+1}$, $k \geq 1$ a páratlan indexű tagok részsorozatat. Ekkor minden $k \geq 1$ esetén

$$c_k = a_{2k+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots - \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1} = a_{2k} + \frac{1}{2k+1}.$$

Mivel a $(b_k)_{k\geq 1} = (a_{2k})_{k\geq 1}$ és $(\frac{1}{2k+1})_{k\geq 1}$ sorozatok konvergensek, ezért a $(c_k)_{k\geq 1}$ összegsorozat is konvergens és

$$\lim_{k\to\infty} c_k = \lim_{k\to\infty}\left(b_{2k} + \frac{1}{2k+1}\right) = \lim_{k\to\infty} b_{2k} + \lim_{k\to\infty}\frac{1}{2k+1} = \lim_{k\to\infty} b_{2k} + 0 = \lim_{k\to\infty} b_{2k}.$$

Tehát a páratlan és páros indexű tagok részsorozata konvergens ugyanazzal a határértékkel, ezért az (a_n) sorozat is konvergens (határértéke megegyezik a páratlan és páros indexű részsorozatok közös határértékével). □

(f) $a_n = \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot (2n)}$;

Megoldás. Mivel minden $n\geq 1$ esetén

$$a_{n+1} = a_n \cdot \frac{2n+1}{2n+2} \leq a_n \cdot 1 = a_n,$$

ezért a sorozat csökkenő. A sorozat alulról korlátos, mivel az (a_n) sorozat tagjai pozitívak, vagyis $a_n > 0$ minden $n \geq 1$ esetén.

Tehát az (a_n) sorozat monoton csökkenő és alulról korlátos, ezért konvergens. □

(g) $a_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{n+n}$.

Megoldás. Minden $n \geq 1$ esetén

$$\begin{aligned}
a_{n+1} - a_n &= \left(\frac{1}{(n+1)+1} + \frac{1}{(n+1)+2} + \cdots + \frac{1}{(n+1)+(n+1)}\right) \\
&\quad - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n}\right) \\
&= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \\
&= \frac{1}{(2n+1)\cdot(2n+2)} \\
&> 0,
\end{aligned}$$

tehát a sorozat növekvő.

Az (a_n) sorozat felülről korlátos, mert minden $n \geq 1$ esetén

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} \leq \underbrace{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+1}}_{n\text{-szer}} = \frac{n}{n+1} < 1.$$

Tehát a sorozat növekvő és felülről korlátos, ezért konvergens. □

1.3. Feladat. Igazold, hogy az alább megadott általános tagú (a_n) számsorozatoknak nem létezik határértéke (elég találni két részsorozatot, amelyeknek különböző a határértéke):

(a) $a_n = 1 + (-1)^n$, $(n \geq 0)$;

Megoldás. Tekintsük az $(a_n)_{n\geq 0}$ sorozat páros indexű tagjaiból álló $(b_m)_{m\geq 0} = (a_{2m})_{m\geq 0}$ részsorozatát: $b_m = a_{2m} = 1 + (-1)^{2m} = 1 + 1^{2m} = 2$, minden $m \geq 0$ esetén. Ennek a részsorozatnak létezik határértéke és $\lim\limits_{m\to\infty} b_m = 2$.

Hasonlóan tekintjük az $(a_n)_{n\geq 0}$ sorozat páratlan indexű tagjainak $(c_m)_{m\geq 0} = (a_{2m+1})_{m\geq 0}$ részsorozatát: $c_m = a_{2m+1} = 1 + (-1)^{2m+1} = 1 - 1 = 0$, minden $m \geq 0$ esetén. Ennek a részsorozatnak is létezik határértéke és $\lim\limits_{m\to\infty} c_m = 0$.

Mivel az $(a_n)_{n\geq 0}$ sorozatnak létezik két részsorozata, amelyeknek különböző a határértéke, ezért az $(a_n)_{n\geq 0}$ sorozatnak nem létezik határértéke (a határérték egyértelműsége miatt). □

(b) $a_n = (1 + (-1)^n) \cdot \ln n$, $(n \geq 1)$;

Megoldás. Tekintsük az $(a_n)_{n\geq 0}$ sorozat páros indexű tagjaiból álló $(b_m)_{m\geq 1} = (a_{2m})_{m\geq 1}$ részsorozatát: $b_m = a_{2m} = (1+(-1)^{2m}) \cdot \ln(2m) = 2\ln(2m)$, minden $m \geq 1$ esetén. Ennek a részsorozatnak létezik határértéke és $\lim\limits_{m\to\infty} b_m = \lim\limits_{n\to\infty} 2\ln(2m) = +\infty$.

Hasonlóan tekintjük az $(a_n)_{n\geq 1}$ sorozat páratlan indexű tagjainak $(c_m)_{m\geq 1} = (a_{2m+1})_{m\geq 0}$ részsorozatát: $c_m = a_{2m+1} = (1 + (-1)^{2m+1}) \cdot \ln(2m+1) = 0 \cdot \ln(2m+1) = 0$, minden $m \geq 1$ esetén. Ennek a részsorozatnak is létezik határértéke és $\lim\limits_{m\to\infty} c_m = 0$.

Mivel létezik az $(a_n)_{n\geq 1}$ sorozatnak két részsorozata, amelyeknek különböző a határértéke, ezért az $(a_n)_{n\geq 1}$ sorozatnak nem létezik határértéke (a határérték egyértelműsége miatt). □

(c) $a_n = 2 + (-2)^n$, $(n \geq 0)$;

Megoldás. Tekintsük az $(a_n)_{n\geq 0}$ sorozat páros indexű tagjaiból álló $(b_m)_{m\geq 0} = (a_{2m})_{m\geq 0}$ részsorozatát: $b_m = a_{2m} = 2 + (-2)^{2m} = 2 + 2^{2m}$, minden $m \geq 0$ esetén. Ennek a részsorozatnak létezik határértéke és

$$\lim_{m\to\infty} b_m = \lim_{m\to\infty} 2 + 2^{2m} = 2 + \lim_{m\to\infty} 2^{2m} = 2 + \infty = +\infty.$$

Hasonlóan tekintjük az $(a_n)_{n\geq 0}$ sorozat páratlan indexű tagjainak $(c_m)_{m\geq 0} = (a_{2m+1})_{m\geq 0}$ részsorozatát: $c_m = a_{2m+1} = 2 + (-2)^{2m+1} = 2 - 2^{2m+1}$, minden $m \geq 1$ esetén. Ennek a részsorozatnak is létezik határértéke és

$$\lim_{m\to\infty} c_m = \lim_{m\to\infty} 2 - 2^{2m+1} = 2 - \lim_{m\to\infty} 2^{2m+1} = 2 - \infty = -\infty.$$

Mivel létezik az $(a_n)_{n\geq 0}$ sorozatnak két részsorozata, amelyeknek különböző a határértéke, ezért az $(a_n)_{n\geq 0}$ sorozatnak nem létezik határértéke (a határérték egyértelműsége miatt). □

(d) $a_n = p^n$, ahol $p < -1$, $n \geq 1$;

Megoldás. Mivel $p < -1$, ezért $p = -|p|$. Az $(a_n)_{n\geq 1}$ sorozat páratlan indexű tagjainak részsorozata $b_k = a_{2k-1} = (-|p|)^{2k-1} = -|p|^{2k-1}$, minden $k \geq 1$ esetén. Ennek a részsorozatnak a határértéke $\lim\limits_{k\to\infty} b_k = \lim\limits_{k\to\infty} -|p|^{2k-1} = -\infty$.

Hasonlóan az $(a_n)_{n\geq 1}$ sorozat páros indexű tagjainak részsorozata $c_k = a_{2k} = (-|p|)^{2k} = |p|^{2k}$, minden $k \geq 1$ esetén. Ennek a részsorozatnak a határértéke $\lim\limits_{k\to\infty} c_k = \lim\limits_{k\to\infty} |p|^{2k} = +\infty$. Mivel a két részsorozatnak nem egyezik meg a határértéke, ezért az (a_n) sorozatnak nincs határétéke. □

(e) $a_n = n^3 \cdot \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$, $n \geq 0$;

Megoldás. Ha minden $k \geq 0$ esetén

$$\begin{aligned} b_k = a_{4k+1} &= (4k+1)^3 \cdot \sin\left((4k+1)\frac{\pi}{2}\right) = (4k+1)^3 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \\ &= (4k+1)^3 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = (4k+1)^3, \end{aligned}$$

akkor a $(b_k)_{k\geq 1} = (a_{4k+1})_{k\geq 1}$ részsorozatnak a határértéke $\lim\limits_{k\to\infty} b_k = \lim\limits_{k\to\infty} (4k+1)^3 = +\infty$.

Ha minden $k \geq 0$ esetén

$$\begin{aligned} c_k = a_{4k+2} &= (4k+2)^3 \cdot \sin\left((4k+2)\frac{\pi}{2}\right) = (4k+2)^3 \cdot \sin((2k+1)\pi) \\ &= (4k+2)^3 \cdot 0 = 0, \end{aligned}$$

akkor a $(c_k)_{k\geq 1} = (a_{4k+2})_{k\geq 1}$ részsorozatnak a határértéke $\lim\limits_{k\to\infty} c_k = \lim\limits_{k\to\infty} 0 = 0$.

A két részsorozat határértéke nem egyezik meg, ezért az $(a_n)_{n\geq 0}$ sorozatnak nincs határértéke. □

(f) $a_n = (1 + \cos n\pi) \cdot \dfrac{n}{n+1}$, $(n \geq 1)$.

Megoldás. Az $(a_n)_{n\geq 1}$ sorozat páros indexű tagjainak részsorozata $(b_k)_{k\geq 1} = (a_{2k})_{k\geq 1}$, ahol $b_k = a_{2k} = (1 + \cos(2k\pi)) \cdot \frac{2k}{2k+1} = (1+1) \cdot \frac{2k}{2k+1} = \frac{4k}{2k+1}$. Ez a részsorozat konvergens és határértéke $\lim\limits_{k\to\infty} b_k = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{4k}{2k+1} = 2$.
Hasonlóan az $(a_n)_{n\geq 1}$ sorozat páratlan indexű tagjainak részsorozata $(c_k)_{k\geq 0} = (a_{2k+1})_{k\geq 0}$, ahol $c_k = a_{2k+1} = (1+\cos((2k+1)\pi)) \cdot \frac{2k+1}{2k+2} = (1-1) \cdot \frac{2k+1}{2k+2} = 0$. Ez a részsorozat konvergens és határértéke $\lim\limits_{k\to\infty} c_k = \lim\limits_{k\to\infty} 0 = 0$.
Mivel az $(a_n)_{n\geq 1}$ sorozatnak van két konvergens részsorozata, amelyek határértéke különböző, ezért az $(a_n)_{n\geq 1}$ sorozatnak nem lehet határértéke (a határérték egyértelműsége miatt). □

1.4. Feladat. Adottak az $e_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ és $e'_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$ általános tagú sorozatok.

(a) Igazold, hogy az $(e'_n)_{n\geq 1}$ sorozat csökkenő és alulról korlátos, ezért konvergens!

Megoldás. Az (e'_n) sorozat alulról korlátos, mert $0 \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$, minden $n \geq 1$ esetén, tehát 0 a sorozat egy alsó korlátja.

Az (e'_n) sorozat csökkenő, mert minden $n \geq 1$ esetén

$$\begin{aligned} & e'_n \geq e'_{n+1} \\ \iff \quad & \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \geq \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2} \\ \iff \quad & \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} \geq \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2} & \Big/ \cdot \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+2} \left(\frac{n+1}{n}\right) \\ \iff \quad & \left[\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right]^{n+2} \geq \frac{n+1}{n} & \Big/ \sqrt[n+2]{} \\ \iff \quad & \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} \geq \sqrt[n+2]{\frac{n+1}{n}} \end{aligned}$$

$$\iff \quad \frac{\frac{n+1}{n} + \overbrace{1 + \cdots + 1}^{n+1}}{n+2} \geq \sqrt[n+2]{\frac{n+1}{n} \cdot \underbrace{1 \cdot \ldots \cdot 1}_{n+1}},$$

ahol a baloldalon az $a_1 = \frac{n+1}{n}$, $a_2 = \cdots = a_{n+2} = 1$ számok számtani közepe áll, míg a jobboldalon a mértani közepük. Így az

$$\frac{a_1 + \cdots + a_N}{N} \geq \sqrt[N]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_N}, \quad \forall\, a_1, \ldots, a_N \geq 0,$$

számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenség alapján következik, hogy a sorozat csökkenő.

Mivel az (e'_n) sorozat csökkenő és alulról korlátos, ezért konvergens. □

(b) Igazold, hogy az $(e_n)_{n\geq 1}$ sorozat monoton növekvő!

Megoldás. Az (e_n) sorozat növekvő, mert minden $n \geq 1$ esetén

$$\begin{aligned}
& e_n \leq e_{n+1} \\
\iff \quad & \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \\
\iff \quad & \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \leq \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \qquad \Big/ \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} \\
\iff \quad & \frac{n}{n+1} \leq \left[\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right]^{n+1} \qquad \Big/ \sqrt[n+1]{} \\
\iff \quad & \sqrt[n+1]{\frac{n}{n+1}} \leq \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} \\
\iff \quad & \sqrt[n+1]{\frac{n}{n+1} \cdot \underbrace{1 \cdot \ldots \cdot 1}_{n}} \leq \frac{\frac{n}{n+1} + \overbrace{1 + \cdots + 1}^{n}}{n+1}
\end{aligned}$$

ahol a jobboldalon az $a_1 = \frac{n}{n+1}$, $a_2 = \cdots = a_{n+1} = 1$ számok számtani közepe áll, míg a baloldalon a mértani közepük. Így az

$$\frac{a_1 + \cdots + a_N}{N} \geq \sqrt[N]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_N}, \quad \forall\, a_1, \ldots, a_N \geq 0,$$

számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenség alapján következik, hogy a sorozat növekvő. □

(c) Igazold, hogy $e_n < e'_n$, minden $n \geq 1$ esetén és ezért $e_n < e'_1 = 4$, minden $n \geq 1$ esetén! Igazold, hogy az $(e_n)_{n\geq 1}$ sorozat konvergens!

Megoldás. Mivel

$$e'_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)}_{>1} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e_n, \quad \forall\, n \geq 1,$$

ezért $e'_n \geq e_n$ minden $n \geq 1$ esetén. Továbbá az (e'_n) sorozat csökkenő, ezért $e'_n \leq e'_1$, minden $n \geq 1$ esetén. Összegezve

$$e_n < e'_n \leq e'_1 = \left(1 + \frac{1}{1}\right)^{1+1} = 4, \quad \forall\, n \geq 1,$$

így az (e_n) sorozat felülről korlátos és 4 egy felső korlátja.

Belláttuk, hogy az (e_n) sorozat növekvő és felülről korlátos, ezért a sorozat konvergens. □

(d) Ha $e = \lim_{n\to\infty} e_n = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)$, akkor igazold, hogy $\lim_{n\to\infty} e'_n = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = e.$

Megoldás. A két sorozatnak ugyanaz a határértéke, mert

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\\ &= e\cdot 1 = e,\end{aligned}$$

ahol felhasználtuk, hogy az $e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ és $b_n = 1+\frac{1}{n}$ általános tagú konvergens sorozatok szorzatának határértéke megegyezik a határértékek szorzatával. □

1.22. Megjegyzés

$$e_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} =: e'_n, \quad \forall\, n \geq 1.$$

Az (e_n) sorozat tagjaival alulról becsülhetjük az e számot a kívánt pontossággal, míg az (e'_n) sorozat tagjaival pedig felülről becsülhetjük a kívánt pontossággal. ◇

1.3.2. Majorálási kritérium, fogó tétel

1.5. Feladat. Igazold, hogy $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right) = e.$

Megoldás. Minden $n \geq 1$ esetén

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= 1 + C_n^1\cdot\frac{1}{n} + C_n^2\cdot\frac{1}{n^2} + \cdots + C_n^k\cdot\frac{1}{n^k} + \cdots + C_n^n\cdot\frac{1}{n^n}\\ &= 1 + \frac{n}{1!}\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\cdot\frac{1}{n^k} + \cdots + \frac{n!}{n!}\cdot\frac{1}{n^n}\\ &\leq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{k!} + \cdots + \frac{1}{n!},\end{aligned}$$

mivel $\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} \leq 1$, minden $1 \leq k \leq n$ esetén. Tehát

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}, \qquad \forall\, n \geq 1. \tag{1.1}$$

Legyen $k \in \mathbb{N}^*$ egy rögzített szám. Ekkor minden $n \geq 1$ esetén

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= 1 + C_n^1\cdot\frac{1}{n} + C_n^2\cdot\frac{1}{n^2} + \cdots + C_n^k\cdot\frac{1}{n^k} + \cdots + C_n^n\cdot\frac{1}{n^n}\\ &\geq 1 + C_n^1\cdot\frac{1}{n} + C_n^2\cdot\frac{1}{n^2} + \cdots + C_n^k\cdot\frac{1}{n^k}\\ &= 1 + \frac{n}{1!}\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\cdot\frac{1}{n^k}\\ &= 1 + \frac{1}{1!}\cdot\frac{n}{n} + \frac{1}{2!}\cdot\frac{n(n-1)}{n^2} + \cdots + \frac{1}{k!}\cdot\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}.\end{aligned}$$

Határértékre térve n szerint kapjuk, hogy tetszőleges $k \geq 1$ esetén

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &\geq \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{1!}\cdot\frac{n}{n} + \frac{1}{2!}\cdot\frac{n(n-1)}{n^2} + \cdots + \frac{1}{k!}\cdot\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}\right)\\ &= 1 + \frac{1}{1!}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n} + \frac{1}{2!}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)}{n^2} + \cdots + \frac{1}{k!}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}\end{aligned}$$

$$= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{k!}.$$

Tehát minden $k \geq 1$ esetén

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{k!}. \tag{1.2}$$

Az (1.1) és (1.2) egyenlőtlenségek alapján minden $k \geq 1$ esetén

$$e \geq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots \frac{1}{k!} \geq \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k,$$

és mivel $\lim\limits_{k\to\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = e$, ezért a fogó tétel alapján létezik a keresett határérték és

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots \frac{1}{n!}\right) = e.$$

□

1.6. Feladat. Igazold, hogy

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} = +\infty$;

Megoldás. Legyen $N = [\log_2 n]$. Ekkor $-1 + \log_2 n < N \leq \log_2 n$, ahonnan $2^N \leq n$. Minden $n \geq 1$ esetén

$$\begin{aligned}
a_n &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^N} + \frac{1}{2^N+1} + \cdots + \frac{1}{n} \\
&\geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^N} \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \ldots + \\
&\quad + \left(\frac{1}{2^{N-1}+1} + \frac{1}{2^{N-1}+2} + \cdots + \frac{1}{2^N}\right) \\
&\geq 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \ldots + \\
&\quad + \left(\underbrace{\frac{1}{2^N} + \frac{1}{2^N} + \cdots + \frac{1}{2^N}}_{2^{N-1}\text{-szer}}\right) \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{4}{8} + \cdots + \frac{2^{N-1}}{2^N} \\
&= 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2}}_{N\text{-szer}} \\
&= 1 + \frac{N}{2} \\
&> 1 + \frac{-1 + \log_2 n}{2} \\
&= \frac{1 + \log_2 n}{2}.
\end{aligned}$$

Mivel $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+\log_2 n}{2} = +\infty$ és $a_n \geq \frac{1+\log_2 n}{2}$, minden $n \geq 1$ esetén, ezért a majorálási kritérium alapján $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$. □

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} = +\infty$, ahol $p < 1$.

Megoldás. Mivel $\frac{1}{k^\alpha} \geq \frac{1}{k}$ minden $k \geq 1$ és $\alpha \leq 1$ esetén, ezért minden $n \geq 1$ esetén

$$a_n = \frac{1}{1^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \ldots + \frac{1}{n^\alpha} \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

Továbbá $\lim\limits_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = +\infty$, ezért $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{1^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \cdots + \frac{1}{n^\alpha} = +\infty$ a majorálási kritérium alapján, minden $\alpha \leq 1$ esetén. □

1.7. Feladat. Számítsd ki a következő határértékeket (felhasználható az 1.14. fogó tétel):

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin n}{n}$;

Megoldás. Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $\sin x \in [-1, 1]$, ezért

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}, \qquad \forall n \geq 1.$$

Mivel $\lim\limits_{n\to\infty} -\frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, ezért a fogó tétel alapján létezik a $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n}$ határérték is és egyenlő 0-val, vagyis

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0.$$

Másként, használhatjuk az 1.15. Tulajdonságot is, mivel a $(\sin n)_{n\geq 1}$ sorozat korlátos (alsó korlát -1, felső korlát 1) és az $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ sorozat tart a nullához, vagyis $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, ezért $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \sin n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$. □

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\cos n}{\ln n}$;

Megoldás. Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $\cos x \in [-1, 1]$, ezért

$$-\frac{1}{\ln n} \leq \frac{\cos n}{\ln n} \leq \frac{1}{\ln n}, \qquad \forall n \geq 2,$$

($\ln n > 0$, minden $n \geq 2$-re). Mivel $\lim\limits_{n\to\infty} -\frac{1}{\ln n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} = 0$, ezért a fogó tétel alapján létezik a $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\cos n}{\ln n}$ határérték is és egyenlő 0-val, vagyis

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cos n}{\ln n} = 0.$$

Másként, használhatjuk az 1.15. Tulajdonságot is, mivel a $(\cos n)_{n\geq 1}$ sorozat korlátos (alsó korlát -1, felső korlát 1) és az $\left(\frac{1}{\ln n}\right)_{n\geq 1}$ sorozat esetén $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} = 0$, ezért $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} \cdot \cos n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\cos n}{\ln n} = 0$. □

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{q^n}{n!}$, ahol $q \in \mathbb{R}$;

Megoldás. Megjegyezzük, hogy $q = 0$ esetén $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{q^n}{n!} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{0^n}{n!} = 0$.

Először igazoljuk, hogy $q > 0$ esetén szintén $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{q^n}{n!} = 0$. Minden $q > 0$ esetén létezik $k = [q] + 1 \in \mathbb{N}$ úgy, hogy $k - 1 \le q < k$. Ekkor minden $n \ge k$ esetén

$$\begin{aligned}
\frac{q^n}{n!} < \frac{k^n}{n!} &= \frac{k \cdot k \cdot k \cdot \ldots \cdot k \cdot \quad k \quad \cdot \ldots \cdot k}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k \cdot (k+1) \cdot \ldots \cdot n} \\
&= \frac{k}{1} \cdot \frac{k}{2} \cdot \frac{k}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{k}{k} \cdot \frac{k}{k+1} \cdot \underbrace{\frac{k}{k+2}}_{<\frac{k}{k+1}} \cdot \ldots \cdot \underbrace{\frac{k}{n}}_{<\frac{k}{k+1}} \\
&< \frac{k}{1} \cdot \frac{k}{2} \cdot \frac{k}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{k}{k} \cdot \underbrace{\frac{k}{k+1} \cdot \frac{k}{k+1} \cdot \ldots \cdot \frac{k}{k+1}}_{n-k} \\
&= \frac{k}{1} \cdot \frac{k}{2} \cdot \frac{k}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{k}{k} \cdot \Bigg(\underbrace{\frac{k}{k+1}}_{<1}\Bigg)^{n-k}.
\end{aligned}$$

Összegezve, minden $n \ge k$ esetén

$$0 \le \frac{q^n}{n!} \le \frac{k}{1} \cdot \frac{k}{2} \cdot \frac{k}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{k}{k} \cdot \left(\frac{k}{k+1}\right)^{n-k},$$

továbbá $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{k}{1} \cdot \frac{k}{2} \cdot \frac{k}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{k}{k} \cdot \left(\frac{k}{k+1}\right)^{n-k} = \frac{k}{1} \cdot \frac{k}{2} \cdot \frac{k}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{k}{k} \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^{n-k} = \frac{k}{1} \cdot \frac{k}{2} \cdot \frac{k}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{k}{k} \cdot 0 = 0$, ezért a fogó tétel alapján $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{q^n}{n!} = 0$ (ha $q > 0$).

A $q < 0$ eset visszavezethető a $q > 0$ esetre, mivel egy (a_n) sorozat esetén

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0 \iff \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Így a fentiek alapján

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{q^n}{n!}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|q|^n}{n!} = 0 \iff \lim_{n\to\infty} \frac{q^n}{n!} = 0$$

és a bal oldalról igazoltuk, hogy teljesül, ezért a vele egyenértékű jobb oldal is kell teljesüljön. □

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n + n^2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right);$

Megoldás. A $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$, mert $\lim\limits_{n\to\infty} n^a q^n$ alakú határértékről van szó, ahol $|q| < 1$.

Ha $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, akkor $\sin x \le x$, ezért minden $n \ge 1$ esetén

$$0 \le n^2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) \le \frac{n^2}{2^n}\pi.$$

Újra felhasználva, hogy $|q| < 1$ esetén $\lim\limits_{n\to\infty} n^a q^n = 0$ kapjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2^n}\pi = \pi \lim_{n\to\infty} n^2 \left(\frac{1}{2}\right)^n = \pi \cdot 0 = 0.$$

Így a fenti egyenlőtlenségből a fogó tétel alapján következik, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 \sin\frac{\pi}{2^n} = 0$.

Összegezve $\lim\limits_{n\to\infty} \left[n \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n + n^2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)\right] = 0$. □

(e) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\cos n\pi)\cdot\dfrac{n}{n^2+1}$;

Megoldás. Minden $x\in\mathbb{R}$ esetén $\cos x\in[-1,1]$, ezért minden $n\geq 1$-re

$$\begin{aligned} & -1\leq\cos n\pi\leq 1 && \Big/ +1\\ \iff\quad & 0\leq 1+\cos n\pi\leq 2 && \Big/ \cdot\frac{n}{n^2+1}\\ \iff\quad & 0\leq(1+\cos n\pi)\cdot\frac{n}{n^2+1}\leq 2\cdot\frac{n}{n^2+1}. \end{aligned}$$

Mivel $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1}=0$, ezért a fogó tétel alapján létezik a $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\cos n\pi)\cdot\frac{n}{n^2+1}$ határérték és egyenlő 0-val, vagyis $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\cos n\pi)\cdot\frac{n}{n^2+1}=0$.

Másként, használhatjuk az 1.15. Tulajdonságot is, mivel az $(1+\cos n\pi)_{n\geq 1}$ sorozat korlátos (alsó korlát 0, felső korlát 2) és az $\left(\frac{n}{n^2+1}\right)_{n\geq 1}$ sorozat esetén $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1}=0$, ezért

$$\lim_{n\to\infty}(1+\cos n\pi)\cdot\frac{n}{n^2+1}=0.$$

□

(f) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$;

Megoldás. Minden $1\leq k\leq n$ esetén $\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\leq\frac{1}{\sqrt{n^2+k}}\leq\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$, ezért

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\leq\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\leq\frac{n}{\sqrt{n^2+1}},\qquad\forall n\geq 1. \tag{1.3}$$

Mivel $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=1$ és $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=1$, ezért az (1.3) egyenlőtlenségből a fogó tétel alapján következik, hogy létezik a $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$ határérték és egyenlő 1-gyel, vagyis

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1.$$

□

(g) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^n}{(n!)^2}$;

Megoldás. Megvizsgáljuk, hogy milyen gyorsan növekszik vagy csökken a sorozat:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{[(n+1)!]^2}}{\frac{n^n}{(n!)^2}}=\frac{(n+1)^{n+1}}{[(n+1)!]^2}\cdot\frac{(n!)^2}{n^n}=\frac{(n+1)^{n-1}}{n^n}=\frac{1}{n+1}\cdot\underbrace{\frac{(n+1)^n}{n^n}}_{e_n}\leq\frac{4}{n+1}\leq\frac{4}{5},$$

ha $n\geq 4$ (lásd az 1.4. Feladatot). Innen kapjuk, hogy minden $n\geq 4$ esetén

$$\frac{a_n}{a_4}=\frac{a_5}{a_4}\cdot\frac{a_6}{a_5}\cdot\ldots\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdot\frac{a_n}{a_{n-1}}\leq\underbrace{\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}}_{(n-4)\text{-szer}}=\left(\frac{4}{5}\right)^{n-4}.$$

A sorozat tagjaira felírhatjuk a következő egyenlőtlenséget: minden $n \geq 4$ esetén

$$0 \leq a_n \leq a_4 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{n-4} \quad \Longleftrightarrow \quad 0 \leq \frac{n^n}{(n!)^2} \leq \frac{4^4}{(4!)^2} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{n-4}.$$

Mivel $\lim\limits_{n\to\infty} a_4 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{n-4} = a_4 \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^{n-4} = a_4 \cdot 0 = 0$. Így a fenti egyenlőtlenségből a fogó tétel alapján kapjuk, hogy létezik a $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n!)^2}$ határérték és egyenlő 0-val, vagyis $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n!)^2} = 0$. □

(h) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot \ldots \cdot (2n-1)^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot \ldots \cdot (2n)^2}$;

Megoldás. Igazoljuk, hogy a határérték 0. Mivel $k^2 \geq k^2 - 1 = (k-1)(k+1)$, minden $k \in \mathbb{R}$ esetén, ezért

$$\frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot \ldots \cdot (2n-1)^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot \ldots \cdot (2n)^2} \leq \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot \ldots \cdot (2n-1)^2}{(2^2-1) \cdot (4^2-1) \cdot (6^2-1) \cdot \ldots \cdot ((2n)^2-1)} =$$
$$= \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot \ldots \cdot (2n-1)^2}{(1 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 5) \cdot (5 \cdot 7) \cdot \ldots \cdot ((2n-1) \cdot (2n+1))} = \frac{1}{2n+1},$$

minden $n \geq 1$ esetén. Tehát

$$0 \leq \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot \ldots \cdot (2n-1)^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot \ldots \cdot (2n)^2} \leq \frac{1}{2n+1}, \quad \forall n \geq 1.$$

Mivel $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} = 0$, ezért a fogó tétel alapján $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot \ldots \cdot (2n-1)^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot \ldots \cdot (2n)^2} = 0$. □

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n)}$;

Megoldás. Az előző feladatban igazoltuk, hogy

$$0 \leq \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot \ldots \cdot (2n-1)^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot \ldots \cdot (2n)^2} \leq \frac{1}{2n+1}, \quad \forall n \geq 1,$$

ahonnan következik, hogy

$$0 \leq \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n)} \leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}}, \quad \forall n \geq 1,$$

Mivel $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}} = 0$, ezért a fogó tétel alapján $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n)} = 0$. □

(j) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(n+1)}{\ln n}$;

Megoldás. Igazoljuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln n} = 1$. Az ln függvény növekvő, ezért $1 \leq \frac{\ln(n+1)}{\ln n}$, minden $n \geq 2$ esetén. Továbbá

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln n} - 1 = \frac{\ln(n+1) - \ln n}{\ln n} = \frac{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}{\ln n} = \frac{n \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}{n \ln n} = \frac{\ln\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right]}{n \ln n} \leq \frac{\ln 4}{n \ln n},$$

minden $n \geq 2$ esetén és felhasználtuk az 1.4. feladatban igazolt $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq 4$ egyenlőtlenséget, minden $n \geq 1$ esetén. Összegezve

$$1 \leq \frac{\ln(n+1)}{\ln n} \leq 1 + \frac{\ln 4}{n \ln n}, \quad \forall n \geq 2.$$

Mivel $\lim\limits_{n\to\infty} 1 + \frac{\ln 4}{n \ln n} = 1$, ezért a fogó tétel alapján $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln n} = 1$. □

(k) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\dots(1+a^n)}$, ahol $a > 0$.

Megoldás. Ha $0 < a < 1$, akkor

$$0 \leq \frac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)} < a^n,$$

mivel $1 + a^k > 1$ minden $k = 1, 2, \dots, n$-re. Mivel $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$, ha $0 \leq a < 1$, ezért a fogó tétel alapján létezik a következő határérték és egyenlő

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\dots(1+a^n)} = 0.$$

Ha $a \geq 1$, akkor felhasználjuk, hogy $1 + a^n > a^n$ és $1 + a^k \geq 2$ minden $k \geq 1$ esetén, így

$$\begin{aligned}\frac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)} &\leq \frac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^{n-1})a^n} \\ &= \frac{1}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^{n-1})} \\ &\leq \frac{1}{\underbrace{2\cdot 2\cdot \ldots \cdot 2}_{(n-1)\text{-szer}}} = \frac{1}{2^{n-1}}.\end{aligned}$$

Tehát minden $n \geq 1$ és $a \geq 1$ esetén

$$0 \leq \frac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)} \leq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Mivel $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 0$, ezért a fogó tétel alapján

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)} = 0.$$

□

1.3.3. Cesaro–Stolz-tétel

1.8. Feladat. Számold ki a következő határértékeket (felhasználható az 1.16. Cesaro-Stolz–tétel):

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n}{n}$;

Megoldás. Legyen $a_n = 2^n$ és $b_n = n$, minden $n \geq 1$ esetén. A (b_n) sorozat szigorúan növekvő, mivel $b_{n+1} = n + 1 > n = b_n$ minden $n \geq 1$ esetén, továbbá nem korlátos, mert $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} n = +\infty$. Így a Cesaro-Stolz–tétel alapján

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \overset{C.S.}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1} - 2^n}{(n+1) - n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n \cdot (2-1)}{1} \\ &= \lim_{n\to\infty} 2^n = +\infty.\end{aligned}$$

□

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{3^n}$;

Megoldás. Legyenek $a_n = n^2$ és $b_n = 3^n$, minden $n \geq 1$ esetén. A (b_n) sorozat szigorúan növekvő, mivel $b_{n+1} = 3^{n+1} \geq 3^n = b_n$, minden $n \geq 1$ esetén, továbbá a (b_n) sorozat nem korlátos, mert $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} 3^n = +\infty$. A Cesaro-Stolz–tétel alapján

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{3^n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} \overset{C.S.}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2-n^2}{3^{n+1}-3^n}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{(n^2+2n+1)-n^2}{3^n\cdot(3-1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3^n\cdot 2} = \frac{1}{2}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3^n}. \qquad (1.4)
\end{aligned}$$

Legyenek $c_n = 2n+1$ és $d_n = 3^n$ minden $n \geq 1$ esetén. A $(d_n) = (b_n)$ sorozatról korábban beláttuk, hogy szigorúan növekvő és nem korlátos, ezért újból alkalmazva a Cesaro-Stolz–tételt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3^n} &= \frac{1}{2}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{d_n} \overset{C.S.}{=} \frac{1}{2}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{c_{n+1}-c_n}{d_{n+1}-d_n}\\
&= \frac{1}{2}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{2(n+1)+1-(2n+1)}{3^{n+1}-3^n}\\
&= \frac{1}{2}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{2}{2\cdot 3^n} = \frac{1}{2}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3^n} = 0. \qquad (1.5)
\end{aligned}$$

Az (1.4) és (1.5) összefüggések alapján $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{3^n} = \frac{1}{2}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3^n} = 0$. $\square$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{(n+1)^{k+1}}$, $k \in \mathbb{N}^*$;

Megoldás. A Cesaro–Stolz-tételt fogjuk alkalmazni. Tekintsük az $a_n = 1^k+2^k+\ldots+n^k$ és $b_n = (n+1)^{k+1}$ általános tagú sorozatokat. A $(b_n)_{n\geq 1}$ sorozat szigorúan monoton növekvő és nem korlátos, ezért alkalmazhatjuk a Cezaro-Stolz–tételt:

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\frac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{(n+1)^{k+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} \overset{C.S.}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^k}{(n+2)^{k+1}-(n+1)^{k+1}} =\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^k}{[(n+2)-(n+1)][(n+2)^k+(n+2)^{k-1}(n+1)+\ldots+(n+2)(n+1)^{k-1}+(n+1)^k]}\\
&\quad= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^k}{[(n+2)^k+(n+2)^{k-1}(n+1)+\ldots+(n+2)(n+1)^{k-1}+(n+1)^k]} =\\
&\qquad= \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^k}{(n+1)^k\left[\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^k+\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{k-1}+\ldots+\left(\frac{n+2}{n+1}\right)+1\right]} =\\
&\quad= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^k+\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{k-1}+\ldots+\left(\frac{n+2}{n+1}\right)+1} = \frac{1}{\underbrace{1+1+\ldots+1}_{(k+1)\text{-szer}}} = \frac{1}{k+1}.
\end{aligned}$$

$\square$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^2+4^2+\ldots+(2n)^2}{1^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2}$;

Megoldás. Legyenek $a_n = 2^2+4^2+\ldots+(2n)^2$ és $b_n = 1^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2$, minden $n \geq 1$ esetén. A (b_n) sorozat szigorúan növekvő, mivel $b_{n+1} = b_n + (2(n+1)-1)^2 > b_n$, minden $n \geq 1$ esetén, továbbá a (b_n) nem korlátos, mivel $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \geq \lim\limits_{n\to\infty}(2n)^2 = +\infty$. Így Cesaro–Stolz-tétel alapján

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^2+4^2+\ldots+(2n)^2}{1^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} \overset{C.S.}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(2(n+1))^2}{(2(n+1)-1)^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)^2}{(2n+1)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2} \cdot \frac{\left(2+\frac{2}{n}\right)^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(2+\frac{2}{n}\right)^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^2} = \frac{2^2}{2^2} = 1.$$

□

(e) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n}$;

Megoldás. Legyenek $a_n = \ln n$ és $b_n = n$ minden $n \geq 1$ esetén. A (b_n) sorozat szigorúan monoton növekvő és nem korlátos, ezért a Cesaro-Stolz–tétel alapján

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \overset{C.S.}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1)-\ln n}{(n+1)-n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} (\ln(n+1)-\ln n) = \lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \overset{(*)}{=} \ln\left(\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n}\right) = \ln 1 = 0,$$

ahol a $(*)$ egyenlőségnél kihasználtuk, hogy a természetes alapú logaritmus függvény folytonos, tehát felcserélhető a határértékkel. □

(f) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^a}$, ahol $a \geq 1$;

Megoldás. Mivel $n^a \geq n$ és $\ln n \geq \ln 1 = 0$ minden $n \geq 1$ és $a \geq 1$ esetén, ezért

$$0 \leq \frac{\ln n}{n^a} \leq \frac{\ln n}{n}, \qquad \forall\, n \geq 1.$$

Az előző alpontban beláttuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$, ezért a fogó tétel alapján létezik a $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^a}$ határérték és egyenlő 0-val, vagyis

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^a} = 0.$$

□

(g) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\left(\frac{1^2}{5^1}+\frac{2^2}{5^2}+\frac{3^2}{5^3}+\ldots+\frac{n^2}{5^n}\right)$;

Megoldás. A $b_n = (n^2)$ sorozat szigorúan monoton növekvő és nem korlátos, így a Cesaro-Stolz–tételt használva kiszámíthatjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\left(\frac{1^2}{5^1}+\frac{2^2}{5^2}+\frac{3^2}{5^3}+\ldots+\frac{n^2}{5^n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1^2}{5^1}+\frac{2^2}{5^2}+\frac{3^2}{5^3}+\ldots+\frac{n^2}{5^n}}{n^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \overset{C.S.}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^2}{5^{n+1}}}{(n+1)^2-n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+1)\cdot 5^{n+1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n+1} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{5^{n+1}} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{5^{n+1}} \overset{C.S.}{=} \frac{1}{2} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{(2(n+1)+1)-(2n+1)}{5^{n+2}-5^{n+1}} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{2}{4\cdot 5^{n+1}} = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0.$$

□

(h) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{n}$;

Megoldás. Legyenek $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$ és $b_n = n$ sorozatok. A $(b_n)_{n\geq 1}$ sorozat monoton növekvő és nem korlátos, így a Cesaro-Stolz–tétel alapján

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \overset{C.S.}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{(n+1) - n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

□

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$;

Megoldás. Legyenek $a_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}$ és $b_n = \sqrt{n}$ sorozatok. A $(b_n)_{n\geq 1}$ sorozat növekvő és nem korlátos, így a Cesaro-Stolz–tétel alapján

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \overset{C.S.}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \cdot \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{(\sqrt{n+1})^2 - (\sqrt{n})^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \cdot \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{(n+1) - n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \sqrt{\frac{n}{n+1}}}{1} = 2.$$

□

(j) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \cdots + \frac{1}{\ln n}\right)$.

Megoldás. Legyenek $a_n = 1 + \frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \ldots + \frac{1}{\ln n}$ és $b_n = n$ sorozatok. A $(b_n)_{n\geq 2}$ sorozat növekvő és nem korlátos, így a Cesaro-Stolz–tétel alapján

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \cdots + \frac{1}{\ln n}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \overset{C.S.}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\ln(n+1)}}{(n+1) - n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln(n+1)} = 0.$$

□

1.9. Feladat. Számold ki a következő határértékeket:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{n}{1} \cdot \ln 2 + \frac{n-1}{2} \cdot \ln 3 + \ldots + \frac{1}{n} \cdot \ln(n+1)}{n \cdot \ln 2 + (n-1) \cdot \ln 3 + \cdots + 1 \cdot \ln(n+1)}$;

Megoldás. Tekintsük az $a_n = \frac{n}{1} \ln 2 + \frac{n-1}{2} \ln 3 + \ldots + \frac{1}{n} \ln(n+1)$ és

$$b_n = n \ln 2 + (n-1) \ln 3 + \ldots + 1 \cdot \ln(n+1)$$

sorozatokat. A $(b_n)_{n\geq 1}$ sorozat szigorúan növekvő és nem korlátos, mert $b_{n+1} - b_n = \ln 2 + \ln 3 + \ldots + \ln(n+2) > 0$ és $b_n > \ln(n+1)$, ami nem korlátos. Megpróbáljuk alkalmazni a Cesaro-Stolz–tételt az $x_n = \dfrac{a_n}{b_n}$ sorozatra. Ehhez kiszámoljuk a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln 2 + \frac{1}{2} \ln 3 + \ldots + \frac{1}{n} \ln(n+1) + \frac{1}{n+1} \ln(n+2)}{\ln 2 + \ln 3 + \ldots + \ln(n+1) + \ln(n+2)}$$

határértéket, amit szintén a Cesaro-Stolz–tétel újabb alkalmazásával tudunk megtenni az $y_n = \dfrac{c_n}{d_n}$ sorozatra, ahol $c_n = a_{n+1} - a_n = \ln 2 + \frac{1}{2}\ln 3 + \ldots + \frac{1}{n}\ln(n+1) + \frac{1}{n+1}\ln(n+2)$ és $d_n = b_{n+1} - b_n = \ln 2 + \ln 3 + \ldots + \ln(n+1) + \ln(n+2)$. A $(d_n)_{n\geq 1}$ sorozat szintén szigorúan növekvő, mert $d_n - d_{n-1} = \ln(n+2) > 0$, és nem korlátos, mert $d_n > \ln(n+2)$. Továbbá

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_{n+1} - c_n}{d_{n+1} - d_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+2}\ln(n+3)}{\ln(n+3)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+2} = 0,$$

ezért az $y_n = \dfrac{c_n}{d_n}$ sorozatra alkalmazott Cesaro-Stolz–tétel alapján

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{d_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{c_{n+1} - c_n}{d_{n+1} - d_n} = 0.$$

Végül az $x_n = \dfrac{a_n}{b_n}$ sorozat esetén a Cesaro-Stolz–tétel szerint

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{1}\cdot \ln 2 + \frac{n-1}{2}\cdot \ln 3 + \ldots + \frac{1}{n}\cdot \ln(n+1)}{n\cdot \ln 2 + (n-1)\cdot \ln 3 + \cdots + 1\cdot \ln(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = 0.$$

□

(b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(\ln 2)^2 + (\ln 3)^2 + \cdots + (\ln n)^2}{n^a}$, $(a > 0)$.

Megoldás. Tekintsük az $a_n = (\ln 2)^2 + (\ln 3)^2 + \cdots + (\ln n)^2$ és $b_n = n^a$ általános tagú sorozatokat. A (b_n) sorozat szigorúan növekvő, mert $b_{n+1} = (n+1)^a > n^a = b$ minden $n \geq 1$ és $a > 0$ esetén, továbbá a (b_n) sorozat nem korlátos és határértéke $\lim\limits_{n\to\infty} n^a = +\infty$. Ezért

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{(\ln 2)^2 + (\ln 3)^2 + \cdots + (\ln n)^2}{n^a} &= \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \overset{C.S.}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \\
= \lim_{n\to\infty} \frac{(\ln(n+1))^2}{(n+1)^a - n^a} &= \lim_{n\to\infty} \frac{(\ln(n+1))^2}{n^a} \cdot \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^a - 1} = \\
= \lim_{n\to\infty} \frac{(\ln(n+1))^2}{n^{a-1}} \cdot \frac{\frac{1}{n}}{(1+\frac{1}{n})^a - 1} &= \lim_{n\to\infty} \frac{(\ln(n+1))^2}{n^{a-1}} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{(1+\frac{1}{n})^a - 1} = \\
= \left(\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1)}{n^{\frac{a-1}{2}}}\right)^2 \cdot \frac{1}{a} &= \begin{cases} 0, & \text{ha } a > 1, \\ +\infty, & \text{ha } 0 < a \leq 1. \end{cases}
\end{aligned}$$

□

1.10. Feladat. Számold ki a következő határértékeket:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{p}$, $(p > 0)$;

Megoldás. Ebben az esetben $a_n = p$, minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén. Az 1.17. Tulajdonság alapján

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{p}{p} = 1.$$

□

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$;

Megoldás. Az 1.17. Tulajdonság alapján

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$

$\square$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}$;

Megoldás. Az 1.17. Tulajdonság alapján

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} (n+1) = +\infty.$$

$\square$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$;

Megoldás. Az 1.17. Tulajdonság alapján

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} &= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} \cdot \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \\
&= \frac{1}{e}.
\end{aligned}$$

$\square$

(e) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\ln n}$;

Megoldás. Az 1.17. Tulajdonság alapján

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\ln n} &= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1) - \ln n}{\ln n} + 1 \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}{\ln n} + 1 = \lim_{n\to\infty} \frac{n \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}{n \ln n} + 1 = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right]}{n \ln n} + 1 = 0 + 1 \\
&= 1,
\end{aligned}$$

mivel $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right]}{n \ln n} = 0$. Ez utóbbi határértéket a következőképpen számíthatjuk ki. Minden $n \geq 2$ esetén

$$1 \leq \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \leq 4,$$

ahonnan a logaritmus függvény monotonitása alapján, minden $n \geq 2$ esetén

$$0 = \ln 1 \leq \ln\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right] \leq \ln 4, \quad / : n \ln n$$

$$0 \leq \frac{\ln\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right]}{n \ln n} \leq \frac{4}{n \ln n}.$$

Mivel $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4}{n \ln n} = 0$, ezért a fogó tétel alapján $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right]}{n \ln n} = 0$. $\square$

(f) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\ln(n!)}$;

Megoldás. Az 1.17. Tulajdonság alapján

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\ln(n!)} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln[(n+1)!]}{\ln(n!)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln 2 + \ln 3 + \ldots + \ln(n+1)}{\ln 2 + \ln 3 + \ldots + \ln n} \\
&\overset{C.S.}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+2)}{\ln(n+1)} \\
&= 1,
\end{aligned}$$

ahol az utolsó előtti egyenlőségnél használjuk a Cesaro-Stolz tételt, illetve az utolsó egyenlőségben az előző alpont eredeményeit. □

(g) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{(n+1)\cdot(n+2)\cdot\ldots\cdot(n+n)}$;

Megoldás. Az 1.17. Tulajdonság alapján

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{(n+1)\cdot(n+2)\cdot\ldots\cdot(n+n)} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(n+1)\cdot(n+2)\cdot\ldots\cdot(n+n)}{n^n}} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)\cdot(n+3)\cdot\ldots\cdot(n+1+n+1)}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{(n+1)\cdot(n+2)\cdot\ldots\cdot(n+n)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)\cdot(2n+2)\cdot n^n}{(n+1)^{n+2}} = \lim_{n\to\infty} 2\cdot\frac{2n+1}{n+1}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = 2\cdot 2\cdot\frac{1}{e} = \frac{4}{e}.$$

□

(h) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3^{3n}(n!)^3}{(3n)!}}$;

Megoldás. Az 1.17. Tulajdonság alapján

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3^{3n}(n!)^3}{(3n)!}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{3^{3(n+1)}[(n+1)!]^3}{[3(n+1)]!} \cdot \frac{(3n)!}{3^{3n}(n!)^3} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{3^3(n+1)^3}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^3} \cdot \frac{3^3(1+\frac{1}{n})^3}{(3+\frac{1}{n})(3+\frac{2}{n})(3+\frac{3}{n})} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{3^3(1+\frac{1}{n})^3}{(3+\frac{1}{n})(3+\frac{2}{n})(3+\frac{3}{n})} = \frac{3^3}{3^3} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

□

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$, ha $a_n > 0$, úgy, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Megoldás. Az 1.17. Tulajdonság alapján

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n\cdot a_{n+1}}{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n} = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = a.$$

□

1.3.4. Fundamentális sorozatok

1.11. Feladat. Igazold, hogy a következő általános tagú sorozatok fundamentálisak (így az 1.19. Cauchy-tétel alapján konvergensek):

(a) $s_n = \dfrac{\cos x}{1\cdot 2} + \dfrac{\cos 2x}{2\cdot 3} + \dfrac{\cos 3x}{3\cdot 4} + \cdots + \dfrac{\cos nx}{n\cdot(n+1)}$, $(x \in \mathbb{R})$;

Megoldás. Mivel $\cos y \in [-1,1]$, ezért $0 \le |\cos y| \le 1$, minden $y \in \mathbb{R}$ esetén. Ha $m \ge n$ és $x \in \mathbb{R}$ tetszőleges, akkor

$$\begin{aligned}
|s_m - s_n| &= \left|\frac{\cos(n+1)x}{(n+1)(n+2)} + \frac{\cos(n+2)x}{(n+2)(n+3)} + \ldots + \frac{\cos mx}{m(m+1)}\right| \\
&\le \left|\frac{\cos(n+1)x}{(n+1)(n+2)}\right| + \left|\frac{\cos(n+2)x}{(n+2)(n+3)}\right| + \ldots + \left|\frac{\cos mx}{m(m+1)}\right| \\
&= \frac{|\cos(n+1)x|}{(n+1)(n+2)} + \frac{|\cos(n+2)x|}{(n+2)(n+3)} + \ldots + \frac{|\cos mx|}{m(m+1)} \\
&\le \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \ldots + \frac{1}{m(m+1)} \\
&= \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}\right) \\
&= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{m+1} \\
&< \frac{1}{n+1}.
\end{aligned}$$

A $(b_n) = \left(\frac{1}{n+1}\right)$ sorozat és minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

(i) $|s_m - s_n| \le b_n$, minden $m \ge n \ge 1$ esetén;

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$,

ezért az 1.20. Tulajdonság alapján az (s_n) sorozat fundamentális.

Megjegyzés. A fundamentális sorozat értelmezésében szereplő N_ε küszöbindex az (s_n) sorozat esetén a következőképpen határozható meg. Mivel $|s_m - s_n| \le \frac{1}{n+1}$, ezért szükséges találni egy olyan $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ indexet, hogy bármely $n \ge N_\varepsilon$ esetén $\frac{1}{n+1} < \varepsilon$. Ez utóbbi egyenlőtlenség alapján $\frac{1}{\varepsilon} - 1 < n$. Lényegében elég találni az $\frac{1}{\varepsilon} - 1$ számnál nagyobb egész számot. Ilyent az egész rész segítségével kaphatunk meg, mivel minden $x \in \mathbb{R}$ szám esetén $[x] \le x < [x] + 1$. Tehát legyen

$$N_\varepsilon := \left[\frac{1}{\varepsilon} - 1\right] + 1 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$$

(az $1/\varepsilon$ egész része), mivel minden $n \ge N_\varepsilon$ esetén

$$\frac{1}{\varepsilon} - 1 < N_\varepsilon \le n \iff \frac{1}{n+1} < \varepsilon,$$

ahonnan minden $m \ge n \ge N_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ esetén $|s_m - s_n| \le \frac{1}{n+1} < \varepsilon$. □

(b) $a_n = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2}$;

Megoldás. Minden $m \geq n$ esetén

$$\begin{aligned}
|a_m - a_n| &= \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots + \frac{1}{m^2} \\
&\leq \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots + \frac{1}{(m-1)m} \\
&= \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m}\right) \\
&= \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \\
&< \frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

Tehát

(i) $|a_m - a_n| \leq \frac{1}{n}$, minden $m \geq n \geq 1$ esetén;

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$,

ezért az 1.20. Tulajdonság alapján az (a_n) sorozat fundamentális.

Megjegyzés. A fundamentális sorozat értelmezésében szereplő N_ε küszöbindex az (a_n) sorozat esetén a következőképpen határozható meg. Mivel $|a_m - a_n| \leq \frac{1}{n}$, ezért szükséges találni egy olyan $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ indexet, hogy bármely $n \geq N_\varepsilon$ esetén $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Ez utóbbi egyenlőtlenség alapján $\frac{1}{\varepsilon} < n$. Lényegében elég találni az $\frac{1}{\varepsilon}$ számnál nagyobb egész számot. Ilyent az egész rész segítségével kaphatunk meg, mivel minden $x \in \mathbb{R}$ szám esetén $[x] \leq x < [x] + 1$. Tehát legyen

$$N_\varepsilon := \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1,$$

mivel minden $n \geq N_\varepsilon$ esetén

$$\frac{1}{\varepsilon} < N_\varepsilon \leq n \iff \frac{1}{n} < \varepsilon,$$

ahonnan minden $m \geq n \geq N_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ esetén $|a_m - a_n| \leq \frac{1}{n} < \varepsilon$. □

(c) $b_n = \dfrac{\sin x}{3} + \dfrac{2\sin 2x}{3^2} + \ldots + \dfrac{n \sin nx}{3^n}$, $(x \in \mathbb{R})$;

Megoldás. Minden $y \in \mathbb{R}$ esetén $0 \leq |\sin y| \leq 1$ ezért minden $m \geq n$ és $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned}
|a_m - a_n| &= \left|\frac{(n+1)\sin(n+1)x}{3^{n+1}} + \frac{(n+2)\sin(n+2)x}{3^{n+2}} + \cdots + \frac{m \sin mx}{3^m}\right| \\
&\leq \left|\frac{(n+1)\sin(n+1)x}{3^{n+1}}\right| + \left|\frac{(n+2)\sin(n+2)x}{3^{n+2}}\right| + \cdots + \left|\frac{m \sin mx}{3^m}\right| \\
&= \frac{(n+1)|\sin(n+1)x|}{3^{n+1}} + \frac{(n+2)|\sin(n+2)x|}{3^{n+2}} + \cdots + \frac{m|\sin mx|}{3^m} \\
&\leq \frac{n+1}{3^{n+1}} + \frac{n+2}{3^{n+2}} + \ldots + \frac{m}{3^m} \\
&\overset{(*)}{\leq} \frac{2^{n+1}}{3^{n+1}} + \frac{2^{n+2}}{3^{n+2}} + \ldots + \frac{2^m}{3^m} \\
&\leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \cdot \left(1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \ldots\right) \\
&= \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n,
\end{aligned}$$

ahol a $(*)$ egyenlőtlenségben felhasználtuk, hogy

$$2^n = (1+1)^n = 1 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n \geq C_n^1 = n, \qquad \forall\, n \geq 1.$$

Tehát

(i) $|b_m - b_n| \leq 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n$, minden $m \geq n \geq 1$ esetén;
(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$,

ezért az 1.20. Tulajdonság alapján a (b_n) sorozat fundamentális.

Megjegyzés. A fundamentális sorozat értelmezésében szereplő N_ε küszöbindex az (b_n) sorozat esetén a következőképpen határozható meg. Mivel $|b_m - b_n| \leq 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n$, ezért szükséges találni egy olyan $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ indexet, hogy bármely $n \geq N_\varepsilon$ esetén $2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n < \varepsilon$. Ez utóbbi egyenlőtlenség alapján $\ln\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) \cdot \left(\ln\left(\frac{3}{2}\right)\right)^{-1} = \frac{\ln 2 - \ln \varepsilon}{\ln 3 - \ln 2} < n$. Tehát legyen

$$N_\varepsilon := \max\left\{\left[\frac{\ln 2 - \ln \varepsilon}{\ln 3 - \ln 2}\right] + 1, 0\right\},$$

mivel minden $n \geq N_\varepsilon$ esetén

$$\frac{\ln 2 - \ln \varepsilon}{\ln 3 - \ln 2} < N_\varepsilon \leq n \iff 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n < \varepsilon,$$

ahonnan minden $m \geq n \geq N_\varepsilon = \max\left\{\left[\frac{\ln 2 - \ln \varepsilon}{\ln 3 - \ln 2}\right] + 1, 0\right\}$ esetén $|a_m - a_n| \leq \frac{1}{n} < \varepsilon$. □

(d) $c_n = \dfrac{\cos x}{1^2} + \dfrac{\cos 2x}{2^2} + \ldots + \dfrac{\cos nx}{n^2}$, $(x \in \mathbb{R})$;

Megoldás. Minden $y \in \mathbb{R}$ esetén $\cos y \in [-1, 1]$, így ezért minden $m \geq n \geq 1$ esetén és $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned}
|c_m - c_n| &= \left|\frac{\cos(n+1)x}{(n+1)^2} + \frac{\cos(n+2)x}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{\cos mx}{m^2}\right| \\
&\leq \left|\frac{\cos(n+1)x}{(n+1)^2}\right| + \left|\frac{\cos(n+2)x}{(n+2)^2}\right| + \cdots + \left|\frac{\cos mx}{m^2}\right| \\
&= \frac{|\cos(n+1)x|}{(n+1)^2} + \frac{|\cos(n+2)x|}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{|\cos mx|}{m^2} \\
&\leq \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{m^2} \\
&\leq \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{(m-1)m} \\
&= \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m}\right) \\
&= \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \\
&\leq \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

Tehát

(i) $|c_m - c_n| \leq \frac{1}{n}$, minden $m \geq n \geq 1$ esetén;
(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$,

ezért az 1.20. Tulajdonság alapján a (c_n) sorozat fundamentális. □

(e) $d_n = \dfrac{\operatorname{arctg} x}{1!} + \dfrac{\operatorname{arctg} 2x}{2!} + \ldots + \dfrac{\operatorname{arctg} nx}{n!}$, $(x \in \mathbb{R})$;

Megoldás. Minden $y \in \mathbb{R}$ esetén $\operatorname{arctg} y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, így ezért minden $m \geq n \geq 1$ esetén és $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned}
|d_m - d_n| &= \left|\frac{\operatorname{arctg}(n+1)x}{(n+1)!} + \frac{\operatorname{arctg}(n+2)x}{(n+2)!} + \cdots + \frac{\operatorname{arctg} mx}{m!}\right| \\
&\leq \left|\frac{\operatorname{arctg}(n+1)x}{(n+1)!}\right| + \left|\frac{\operatorname{arctg}(n+2)x}{(n+2)!}\right| + \cdots + \left|\frac{\operatorname{arctg} mx}{m!}\right| \\
&= \frac{|\operatorname{arctg}(n+1)x|}{(n+1)!} + \frac{|\operatorname{arctg}(n+2)x|}{(n+2)!} + \cdots + \frac{|\operatorname{arctg} mx|}{m!} \\
&\leq \frac{\pi/2}{(n+1)!} + \frac{\pi/2}{(n+2)!} + \cdots + \frac{\pi/2}{m!} \\
&\leq \frac{\pi}{2} \cdot \left[\frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{(m-1)m}\right] \\
&= \frac{\pi}{2} \cdot \left[\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m}\right)\right] \\
&= \frac{\pi}{2} \cdot \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right] \\
&\leq \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

Tehát

(i) $|d_m - d_n| \leq \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{n}$, minden $m \geq n \geq 1$ esetén;

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$,

ezért az 1.20. Tulajdonság alapján a (d_n) sorozat fundamentális. □

(f) $g_n = 1 + \dfrac{x^1}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!}$, $(x \in \mathbb{R})$.

Megoldás. Minden $m \geq n \geq 1$ esetén és $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned}
|g_m - g_n| &= \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{x^{n+2}}{(n+2)!} + \cdots + \frac{x^m}{m!}\right| \\
&\leq \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right| + \left|\frac{x^{n+2}}{(n+2)!}\right| + \cdots + \left|\frac{x^m}{m!}\right| \\
&= \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{|x|^{n+2}}{(n+2)!} + \cdots + \frac{|x|^m}{m!}.
\end{aligned}$$

Létezik $M \in \mathbb{N}^*$ szám úgy, hogy $M - 1 \leq |x| < M$ (vagyis $M - 1$ az $|x|$ szám egész része). Így ha $n > M$, akkor minden $k \geq n$ természetes szám esetén

$$\begin{aligned}
\frac{|x|^k}{k!} &\leq \frac{M^k}{k!} = \frac{M}{1} \cdot \frac{M}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{M}{M} \cdot \frac{M}{M+1} \cdot \ldots \cdot \frac{M}{k} \leq \frac{M}{1} \cdot \frac{M}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{M}{M} \cdot \left(\frac{M}{M+1}\right)^{k-M} \\
&= C \cdot \left(\frac{M}{M+1}\right)^{k-M},
\end{aligned}$$

ahol bevezettük a $C = \frac{M}{1} \cdot \frac{M}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{M}{M}$ jelölést. Megjegyezzük, hogy a C nem függ az m-től, sem az n-től, csak a rögzített x-től (az M-en keresztül). Az eddig számolások alapján írhatjuk, hogy minden $m \geq n > M$ esetén

$$|g_m - g_n| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{|x|^{n+2}}{(n+2)!} + \cdots + \frac{|x|^m}{m!}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{M^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{M^{n+2}}{(n+2)!} + \dots + \frac{M^m}{m!} \\
&\leq C \cdot \left(\frac{M}{M+1}\right)^{n+1-M} + C \cdot \left(\frac{M}{M+1}\right)^{n+2-M} + \dots + C \cdot \left(\frac{M}{M+1}\right)^{m-M} \\
&= C \cdot \left(\frac{M}{M+1}\right)^{n+1-M} \cdot \left[1 + \left(\frac{M}{M+1}\right)^{1} + \dots + \left(\frac{M}{M+1}\right)^{m-n-1}\right] \\
&\leq C \cdot \left(\frac{M}{M+1}\right)^{n+1-M} \cdot \left[1 + \left(\frac{M}{M+1}\right)^{1} + \dots + \left(\frac{M}{M+1}\right)^{m-n-1} + \dots\right] \\
&= C \cdot \left(\frac{M}{M+1}\right)^{n+1-M} \cdot \frac{1}{1-\frac{M}{M+1}} = C \cdot \left(\frac{M}{M+1}\right)^{n+1-M} \cdot (M+1).
\end{aligned}$$

Tehát

(i) $|g_m - g_n| \leq C \cdot \left(\frac{M}{M+1}\right)^{n+1-M} \cdot (M+1)$, minden $m \geq n > M = [|x|] + 1$ esetén;

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} C \cdot \left(\frac{M}{M+1}\right)^{n+1-M} \cdot (M+1) = C \cdot (M+1) \cdot \left(\frac{M}{M+1}\right)^{1-M} \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{M}{M+1}\right)^{n} = C \cdot (M+1) \cdot \left(\frac{M}{M+1}\right)^{1-M} \cdot 0 = 0$,

ezért az 1.20. Tulajdonság alapján a (g_n) sorozat fundamentális. □

1.12. Feladat. Igazold, hogy a következő általános tagú sorozatok nem fundamentálisak (így az 1.19. Cauchy-tétel alapján nem konvergensek):

(a) $a_n = (-1)^n$;

Megoldás. Megvizsgáljuk a következő különbséget:

$$|a_m - a_n| = |(-1)^m - (-1)^n| = \begin{cases} 0, & \text{ha } m, n \text{ páros vagy } m, n \text{ páratlan} \\ 2, & \text{ha } m \text{ páros}, n \text{ páratlan vagy } m \text{ páratlan}, n \text{ páros.} \end{cases}$$

Ha $m_k = 2k$ és $n_k = 2k+1$, minden $k \geq 1$ esetén, akkor

$$|a_m - a_n| = |(-1)^{2k+1} - (-1)^{2k}| = 2, \qquad \forall\, k \geq 1,$$

így az 1.21. Tulajdonság alapján az (a_n) sorozat nem fundamentális. □

(b) $b_n = \sin n$;

Megoldás. Ha $m \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right]$, akkor $\sin m \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ha $n \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[\frac{5\pi}{4} + 2k\pi, \frac{7\pi}{4} + 2k\pi\right]$, akkor $\sin n \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Ekkor

$$|\sin m - \sin n| = \sin m - \sin n \geq \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}.$$

Mivel minden $k \in \mathbb{N}$ esetén a $\left[\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right]$ intervallum hossza nagyobb, mint 1, ezért van benne $m_k \in \mathbb{N}$ egész szám. Hasonlóan, minden $k \in \mathbb{N}$ esetén az $\left[\frac{5\pi}{4} + 2k\pi, \frac{7\pi}{4} + 2k\pi\right]$ intervallumban van n_k egész szám.

Tehát léteznek (m_k) és (n_k) végtelenbe tartó sorozatok úgy, hogy minden $k \geq 1$ esetén

$$|\sin(m_k) - \sin(n_k)| = \sin(m_k) - \sin(n_k) \geq \sqrt{2} \geq \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Így az 1.21. Tulajdonság alapján a $(\sin n)_{n\geq 1}$ sorozat nem fundamentális.

Megjegyzés. A megoldás alapján az is belátható, hogy a $(\sin(\alpha+n))_{n\geq 1}$ sorozat sem fundamentális, ahol $\alpha \in \mathbb{R}$. □

(c) $c_n = \cos n$;

Megoldás. A (b) alpont és a $\cos n = \sin(n + \frac{\pi}{2})$ összefüggés alapján a $(\cos n)_{n\geq 1}$ sorozat sem fundamentális. □

(d) $d_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n}$.

Megoldás. Minden $m \geq n$ esetén

$$|a_m - a_n| = \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{m} \geq \underbrace{\frac{1}{m} + \cdots + \frac{1}{m}}_{(m-n)-szer} = \frac{m-n}{m}.$$

Ha $m = 2n$, akkor ez alapján

$$|a_{2n} - a_n| \geq \frac{1}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Tehát léteznek $m_k = 2k$ és $n_k = k$ (minden $k \geq 1$ esetén) végtelenbe tartó sorozatok úgy, hogy minden $k \geq 1$ esetén

$$|a_{m_k} - a_{n_k}| = |a_{2k} - a_k| \geq \frac{1}{2},$$

így a az 1.21. Tulajdonság alapján a $(d_n)_{n\geq 1}$ sorozat nem fundamentális. □

1.3.5. Rekurzívan értelmezett sorozatok határértéke

1.13. Feladat. Tanulmányozd a következő sorozatok konvergenciáját, és ha konvergensek, számítsd ki a határértéküket:

(a) $a_n = \dfrac{1}{1 + a_{n-1}}$, $a_0 = 0$;

Megoldás. Kiszámoljuk a sorozat néhány tagját: $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{2}{3}$, $a_4 = \frac{3}{5}$, $a_5 = \frac{5}{8}$. Észrevehetjük, hogy $a_2 = \frac{F_1}{F_2}$, $a_3 = \frac{F_2}{F_3}$, $a_3 = \frac{F_3}{F_4}$, ahol F_n a Fibonacci sorozat: $F_0 = F_1 = 1$ és $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, minden $n \in \mathbb{N}$. Indukcióval igazolható, hogy $a_n = \frac{F_{n-1}}{F_n}$. Valóban,

$$a_{n+1} = \frac{1}{1 + a_n} = \frac{1}{1 + \frac{F_{n-1}}{F_n}} = \frac{F_n}{F_n + F_{-1}} = \frac{F_n}{F_{n+1}}.$$

Ezután az $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ lineáris rekurzió általános tagját kiszámíthatjuk a szokásos módon. Felírjuk az $x^2 = x + 1$ karakterisztikus egyenletet, amelynek gyökei $x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ és $x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Innen az F_n a következő $F_n = \alpha x_1^n + \beta x_2^n$ alakú kell legyen valamely $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ konstansokra. Ezeket a konstansokat az $F_0 = \alpha x_1^0 + \beta x_2^0 = \alpha + \beta = 1$ és $F_1 = \alpha x_1^1 + \beta x_2^1 = \alpha x_1 + \beta x_2 = 1$ összefüggésekből számíthatjuk ki. Azt kapjuk, hogy $\alpha = \frac{5-3\sqrt{5}}{10}$ és $\beta = \frac{5+3\sqrt{5}}{10}$. Tehát

$$F_n = \frac{5+3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5-3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)^n, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Végül az $(a_n)_{n\geq 0}$ sorozat határértékét kiszámíthatjuk mint

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{F_{n-1}}{F_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{5+3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + \frac{5-3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}}{\frac{5+3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} + \frac{5-3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{5+3\sqrt{5}}{10}\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{-1-\sqrt{5}}\right)^{n-1} + \frac{5-3\sqrt{5}}{10}}{\frac{5+3\sqrt{5}}{10}\cdot\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{-1-\sqrt{5}}\right)^{n-1} + \frac{5-3\sqrt{5}}{10}\cdot\frac{-1-\sqrt{5}}{2}} = \frac{\frac{5-3\sqrt{5}}{10}}{\frac{5-3\sqrt{5}}{10}\cdot\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}$$

$$= \frac{2}{-1-\sqrt{5}} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \text{ mert } \left|\frac{-1+\sqrt{5}}{-1-\sqrt{5}}\right| < 1.$$

□

(b) $a_n = \sqrt{2+a_{n-1}}$, $a_0 = 0$;

Megoldás. Kiszámoljuk a sorozat néhány tagját: $a_0 = 0$, $a_1 = \sqrt{2}$, $a_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}$, tehát $0 \leq a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq 2$. Indukcióval igazoljuk, hogy a sorozat korlátos: $0 \leq a_n \leq 2$, minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. Ez igaz $n = 0, 1, 2$-re. Feltesszük, hogy ez az egyenlőtlenség igaz $n = N$ esetén és igazoljuk $n = (N+1)$ esetén:

$$\begin{aligned} & 0 \leq a_N \leq 2 \\ \iff & 2 \leq 2 + a_N \leq 4 \\ \iff & \sqrt{2} \leq \sqrt{2+a_N} \leq \sqrt{4} \\ \iff & 0 \leq \sqrt{2} \leq a_{N+1} \leq 2. \end{aligned}$$

Ez alapján igazoljuk, hogy a sorozat monoton növekvő:

$$a_{n+1}^2 = a_n + 2 \geq a_n + a_n = 2a_n \geq a_n \cdot a_n = a_n^2, \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

ahonnan $a_{n+1} \geq a_n$, minden $n \in \mathbb{N}$ esetén (mert egyik sem negatív).

Tehát az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozat monoton növekvő és korlátos, ezért konvergens. Jelölje $A = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Az értelmező rekurzióban határértékre térve:

$$\begin{aligned} & \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2+a_{n-1}} \\ \iff & \lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{2 + \lim_{n\to\infty} a_{n-1}} \\ \iff & A = \sqrt{2+A}, \\ \iff & A^2 = 2 + A, \end{aligned}$$

amelynek megoldása $A_{1,2} = \dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ és ahonnan $A = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, mert $A \geq 0$ kell legyen. □

1.14. Feladat. Legyen $a_0 > 0$ tetszőleges. Igazold, hogy minden $a > 0$ szám esetén az

$$a_n = \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{a}{a_{n-1}}\right)$$

rekurzióval értelmezett sorozat konvergens és határértéke $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sqrt{a}$.

Megoldás. A számtani-mértani egyenlőtlenség alapján

$$a_n = \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{a}{a_{n-1}}\right) \geq \sqrt{a}, \qquad \forall n \geq 1$$

($n = 0$-ra nem biztos, hogy teljesül), tehát a sorozat alulról korlátos. Megvizsgáljuk a sorozat monotonitását:

$$a_n \leq a_{n-1} \iff \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{a}{a_{n-1}}\right) \leq a_{n-1} \iff \frac{a}{a_{n-1}} \leq a_{n-1} \iff a \leq a_{n-1}^2 \iff$$
$$\iff \sqrt{a} \leq a_{n-1},$$

ami teljesül minden $n \geq 2$ esetén ($n = 1$-re nem biztos, hogy teljesül). Tehát a sorozat monoton csökkenő az $n = 1$ tagtól kezdve, így az $(a_n)_{n\geq 1}$ részsorozat konvergens. Mivel véges sok tag nem befolyásolja a sorozat konvergenciáját, ezért az $(a_n)_{n\geq 0}$ sorozat is konvergens lesz.

Jelölje $A = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. A definiáló rekurzióban határértékre térve

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{a}{a_{n-1}}\right) \iff A = \frac{1}{2}\left(A + \frac{a}{A}\right),$$

ahonnan $A^2 = a$. Mivel $a_n \geq \sqrt{a}$, minden $n \geq 1$ esetén, ezért $A = \sqrt{a}$. □

1.15. Feladat. Legyen x_1 és y_1 két olyan pozitív valós szám, amelyekre $x_1 < y_1$. Értelmezzük az $x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}$ és $y_{n+1} = \frac{x_n+y_n}{2}$ képletekkel az $(x_n)_{n\geq 1}$ és $(y_n)_{n\geq 1}$ valós számsorozatokat. Bizonyítsd be, hogy mindkét sorozat konvergens és a határértékeik megegyeznek!

Megoldás. Indukcióval igazoljuk, hogy $x_n \leq x_{n+1} \leq y_{n+1} \leq y_n$ minden $n \geq 1$ esetén. $n = 1$ esetén a számtani-mértani közepek közötti egyenlőtlenséget használva

$$x_1 = \min\{x_1, y_1\} \leq \sqrt{x_1 y_1} \leq \frac{x_1 + y_1}{2} \leq \max\{x_1, y_1\} = y_1,$$

ahonnan

$$x_1 \leq x_2 = \sqrt{x_1 y_1} \leq \frac{x_1 + y_1}{2} = y_2 \leq y_1.$$

Feltesszük, hogy $n = N$ esetén $x_N \leq x_{N+1} \leq y_{N+1} \leq y_N$. Igazoljuk, hogy $n = N + 1$ esetén is igaz lesz a feltevés. Szintén a számtani-mértani közepek közötti egyenlőtlenség alapján

$$x_{N+1} = \min\{x_{N+1}, y_{N+1}\} \leq \sqrt{x_{N+1} y_{N+1}} \leq \frac{x_{N+1} + y_{N+1}}{2} \leq \max\{x_{N+1}, y_{N+1}\} = y_{N+1},$$

ahonnan

$$x_{N+1} \leq x_{N+2} = \sqrt{x_{N+1} y_{N+1}} \leq \frac{x_{N+1} + y_{N+1}}{2} = y_{N+2} \leq y_{N+1}.$$

Ezek alapján az $(x_n)_{n\geq 1}$ sorozat növekvő és felső korlátja y_1, illetve az $(y_n)_{n\geq 1}$ sorozat csökkenő és alsó korlátja x_1, így $(x_n)_{n\geq 1}$ és $(y_n)_{n\geq 1}$ sorozatok konvergensek. Legyen $X = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ és $Y = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$. Az $y_{n+1} = \dfrac{x_n + y_n}{2}$ összefüggésben határértékre térve kapjuk, hogy $Y = \dfrac{X + Y}{2}$, ahonnan $X = Y$. □

2. fejezet

Valós számsorok

2.1. Elméleti összefoglaló

Legyen $(a_n)_{n\geq 1}$ egy valós számsorozat. A $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ valós számsor általános tagja a_n, részletösszeg sorozata az $s_N = a_1 + a_2 + \cdots + a_N = \sum\limits_{n=1}^{N} a_n$ általános tagú $(s_N)_{N\geq 1}$ sorozat, összege pedig $\lim\limits_{N\to\infty} s_N = \lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{n=1}^{N}$, amely ha létezik, akkor szintén $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$-nel jelöljük.

A $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sor *konvergens*, ha az $(s_n)_{n\geq 1}$ részletösszeg sorozat konvergens, különben *divergens*. A $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ és $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ sorok *azonos természetűek* (vagy *ugyanolyan természetűek*), ha mindkettő konvergens, vagy mindkettő divergens.

2.1. Példa (Mértani sor)

A $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$, ahol $q \in \mathbb{R}$ sort *mértani sornak* nevezzük. A $q \in (-1, 1)$ esetben sor konvergens és az összege $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = \dfrac{1}{1-q}$, míg $q \notin (-1, 1)$ esetben a sor divergens. ◇

2.2. Tétel (Cauchy általános konvergencia kritériuma)

Az $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sor akkor és csak akkor konvergens, ha bármely $\varepsilon > 0$ szám esetén létezik olyan $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ küszöbszám, hogy minden $m \geq n \geq N_\varepsilon$ esetén $|a_{n+1} + \cdots + a_m| < \varepsilon$.

A Cauchy-tétel $m = n + 1$ esetén azt mondja, hogy konvergens $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sor esetén az a_n általános tag kell tartson a nullához, vagyis $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

2.3. Következmény

Ha a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sor általános tagja nem tart a nullához (vagyis ha $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ nem létezik, vagy ha $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$), akkor a sor divergens.

2.4. Példa

A $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ sor általános tagjainak sorozata, az $a_n = (-1)^n$ általános tagú sorozat nem tart a nullához (mivel nem létezik a $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n$ határérték), ezért a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ sor divergens. ◇

Vigyázat! Amiért egy sor általános tagja tart a nullához, attól a sor nem lesz konvergens.

2.5. Példa

A $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ sor $a_n = \frac{1}{n}$ általános tagjainak sorozata tart nullához, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, de az 1.6. Feladat

(a) alpontja alapján a részletösszeg sorozat határértéke $\lim\limits_{N\to\infty}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{N})=+\infty$, ezért a sor divergens. ◇

2.1.1. Pozitív tagú sorok

Az $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ valós számsor *pozitív tagú*, ha $a_n > 0$, minden $n \geq 1$ esetén. Az $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ valós számsor nemnegatív tagú, ha $a_n \geq 0$, minden $n \geq 1$ esetén.

2.1.1.1. Cauchy-féle kondenzációs kritérium

2.6. Tulajdonság (Cauchy-féle kondenzációs kritérium)

Ha a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ pozitív tagú sor általános tagjainak $(a_n)_{n\geq 1}$ sorozata csökkenő, akkor a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ és a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ sorok ugyanolyan természetűek (mindkettő konvergens vagy mindkettő divergens).

2.7. Példa (Általánosított harmonikus sor)

A Cauchy-féle kondenzációs kritériummal könnyen igazolható , hogy a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ *általánosított harmonikus sor* konvergens, ha $\alpha > 1$, és divergens, ha $\alpha \leq 1$ (lásd a 2.7. Feladatot). ◇

2.1.1.2. Összehasonlítási kritériumok

2.8. Tulajdonság (I. összehasonlítási kritérium)

Adottak a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ és $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ pozitív (nemnegatív) tagú sorok úgy, hogy $a_n \leq b_n$, minden $n \geq n_0$ esetén.

(i) Ha $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergens, akkor $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ is konvergens.

(ii) Ha $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergens, akkor $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ is divergens.

2.9. Példa

Az I. összehasonlítási kritérium segítségével a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2+\sqrt{n}+2}$ sor konvergenciája a következőképpen vizsgálható. Mivel

$$\frac{\sin^2 n}{n^2+\sqrt{n}+2} \leq \frac{\sin^2 n}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}, \quad \forall\, n \geq 1,$$

ezért $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2+\sqrt{n}+2}$, illetve $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ választás esetén az utóbbi sor konvergens, tehát az I. összehasonlítási kritérium alapján a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2+\sqrt{n}+2}$ sor konvergens. ◇

2.10. Tulajdonság (II. összehasonlítási kritérium)

Adottak a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ és $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ pozitív tagú sorok úgy, hogy $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$, minden $n \geq n_0$ esetén.

(i) Ha $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergens, akkor $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ is konvergens.

(ii) Ha $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergens, akkor $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ is divergens.

2.11. Példa

A $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3\cdot 7\cdot\ldots\cdot(4n-1)}{5\cdot 9\cdot\ldots\cdot(4n+1)}$ sor konvergenciája a következőképpen dönthető el a II. összehasonlítási kritérium segítségével:

$$\frac{\frac{3\cdot 7\cdot\ldots\cdot(4n-1)\cdot(4n+3)}{5\cdot 9\cdot\ldots\cdot(4n+1)\cdot(4n+5)}}{\frac{3\cdot 7\cdot\ldots\cdot(4n-1)}{5\cdot 9\cdot\ldots\cdot(4n+1)}} = \frac{4n+3}{4n+5} > \frac{n}{n+1} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}, \quad \forall\, n \geq 1,$$

és a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ harmonikus sor divergens, ezért a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3\cdot 7\cdot\ldots\cdot(4n-1)}{5\cdot 9\cdot\ldots\cdot(4n+1)}$ sor is divergens. ◇

2.12. Tulajdonság (III. összehasonlítási kritérium)

Adottak a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ és $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ pozitív tagú sorok úgy, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell \in [0, +\infty]$.

(i) Ha $0 < \ell < +\infty$, akkor a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ és $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ sorok azonos természetű.

(ii) Ha $\ell = 0$ és $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergens, akkor $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ is konvergens.

(iii) Ha $\ell = +\infty$ és $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ divergens, akkor $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergens.

2.13. Megjegyzés

Az öszehasonlítási kritériumok használatakor a sorunkat leggyakrabban a pozitív tagú mértani sorhoz, vagy általánosított harmonikus sorhoz hasonlítjuk, ezért ismerni kell ezek konvergenciáját. ◇

2.14. Példa

A $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{a} - 1)$, $a > 1$ sor konvergenciáját a következőképpen tanulmányozhatjuk a III. összehasonlítási kritérium segítségével. Mivel

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{a} - 1}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = \ln a \in (0, +\infty),$$

ezért a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{a} - 1)$ és $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ sorok azonos természetűek. A $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ sor divergens (harmonikus sor), ezért a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{a} - 1)$ sor is divergens, minden $a > 1$ esetén. ◇

2.1.1.3. Hányados vagy D'Alembert-féle kritérium

2.15. Tulajdonság (Hányados vagy D'Alembert-féle kritérium)

Ha a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ pozitív tagú sor esetén $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$, akkor

- az $\ell < 1$ esetben a sor konvergens;
- az $\ell > 1$ esetben a sor divergens;
- az $\ell = 1$ esetben a kritérium nem tudja eldönteni a sor természetét (más módszerrel kell vizsgálni a sor konvergenciáját).

2.16. Példa

A $\sum\limits_{n=1}^{\infty} na^n$, $a > 0$ sor konvergenciját a következőképpen vizsgálhatjuk a hányados kritériummal.

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)a^{n+1}}{na^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} \cdot a = a.$$

A hányados kritérium alapján

- ha $\ell = a < 1$, akkor a sor konvergens;
- ha $\ell = a > 1$, akkor a sor divergens;
- ha $\ell = a = 1$, akkor a kritériummal nem dönthető el a sor konvergenciája.

Ez utóbbi esetben az $a = 1$-et visszahelyettesítve a megadott sorba kapjuk a $\sum_{n=1}^{\infty} n$ sort, amely divergens (az általános tag nem tart 0-hoz). ◇

2.1.1.4. Gyökkritérium

2.17. Tulajdonság (Gyökkritérium)
Ha a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pozitív tagú sor esetén $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell$, akkor

- az $\ell < 1$ esetben a sor konvergens;
- az $\ell > 1$ esetben a sor divergens;
- az $\ell = 1$ esetben a kritérium nem tudja eldönteni a sor természetét (más módszerrel kell vizsgálni a sor konvergenciáját).

2.18. Megjegyzés
Ha a hányados (illetve gyökkritérium) esetén $\ell = 1$ határértéket kapunk (tehát a kritérium nem tud dönteni a sor konvergenciájáról), akkor a gyökkritérium (illetve hányados kritérium) esetén is $\ell = 1$-et fogunk kapni. ◇

2.19. Példa
A $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^{n^2}$, $a > -1$ sor konvergenciáját a következőképpen tanulmányozhatjuk a gyökkritérium segítségével:

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(1 + \frac{a}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty} \left[\left(1 + \frac{a}{n}\right)^{\frac{n}{a}}\right]^{a} = e^a.$$

- Ha $\ell = e^a < 1$, $a > -1$, azaz $-1 < a < 0$, akkor a sor konvergens.
- Ha $\ell = e^a > 1$, azaz $a > 0$, akkor a sor divergens.
- Ha $\ell = e^a = 1$, azaz $a = 0$, akkor a gyökkritériummal nem tudunk dönteni a sor természetéről, ezért más módszerrel vizsgáljuk a konvergenciát. Az $a = 0$ értéket visszahelyettesítve az eredeti sorba kapjuk, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} 1^n = \sum_{n=1}^{\infty} 1$, ami divergens.

◇

2.1.1.5. Raabe-Duhamel–féle kritérium

2.20. Tulajdonság (Raabe-Duhamel–féle kritérium)
Ha a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pozitív tagú sor esetén $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = K$, akkor

- a $K > 1$ esetben a sor konvergens;
- a $K < 1$ esetben a sor divergens;
- a $K = 1$ esetben a kritérium nem tudja eldönteni a sor természetét (más módszerrel kell vizsgálni a sor konvergenciáját).

2.21. Megjegyzés
Sok esetben, mikor a hányados kritérium segítségével nem eldönthető a sor konvergenciája, akkor a Raabe-Duhamel kritérium segítségével eldönthető. ◇

2.22. Példa
A Raabe-Duhamel kritérium segítségével a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} na^n$, $a > 0$ sor konvergenciája a következőképpen vizsgálható.

$$\begin{aligned}
K &= \lim_{n\to\infty} n \cdot \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n \cdot \left(\frac{na^n}{(n+1)a^{n+1}} - 1\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} n \cdot \left(\frac{n}{(n+1)a} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \cdot \left(\frac{n - a(n+1)}{a}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \cdot \lim_{n\to\infty} \left(n \cdot \frac{1-a}{a} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} \left(n \cdot \frac{1-a}{a} - 1\right) \\
&= \begin{cases} +\infty, & \text{ha } 0 < a < 1, \\ -1, & \text{ha } a = 1, \\ -\infty, & \text{ha } 1 < a. \end{cases}
\end{aligned}$$

A Raabe-Duhamel–kritérium alapján

- ha $K < 1$, vagyis $a \geq 1$, akkor a sor divergens;
- ha $K > 1$, vagyis $0 < a < 1$, akkor a sor konvergens.

◇

2.1.2. Váltakozó előjelű sorok. Leibniz-kritérium

2.23. Értelmezés
A $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ (vagy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$) sort, ahol $a_n > 0$, minden $n \geq 1$ esetén, *váltakozó előjelű* sornak nevezzük.

2.24. Tulajdonság (Leibniz-féle kritérium)
Ha a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ váltakozó előjelű sor esetén az $(a_n)_{n\geq 1}$ sorozat csökkenő és tart nullához ($\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$), akkor a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ sor konvergens.

2.25. Példa (Leibniz-sor)
A 2.24. Tulajdonság alapján $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ sor konvergens, mivel váltakozó előjelű, az $a_n = \frac{1}{n}$ általános tagú sorozat csökkenő és a határértéke $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. ◇

2.1.3. Abszolút és feltételesen konvergens sorok. Weierstrass-kritérium

2.26. Értelmezés
A $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ valós számsor *abszolút konvergens*, ha a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ sor konvergens (vagyis az általános tagok abszolút értékeinek sora konvergens). A $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ valós számsor *feltételesen konvergens*, ha konvergens, de nem abszolút konvergens.

Abszolút konvergenciából következik a konvergencia, vagyis minden abszolút konvergens sor konvergens.

Az abszolút konvergenciát arra használjuk, hogy visszavezessük egy nem pozitív tagú sor konvergenciájának vizsgálatát egy pozitív tagú sorra, amely esetén használhatjuk a korábban említett kritériumokat (összehasonlítási kritériumok, hányados, gyök-, Raabe-Duhamel, Cauchy kondenzációs kritériumok).

2.27. Tulajdonság (Weierstrass-kritérium)

Ha a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sor esetén létezik egy olyan $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergens sor, hogy valamely $n_0 > 0$ indextől kezdve $|a_n| \leq b_n$, minden $n \geq n_0$ esetén, akkor a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sor abszolút konvergens.

2.28. Példa

A $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\arcsin n}{n^2}$ sor esetén

$$\left|\frac{\arcsin n}{n^2}\right| \leq \frac{|\arcsin n|}{n^2} \leq \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{n^2}, \quad \forall\, n \geq 1,$$

továbbá a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{\pi}{2} \cdot \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ általánosított harmonikus sor ($\alpha = 2 > 1$) konvergens, ezért a Weierstrass-kritérium alapján a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\arcsin n}{n^2}$ sor konvergens. ◇

2.1.4. Általános tagú sorok. Abel- és Dirichlet-kritériumok

2.29. Tulajdonság (Abel-kritérium)

Ha a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ valós számsor általános tagja felírható $a_n = u_n v_n$ alakba, minden $n \geq 1$ esetén, ahol az $(u_n)_{n\geq 1}$ sorozat monoton (csökkenő vagy növekvő) és korlátos, illetve a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ sor konvergens, akkor a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ sor konvergens.

2.30. Példa

A $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}$ sor általános tagja felírható, mint $a_n = (-1)^n \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}} = u_n v_n$, ahol $u_n = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ és $v_n = (-1)^n \frac{1}{n}$, minden $n \geq 1$ esetén. Az 1.4. Feladatban beláttuk, hogy az $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ általános tagú sorozat növekvő és felülről korlátos, továbbá a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ Leibniz sor konvergens, ezért az Abel kritérium alapján a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}$ sor konvergens. ◇

2.31. Tulajdonság (Dirichlet-kritérium)

Ha a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ valós számsor általános tagja felírható $a_n = u_n v_n$ alakba, minden $n \geq 1$ esetén, ahol az $(u_n)_{n\geq 1}$ sorozat monoton tart a 0-hoz (vagyis az $(u_n)_{n\geq 1}$ sorozat csökkenő vagy növekvő és határértéke $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$), illetve a $\left(\sum\limits_{n=1}^{k} v_n\right)_{k\geq 1}$ sorozat korlátos, akkor a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ sor konvergens.

2.32. Példa

A $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$ sor esetén $a_n = \frac{(-1)^n}{\ln n}$ általános tagja felírható $a_n = u_n v_n$ alakba, ahol $u_n = \frac{1}{\ln n}$ és $v_n = (-1)^n$. Mivel az $(u_n)_{n\geq 1} = (\frac{1}{\ln n})_{n\geq 1}$ sorozat monoton csökkenő és $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} = 0$, illetve

$$\sum_{n=1}^{k} (-1)^n = \begin{cases} -1, & \text{ha } k \text{ páratlan,} \\ 0, & \text{ha } k \text{ páros,} \end{cases}$$

minden $k \geq 1$ esetén, tehát $(\sum\limits_{n=1}^{k} (-1)^n)_{k\geq 1}$ korlátos, ezért a Dirichlet-kritérium alapján a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$ sor konvergens. ◇

2.2. Feladatok

2.2.1. Pozitív tagú sorok

2.1. Feladat. Az I. összehasonlítási kritériummal tanulmányozd a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{[n \cdot (n+1)]^a}$ sor konvergenciáját az $a \geq 0$ paraméter függvényében!

2.2. Feladat. A II. összehasonlítási kritérium segítségével tanulmányozd a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{e^n \cdot (n!)}$ sor konvergenciáját!

2.3. Feladat. A III. összehasonlítási kritérium segítségével tanulmányozd a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n \sqrt[n]{n})^\alpha}$ sor konvergenciáját az $\alpha \in \mathbb{R}$ paraméter függvényében!

2.4. Feladat. A hányados kritériummal tanulmányozd a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} \cdot a^n$ sor konvergenciáját az $a > 0$ paraméter függvényében!

2.5. Feladat. A gyökkritériummal tanulmányozd a $\sum_{n=1}^{\infty} n^{a \cdot n}$ sor konvergenciáját az $a \in \mathbb{R}$ paraméter függvényében!

2.6. Feladat. A Raabe-Duhamel–kritérium segítségével vizsgáld a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{a(a+1)\dots(a+n-1)}$ sor konvergenciáját az $a > 0$ paraméter függvényében!

2.7. Feladat. A Cauchy-féle kondenzációs kritériummal tanulmányozd a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ általánosított harmonikus sor konvergenciáját az $\alpha \in \mathbb{R}$ paraméter függvényében!

2.8. Feladat. Tanulmányozd a következő pozitív tagú sorok konvergenciáját:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{7n}}{n^2+3n+5}$;

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{n^4+n}}$;

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{a}{n}\right), \quad a \in (0, \pi)$;

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{a}{n^2}\right), \quad a \in (0, \pi)$;

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}\left(\frac{a}{\sqrt{n^3+n}}\right), \quad a \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$;

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}^3\left(\frac{1}{\sqrt{n^a+1}}\right), \quad a > 0$;

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{1}{n^4}\right)$;

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$;

(i) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$;

(j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{n}$;

(k) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(a \cdot \frac{n^2+n+1}{n^2}\right)^n$, $a > 0$;

(l) $\sum_{n=1}^{\infty} a^n \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$, $a > 0$;

(m) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a^n \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $a>0$;

(n) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$;

(o) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 5\cdot \ldots \cdot (3n-1)}$;

(p) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(an)^n}{n!}$, $a>0$;

(q) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{\sqrt{n!}}$, $a>0$;

(r) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2}$;

(s) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cdot 7\cdot \ldots \cdot (2+5(n-1))}{3\cdot 8\cdot \ldots \cdot (3+5(n-1))}$;

(t) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^2\cdot 5^2\cdot \ldots \cdot (4n-3)^2}{3^2\cdot 7^2\cdot \ldots \cdot (4n-1)^2}$;

(u) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n n!}{n^n}$, $a>0$;

(v) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a^{\sqrt{n}}$, $a>0$;

(w) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a^{\ln n}$, $a>0$;

(x) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1\cdot 5\cdot \ldots \cdot (4n-3)}{3\cdot 7\cdot \ldots \cdot (4n-1)}\right]^a$, $a\in\mathbb{R}$;

(y) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$.

2.2.2. Váltakozó előjelű sorok

2.9. Feladat. Tanulmányozd a következő sorok konvergenciáját a Leibniz-kritériummal (2.24. Tulajdonság):

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$;

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}}$;

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$;

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n}\frac{4n+1}{3^n}$;

(e) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{\ln n}$;

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n}\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)$.

(g) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n}\frac{\sqrt[n]{n}}{\ln n}$;

2.2.3. Abszolút és feltételesen konvergens sorok

2.10. Feladat. A következő sorok esetén vizsgáld az abszolút és feltételes konvergenciát:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n}\frac{1}{n}$;

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n}\frac{1}{n^2}$;

(c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\ln n}$;

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$;

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{(2\sin^2 x)^n}{n+1}$, $x\in\mathbb{R}$;

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n}\frac{1}{n^{a+\frac{1}{n}}}$, $a\in\mathbb{R}$;

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}$, $x \in \mathbb{R}$;

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{1+a^{2n}}$, $a \in \mathbb{R}$;

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{1-a^n}$, $a \neq \pm 1$;

(j) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\operatorname{arctg}(2n)}{n\sqrt{n+3}}$.

(k) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{5n-3}{4^n}$.

2.2.4. Általános tagú sorok

2.11. Feladat. Tanulmányozd a következő sorok konvergenciáját:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n$;

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos n$;

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(n^2)$;

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$;

(e) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos n}{\ln n}$;

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$, $x \in \mathbb{R}$;

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{\sqrt{n}}$, $x \in \mathbb{R}$;

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^a}$, $x \in \mathbb{R}$ és $a > 0$;

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^a}$, $x \in \mathbb{R}$ és $a > 0$;

(j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \cos n^2}{n}$;

(k) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \sin \frac{1}{n}}{n}$.

2.3. Megoldások

2.3.1. Pozitív tagú sorok

2.1. Feladat. Az I. összehasonlítási kritériummal tanulmányozd a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{[n\cdot(n+1)]^a}$ sor konvergenciáját az $a \geq 0$ paraméter függvényében!

Megoldás. A $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{[n\cdot(n+1)]^a}$ sor általános tagja $a_n = \frac{1}{[n\cdot(n+1)]^a}$, amelyre felírhatjuk a következő egyenlőtlenséget:

$$\frac{1}{[(n+1)\cdot(n+1)]^a} \leq \frac{1}{[n\cdot(n+1)]^a} \leq \frac{1}{[n\cdot n]^a}, \qquad \forall\, n \geq 1,\ \forall\, a \geq 0,$$

vagyis

$$\frac{1}{(n+1)^{2a}} \leq \frac{1}{[n\cdot(n+1)]^a} \leq \frac{1}{n^{2a}}, \qquad \forall\, n \geq 1,\ \forall\, a \geq 0.$$

A fenti egyenlőtlenség jobb oldala (vagyis $\frac{1}{[n\cdot(n+1)]^a} \leq \frac{1}{n^{2a}}$, minden $n \geq 1$ esetén) és az általánosított harmonikus sor konvergenciája (vagyis $\alpha > 1$ esetén a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ sor konvergens) alapján az I. összehasonlítás kritériumból (2.8. Tulajdonság) következik, hogy a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{[n\cdot(n+1)]^a}$ sor konvergens, ha $\alpha = 2a > 1$, vagyis $a > \frac{1}{2}$.

A fenti egyenlőtlenség bal oldala (vagyis $\frac{1}{(n+1)^{2a}} \leq \frac{1}{[n\cdot(n+1)]^a}$, minden $n \geq 1$ esetén) és az általánosított harmonikus sor divergenciája (vagyis $\alpha \leq 1$ esetén a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{\alpha}} = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ sor divergens) alapján az I. összehasonlítás kritériumból (2.8. Tulajdonság) következik, hogy a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{[n\cdot(n+1)]^a}$ sor divergens, ha $\alpha = 2a \leq 1$, vagyis $0 \leq a \leq \frac{1}{2}$. □

2.2. Feladat. A II. összehasonlítási kritérium segítségével tanulmányozd a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{e^n\cdot(n!)}$ sor konvergenciáját!

Megoldás. A sor általános tagja $a_n = \frac{n^n}{e^n\cdot(n!)}$. Tanulmányozzuk a következő hányadost: minden $n \geq 1$ esetén

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{e^{n+1}\cdot[(n+1)!]}}{\frac{n^n}{e^n\cdot(n!)}} = \frac{(n+1)^{n+1}}{e^{n+1}\cdot[(n+1)!]}\cdot\frac{e^n\cdot(n!)}{n^n} = \frac{1}{e}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$
$$\overset{(*)}{\geq} \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \frac{n}{n+1} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}},$$

ahol a $(*)$ egyenlőtlenségben felhasználtuk, hogy $e \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$, minden $n \geq 1$ esetén (lásd az 1.4. Feladatot). Tehát, ha tekintjük a $b_n = \frac{1}{n}$ általános tagú sort, amely pont a harmonikus sor, akkor az

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{b_{n+1}}{b_n}, \quad \forall\, n \geq 1$$

egyenlőtlenségből és a harmonikus sor divergenciájából a II. összehasonlítási kritérium (2.10. Tulajdonság) alapján következik, hogy a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{e^n\cdot(n!)}$ sor divergens. □

2.3. Feladat. A III. összehasonlítási kritérium segítségével tanulmányozd a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n\sqrt[n]{n})^{\alpha}}$ sor konvergenciáját az $\alpha \in \mathbb{R}$ paraméter függvényében!

Megoldás. A sor általános tagja $a_n = \frac{1}{(n\sqrt[n]{n})^{\alpha}}$, $n \geq 1$. Mivel $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt[n]{n})^{\alpha} = 1$, ezért az általánosított harmonikus sorhoz (amelynek az általános tagja $b_n = \frac{1}{n^{\alpha}}$) fogjuk hasonlítani a sorunkat. Minden $n \geq 1$ és $\alpha \in \mathbb{R}$ esetén

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n\sqrt[n]{n})^{\alpha}}}{\frac{1}{n^{\alpha}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^{\alpha}} = \frac{1}{\left(\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\right)^{\alpha}} = 1,$$

ezért a III. összehasonlítási kritérium (2.10. Tulajdonság) alapján a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n\sqrt[n]{n})^{\alpha}}$ sor és a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ általánosított harmonikus sor azonos természetűek, tehát

- ha $\alpha > 1$, akkor konvergensek;
- ha $\alpha \leq 1$, akkor divergensek.

$\square$

2.4. Feladat. A hányados kritériummal tanulmányozd a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2n)!}{(n!)^2} \cdot a^n$ sor konvergenciáját az $a > 0$ paraméter függvényében!

Megoldás. A sor általános tagja $a_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \cdot a^n$ és

$$\begin{aligned}
\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(2(n+1))!}{(n+1)!\,(n+1)!} \cdot a^{n+1}}{\frac{(2n)!}{n!\,n!} \cdot a^n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)!}{(2n)!} \cdot \left(\frac{n!}{(n+1)!}\right)^2 \cdot \frac{a^{n+1}}{a^n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} \cdot a \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2(2n+1)}{n+1} \cdot a \\
&= 4a.
\end{aligned}$$

A hányados kritérium (2.15. Tulajdonság) alapján

- ha $\ell = 4a < 1$, vagyis $a < \frac{1}{4}$, akkor a sor konvergens;
- ha $\ell = 4a > 1$, vagyis $a > \frac{1}{4}$, akkor a sor divergens;
- ha $\ell = 4a = 1$, vagyis $a = \frac{1}{4}$, akkor a sor konvergenciája a hányados kritériummal nem dönthető el.

Az $a = \frac{1}{4}$ esetben a Raabe–Duhamel-kritériumot (2.20. Tulajdonság) fogjuk használni:

$$\begin{aligned}
K &= \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{n+1}{2(2n+1)a} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{4(n+1)}{2(2n+1)} - 1\right) = \\
&= \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{4(n+1) - 2(2n+1)}{2(2n+1)}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{2(2n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1,
\end{aligned}$$

így a Raabe–Duhamel-kritérium alapján a sor divergens. $\square$

2.5. Feladat. A gyökkritériummal tanulmányozd a $\sum_{n=1}^{\infty} n^{a\cdot n}$ sor konvergenciáját az $a \in \mathbb{R}$ paraméter függvényében!

Megoldás. A sor általános tagja $a_n = n^{a\cdot n}$ és

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^{a\cdot n}} = \lim_{n\to\infty} n^{\frac{a\cdot n}{n}} = \lim_{n\to\infty} n^a = \begin{cases} 0 & \text{ha } a < 0 \\ 1 & \text{ha } a = 0 \\ +\infty & \text{ha } a < 0 \end{cases}.$$

Tehát a gyökkritérium (2.17. Tulajdonság) szerint

- ha $\ell < 1$, azaz $a < 0$, akkor a sor konvergens;
- ha $\ell > 1$, azaz $a > 0$, akkor a sor divergens;
- ha $\ell = 1$, azaz $a = 0$, akkor a sor konvergenciája nem dönthető el a gyökkritériummal.

Az $a = 0$ esetben a sorunk $\sum_{n=1}^{\infty} n^{0\cdot n} = \sum_{n=1}^{\infty} n^0 = \sum_{n=1}^{\infty} 1$, amely divergens (az általános tag nem tart nullához). □

2.6. Feladat. A Raabe-Duhamel–kritérium segítségével vizsgáld a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{a(a+1)\dots(a+n-1)}$ sor konvergenciáját az $a > 0$ paraméter függvényében!

Megoldás. A sorunk általános tagja $a_n = \frac{n!}{a(a+1)\dots(a+n-1)}$ és

$$\begin{aligned} K = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) &= \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{n!}{(n+1)!} \cdot \frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)(a+n)}{a(a+1)\cdots(a+n-1)} - 1\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a+n}{n+1} - 1\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n(a-1)}{n+1} \\ &= a - 1. \end{aligned}$$

Így a Raabe-Duhamel–kritérium (2.20. Tulajdonság) alapján

- ha $K = a - 1 < 1$, azaz $a < 2$, akkor a sor divergens;
- ha $K = a - 1 > 1$, azaz $a > 2$, akkor a sor konvergens;
- ha $K = a - 1 = 1$, azaz $a = 2$, akkor a sor konvergenciája nem dönthető el ezzel a kritériummal.

Az $a = 2$ esetben a sorunk $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n+1)}$ és kapjuk, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n},$$

amely divergens, mivel ez pontosan a harmonikus sor, csak az második tagtól kezdve (véges sok tag megváltoztatása, elhagyása, hozzávétele nem befolyásolja a sor konvergenciáját). □

2.7. Feladat. A Cauchy-féle kondenzációs kritériummal tanulmányozd a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ általánosított harmonikus sor konvergenciáját az $\alpha \in \mathbb{R}$ paraméter függvényében!

Megoldás. A sor általános tagja $a_n = \frac{1}{n^\alpha}$, amelyek csökkenő sorozatot alkotnak, ha $\alpha \geq 0$. Tehát a Cauchy-féle kondezációs kritérium alapján (2.6. Tulajdonság) a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ és $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^k \frac{1}{(2^k)^\alpha} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2^k)^{\alpha-1}} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^k$ sorok azonos természetűek. Ez utóbbi egy mértani sor (2.1. Példa), amely

- konvergens, ha $q = \frac{1}{2^{\alpha-1}} < 1$, vagyis $\alpha > 1$;
- divergens, ha $q = \frac{1}{2^{\alpha-1}} \geq 1$, vagyis $0 \leq \alpha \leq 1$.

Ha $\alpha < 0$, akkor $a_n = \frac{1}{n^\alpha} \geq 1$, minden $n \geq 1$ esetén, emiatt a sor általános tagjainak (a_n) sorozata nem tart nullához és ezért a sor divergens.

Összegezve a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ általánosított harmonikus sor konvergens, ha $\alpha > 1$, és divergens, ha $\alpha \leq 1$. □

2.8. Feladat. Tanulmányozd a következő pozitív tagú sorok konvergenciáját:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{7n}}{n^2+3n+5}$;

Első megoldás. Ha vizsgáljuk az általános tag konvergenciáját a 0-hoz, akkor

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{7n}}{n^2+3n+5} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2} \cdot \frac{\sqrt{7}}{1+\frac{3}{n}+\frac{5}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{\sqrt{7}}{1+\frac{3}{n}+\frac{5}{n^2}} = 0 \cdot \sqrt{7} = 0,$$

ahol az első egyenlőségnél kiemeltük mind a számlálóból, mind a nevezőből a legmagasabb fokú tagot. Ez alapján az is látható, hogy nagyjából olyan gyorsan tart az általános tag 0, mint $\frac{1}{n^{3/2}}$. Emiatt a III. összehasonlítási kritériumot (2.12. Tulajdonság) fogjuk használni $b_n = \frac{1}{n^{3/2}}$ választással. Ekkor

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{7n}}{n^2+3n+5}}{\frac{1}{n^{3/2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{n}}{n^2}}{\frac{1}{n^{3/2}}} \cdot \frac{\sqrt{7}}{1+\frac{3}{n}+\frac{5}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{7}}{1+\frac{3}{n}+\frac{5}{n^2}} = \sqrt{7},$$

ami a $(0, +\infty)$ intervallumba esik, így a kritérium alapján a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{7n}}{n^2+3n+5}$ és $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ sorok azonos természetűek. Mivel a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ általánosított harmonikus sor $(\alpha = \frac{3}{2} > 1)$ konvergens, ezért a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{7n}}{n^2+3n+5}$ sor is konvergens lesz. □

Második megoldás. Ha sejtjük, hogy a sor konvergens, akkor szerkeszthetünk egy másik $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ sort, amiről be tudjuk látni, hogy konvergens és (b_n) általános tagja nagyobb, mint a sorunk általános tagja:

$$\frac{\sqrt{7n}}{n^2+3n+5} \leq \frac{\sqrt{7n}}{n^2} = \frac{\sqrt{7}}{n^{3/2}}, \quad \forall n \geq 1,$$

miatt legyen $b_n = \frac{\sqrt{7}}{n^{3/2}}$. Továbbá $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{7}}{n^{3/2}} = \sqrt{7} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ konvergens (általánosított harmonikus sor, $\alpha = \frac{3}{2} > 1$), így az I. összehasonlítási kritérium (2.8. Tulajdonság) alapján az eredeti $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{7n}}{n^2+3n+5}$ sor is konvergens. □

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{n^4+n}}$;

Első megoldás. Mivel $\frac{1}{\sqrt[5]{n^4+n}} \geq \frac{1}{\sqrt[5]{n^4+n^4}} = \frac{1}{\sqrt[5]{2}} \cdot \frac{1}{n^{4/5}}$, minden $n \geq 1$ esetén és a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{4/5}}$ általánosított harmonikus sor divergens ($\alpha = \frac{4}{5} \leq 1$), ezért az I. összehasonlítási kritérium (2.8. Tulajdonság) alapján az eredeti $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{n^4+n}}$ sor is divergens. □

Második megoldás. Az általános tag 0-hoz való konvergenciáját vizsgálva

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{n^4+n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{n^4}} \cdot \frac{1}{\sqrt[5]{1+\frac{1}{n^3}}} = 0 \cdot 1.$$

Tehát, ha a III. összehasonlítási kritériumban (2.12. Tulajdonság) $b_n = \frac{1}{n^{4/5}}$-t választunk, akkor

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt[5]{n^4+n}}}{\frac{1}{n^{4/5}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{1+\frac{1}{n^3}}} = 1,$$

ami a $(0, +\infty)$ intervallumba esik, ezért a kritérium alapján a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{n^4+n}}$ és $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{4/5}}$ sorok azonos természetűek. Továbbá a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{4/5}}$ általánosított harmonikus sor divergens, így a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{n^4+n}}$ sor is divergens lesz. □

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{a}{n}\right), \quad a \in (0, \pi)$;

Megoldás. Ahhoz, hogy vizsgáljuk, hogy az általános tag milyen gyorsan tart a 0-hoz, felhasználjuk a $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ határértéket. Mivel $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a}{n} = 0$, ezért $x = \frac{a}{n}$ helyettesítéssel kapjuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{a}{n}\right)}{\frac{a}{n}} = 1$, ami azt sugallja, hogy a III. összehasonlítási kritériumban (2.12. Tulajdonság) $b_n = \frac{a}{n}$-et választva

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{a}{n}\right)}{\frac{a}{n}} = 1 \in (0, \infty),$$

tehát a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{a}{n}\right)$ és $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a}{n}$ sorok azonos természetűek. De a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a}{n} = a \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ sor divergens, ezért a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{a}{n}\right)$ sor is divergens, minden $a \in (0, \pi)$ esetén. □

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{a}{n^2}\right), \quad a \in (0, \pi)$;

Megoldás. Hasonló meggondolásból, mint az előző alpontban $b_n = \frac{a}{n^2}$ választással

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{a}{n^2}\right)}{\frac{a}{n^2}} = 1 \in (0, \infty),$$

tehát a III. összehasonlítási kritérium (2.12. Tulajdonság) alapján a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{a}{n^2}\right)$ és $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a}{n^2}$ sorok azonos természetűek. De $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a}{n^2} = a \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sor konvergens, ezért a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{a}{n^2}\right)$ sor is konvergens, minden $a \in (0, \pi)$ esetén. □

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}\left(\frac{a}{\sqrt{n^3+n}}\right), \quad a \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right);$

Megoldás. A III. összehasonlítási kritériummal (2.12. Tulajdonság) a sorunkat $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ sorhoz hasonlítjuk. Ehhez kiszámoljuk a következő határértéket:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{a}{\sqrt{n^3+n}}\right)}{\frac{1}{n^{3/2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{a}{\sqrt{n^3+n}}\right)}{\frac{a}{\sqrt{n^3+n}}} \cdot \frac{\frac{a}{\sqrt{n^3+n}}}{\frac{1}{\sqrt{n^3}}} = 1 \cdot a = a \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

A III. összehasonlítási kritérium alapján a két sor azonos természetű és a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ sor konvergens (általánosított harmonikus sor $\alpha = \frac{3}{2} > 1$), ezért a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}\left(\frac{a}{\sqrt{n^3+n}}\right)$ sor konvergens minden $a \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ esetén. □

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}^3\left(\frac{1}{\sqrt{n^a+1}}\right), \quad a > 0;$

Megoldás. A III. összehasonlítási kritériummal (2.12. Tulajdonság) a sorunkat $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3a/2}}$ sorhoz hasonlítjuk. Ehhez kiszámoljuk a következő határértéket:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{tg}^3\left(\frac{1}{\sqrt{n^a+1}}\right)}{\frac{1}{n^{3a/2}}} = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{1}{\sqrt{n^a+1}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{n^a+1}}} \cdot \frac{\frac{1}{\sqrt{n^a+1}}}{\frac{1}{\sqrt{n^a}}}\right)^3 = 1 \cdot 1 = 1 \in (0, \infty).$$

A III. összehasonlítási kritérium alapján a két sor azonos természetű és a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3a/2}}$ (általánosított harmonikus) sor divergens, ha $\alpha = \frac{3a}{2} \leq 1$, vagyis $0 < a \leq \frac{2}{3}$, illetve konvergens, ha $\alpha = \frac{3a}{2} > 1$, vagyis $a > \frac{2}{3}$. Tehát a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}^3\left(\frac{1}{\sqrt{n^a+1}}\right)$ sor divergens, ha $0 < a \leq \frac{2}{3}$, illetve konvergens, ha $a > \frac{2}{3}$. □

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{1}{n^4}\right);$

Megoldás. A sor általános tagja $a_n = \cos\left(\frac{1}{n^4}\right)$, amelyre

$$\lim_{n\to\infty} \cos\left(\frac{1}{n^4}\right) = \cos\left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^4}\right) = \cos 0 = 1$$

a koszinusz függvény folytonossága miatt. Tehát a sor általános tagja nem tart a nullához, ezért a sor divergens. □

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$;

Megoldás. A hányados kritériumot (2.15. Tulajdonság) fogjuk használni. Ehhez kiszámoljuk az

$$\begin{aligned}\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} \\ &< 1\end{aligned}$$

határértéket. Mivel $\frac{1}{e} < 1$, ezért a hányados kritérium alapján a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ sor konvergens. □

(i) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$;

Első megoldás. Ha a hányados kritériummal (2.15. Tulajdonság) próbálkozunk, akkor

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln n} = 1$$

határértéket kapunk, és ezért a hányados kritériummal nem dönthető el a konvergencia.

Az I. összehasonlítási kritériumot (2.8. Tulajdonság) fogjuk használni. Ehhez pedig felhasználjuk az

$$n > \ln n, \quad \forall\, n \geq 2$$

egyenlőtlenséget, amelyet a következőképpen kaphatunk meg. Minden $n \geq 2$ esetén

$$e^n > 2^n = (1+1)^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n \geq C_n^1 = n \iff n = \ln(e^n) > \ln n.$$

(A logaritmus függvény növekvő, ezért megőrzi az egyenlőtlenségek irányát.)

Az $n > \ln n$ egyenlőtlenségből kapjuk, hogy $\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$, minden $n \geq 2$ esetén. A $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ (harmonikus) sor divergens, ezért az I. összehasonlítási kritérium alapján a $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ sor is divergens. □

Második megoldás. A $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ sor általános tagjainak sorozata csökkenő (az $(\frac{1}{\ln n})_{n\geq 2}$ sorozat szigorúan csökkenő), így a Cauchy-féle kondenzációs kritérium (2.6. Tulajdonság) alapján a $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ és $\sum_{n=2}^{\infty} 2^n \frac{1}{\ln(2^n)} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{n \ln 2}$ sorok azonos természetűek, de az utóbbi sor divergens, mert az általános tag nem tart nullához, $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n\ln 2} \overset{\text{C.-S.}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}-2^n}{\ln 2[(n+1)-n]} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{\ln 2} = +\infty$. □

(j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{n}$;

Megoldás. Azt vehetjük észre, hogy a sor $\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{n}$ általános tagja az $1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}$ számok számtani közepe, ami nagyobb mint a legkisebb szám és kisebb mint a legnagyobb. Innen

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{n}, \quad \forall n \geq 1.$$

A $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ sor divergens, ezért az I. összehasonlítási kritérium (2.8. Tulajdonság) alapján az eredeti $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{n}$ sor is divergens. □

(k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(a \cdot \frac{n^2+n+1}{n^2}\right)^n$, $a > 0$;

Megoldás. A gyökkritériumot (2.17. Tulajdonság) fogjuk használni:

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(a \cdot \frac{n^2+n+1}{n^2}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} a \cdot \frac{n^2+n+1}{n^2} = a.$$

A gyökkritérium szerint

- ha $\ell = a < 1$, akkor a sor konvergens;
- ha $\ell = a > 1$, akkor a sor divergens;
- ha $\ell = a = 1$, akkor a sor konvergenciája nem dönthető el ezzel a kritériummal.

Ez utóbbi esetben $a = 1$-et helyettesítve az eredeti sorba kapjuk a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+n+1}{n^2}\right)^n$ sort. Ez a sor divergens lesz, mert az általános tag nem tart 0-hoz:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+n+1}{n^2}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{n+1}{n^2}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{n+1}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{n+1}\cdot\frac{n+1}{n^2}\cdot n} =$$
$$= e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^2}\cdot n} = e^1 \neq 0.$$

Összegezve a sor konvergens, ha $0 < a < 1$, és divergens, ha $a \geq 1$. □

(l) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a^n \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$, $a > 0$;

Megoldás. A gyökkritériumot (2.17. Tulajdonság) fogjuk használni:

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} a \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = a \cdot e.$$

A gyökkritérium szerint

- ha $\ell = a \cdot e < 1$, azaz $a < \frac{1}{e}$, akkor a sor konvergens;
- ha $\ell = a \cdot e > 1$, azaz $a > \frac{1}{e}$, akkor a sor divergens;
- ha $\ell = a \cdot e = 1$, azaz $a = \frac{1}{e}$, akkor a sor konvergenciája nem dönthető el ezzel a kritériummal.

Az utóbbi esetben $a = \frac{1}{e}$-t helyettesítve a sorba kapjuk a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} \frac{1}{e^n}$ sort, amelyről el kell dönteni, hogy konvergens-e. Az 1.4. Feladatban igazoltuk , hogy az $e'_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}$ sorozat csökkenő és a határértéke e, ezért minden $n \geq 1$ esetén

$$\begin{aligned}
\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} &\geq e \\
\iff \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-(n+1)} &\leq \frac{1}{e} \\
\iff \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-(n+1)n} &\leq \frac{1}{e^n} \\
\iff \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-(n+1)n} &\leq \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} \frac{1}{e^n} \\
\iff \frac{1}{e} \leq \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n} &\leq \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} \frac{1}{e^n},
\end{aligned}$$

mivel az $e_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$ sorozat növekvő és a határértéke e, ahonnan $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \leq e$, azaz $\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n} \geq \frac{1}{e}$, minden $n \geq 1$ esetén. Ezzel beláttuk, hogy a sor általános tagja nem csökken $\frac{1}{e}$ alá s így nem tart a 0-hoz, tehát a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} \frac{1}{e^n}$ sor divergens.

Összegezve a sor konvergens, ha $0 < a < \frac{1}{e}$, és divergens, ha $a \geq \frac{1}{e}$. □

(m) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $a > 0$;

Megoldás. A gyökkritériumot (2.17. Tulajdonság) fogjuk használni:

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} a \left(1 + \frac{1}{n}\right) = a.$$

A gyökkritérium alapján

- ha $\ell = a < 1$, akkor a sor konvergens;
- ha $\ell = a > 1$, akkor a sor divergens;
- ha $\ell = a = 1$, akkor a sor konvergenciája nem dönthető el ezzel a kritériummal.

Ez utóbbi esetben $a = 1$-et helyettesítve a megadott sorba kapjuk a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ sort, amelyről el kell eldönteni, hogy konvergens-e. Mivel

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e,$$

ezért a sor általános tagja nem tart 0-hoz, tehát $a = 1$ esetén a sor divergens.

Összegezve a sor konvergens, ha $0 < a < 1$, és divergens, ha $a \geq 1$. □

(n) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$;

Megoldás. Mivel

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1,$$

ezért a hányados kritérium (2.15. Tulajdonság) szerint a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ sor konvergens. □

(o) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (3n-1)}$;

Megoldás. Mivel

$$\begin{aligned}\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1) \cdot (2n+1)}{2 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (3n-1) \cdot (3n+2)} \cdot \frac{2 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (3n-1)}{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{3n+2} = \frac{2}{3} \\ &< 1,\end{aligned}$$

ezért a hányados kritérium (2.15. Tulajdonság) alapján a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (3n-1)}$ sor konvergens. □

(p) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(an)^n}{n!}$, $a > 0$;

Megoldás. A hányados kritériumot (2.15. Tulajdonság) fogjuk használni:

$$\begin{aligned}\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{[a(n+1)]^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{(an)^n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{a(n+1)^n}{n^n} = a \cdot e,\end{aligned}$$

A hányados kritérium alapján

- ha $\ell = a \cdot e < 1$, vagyis $a < \frac{1}{e}$, akkor a sor konvergens;
- ha $\ell = a \cdot e > 1$, vagyis $a > \frac{1}{e}$, akkor a sor divergens;
- ha $\ell = a \cdot e = 1$, vagyis $a = \frac{1}{e}$, akkor ezzel a kritériummal nem dönthető el a sor konvergenciája.

Az $a = \frac{1}{e}$-et visszahelyettesítve a megadott sorba kapjuk a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n! e^n}$ sort, amelyről el kell dönteni, hogy konvergens-e. Az $e_k' = \left(\frac{k+1}{k}\right)^{k+1}$ sorozat csökkenő és a határértéke e, ezért minden $k \geq 1$ esetén $e \leq \left(\frac{k+1}{k}\right)^{k+1}$. Innen kapjuk, hogy minden $n \geq 2$ esetén

$$\begin{aligned}&\underbrace{e \cdot e \cdot \ldots \cdot e \cdot e}_{(n-1)\text{-szer}} \leq e_1' \cdot e_2' \cdot \ldots \cdot e_{n-2}' \cdot e_{n-1}' \\ \iff &\underbrace{e \cdot e \cdot \ldots \cdot e \cdot e}_{(n-1)\text{-szer}} \leq \left(\frac{2}{1}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3 \cdot \ldots \cdot \left(\frac{n-1}{n-2}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{n}{n-1}\right)^n \\ \iff &e^{n-1} \leq \frac{n^n}{(n-1)!}\end{aligned}$$

$$\iff 1 \leq \frac{n^n}{e^{n-1}(n-1)!}$$
$$\iff \frac{1}{e \cdot n} \leq \frac{n^n}{e^n \cdot n!}.$$

Mivel a $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{e \cdot n} = \frac{1}{e} \cdot \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ sor divergens (harmonikus sor) a fenti egyenlőségből az I. összehasonlítási kritérium szerint következik, hogy a sor divergens.

Összegezve a sor konvergens, ha $0 < a < \frac{1}{e}$, és divergens, ha $a \geq \frac{1}{e}$. □

(q) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{\sqrt{n!}}$, $a > 0$;

Megoldás. A hányados kritérium (2.15. Tulajdonság) alapján, mivel

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^{n+1}}{\sqrt{(n+1)!}} \cdot \frac{\sqrt{n!}}{a^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{\sqrt{n+1}} = 0 < 1,$$

ezért a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{\sqrt{n!}}$ sor konvergens minden $a > 0$ esetén. □

(r) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2}$;

Megoldás. A Raabe-Duhamel–kritériumot (2.20. Tulajdonság) használva

$$\begin{aligned} K = \lim_{n\to\infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) &= \lim_{n\to\infty} n \left(\frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \cdot \frac{4^{n+1}[(n+1)!]^2}{(2n+2)!} - 1 \right) \\ &= \lim_{n\to\infty} n \left(\frac{4(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} - 1 \right) \\ &= \lim_{n\to\infty} n \left(\frac{2(n+1)}{2n+1} - 1 \right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} \\ &< 1, \end{aligned}$$

ezért a sor divergens.
Megjegyezzük, hogy hányados kritérium használata esetén $\ell = 1$-et kapunk, így nem tudunk dönteni vele a sor természetéről. □

(s) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (2 + 5(n-1))}{3 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot (3 + 5(n-1))}$;

Megoldás. Mivel

$$K = \lim_{n\to\infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n\to\infty} n \left(\frac{3+5n}{2+5n} - 1 \right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2+5n} = \frac{1}{5} < 1,$$

ezért a Raabe-Duhamel–kritérium (2.20. Tulajdonság) szerint a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (2+5(n-1))}{3 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot (3+5(n-1))}$ sor divergens. □

(t) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1^2 \cdot 5^2 \cdot \ldots \cdot (4n-3)^2}{3^2 \cdot 7^2 \cdot \ldots \cdot (4n-1)^2}$;

Megoldás. Ha a hányados (2.15. Tulajdonság) vagy a Raabe-Duhamel–kritériummal (2.20. Tulajdonság) próbálkozunk, akkor a kritériumokban szereplő határérték 1 lesz, így ezekkel a kritériumokkal nem tudjuk eldönteni, hogy a sor konvergenciáját.

Mivel a sor általános tagja $\left(\frac{4k-3}{4k-1}\right)^2$ alakú számok szorzata, ezért ezekre felírjuk a Bernoulli egyenlőtlenséget:

$$\left(\frac{4k-3}{4k-1}\right)^2 \geq 1 + 2\left(\frac{4k-3}{4k-1} - 1\right) \iff \left(\frac{4k-3}{4k-1}\right)^2 \geq \frac{4k-5}{4k-1},$$

minden $k \geq 1$ esetén. A két oldalon lévő tagokat összeszorozzuk $k = 2, 3, \ldots, n$ esetén, majd mindkét oldalt megszorozzuk $\left(\frac{1^2}{3^2}\right)$-tel (amiatt, hogy $k = 1$ esetben a fenti egyenlőtlenségben a jobb oldalon negatív szám van). Innen a sor általános tagja

$$\begin{aligned} \frac{1^2 \cdot 5^2 \cdot \ldots \cdot (4n-3)^2}{3^2 \cdot 7^2 \cdot \ldots \cdot (4n-1)^2} &= \frac{1^2}{3^2} \cdot \prod_{k=2}^{n} \left(\frac{4k-3}{4k-1}\right)^2 \geq \frac{1^2}{3^2} \cdot \prod_{k=2}^{n} \frac{4k-5}{4k-1} = \\ &= \frac{1}{3^2} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{7}{11} \cdot \ldots \cdot \frac{4n-9}{4n-5} \cdot \frac{4n-5}{4n-1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4n-1} \geq \frac{1}{12n}, \end{aligned}$$

minden $n \geq 1$ esetén. Mivel a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{12n} = \frac{1}{12} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ sor divergens, ezért az I. összehasonlítási kritérium (2.8. Tulajdonság) alapján a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1^2 \cdot 5^2 \cdot \ldots \cdot (4n-3)^2}{3^2 \cdot 7^2 \cdot \ldots \cdot (4n-1)^2}$ sor is divergens. □

(u) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a^n n!}{n^n}$, $a > 0$;

Megoldás. A hányados kritériumot (2.15. Tulajdonság) fogjuk használni:

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{a^n n!} = \lim_{n\to\infty} a \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{a}{e}.$$

A hányados kritérium alapján

- ha $\ell = \frac{a}{e} < 1$, vagyis $a < e$, akkor a sor konvergens;
- ha $\ell = \frac{a}{e} > 1$, vagyis $a > e$, akkor a sor divergens;
- ha $\ell = \frac{a}{e} = 1$, vagyis $a = e$, akkor a sor konvergenciája nem dönthető el ezzel a kritériummal.

Az $a = e$ esetben külön vizsgáljuk a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^n n!}{n^n}$ sor konvergenciáját. Az 1.4. Feladatban beláttuk, hogy az $e_k = \left(\frac{k+1}{k}\right)^k$ sorozat növekvő és tart e-hez, emiatt $\left(\frac{k+1}{k}\right)^k \leq e$, minden $k \geq 1$ esetén. Ha ezeknek az egyenlőségeknek a megfelelő oldalait összeszorozzuk $k = 1, 2, \ldots, n-1$ esetén, akkor kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} &\left(\frac{2}{1}\right)^1 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^3 \cdot \ldots \cdot \left(\frac{n-1}{n-2}\right)^{n-2} \cdot \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} \leq e^{n-1} \\ \iff &\frac{n^{n-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots\ (n-1)} \leq e^{n-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\iff \frac{n^{n-1}}{(n-1)!} \le e^{n-1} \\
&\iff \frac{n^n}{n!} \le e^{n-1} \quad \Big/ \cdot e\frac{n!}{n^n} \\
&\iff e \le \frac{e^n n!}{n^n}, \qquad \forall n \ge 1,
\end{aligned}$$

ahonnan láthatjuk, hogy a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^n n!}{n^n}$ sor általános tagja nem tart 0-hoz (mert e-nél mindig nagyobb), emiatt a sor divergens.

Összegezve a sor konvergens, ha $0 < a < e$, és divergens, ha $a \ge e$. □

(v) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a^{\sqrt{n}}$, $a > 0$;

Megoldás. A Raabe-Duhamel–kritériumot (2.20. Tulajdonság) fogjuk használni:

$$\begin{aligned}
K = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) &= \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a^{\sqrt{n}}}{a^{\sqrt{n+1}}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(a^{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}} - 1\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} n\left(a^{\frac{-1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}} - 1\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{-n}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} \cdot \frac{a^{\frac{-1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}} - 1}{\frac{-1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{-n}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{a^{\frac{-1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}} - 1}{\frac{-1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{-n}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} \\
&= -\infty \cdot \ln a,
\end{aligned}$$

ahol felhasználtuk, hogy $x = x_n = \frac{-1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$ tart 0-hoz, mikor n tart végtelenbe, illetve a $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \ln a$ határértéket.

- Ha $\ln a > 0$, azaz $a > 1$, akkor a fenti határérték $K = -\infty < 1$, így a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a^{\sqrt{n}}$ sor divergens.
- Ha $\ln a < 0$, azaz $a < 1$, akkor a fenti határérték $K = +\infty > 1$, így a sor konvergens.
- Ha $a = 1$, akkor a fenti határértékben $-\infty \cdot 0$ határozatlan esetet kapunk, emiatt $a = 1$-re a sor konvergenciáját külön kell tárgyalni. Ebben az esetben a sorunk $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1^{\sqrt{n}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 1$ divergens, mert az általános tag nem tart 0-hoz.

Összegezve a sor konvergens, ha $0 < a < 1$, és divergens, ha $a \ge 1$. □

(w) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a^{\ln n}$, $a > 0$;

Első megoldás. A Raabe-Duhamel–kritériumhoz (2.20. Tulajdonság) kiszámítjuk a következő határértéket:

$$K = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a^{\ln n}}{a^{\ln(n+1)}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n(a^{\ln n - \ln(n+1)} - 1)$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{n\to\infty} n(a^{\ln(\frac{n}{n+1})}-1) = \lim_{n\to\infty} n\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)\frac{a^{\ln(\frac{n}{n+1})}-1}{\ln(\frac{n}{n+1})} \\
&= \lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot \lim_{n\to\infty}\frac{a^{\ln(\frac{n}{n+1})}-1}{\ln(\frac{n}{n+1})} = \lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} \\
&= \ln e^{-1}\cdot \ln a = -\ln a,
\end{aligned}
$$

ahol felhasználtuk, hogy $x = x_n = \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$ tart 0-hoz, ha n tart végtelenhez és ezzel a változó cserével $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^{\ln(\frac{n}{n+1})}-1}{\ln(\frac{n}{n+1})} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a$.

Ekkor a Raabe-Duhamel–kritérium alapján,

- ha $K = -\ln a < 1$, azaz $a > \frac{1}{e}$, akkor a sor divergens;
- ha $K = -\ln a > 1$, azaz $a < \frac{1}{e}$, akkor a sor konvergens;
- ha $K = -\ln a = 1$, azaz $a = \frac{1}{e}$, akkor a sor konvergenciája nem dönthető el ezzel a kritériummal.
  Ha $a = \frac{1}{e}$, akkor a $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{e}\right)^{\ln n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{e^{\ln n}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ sorunk divergens (harmonikus sor).

Összegezve a sor konvergens, ha $0 < a < \frac{1}{e}$, és divergens, ha $a \geq \frac{1}{e}$. □

Második megoldás. A következő átalakítást végezhetjük a sor általános tagján:

$$
a^{\ln n} = \left(e^{\ln a}\right)^{\ln n} = \left(e^{\ln n}\right)^{\ln a} = n^{\ln a}, \quad \forall\, n \geq 1,\ \forall\, a > 0.
$$

Tehát $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a^{\ln n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{\ln a} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{-\ln a}}$, amely pontosan az általánosított harmonikus sor ($\alpha = -\ln a$ esetén). Tehát

- ha $\alpha = -\ln a \leq 1$, vagyis $a \geq \frac{1}{e}$, akkor a sor divergens;
- ha $\alpha = -\ln a > 1$, vagyis $a < \frac{1}{e}$, akkor a sor konvergens.

□

(x) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1\cdot 5\cdot \ldots \cdot (4n-3)}{3\cdot 7\cdot \ldots \cdot (4n-1)}\right]^a$, $a \in \mathbb{R}$;

Megoldás. A Raabe-Duhamel–kritériumot (2.20. Tulajdonság) fogjuk használni:

$$
\begin{aligned}
K &= \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\left(\frac{4n+3}{4n+1}\right)^a - 1\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} n\left(\left(1+\frac{2}{4n+1}\right)^a - 1\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{2n}{4n+1}\cdot\frac{\left(1+\frac{2}{4n+1}\right)^a-1}{\frac{2}{4n+1}} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{2n}{4n+1}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{2}{4n+1}\right)^a-1}{\frac{2}{4n+1}} \overset{(*)}{=} \frac{2}{4}\cdot a = \frac{a}{2}.
\end{aligned}
$$

A $(*)$ egyenlőségben használtuk a $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^a-1}{x} = a$ határértéket, vagyis minden nullába tartó (x_n) sorozat esetén ($\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$) teljesül, hogy $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(1+x_n)^a-1}{x_n} = a$. A mi esetünkben $x_n = \frac{2}{4n+1}$, $n \geq 1$.

Tehát a Raabe-Duhamel–kritérium alapján

- ha $K = \frac{a}{2} < 1$, azaz $a < 2$, akkor a sor divergens;
- ha $K = \frac{a}{2} > 1$, azaz $a > 2$, akkor a sor konvergens;
- ha $K = \frac{a}{2} = 1$, azaz $a = 2$, akkor a Raabe-Duhamel–kritériummal nem dönthető el a sor konvergenciája.

Ezutóbbi esetben, mikor $a = 2$, akkor a (t) alpontban megmutattuk, hogy a sor divergens. Összegezve a sor konvergens, ha $a > 2$, és divergens, ha $a \leq 2$. □

(y) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$.

Megoldás. Az $(a_n)_{n\geq 2} = \left(\frac{1}{n \ln}\right)_{n\geq 2}$ sorozat csökkenő és pozitív tagú, ezért a Cauchy kondenzációs kritérium (2.6. Tulajdonság) alapján a $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ és $\sum_{k=2}^{\infty} 2^k \cdot \frac{1}{2^k \ln(2^k)} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln 2} = \frac{1}{\ln 2} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k}$ sorok azonos természetűek. Az utóbbi sor divergens (harmonikus sor), ezért a $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ sor is divergens. □

2.3.2. Váltakozó előjelű sorok

2.9. Feladat. Tanulmányozd a következő sorok konvergenciáját a Leibniz-kritériummal (2.24. Tulajdonság):

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$;

Megoldás. Az $a_n = \frac{1}{n}$ általános tagú sorozat

- csökkenő, mivel $a_n = \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} = a_{n+1}$, minden $n \geq 1$ esetén, és
- tart nullához, mivel $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$,

ezért a Leibniz-kritérium alapján a $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ sor konvergens. □

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}}$;

Megoldás. Az $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ általános tagú sorozat

- csökkenő, mivel $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n+1}} = a_{n+1}$, minden $n \geq 1$ esetén, és
- tart nullához, mivel $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$,

ezért a Leibniz-kritérium alapján a $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ sor konvergens. □

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$;

Megoldás. Az $a_n = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ általános tagú sorozat

- csökkenő, mivel

$$a_n - a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} - \frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+2)}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+2}}\right) > 0,$$

  minden $n \geq 1$ esetén, és
- tart nullához, mivel $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = 0$,

ezért a Leibniz-kritérium alapján a $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ sor konvergens. □

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{4n+1}{3^n}$;

Megoldás. Az $a_n = \frac{4n+1}{3^n}$ általános tagú sorozat

- csökkenő, mivel

$$\frac{4n+1}{3^n} > \frac{4(n+1)+1}{3^{n+1}} \iff 4n+1 > \frac{4n+5}{3} \iff$$
$$\iff 12n+3 > 4n+5 \iff 8n > 2 \iff n > \frac{1}{4},$$

  minden $n \geq 1$ esetén;
- tart nullához, mivel a Cesaro-Stolz–tétel alapján

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4n+1}{3^n} \overset{C.S.}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{[4(n+1)+1]-[4n+1]}{3^{n+1}-3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{3^n \cdot 2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{3^n} = 0,$$

ezért a Leibniz-kritérium szerint a $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{4n+1}{3^n}$ sor konvergens. □

(e) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{\ln n}$;

Megoldás. Következőképpen írható át a sor

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{\ln n} = \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{\ln n} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{1}{\ln(n+1)}.$$

Az $a_n = \frac{1}{\ln(n+1)}$ általános tagú sorozat

- csökkenő, mivel a természetes alapú logaritmus függvény növekvő;
- tart nullához, mivel $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\ln(n+1)} = 0$,

ezért a Leibniz-kritérium alapján a $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{\ln n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\ln(n+1)}$ sor konvergens. □

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)$.

Megoldás. Az $a_n = \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)$ általános tagú sorozat

- pozitív tagú, mivel minden $n \geq 1$ esetén $\dfrac{\pi}{2n} \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, ahol a szinusz függvény pozitív értéket vesz fel;
- csökkenő, mivel a szinusz függvény növekvő a $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumon és a $\left(\dfrac{\pi}{2n}\right)_{n\geq 1}$ sorozat csökkenő;
- tart nullához, mivel $\lim\limits_{n\to\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \sin\left(\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\pi}{2n}\right) = \sin 0 = 0$, a szinusz függvény folytonossága alapján;

ezért a Leibniz-kritérium szerint a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)$ sor konvergens. □

(g) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt[n]{n}}{\ln n}$;

Megoldás. A $b_n = \sqrt[n]{n}$ általános tagú sorozat csökkenő az $n = 3$ tagtól kezdve:

$$\sqrt[n]{n} \geq \sqrt[n+1]{n+1} \iff n^{\frac{1}{n}} \geq (n+1)^{\frac{1}{n+1}} \iff n^{n+1} \geq (n+1)^n \iff n \geq \left(\frac{n+1}{n}\right)^n,$$

minden $n \geq 3$ esetén, mivel $3 > e > \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$, minden $n \geq 1$ esetén (lásd az 1.4. Feladatot). A $c_n = \ln n$ általános tagú sorozat növekvő, ezért az $a_n = \frac{b_n}{c_n} = \frac{\sqrt[n]{n}}{\ln n}$ pozitív tagú sorozat csökkenő az $n \geq 3$ tagtól kezdve. Továbbá $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{\ln n} =$ „$\frac{1}{\infty}$” $= 0$, így a Leibniz-kritérium szerint a $\sum\limits_{n=3}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt[n]{n}}{\ln n}$ sor konvergens. Mivel véges sok tag elvétele, hozzáadás, vagy megváltoztatása nem befolyásolja a sor konvergenciáját, ezért a $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt[n]{n}}{\ln n}$ sor is konvergens lesz. □

2.3.3. Abszolút és feltételesen konvergens sorok

2.10. Feladat. A következő sorok esetén vizsgáld az abszolút és feltételes konvergenciát:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$;

Megoldás. A sor nem abszolút konvergens, mert a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^n \frac{1}{n}\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ sor a harmonikus sor, ami divergens.

A $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ sor váltakozó előjelű és a $\left|(-1)^n \dfrac{1}{n}\right| = \dfrac{1}{n}$ általános tagú sorozat monoton csökkenő és a határértéke $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, ezért a Leibniz-kritérium (2.24. Tulajdonság) alapján a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ sor konvergens.

Tehát a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ sor feltételesen konvergens.

□

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}$;

Megoldás. Mivel a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^n \frac{1}{n^2}\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sor konvergens (általánosított harmonikus sor, $\alpha = 2 > 1$), ezért a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}$ sor abszolút konvergens (tehát konvergens is). $\square$

(c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n}$;

Megoldás. A sor nem abszolút konvergens, mivel $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n \ln n}\right| = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ sor divergens a 2.8. Feladat (y) alpontja alapján.

A sor konvergens a Leibniz-kritérium (2.24. Tulajdonság) alapján, mert a $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n}$ sor váltakozó előjelű és az $(\frac{1}{n \ln n})_{n \geq 2}$ sorozat szigorúan csökkenő, határértéke $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n \ln n} = 0$.

Tehát a $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n}$ sor feltételesen konvergens. $\square$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$;

Megoldás. Tekintjük a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^n \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ sort. Mivel $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ minden $n \geq 1$ esetén és a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ (harmonikus sor) divergens, ezért az I. összehasonlítási kritérium (2.8. Tulajdonság) alapján a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ sor is divergens. Tehát a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ sor nem abszolút konvergens.

A 2.9. Feladat (c) alpontjában a Leibniz-kritérium (2.24. Tulajdonság) felhasználásával igazoltuk, hogy a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ váltakozó előjelű sor konvergens, mivel az $a_n = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ általános tagú sorozat csökkenő és tart a nullához. Tehát a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ sor feltételesen konvergens. $\square$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2 \sin^2 x)^n}{n+1}, \quad x \in \mathbb{R}$;

Megoldás. Ha $2 \sin^2 x > 1$, akkor a sor divergens, mert az általános tagja nem tart a nullához. Valóban, $\lim\limits_{n \to \infty} \left|(-1)^{n+1} \frac{(2 \sin^2 x)^n}{n+1}\right| = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{(2 \sin^2 x)^n}{n+1} = +\infty$, ezért

$$\lim_{n \to \infty} \left|(-1)^{n+1} \frac{(2 \sin^2 x)^n}{n+1}\right| \neq 0 \iff \lim_{n \to \infty} (-1)^{n+1} \frac{(2 \sin^2 x)^n}{n+1} \neq 0.$$

Tehát $x \in \cup_{k \in \mathbb{Z}} (\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{3\pi}{4} + k\pi)$ esetén a sor divergens.

Ha $2 \sin^2 x = 1$, akkor a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2 \sin^2 x)^n}{n+1} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n+1}$ sor feltételesen konvergens az (a) alpont alapján.

Ha $2 \sin^2 x = 0$, akkor a sor a konstans nulla sor, amely abszolút konvergens.

Ha $0 < 2\sin^2 x < 1$, akkor a sor abszolút konvergens, mivel a $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}\frac{(2\sin^2 x)^n}{n+1}\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2\sin^2 x)^n}{n+1}$ pozitív tagú sor konvergens a hányados kritérium (2.15. Tulajdonság) alapján:

$$\ell = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(2\sin^2 x)^{n+1}}{n+2}}{\frac{(2\sin^2 x)^n}{n+1}} = \lim_{n\to\infty} 2\sin^2 x\cdot\frac{n+1}{n+2} = 2\sin^2 x < 1.$$

Tehát a sor abszolút konvergens, ha $0 \le 2\sin^2 x < 1$, vagyis ha $x \in \cup_{k\in\mathbb{Z}}\left(-\frac{\pi}{4}+k\pi, \frac{\pi}{4}+k\pi\right)$.

$\square$

(f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^{a+\frac{1}{n}}}, \quad a\in\mathbb{R};$

Megoldás. Vizsgáljuk a $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\frac{1}{n^{a+\frac{1}{n}}}\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{a+\frac{1}{n}}}$ pozitív tagú sor konvergenciáját a III. összehasonlítási kritériummal (2.12. Tulajdonság). Mivel

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^a}}{\frac{1}{n^{a+\frac{1}{n}}}} = \lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1 \in (0,+\infty),$$

ezért a $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^a}$ és $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{a+\frac{1}{n}}}$ sorok azonos természetűek:

- konvergensek, ha $a > 1$;
- divergensek, ha $a \le 1$.

Tehát a $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^{a+\frac{1}{n}}}$ sor abszolút konvergens, ha $a > 1$.

Ha $a < 0$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^{a+\frac{1}{n}}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^a}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}} = +\infty\cdot 1 = +\infty$, tehát a $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^{a+\frac{1}{n}}}$ sor általános tagja nem tart nullához, ezért a sor divergens.

Ha $a = 0$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty}\left|(-1)^n\frac{1}{n^{a+\frac{1}{n}}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$, ezért a sor általános tagja nem tart a nullához, tehát a sor divergens.

Ha $0 < a \le 1$, akkor a Lebniz-kritériumot (2.24. Tulajdonság) alkalmazzuk a $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^{a+\frac{1}{n}}}$ sor konvergenciájának igazolására s ezzel megmutatjuk, hogy ebben az esetben a sor feltételesen konvergens. Az $a_n = \frac{1}{n^{a+\frac{1}{n}}}$ általános tagú sorozat tart nullához, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^{a+\frac{1}{n}}} = 0$, így elég megvizsgálni a monotonitását.

$$\frac{1}{n^{a+\frac{1}{n}}} \ge \frac{1}{(n+1)^{a+\frac{1}{n+1}}} \iff \left(\frac{n+1}{n}\right)^{a+\frac{1}{n}} \ge (n+1)^{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}} \iff$$

$$\iff \left(\frac{n+1}{n}\right)^{a+\frac{1}{n}} \ge (n+1)^{\frac{1}{n(n+1)}} \iff \left(\frac{n+1}{n}\right)^{an+1} \ge (n+1)^{\frac{1}{(n+1)}} \iff$$

$$\iff \left(\frac{n+1}{n}\right)^{a(n+1)+1-a} \ge (n+1)^{\frac{1}{(n+1)}} \iff$$

$$\iff \left(\frac{n+1}{n}\right)^{1-a}\cdot\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}\right]^a \ge \sqrt[n+1]{n+1}.$$

Az 1.4. Feladatban igazoltuk, hogy az $e'_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ monoton csökkenő és tart e-hez, továbbá $\left(\frac{n+1}{n}\right)^{1-a} \geq 1$, minden $n \geq 1$ esetén, ezért

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{1-a} \cdot \left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}\right]^a \geq 1 \cdot e^a = e^a, \quad \forall\, n \geq 1.$$

Mivel $e^a > 1$ és $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n+1]{n+1} = 1$, ezért létezik olyan $n_0 \in \mathbb{N}$ úgy, hogy $e^a > \sqrt[n+1]{n+1}$, minden $n \geq n_0$ esetén, és így

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{1-a} \cdot \left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}\right]^a \geq \sqrt[n+1]{n+1}, \quad \forall\, n \geq n_0.$$

Tehát Leibniz-kritérium alapján a $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^{a+\frac{1}{n}}}$ sor konvergens, de véges sok tag hozzáadás nem változtatja meg a sor konvergenciáját, ezért a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^{a+\frac{1}{n}}}$ sor is konvergens. Ezzel megmutattuk, hogy a $0 < a \leq 1$ esetén a sor feltételesen konvergens. □

(g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos(nx)}{n^2}$, $x \in \mathbb{R}$;

Első megoldás. A $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\cos nx}{n^2}\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos(nx)|}{n^2}$ sor konvergens, ezért a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}$ sor abszolút konvergens és mivel abszolút konvergens, ezért konvergens is.

Az abszolút konvergencia a következőképpen látható be. Mivel a $\cos y \in [-1,1]$, minden $y \in \mathbb{R}$ esetén, ezért

$$\frac{|\cos(nx)|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}, \qquad \forall n \geq 1.$$

Tehát a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos(nx)|}{n^2}$ sor általános tagjai felülről becsülhetők a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sor általános tagjaival. Továbbá a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sor konvergens (általános harmonikus sor $\alpha = 2$ kitevővel), így az I. összehasonlítási kritérium (2.8. Tulajdonság) alapján a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos(nx)|}{n^2}$ sor is konvergens. □

Második megoldás. Minden $y \in \mathbb{R}$ esetén $\cos y \in [-1,1]$, ahonnan $|\cos y| \leq 1$. Így a sor tagjainak abszolút értékére a

$$\left|\frac{\cos(nx)}{n^2}\right| \leq \frac{|\cos(nx)|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, n \geq 1$$

felső becslés adható. A $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sor konvergens (általánosított harmonikus sor, $\alpha = 2$), ezért a Weierstrass-kritérium (2.27. Tulajdonság) alapján a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}$ sor abszolút konvergens, minden $x \in \mathbb{R}$ esetén. □

(h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a^n}{1+a^{2n}}$, $a \in \mathbb{R}$;

Megoldás. Három esetet különböztetünk meg.

$|a| < 1$ **eset.** Ekkor a sorozat abszolút konvergens. Valóban,

$$\left|\frac{a^n}{1+a^{2n}}\right| = \frac{|a|^n}{1+a^{2n}} \leq \frac{|a|^n}{1} = |a|^n, \qquad \forall n \geq 1,$$

így az I. összehasonlítási kritérium (2.8. Tulajdonság) alapján a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\frac{a^n}{1+a^{2n}}\right|$ sor konvergens, mivel a $\sum\limits_{n=1}^{n} |a|^n$ sor konvergens (lásd mértani sor $q = |a| < 1$).

$|a| > 1$ **eset.** Ekkor a sor abszolút konvergens, mert

$$\left|\frac{a^n}{1+a^{2n}}\right| = \frac{|a|^n}{1+|a|^{2n}} = \frac{|a|^n}{|a|^{2n}} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{|a|^{2n}}} = \frac{1}{|a|^n} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{|a|^{2n}}} \leq \frac{1}{|a|^n} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{|a|^n}, \qquad \forall n \geq 1.$$

Az I. összehasonlítási kritérium alapján a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\frac{a^n}{1+a^{2n}}\right|$ sor konvergens, mivel a $\sum\limits_{n=1}^{n} \frac{1}{|a|^n}$ sor konvergens (lásd mértani sor $q = \dfrac{1}{|a|} < 1$).

$a = \pm 1$ **eset.** A $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1^n}{1+1^{2n}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}$ és $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+(-1)^{2n}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2}$ sorok divergensek, mert az általános tagok nem tartanak a nullához.

Összegezve a sor abszolút konvergens, ha $a \neq \pm 1$, és divergens, ha $a = \pm 1$. □

(i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a^n}{1-a^n}$, $a \neq \pm 1$;

Megoldás. Két esetet különböztetünk meg.

$|a| < 1$ **eset.** Ekkor a sorozat abszolút konvergens. Valóban,

$$\left|\frac{a^n}{1+a^n}\right| = \frac{|a|^n}{|1+a^n|} \leq \frac{|a|^n}{1-|a|^n} \leq \frac{|a|^n}{1-|a|}, \qquad \forall n \geq 1,$$

mert $|1+a^n| \geq |1| - |a^n| = 1 - |a|^n \geq 1 - |a|$, minden $n \geq 1$ és $|a| < 1$ esetén. Az I. összehasonlítási kritérium (2.8. Tulajdonság) alapján a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\frac{a^n}{1+a^n}\right|$ sor konvergens, mivel a $\sum\limits_{n=1}^{n} \frac{|a|^n}{1-|a|} = \frac{1}{1-|a|} \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a|^n$ sor konvergens (lásd mértani sor $q = |a| < 1$).

$|a| > 1$ **eset.** Ekkor a sor divergens, mert az általános tag nem tart 0-hoz:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{1-a^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{a^n} \cdot \frac{1}{\frac{1}{a^n}-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{-1}{1-\frac{1}{a^n}} = \frac{-1}{1-\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a^n}} = \frac{-1}{1-0} = -1.$$

□

(j) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{\operatorname{arctg}(2n)}{n\sqrt{n+3}}$.

Megoldás. Minden $y \in \mathbb{R}$ esetén $\operatorname{arctg} y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, ahonnan $|\operatorname{arctg} y| < \frac{\pi}{2}$. Így a sor tagjainak abszolút értékére a következő felső becslés adható:

$$\left|(-1)^n \frac{\operatorname{arctg}(2n)}{n\sqrt{n+3})}\right| \leq \frac{\frac{\pi}{2}}{n\sqrt{n+3}} \leq \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{n\sqrt{n}} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{n^{3/2}}, \quad \forall x \in \mathbb{R},\ \forall\, n \geq 1.$$

A $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{n^{3/2}} = \frac{\pi}{2} \cdot \sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^{3/2}}$ sor konvergens (általánosított harmonikus sor, $\alpha = \frac{3}{2}$), ezért a Weierstrass-kritérium (2.27. Tulajdonság) alapján a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\operatorname{arctg}(2n)}{n\sqrt{n+3}}$ sor abszolút konvergens. □

(k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{5n-3}{4^n}.$

Megoldás. A sor abszolút konvergens, mert a hányados kritérium (2.15. Tulajdonság) alapján a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |(-1)^n \frac{5n-3}{4^n}| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5n-3}{4^n}$ sor konvergens:

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{5(n+1)-3}{4^{n+1}}}{\frac{5n-3}{4^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{5n+2}{5n-3} \cdot \frac{4^n}{4^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{5n+2}{5n-3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4} < 1.$$

□

2.3.4. Általános tagú sorok

2.11. Feladat. Tanulmányozd a következő sorok konvergenciáját:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin n;$

Megoldás. A sor divergens, mivel az 1.12. Feladat (b) alpontja alapján a sor általános tagja nem tart 0-hoz. □

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \cos n;$

Megoldás. A sor divergens, mivel az 1.12. Feladat (c) alpontja alapján a sor általános tagja nem tart 0-hoz. □

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin(n^2);$

Megoldás. Az Oxy derékszögű koordináta-rendszerben felvesszük az O origó középpontú egységsugarú kört. Jelölje $P(1,0)$ és $Q(-1,0)$ az kör Ox tengellyel vett két metszéspontját. A körön felvesszük az A, B, C, D pontokat óramutató járásával ellentétes irányba, ebben a sorrendben úgy, hogy $\overset{\frown}{PA}$, $\overset{\frown}{BQ}$, $\overset{\frown}{QC}$, $\overset{\frown}{DP}$ körívek hossza $\frac{2\pi-6}{4}$ legyen. Ekkor az $\overset{\frown}{AB}$ és $\overset{\frown}{CD}$ körívek hossza 3, míg a $\overset{\frown}{BC}$ és $\overset{\frown}{DA}$ körívek hossza 0,2-nél kisebb.

Minden $k > 0$ esetén jelölje N_k azt a pontot, amelyet úgy kapunk, hogy egy k hosszúságú szakasz egyik végpontját a P pontba helyezzük, majd az óramutató járásával ellentétes irányba feltekerjük a szakaszt a körre és a végpontja a kör N_k pontjába esik. A kör egy A pontjának távolságát egy B ponttól az óramutató járásával ellentétesen haladva mérjük.

Legyenek a $\overset{\frown}{DA}$ és $\overset{\frown}{BC}$ körívek vetülete az Oy tengelyre a $[-\delta, \delta]$ intervallum. Ekkor $\sin k \in [-\delta, \delta]$ akkor és csakis akkor, ha $N_k \in \overset{\frown}{BC} \cup \overset{\frown}{DA}$.

Be fogjuk látni, hogy bármely $n > 1$ egész szám esetén $\sin(n^2)$, $\sin((n+1)^2)$, $\sin((n+2)^2)$ közül valamelyik nincs benne a $[-\delta, \delta]$ intervallumban, így a $(\sin(n^2))_{n\geq 1}$ sorozat nem tarthat a 0-hoz.

Ha $\sin(n^2) \in [-\delta, \delta]$, akkor $N_{n^2} \in \overset{\frown}{BC} \cup \overset{\frown}{DA}$. Tegyük fel, hogy $N_{n^2} \in \overset{\frown}{BC}$. Az $N_{n^2} \in \overset{\frown}{DA}$ esetben a bizonyítás hasonlóan megy. Az $N_{(n+1)^2}$ pontot az N_{n^2} ponttól a körön óramutató járásával ellentétesen haladva $2n+1$ egységnyire kell felmérni. Mivel $(n+1)^2 - n^2 = 2n+1$ és $(n+2)^2 - (n+1)^2 = 2n+3 = (2n+1)+2$, ezért az $\overset{\frown}{N_{(n+1)^2}N_{(n+2)^2}}$ körív hossza 2 egységnyivel nagyobb, mint az $\overset{\frown}{N_{n^2}N_{(n+1)^2}}$ körív hossza.

Ha $\sin(n+1)^2 \in [-\delta, \delta]$, akkor $N_{(n+1)^2} \in \overset{\frown}{BC} \cup \overset{\frown}{DA}$. Ha $N_{(n+1)^2} \in \overset{\frown}{BC}$, akkor N_{n^2} és $N_{(n+1)^2}$ pontok legfeljebb $\ell(\overset{\frown}{BC})$ távolságra vannak egymástól, ahol $\ell(\overset{\frown}{BC})$ a $\overset{\frown}{BC}$ körív hosszát jelöli. Ekkor az $N_{(n+2)^2}$ pont $N_{(n+1)^2}$ ponttól vett távolsága legalább $2 - \ell(\overset{\frown}{BC})$ és legfeljebb $2 + \ell(\overset{\frown}{BC})$, így $N_{(n+2)^2}$ a $\overset{\frown}{CD}$ körívre esik, tehát $\sin(n+2)^2 \notin [-\delta, \delta]$. Ha $N_{(n+1)^2} \in \overset{\frown}{DA}$, akkor az $N_{(n+1)^2}$ pont az N_{n^2} ponttól legalább $\ell(\overset{\frown}{CD}) = 3$ és legfeljebb $\ell(\overset{\frown}{BC}) + \ell(\overset{\frown}{CD}) + \ell(\overset{\frown}{DA}) = 3 + 2\ell(\overset{\frown}{BC})$. távolságnyira esik. Így az $N_{(n+2)^2}$ pont az $N_{(n+1)^2}$ ponttól legalább $\ell(\overset{\frown}{CD}) + 2 = 5$ és legfeljebb $3 + 2\ell(\overset{\frown}{BC}) + 2 = 5 + 2\ell(\overset{\frown}{BC})$ távolságnyira van, így $N_{(n+2)^2}$ pont az $\overset{\frown}{CD}$ körívre esik, tehát $\sin(n+2)^2 \notin [-\delta, \delta]$. □

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$;

Megoldás. A Dirichlet-kritériumot (2.31. Tulajdonság) fogjuk használni. Ehhez a sor általános tagját felírjuk, mint $\frac{\sin n}{n} = u_n v_n$, ahol $u_n = \frac{1}{n}$ és $v_n = \sin n$. Az $u_n = \frac{1}{n}$ sorozat monoton csökkenő és határértéke $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. A $\sum\limits_{n=1}^{N} v_n = \sum\limits_{n=1}^{N} \sin n$ részletösszeg-sorozat korlátos, amit a következőképpen láthatunk be. A

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

formula alapján, ha $\alpha = n-1$ és $\beta = n+1$, akkor

$$\cos(n-1) - \cos(n+1) = -2\sin n \sin(-1) \iff \cos(n-1) - \cos(n+1) = 2\sin n \sin 1.$$

Ekkor

$$\sin n = \frac{\cos(n-1)}{2\sin 1} - \frac{\cos(n+1)}{2\sin 1}, \qquad \forall n \geq 1.$$

Ez alapján

$$\begin{gathered}\sin 1 + \sin 2 + \sin 3 + \sin 4 + \ldots + \sin(N-1) + \sin N = \\ = \left(\frac{\cos 0}{2\sin 1} - \frac{\cos 2}{2\sin 1}\right) + \left(\frac{\cos 1}{2\sin 1} - \frac{\cos 3}{2\sin 1}\right) + \left(\frac{\cos 2}{2\sin 1} - \frac{\cos 4}{2\sin 1}\right) + \\ + \left(\frac{\cos 3}{2\sin 1} - \frac{\cos 5}{2\sin 1}\right) + \ldots + \left(\frac{\cos(N-2)}{2\sin 1} - \frac{\cos N}{2\sin 1}\right) + \left(\frac{\cos(N-1)}{2\sin 1} - \frac{\cos(N+1)}{2\sin 1}\right) = \\ = \frac{\cos 0}{2\sin 1} + \frac{\cos 1}{2\sin 1} - \frac{\cos N}{2\sin 1} - \frac{\cos(N+1)}{2\sin 1},\end{gathered}$$

továbbá

$$\begin{gathered}\left|\sum_{n=1}^{N} \sin n\right| = \left|\frac{\cos 0}{2\sin 1} + \frac{\cos 1}{2\sin 1} - \frac{\cos N}{2\sin 1} - \frac{\cos(N+1)}{2\sin 1}\right| \leq \\ \leq \frac{|\cos 0|}{2|\sin 1|} + \frac{|\cos 1|}{2|\sin 1|} + \frac{|\cos N|}{2|\sin 1|} + \frac{|\cos(N+1)|}{2|\sin 1|} \leq \frac{4}{2|\sin 1|} = \frac{2}{|\sin 1|},\end{gathered}$$

mivel $|\cos y| \leq 1$, minden $y \in \mathbb{R}$ esetén. Tehát a $\sum\limits_{n=1}^{N} \sin n$ részletösszeg-sorozat korlátos, így a Dirichlet-kritérium alapján a sor konvergens. □

(e) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos n}{\ln n}$;

Megoldás. A Dirichlet-kritériumot (2.31. Tulajdonság) fogjuk használni. Ehhez a sor általános tagját felírjuk, mint $\frac{\cos n}{\ln n} = u_n v_n$, ahol $u_n = \frac{1}{\ln n}$ és $v_n = \cos n$. Az $u_n = \frac{1}{\ln n}$ sorozat szigorúan csökkenő és határértéke $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} = 0$. Az $\sum\limits_{n=1}^{N} v_n = \sum\limits_{n=1}^{N} \cos n$ részletösszeg-sorozat korlátos, amit a következőképpen láthatunk be. A

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

formula alapján, ha $\alpha = n-1$ és $\beta = n+1$, akkor

$$\begin{aligned}
&\sin(n-1) - \sin(n+1) = 2\cos n \sin(-1),\\
&\qquad\qquad\iff \sin(n-1) - \sin(n+1) = -2\cos n \sin 1.
\end{aligned}$$

Ekkor

$$\cos n = -\frac{\sin(n-1)}{2\sin 1} + \frac{\sin(n+1)}{2\sin 1}, \qquad \forall n \geq 1.$$

Ez alapján

$$\begin{aligned}
&\cos 1 + \cos 2 + \cos 3 + \cos 4 + \ldots + \cos(N-1) + \cos N =\\
&= \left(-\frac{\sin 0}{2\sin 1} + \frac{\sin 2}{2\sin 1}\right) + \left(-\frac{\sin 1}{2\sin 1} + \frac{\sin 3}{2\sin 1}\right) + \left(-\frac{\sin 2}{2\sin 1} + \frac{\sin 4}{2\sin 1}\right) +\\
&+ \left(-\frac{\sin 3}{2\sin 1} + \frac{\sin 5}{2\sin 1}\right) + \ldots + \left(-\frac{\sin(N-2)}{2\sin 1} + \frac{\sin N}{2\sin 1}\right) +\\
&+ \left(-\frac{\sin(N-1)}{2\sin 1} + \frac{\sin(N+1)}{2\sin 1}\right) =\\
&= -\frac{\sin 0}{2\sin 1} - \frac{\sin 1}{2\sin 1} + \frac{\sin N}{2\sin 1} + \frac{\sin(N+1)}{2\sin 1},
\end{aligned}$$

továbbá

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{n=1}^{N} \cos n\right| = \left|-\frac{\sin 0}{2\sin 1} - \frac{\sin 1}{2\sin 1} + \frac{\sin N}{2\sin 1} + \frac{\sin(N+1)}{2\sin 1}\right| \leq\\
&\leq \frac{|\sin 0|}{2|\sin 1|} + \frac{|\sin 1|}{2|\sin 1|} + \frac{|\sin N|}{2|\sin 1|} + \frac{|\sin(N+1)|}{2|\sin 1|} \leq \frac{4}{2|\sin 1|} = \frac{2}{|\sin 1|},
\end{aligned}$$

mivel $|\cos y| \leq 1$, minden $y \in \mathbb{R}$ esetén. Tehát $\sum\limits_{n=1}^{N} \cos n$ részletösszeg-sorozat korlátos, így a Dirichlet-kritérium alapján a sor konvergens. □

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$, $x \in \mathbb{R}$;

Megoldás. A Dirichlet-kritériumot (2.31. Tulajdonság) fogjuk használni. Ehhez a sor általános tagját felírjuk, mint $\frac{\sin nx}{n} = u_n v_n$, ahol $u_n = \frac{1}{n}$ és $v_n = \sin nx$. Az $u_n = \frac{1}{n}$ általános tagú sorozat szigorúan csökkenő és határértéke $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Az $\sum\limits_{n=1}^{N} v_n = \sum\limits_{n=1}^{N} \sin nx$ részletösszeg-sorozat korlátos, amit a következőképpen láthatunk be. A

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

képlet alapján, ha $\alpha = (n-1)x$ és $\beta = (n+1)x$, akkor

$$\begin{aligned}&\cos(n-1)x - \cos(n+1)x = -2\sin nx \sin(-x)\\ &\qquad\qquad\iff \cos(n-1)x - \cos(n+1)x = 2\sin nx \sin x.\end{aligned}$$

Ha $\sin x = 0$, akkor $x = k\pi$, ahol $k \in \mathbb{Z}$. Ebben az esetben $\sin nx = \sin nk\pi = 0$, tehát a sor általános tagjai mind nullák, így a sor konvergens. Ha $\sin x \neq 0$, azaz $x \notin \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, akkor

$$\sin nx = \frac{\cos(n-1)x}{2\sin x} - \frac{\cos(n+1)x}{2\sin x}, \qquad \forall n \geq 1.$$

Ez alapján

$$\begin{aligned}&\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x + \ldots + \sin(N-1)x + \sin Nx =\\ &= \left(\frac{\cos 0}{2\sin x} - \frac{\cos 2x}{2\sin x}\right) + \left(\frac{\cos x}{2\sin x} - \frac{\cos 3x}{2\sin x}\right) + \left(\frac{\cos 2x}{2\sin x} - \frac{\cos 4x}{2\sin x}\right) +\\ &+ \left(\frac{\cos 3x}{2\sin x} - \frac{\cos 5x}{2\sin x}\right) + \ldots + \left(\frac{\cos(N-2)x}{2\sin x} - \frac{\cos Nx}{2\sin x}\right) +\\ &+ \left(\frac{\cos(N-1)x}{2\sin x} - \frac{\cos(N+1)x}{2\sin x}\right) =\\ &= \frac{\cos 0}{2\sin x} + \frac{\cos x}{2\sin x} - \frac{\cos Nx}{2\sin x} - \frac{\cos(N+1)x}{2\sin x},\end{aligned}$$

továbbá

$$\begin{aligned}&\left|\sum_{n=1}^{N} \sin nx\right| = \left|\frac{\cos 0}{2\sin x} + \frac{\cos x}{2\sin x} - \frac{\cos Nx}{2\sin x} - \frac{\cos(N+1)x}{2\sin x}\right| \leq\\ &\leq \frac{|\cos 0|}{2|\sin x|} + \frac{|\cos x|}{2|\sin x|} + \frac{|\cos Nx|}{2|\sin x|} + \frac{|\cos(N+1)x|}{2|\sin x|} \leq \frac{4}{2|\sin x|} = \frac{2}{|\sin x|},\end{aligned}$$

mivel $|\cos y| \leq 1$, minden $y \in \mathbb{R}$ esetén. Tehát $\sum\limits_{n=1}^{N} \sin nx$ részletösszeg-sorozat korlátos egy rögzített $x \notin \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ esetén, így a Dirichlet-kritérium alapján a sor konvergens, minden $x \in \mathbb{R}$ esetén. □

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{\sqrt{n}}$, $x \in \mathbb{R}$;

Megoldás. A Dirichlet-kritériumot (2.31. Tulajdonság) fogjuk használni. Ehhez a sor általános tagját felírjuk, mint $\frac{\cos nx}{\sqrt{n}} = u_n v_n$, ahol $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ és $v_n = \cos nx$. Az $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ általános tagú sorozat szigorúan csökkenő és határértéke $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$. Az $\sum\limits_{n=1}^{N} v_n = \sum\limits_{n=1}^{N} \cos nx$ részletösszeg-sorozat korlátos, amit a következőképpen láthatunk be. A

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

képlet alapján, ha $\alpha = (n-1)x$ és $\beta = (n+1)x$, akkor

$$\sin(n-1)x - \sin(n+1)x = 2\cos nx \sin(-x).$$

Ha $\sin(-x) = 0$, akkor $x = k\pi$, valamilyen $k \in \mathbb{Z}$ esetén. Ha $x = k\pi$, ahol k páratlan, akkor $\cos nx = \cos nk\pi = (-1)^n$, tehát $\sum\limits_{n=1}^{N} \cos nk\pi = \sum\limits_{n=1}^{N} (-1)^n$ részletösszeg-sorozat korlátos és a Dirichlet-kritérium alapján a sor konvergens. Ha $x = k\pi$, ahol k páros, akkor $\cos nx = \cos nk\pi = 1$ és ekkor a sor $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{\sqrt{n}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ sor divergens (általánosított harmonikus sor, $\alpha = \frac{1}{2} \leq 1$).

Ha $\sin(-x) \neq 0$, azaz $x \notin \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, akkor

$$\cos nx = \frac{\sin(n-1)x}{2\sin(-x)} - \frac{\sin(n+1)x}{2\sin(-x)}, \qquad \forall n \geq 1.$$

Ez alapján

$$\begin{aligned}
&\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x + \ldots + \cos(N-1)x + \cos Nx = \\
&= \left(\frac{\sin 0}{2\sin(-x)} - \frac{\sin 2x}{2\sin(-x)}\right) + \left(\frac{\sin x}{2\sin(-x)} - \frac{\sin 3x}{2\sin(-x)}\right) + \left(\frac{\sin 2x}{2\sin(-x)} - \frac{\sin 4x}{2\sin(-x)}\right) + \\
&\quad + \left(\frac{\sin 3x}{2\sin(-x)} - \frac{\sin 5x}{2\sin(-x)}\right) + \ldots + \left(\frac{\sin(N-2)x}{2\sin(-x)} - \frac{\sin Nx}{2\sin(-x)}\right) + \\
&\quad + \left(\frac{\sin(N-1)x}{2\sin(-x)} - \frac{\sin(N+1)x}{2\sin(-x)}\right) = \\
&= \frac{\sin 0}{2\sin(-x)} + \frac{\sin x}{2\sin(-x)} - \frac{\sin Nx}{2\sin(-x)} - \frac{\sin(N+1)x}{2\sin(-x)},
\end{aligned}$$

továbbá

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{n=1}^{N} \cos nx\right| = \left|\frac{\sin 0}{2\sin(-x)} + \frac{\sin x}{2\sin(-x)} - \frac{\sin Nx}{2\sin(-x)} - \frac{\sin(N+1)x}{2\sin(-x)}\right| \leq \\
&\leq \frac{|\sin 0|}{2|\sin(-x)|} + \frac{|\sin x|}{2|\sin(-x)|} + \frac{|\sin Nx|}{2|\sin(-x)|} + \frac{|\sin(N+1)x|}{2|\sin(-x)|} \leq \frac{4}{2|\sin(-x)|} = \frac{2}{|\sin x|},
\end{aligned}$$

mivel $|\sin y| \leq 1$, minden $y \in \mathbb{R}$ esetén. Tehát $\sum\limits_{n=1}^{N} \cos nx$ részletösszeg-sorozat korlátos egy rögzített $x \notin \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ esetén, így ebben az esetben a Dirichlet-kritérium alapján a sor konvergens.

Összegezve $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ esetén a sor divergens, míg a többi esetben a sor konvergens. □

(h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^a}$, $x \in \mathbb{R}$ és $a > 0$;

Megoldás. A Dirichlet-kritériumot (2.31. Tulajdonság) fogjuk használni. Ehhez a sor általános tagját felírjuk, mint $\frac{\sin nx}{n} = u_n v_n$, ahol $u_n = \frac{1}{n^a}$ és $v_n = \sin nx$. Minden $a > 0$ esetén az $u_n = \frac{1}{n^a}$ általános tagú sorozat szigorúan csökkenő és határértéke $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^a} = 0$. Az (f) alpontban beláttuk, hogy a $\sum\limits_{n=1}^{N} v_n = \sum\limits_{n=1}^{N} \sin nx$ részletösszeg-sorozat korlátos. Ezek alapján a Dirichlet-kritérium felhasználásával következik, hogy a sor konvergens, minden $x \in \mathbb{R}$ és $a > 0$ esetén. □

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^a}$, $x \in \mathbb{R}$ és $a > 0$;

Megoldás. A Dirichlet-kritériumot (2.31. Tulajdonság) fogjuk használni. Ehhez a sor általános tagját felírjuk, mint $\frac{\cos nx}{n} = u_n v_n$, ahol $u_n = \frac{1}{n^a}$ és $v_n = \cos nx$. Minden $a > 0$ esetén az $u_n = \frac{1}{n^a}$ általános tagú sorozat szigorúan csökkenő és határértéke $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^a} = 0$.

A (g) alpontban beláttuk, hogy a $\sum\limits_{n=1}^{N} v_n = \sum\limits_{n=1}^{N} \cos nx$ részletösszeg-sorozat korlátos, minden $x \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ esetén. Ekkor a Dirichlet-kritérium felhasználásával következik, hogy a sor konvergens, minden $x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ és minden $a > 0$ esetén.

Ha $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, akkor $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^a} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$, amely konvergens, ha $a > 1$, illetve divergens, ha $0 < a \leq 1$.

Összegezve $a > 1$ esetén a sor konvergens minden $x \in \mathbb{R}$ esetén, míg $0 < a \leq 1$ esetén a sor konvergens, ha $x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. □

(j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \cos n^2}{n}$;

Megoldás. A Dirichlet-kritériumot (2.31. Tulajdonság) fogjuk használni. Ehhez a sor általános tagját felírjuk, mint $\frac{\sin n \cos n^2}{n} = u_n v_n$, ahol $u_n = \frac{1}{2n}$ és $v_n = 2 \sin n \cos n^2$. Az $u_n = \frac{1}{2n}$ általános tagú sorozat szigorúan csökkenő és határértéke $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2n} = 0$.

Megmutatjuk, hogy a $\sum\limits_{n=1}^{N} v_n = \sum\limits_{n=1}^{N} 2 \sin n \cos n^2$ részletösszeg sorozat korlátos. Minden $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ esetén

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right),$$

ahonnan $\frac{\alpha-\beta}{2} = n$ és $\frac{\alpha+\beta}{2} = n^2$ esetén kapjuk, hogy $2 \sin n \cos n^2 = \sin(n^2+n) - \sin(n^2-n)$, minden $n \geq 1$ esetén. Továbbá $(n+1)^2 - (n+1) = n^2 + n$, ezért

$$2 \sin n \cos n^2 = \sin[(n+1)^2 - (n+1)] - \sin[n^2 - n], \quad \forall\, n \geq 1.$$

Végül minden $N \geq 1$ esetén

$$\left|\sum_{n=1}^{N} 2 \sin n \cos n^2\right| = \left|\sum_{n=1}^{N} \sin[(n+1)^2 - (n+1)] - \sin[n^2 - n]\right| =$$
$$= \big|\sin[(N+1)^2 - (N+1)] - \sin[1^2 - 1]\big| = |\sin(N^2 + N)| \leq 1,$$

tehát a részletösszeg sorozat korlátos és a Dirichlet-kritérium alapján a sor konvergens. □

(k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \sin \frac{1}{n}}{n}$.

Megoldás. Felhasználva, hogy $\sin x \leq x$, minden $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ esetén a következő becslést végezzük: minden $n \geq 1$ esetén

$$\left|\frac{\sin n \sin \frac{1}{n}}{n}\right| = \left|\frac{\sin n}{n^2} \cdot \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\right| = \frac{|\sin n|}{n^2} \cdot \left|\frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\right| \leq \frac{1}{n^2}.$$

A $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergens (általánosított harmonikus sor, $\alpha = 2 > 1$), így a Weierstrass-kritérium (2.27. Tulajdonság) alapján a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \sin \frac{1}{n}}{n}$ sor (abszolút) konvergens. □

3. fejezet

Függvénysorozatok

3.1. Elméleti összefoglaló

3.1.1. Függvénysorozatok konvergencia halmaza és határfüggvénye

Legyen $A \subseteq \mathbb{R}$ egy nem üres részhalmaz.

3.1. Értelmezés
Egy $(f_n)_{n\geq 1}$, $f_n : A \to \mathbb{R}$ függvénysorozat *kovergencia halmaza*

$$D = \{x \in A \mid (f_n(x))_{n\geq 1} \text{ számsorozat konvergens}\}.$$

Az $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ függvény az $(f_n)_{n\geq 1}$ függvénysorozat (pontonkénti) *határfüggvénye*. (Jelölés: $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ vagy $f_n \to f$). Ekkor azt mondjuk, hogy az $(f_n)_{n\geq 1}$ függvénysorozat *pontonként tart* az f határfüggvényhez a D halmazon.

3.1.2. Függvénysorozatok egyenletes konvergenciája

3.2. Értelmezés
Legyen $(f_n)_{n\geq 1}$, $f_n : D \to \mathbb{R}$ egy függvénysorozat, amely pontonként konvergál az $f : D \to \mathbb{R}$ határfüggvényhez a D halmazon. Az $(f_n)_{n\geq 1}$ függvénysorozat *egyenletesen konvergál* az f határfüggvényhez az $E \subseteq D$ halmazon, ha minden $\varepsilon > 0$ szám esetén létezik $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ úgy, hogy minden $x \in E$ és minden $n > n_\varepsilon$ esetén $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. (Jelölés: $f_n \rightrightarrows f$ az E halmazon.)

Ha ismerjük (vagy sejtjük) a függvénysorozat határfüggvényét, akkor használhatjuk a következő tételt a pontkénti és egyenletes konvergencia igazolására.

3.3. Tétel (Weierstrass-féle kritérium függvénysorozatokra)
Legyenek $f_n, f : D \to \mathbb{R}$ függvények, minden $n \geq 1$ esetén, és legyen $E \subseteq D$ részhalmaz. Ha létezik egy $n_0 \geq 1$ szám és egy $(b_n)_{n\geq n_0}$ számsorozat, amelyekre

(i) $|f_n(x) - f(x)| \leq b_n$, minden $n \geq n_0$ és minden $x \in E$ esetén,

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$,

akkor az $(f_n)_{n\geq 1}$ függvénysorozat egyeneletesen konvergál az f határfüggvényhez az E halmazon ($f_n \rightrightarrows f$ az E halmazon).

A következő tulajdonság használható az egyenletes konvergencia cáfolására.

3.4. Tulajdonság
Legyenek $f_n, f : D \to \mathbb{R}$ függvények, minden $n \geq 1$ esetén és legyen $E \subseteq D$ részhalmaz. Ha létezik olyan $(x_n)_{n\geq n_0}$ valós számsorozat, $n_0 \geq 1$ és $c > 0$ számok, hogy

(i) $x_n \in E$, minden $n \geq n_0$ esetén,

(ii) $|f_n(x_n) - f(x_n)| \geq c$, minden $n \geq n_0$ esetén, akkor az $(f_n)_{n\geq 1}$ függvénysorozat nem tart egyenletesen az f függvényhez az E halmazon (vagyis $f_n \not\rightrightarrows f$ az E halmazon).

Ha nem ismert a függvénysorozat határfüggvénye, akkor használhatjuk a Cauchy-féle egyenletes konvergencia kritériumot.

3.5. Tétel (Cauchy-féle kritérium függvénysorozatokra)
Legyen $(f_n)_{n\geq 1}$ egy függvénysorozat, amelynek konvergencia halmaza D és legyen $E \subseteq D$. Ha létezik olyan $n_0 \geq 1$ egész szám és egy olyan $(b_n)_{n\geq n_0}$ valós számsorozat, hogy

(i) $|f_m(x) - f_n(x)| \leq b_n$, minden $m \geq n \geq n_0$ és minden $x \in E$ esetén,

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$,

akkor az $(f_n)_{n\geq 1}$ függvénysorozat egyenletesen konvergens a D konvergencia halmaz E részhalmazán.

A következő tulajdonság használható az egyenletes konvergencia cáfolására, ha nem ismert a határfüggvény.

3.6. Tulajdonság
Legyen $(f_n)_{n\geq 1}$ egy függvénysorozat, amelynek konvergencia halmaza D és legyen $E \subseteq D$. Ha létezik egy $n_0 \geq 1$ egész szám, egy $(x_n)_{n\geq n_0}$ valós számsorozat, egy $(m_n)_{n\geq n_0}$ egész számsorozat és egy $c > 0$ szám úgy, hogy

(i) $x_n \in E$, minden $n \geq n_0$ esetén,

(ii) $m_n \geq n$, minden $n \geq n_0$ esetén,

(iii) $|f_{m_n}(x_n) - f_n(x_n)| \geq c$, minden $n \geq n_0$ esetén,

akkor az (f_n) függvénysorozat nem konvergál egyenletesen a D konvergencia halmaz E részhalmazán.

3.1.3. Határfüggvény folytonossága, deriválhatósága és integrálhatósága

3.7. Tétel (Határfüggvény folytonossága)
Legyen $(f_n)_{n\geq 1}$ egy függvénysorozat, mely pontonként konvergál az f határfüggvényhez a D halmazon és legyen $E \subseteq D$ egy részhalmaz. Ha

(i) az f_n függvény folytonos az E halmazon, minden $n \geq 1$ esetén,

(ii) az $(f_n)_{n\geq 1}$ függvénysorozat egyenletesen konvergál az f határfüggvényhez az E halmazon,

akkor az f függvény folytonos az E halmazon.

3.8. Következmény
Legyen $(f_n)_{n\geq 1}$ egy függvénysorozat, mely pontonként konvergál az f határfüggvényhez a D halmazon és legyen $E \subseteq D$ egy részhalmaz. Ha az f_n, $n \geq 1$ függvények folytonosak az E halmazon és f nem folytonos az E halmazon, akkor az $(f_n)_{n\geq 1}$ függvénysorozat nem tart egyenletesen az f határfüggvényhez az E halmazon.

3.9. Tétel (Határfüggvény deriválhatósága)
Legyen $(f_n)_{n\geq 1}$, $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ olyan függvénysorozat, melyre

(i) létezik $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, bármely $x \in [a, b]$ esetén;

(ii) f_n deriválható az $[a, b]$ intervallumon, bármely $n \geq 1$ esetén;

(iii) az $(f_n')_{n\geq 1}$ derivált függvénysorozat egyenletesen tart a $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvényhez az $[a, b]$ intervallumon, amikor n tart végtelenbe.

Ekkor f deriválható az $[a, b]$ intervallumon és $f'(x) = g(x)$, minden $x \in [a, b]$ esetén, vagyis

$$f'(x) = \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)' = \lim_{n\to\infty} f_n'(x), \quad \forall\, x \in [a, b].$$

3.10. Tétel (Határfüggvény integrálhatósága)
Ha az $(f_n)_{n\geq 1}$, $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ olyan függvénysorozat, melyre

(i) az f_n függvény Riemann-integrálható az $[a, b]$ intervallumon, minden $n \in \mathbb{N}$ esetén,

(ii) az $(f_n)_{n \geq 1}$ függvénysorozat egyenletesen tart az $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ határfüggvényéhez az $[a, b]$ intervallumon,

akkor az f határfüggvény is Riemann-integrálható az $[a, b]$ intervallumon és

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

3.2. Feladatok

3.2.1. Függvénysorozatok konvergencia halmaza és határfüggvénye

3.1. Feladat. Határozd meg azon pontok D halmazát, ahol a függvénysorozatok pontonként konvergálnak! Határozd meg az $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ határfüggvényt! Egyenletesen is konvergálnak ezen a halmazon?

(a) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$;

(b) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n(1 - x^n)$;

(c) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + n}$;

(d) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1 + x^{2n}}$;

(e) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{nx}{x^{2n} + n}$;

(f) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{n}{x^{2n} + 1}$.

3.2.2. Függvénysorozatok egyenletes konvergenciája

3.2. Feladat. Igazold, hogy az alábbi függvénysorozatok egyenletesen konvergensek:

(a) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\quad f_n(x) = \dfrac{x^2}{n^2 + x^4}$;

(b) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\quad f_n(x) = \dfrac{x^n}{x^{2n} + n}$;

(c) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{x^n}{(1 + x^{2n})^n}$;

(d) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\quad f_n(x) = \dfrac{\cos nx}{n^2 + 1}$;

(e) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\quad f_n(x) = \dfrac{1}{n}\operatorname{arctg}(x^n)$;

(f) $f_n : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $\quad f_n(x) = \dfrac{nx}{x^{2n} + n}$.

3.3. Feladat. Igazold, hogy az $f_n : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{x^{2n}}{2n} 3^{-nx}$ függvénysorozat egyenletesen konvergál a $[0, +\infty)$ intervallumon.

3.4. Feladat. Igazold, hogy az $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\cos kx}{k^3}$ függvénysorozat egyenletesen konvergál az $\mathbb{R}$ halmazon.

3.5. Feladat. Minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén legyen $f_n : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{-kx}}{k}$. Számítsd ki a függvénysorozat konvergencia halmazát! Igazold, hogy az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ függvénysorozat nem konvergál egyenletesen a $(0, +\infty)$ intervallumon, de egyenletesen konvergál az $[a, +\infty)$ intervallumon, ahol $a > 0$.

3.2.3. Határfüggvény folytonossága, deriválhatósága és integrálhatósága

3.6. Feladat. Ha $a > 0$, akkor az $f_n : \left[a, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \cos x + \dfrac{1}{2}\cos^2 x + \cdots + \dfrac{1}{n}\cos^n x$ függvénysorozat esetén számítsd ki a $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ határfüggvényt.

3.7. Feladat. Minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén legyen $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} \sin kx$. Igazold, hogy az (f_n) függvénysorozat konvergál az $\mathbb{R}$ halmazon, a határfüggvénye folytonos és folytonosan deriválható az $\mathbb{R}$ halmazon.

3.3. Megoldások

3.3.1. Függvénysorozatok konvergencia halmaza és határfüggvénye

3.1. Feladat. Határozd meg azon pontok D halmazát, ahol a függvénysorozatok pontonként konvergálnak! Határozd meg az $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ határfüggvényt! Egyenletesen is konvergálnak ezen a halmazon?

(a) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$;

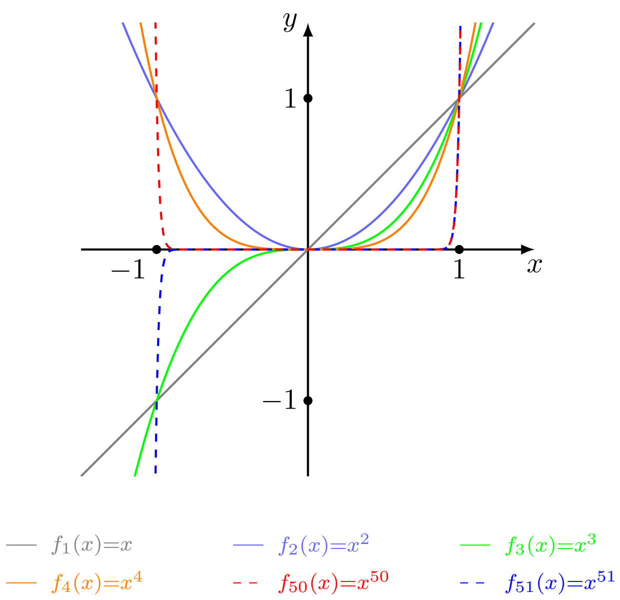
Megoldás. Tanulmányozzuk a következő határértéket:

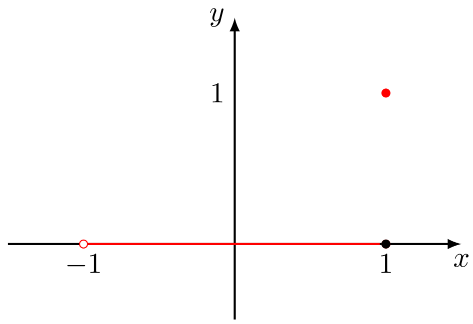
$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} +\infty, & \text{ha } x > 1, \\ 1, & \text{ha } x = 1, \\ 0, & \text{ha } -1 < x < 1, \\ \nexists, & \text{ha } x \leq -1. \end{cases}$$

A pontonkénti konvergencia halmaz azon pontok halmaza, ahol a fenti határérték véges: $D = (-1, 1]$. A határfüggvény ezen a halmazon van értelmezve a fenti határérték segítségével: $f : D = (-1, 1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \in (-1, 1), \\ 1, & \text{ha } x = 1. \end{cases}$$

Mivel az f_n függvények folytonosak a $D = (-1, 1]$ intervallumon, minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén, de az f határfüggvény nem folytonos a $D = (-1, 1]$ intervallumon, ezért a konvergencia nem lehet egyenletes a $D = (-1, 1]$ intervallumon a 3.8. Következmény alapján ($f_n \not\rightrightarrows f$ az D halmazon).





$y = f(x)$

3.11. Megjegyzés
Ha a $D = (-1, 1]$ intervallum helyett egy kisebb $E = [-a, a] \subset (-1, 1)$ (ahol $0 < a < 1$) intervallumon vizsgáljuk az egyenletes konvergenciát, akkor

(i) $|f_n(x) - f(x)| = |x^n - 0| = |x^n| = |x|^n \le a^n, \quad \forall n \ge 1, \quad \forall x \in E = [-a, a]$,

(ii) $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$, mert $a \in (0, 1)$,

ezért a Weierstrass-kritérium (3.3. Tétel) alapján az (f_n) függvénysorozat egyenletesen konvergál az f határfüggvényhez az $E = [-a, a]$ intervallumon ($f_n \rightrightarrows f$ az $E = [-a, a]$ intervallumon). ◇

□

(b) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n(1 - x^n)$;

Megoldás. Tanulmányozzuk a következő határértéket:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{x\to\infty} x^n(1-x^n) = \begin{cases} -\infty, & \text{ha } x > 1, \\ 0, & \text{ha } x = 1, \\ 0, & \text{ha } |x| < 1, \\ \nexists, & \text{ha } x = -1, \\ -\infty, & \text{ha } x < -1. \end{cases}$$

Tehát a pontonkénti konvergencia halmaz $D = (-1, 1]$ és a határfüggvény $f : D = (-1, 1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0.$$

Az $y = x^n$ jelöléssel $f_n(x) = x^n(1-x^n) = y(1-y) = -y^2+y$. A $g(y) = -y^2+y$ másodfokú függvény maximum pontja $y_{max} = \frac{1}{2}$, ahol $g(y_{max}) = \frac{1}{4}$ értéket vesz fel. Az $x_n = \sqrt[n]{\frac{1}{2}} \in D$ esetén

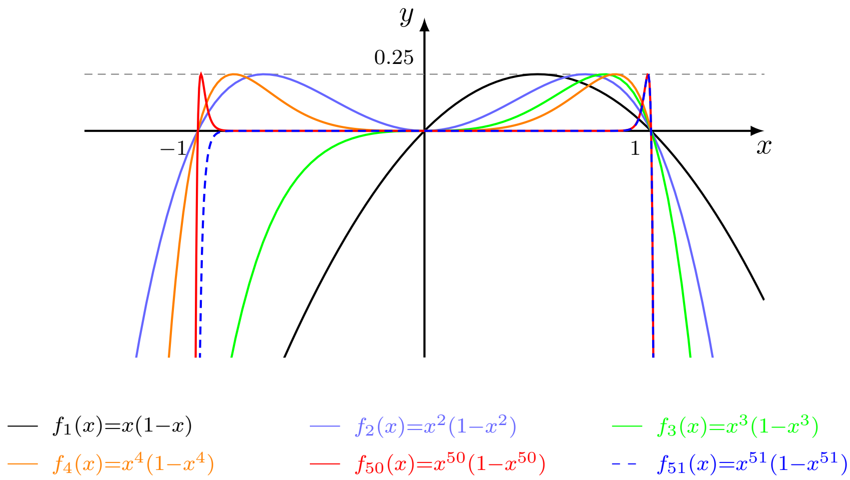
$$f_n(x_n) = \left(\sqrt[n]{\frac{1}{2}}\right)^n \left(1 - \left(\sqrt[n]{\frac{1}{2}}\right)^n\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}, \quad \forall n \ge 1.$$

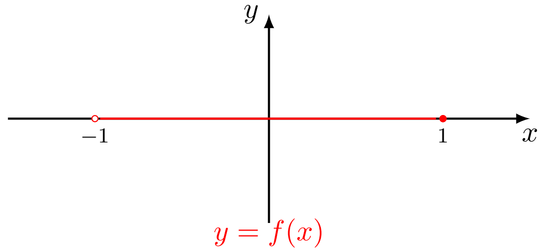
Tehát létezik egy $(x_n)_{n\ge1} = (\sqrt[n]{\frac{1}{2}})_{n\ge1}$ számsorozat és egy $c = \frac{1}{4}$ szám úgy, hogy

(i) $x_n = \sqrt[n]{\frac{1}{2}} \in D = (-1, 1], \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$,

(ii) $|f_n(x_n) - f(x_n)| = \left|\frac{1}{4} - 0\right| = \frac{1}{4} \ge c, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$,

ezért a 3.4. Tulajdonság alapján az (f_n) függvénysorozat nem tart egyenletesen az f határfüggvényhez a $D = (-1, 1]$ konvergencia halmazon.





3.12. Megjegyzés

Ha a $D = (-1, 1]$ helyett egy kisebb $E = [-a, a] \subset (-1, 1)$, (ahol $0 < a < 1$) intervallumon vizsgáljuk az egyenletes konvergenciát, akkor

(i) $|f_n(x) - f(x)| = |x^n(1 - x^n)| \leq |x^n| \leq a^n, \quad \forall n \geq 1$ és $\forall x \in E = [-a, a]$,

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$, mivel $a \in (0, 1)$,

ezért a Weierstrass-kritérium (3.3. Tétel) alapján a (f_n) függvénysorozat egyenletesen konvergál az f határfüggvényhez az $E = [-a, a]$ intervallumon ($f_n \rightrightarrows f$ az $E = [-a, a]$ intervallumon). ◇

□

(c) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + n}$;

Megoldás. Kiszámoljuk a következő határértéket

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^2}{x^2 + n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{x^2}{1 + \frac{x^2}{n}} = 0 \cdot \frac{x^2}{1 + 0} = 0, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Tehát a pontonkénti konvergencia halmaz $D = \mathbb{R}$ és a határfüggvény $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0.$$

Az $x_n = \sqrt{n} \in \mathbb{R}$, minden $n \geq 1$ esetén

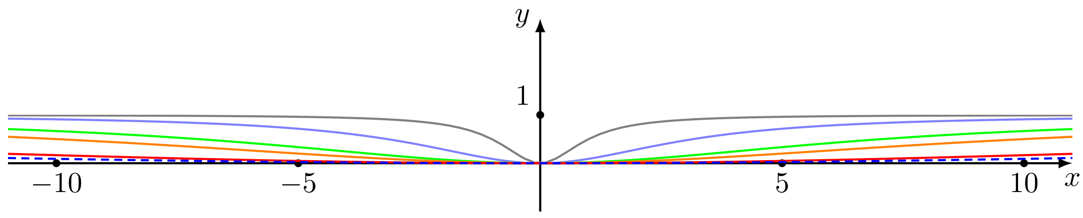
$$f_n(x_n) = \frac{(\sqrt{n})^2}{(\sqrt{n})^2 + n} = \frac{n}{n + n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}, \quad \forall\, n \geq 1.$$

Tehát létezik egy (x_n) számsorozat és egy $c = \frac{1}{2}$ szám úgy, hogy

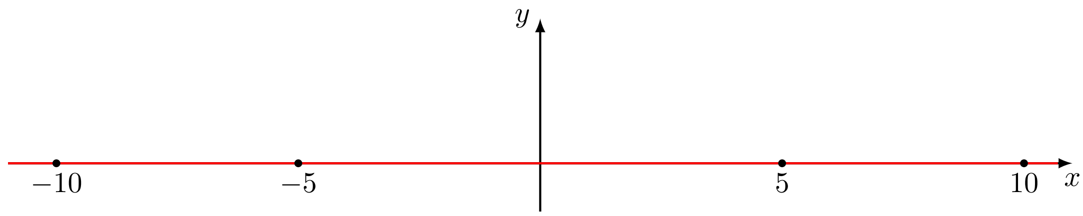
(i) $x_n = \sqrt{n} \in \mathbb{R}, \quad \forall n \geq 1,$

(ii) $|f_n(x_n) - f(x_n)| = \left|\frac{1}{2} - 0\right| = \frac{1}{2} \geq c, \quad \forall n \geq 1,$

ezért a Weierstrass-kritérium tagadása (3.4. Tulajdonság) alapján az (f_n) függvénysor nem tart egyenletesen az f határfüggvényhez az $\mathbb{R}$ konvergencia halmazon ($f_n \not\rightrightarrows f$ az $\mathbb{R}$ halmazon).



$f_1(x)=\frac{x^2}{x^2+1}$, $f_{10}(x)=\frac{x^2}{x^2+10}$, $f_{50}(x)=\frac{x^2}{x^2+50}$, $f_{100}(x)=\frac{x^2}{x^2+100}$, $f_{500}(x)=\frac{x^2}{x^2+500}$, $f_{1000}(x)=\frac{x^2}{x^2+1000}$.



$y = f(x)$

3.13. Megjegyzés
Ha a $D = \mathbb{R}$ konvergencia halmaz helyett egy $E = [-a, a] \subset \mathbb{R}$, (ahol $0 < a$) intervallumon vizsgáljuk az egyenletes konvergenciát, akkor

(i) $|f_n(x) - f(x)| = |\frac{x^2}{x^2+n}| \leq \frac{a^2}{n}, \quad \forall n \geq 1$ és $\forall x \in E = [-a, a],$

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^2}{n} = 0$, mivel $a \in (0, 1)$,

ezért a Weierstrass-kritérium (3.3. Tétel) alapján a (f_n) függvénysorozat egyenletesen konvergál az f határfüggvényhez az $E = [-a, a]$ intervallumon ($f_n \rightrightarrows f$ az $E = [-a, a]$ intervallumon). ◇

□

(d) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_n(x) = \dfrac{x^n}{1 + x^{2n}};$

Megoldás. A határfüggvény meghatározásához kiszámoljuk a következő határértéket:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{1 + x^{2n}} = \begin{cases} 0, & \text{ha } |x| < 1, \\ 0, & \text{ha } |x| > 1, \\ \frac{1}{2}, & \text{ha } x = 1, \\ \nexists, & \text{ha } x = -1, \end{cases}$$

mivel

- $|x| < 1$ esetén $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$, ezért $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}} = \frac{0}{1+0} = 0$,

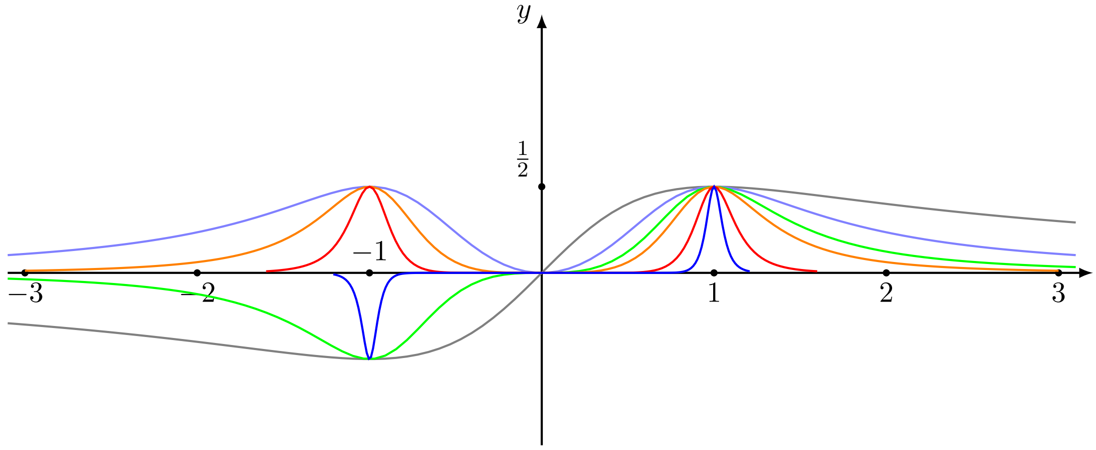
- $|x| > 1$ esetén $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{x^n} = 0$, ezért

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{x^{2n}} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{x^{2n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x^n} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{x^{2n}}} = 0 \cdot \frac{1}{1+0} = 0.$$

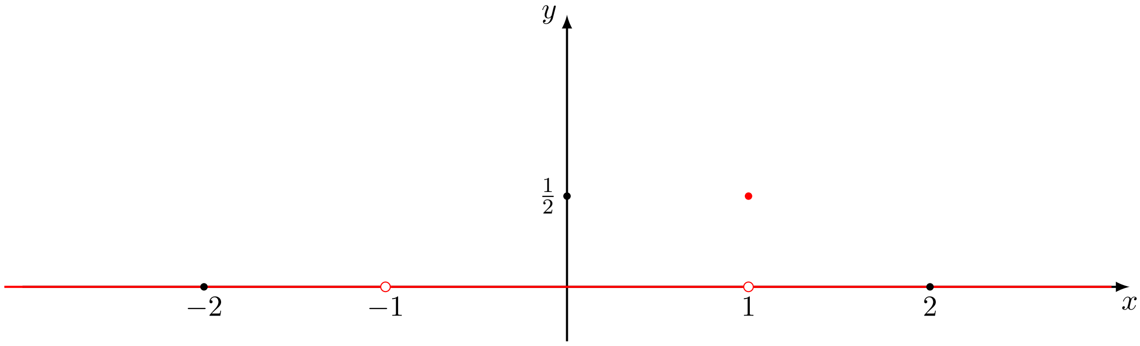
A konvergencia halmaz $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ és a határfüggvény $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \neq 1, \\ \frac{1}{2}, & \text{ha } x = 1. \end{cases}$$

A konvergencia nem egyenletes a $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ halmazon, mivel az $f_n = \frac{x^n}{1+x^{2n}}$ függvények folytonosak a $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ halmazon, minden $n \geq 1$ esetén, de az f határfüggvény nem folytonos az $x = 1$ pontban (3.8. Következmény).



$f_1(x)=\frac{x}{1+x^{2n}}$, $f_2(x)=\frac{x^2}{1+x^4}$, $f_3(x)=\frac{x^3}{1+x^6}$, $f_4(x)=\frac{x^4}{1+x^8}$, $f_{10}(x)=\frac{x^{10}}{1+x^{20}}$, $f_{25}(x)=\frac{x^{25}}{1+x^{50}}$.



$y = f(x)$

$\square$

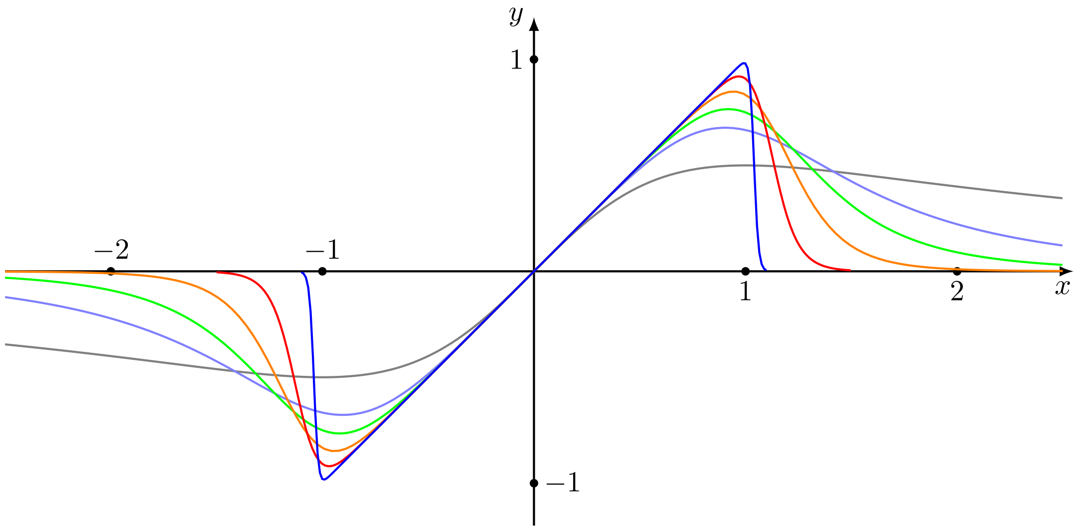
(e) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{nx}{x^{2n}+n}$;

Megoldás. Mivel $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^{2n}}{n} = \begin{cases} +\infty, & \text{ha } |x| > 1, \\ 0, & \text{ha } |x| \leq 1, \end{cases}$ ezért

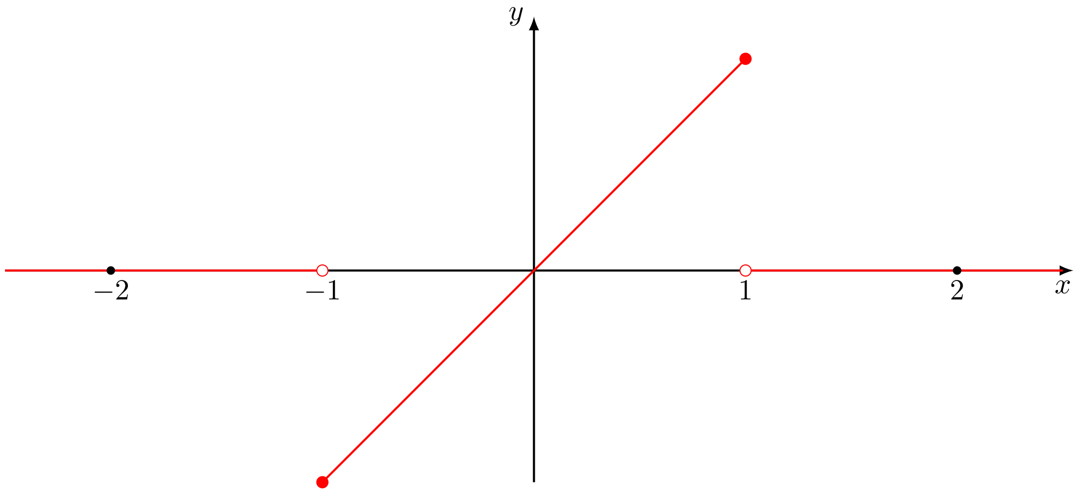
$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{x^{2n}+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n} \cdot \frac{x}{\frac{x^{2n}}{n}+1} = \frac{x}{1+\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^{2n}}{n}} = \begin{cases} 0, & \text{ha } |x| > 1 \\ x, & \text{ha } |x| \leq 1 \end{cases}.$$

Tehát a konvergencia halmaz $D = \mathbb{R}$ és a határfüggvény $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } |x| > 1, \\ x, & \text{ha } |x| \leq 1. \end{cases}$$



$f_1(x)=\frac{x}{x^2+1}$, $f_2(x)=\frac{2x}{x^4+2}$, $f_3(x)=\frac{3x}{x^6+3}$, $f_4(x)=\frac{5x}{x^{10}+5}$, $f_{10}(x)=\frac{10x}{x^{20}+10}$, $f_{25}(x)=\frac{50x}{x^{100}+50}$.



$y = f(x)$

A konvergencia nem egyenletes az $\mathbb{R}$-en, mert az $f_n(x) = \frac{nx}{x^{2n}+n}$ függvények folytonosak az $\mathbb{R}$-en, minden $n \geq 1$ esetén, de az f határfüggvény nem folytonos az $x = -1$ és $x = 1$ pontokban. $\square$

(f) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{n}{x^{2n}+1}$.

Megoldás. Mivel $|x| < 1$ esetén $\lim\limits_{n\to\infty} x^{2n} = 0$ és $|x| > 1$ esetén $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{x^{2n}} = 0$, ezért

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{x^{2n}+1} = \begin{cases} +\infty, & \text{ha } |x| \leq 1, \\ 0, & \text{ha } |x| > 1. \end{cases}$$

Tehát a konvergencia halmaz $D = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ és a határfüggvény $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0.$$

A függvénysorozat nem lesz egyenletesen konvergens a $D = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ halmazon. Minden $n \geq 2$ esetén legyenek x_n az $f_n(x) = \frac{1}{2}$ egyenlet megoldásai, vagyis

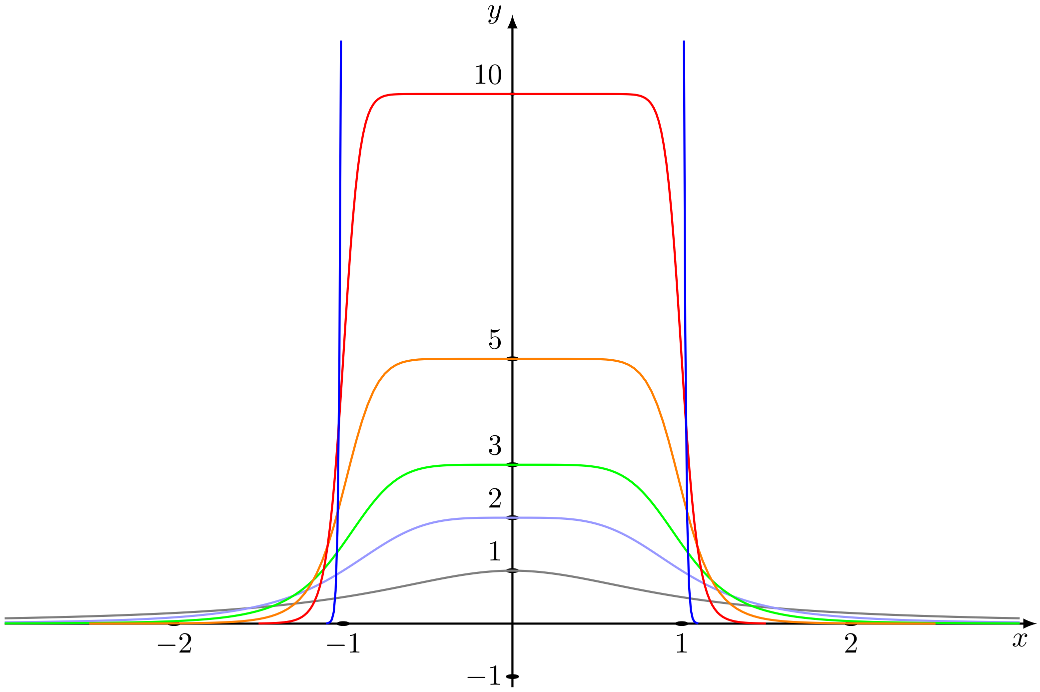
$$\frac{n}{x_n^{2n} + 1} = \frac{1}{2} \iff 2n = x_n^{2n} + 1 \iff 2n - 1 = x_n^{2n} \iff x_n = \sqrt[2n]{2n-1}, \quad \forall\, n \geq 2.$$

Tehát létezik egy (x_n) számsorozat és egy $c = \frac{1}{2}$ szám úgy, hogy

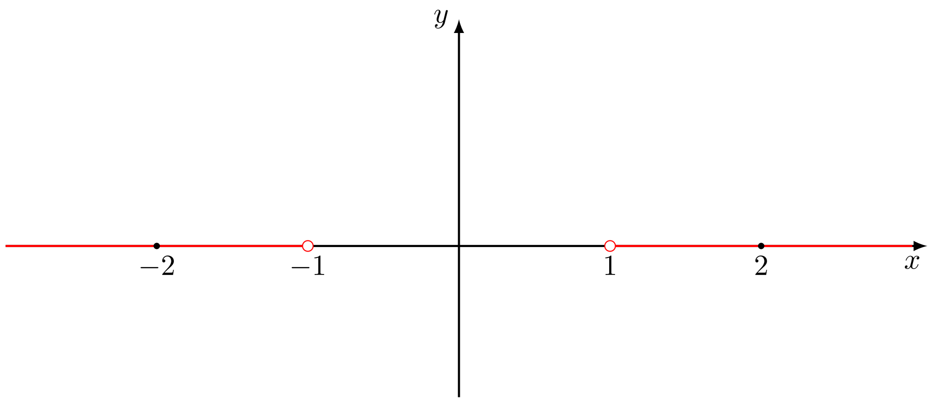
(i) $x_n = \sqrt[2n]{2n-1} \in (1, +\infty) \subset D$, $\forall\, n \geq 2$,

(ii) $|f_n(x_n) - f(x_n)| = \left|\frac{1}{2} - 0\right| = \frac{1}{2} \geq c$, $\forall\, n \geq 2$,

ezért a Weierstrass-kritérium tagadása (3.4. Tulajdonság) alapján az (f_n) függvénysorozat nem tart egyenletesen az f határfüggvényhez a $D = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ konvergencia halmazon.



$f_1(x)=\frac{1}{x^2+1}$, $f_2(x)=\frac{2}{x^4+1}$, $f_3(x)=\frac{3}{x^6+1}$, $f_5(x)=\frac{5}{x^{10}+1}$, $f_{10}(x)=\frac{10}{x^{20}+1}$, $f_{50}(x)=\frac{50}{x^{100}+1}$.



$y = f(x)$

□

3.3.2. Függvénysorozatok egyenletes konvergenciája

3.2. Feladat. Igazold, hogy az alábbi függvénysorozatok egyenletesen konvergensek:

(a) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \dfrac{x^2}{n^2 + x^4};$

Megoldás. Először meghatározzuk a D pontonkénti konvergencia halmazt és a határfüggvényt.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^2}{n^2 + x^4} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \frac{x^2}{1 + \frac{x^4}{n^2}} = 0 \cdot \frac{x^2}{1+0} = 0, \qquad \forall x \in \mathbb{R},$$

tehát $D = \mathbb{R}$ a konvergencia halmaz és $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^2}{n^2 + x^4} = 0$$

a határfüggvény.

A Weierstrass-kritérium alkalmazásához megvizsgáljuk az $|f_n(x) - f(x)|$ különbséget.

(i) Ha $x \neq 0$, akkor minden $n \in \mathbb{N}^*$-ra

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{x^2}{n^2 + x^4} - 0 \right| = \frac{x^2}{n^2 + x^4} \leq \frac{x^2}{2nx^2} = \frac{1}{2n} =: b_n,$$

mert a számtani-mértani egyenlőtlenség alapján minden $x \neq 0$ és $n \in \mathbb{N}^*$ esetén

$$\frac{n^2 + x^4}{2} \geq \sqrt{n^2 x^4} = nx^2 \iff n^2 + x^4 \geq 2nx^2.$$

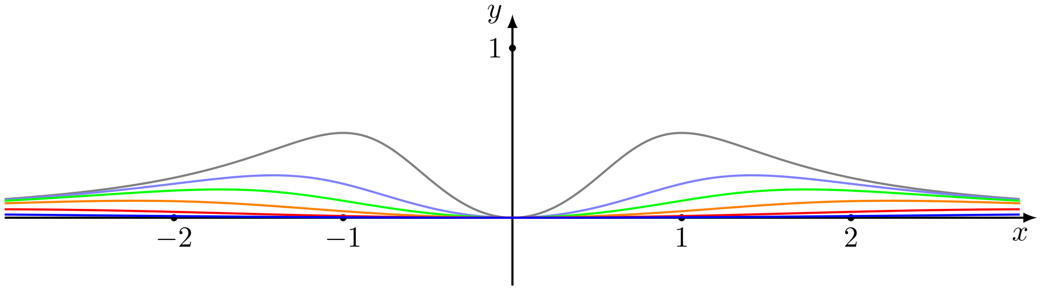
Ha $x = 0$, akkor is teljesül az

$$|f_n(0) - f(0)| = \left| \frac{0^2}{n^2 + 0^4} - 0 \right| = 0 \leq \frac{1}{2n} = b_n$$

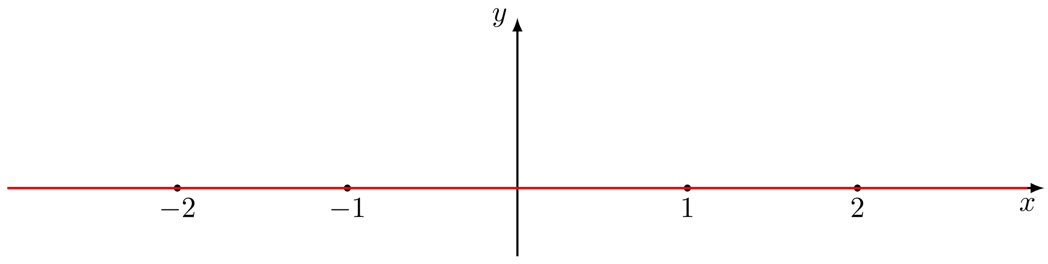
egyenlőtlenség minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén.

(ii) Továbbá a $b_n = \frac{1}{2n}$ sorozatra teljesül, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2n} = 0$.

Tehát a Weierstrass-kritérium (3.3. Tétel) alapján az (f_n) függvénysorozat egyenletesen konvergál az f határfüggvényhez az $\mathbb{R}$-en ($f_n \rightrightarrows f \equiv 0$ az $\mathbb{R}$-en).



$f_1(x)=\frac{x^2}{1^2+x^4}$, $f_2(x)=\frac{x^2}{2^2+x^4}$, $f_3(x)=\frac{x^2}{3^2+x^4}$, $f_5(x)=\frac{x^2}{5^2+x^4}$, $f_{10}(x)=\frac{x^2}{10^2+x^4}$, $f_{20}(x)=\frac{x^2}{20^2+x^4}$.



$y = f(x)$

$\square$

(b) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \dfrac{x^n}{x^{2n} + n}$;

Megoldás. Hasonlóan az előző ponthoz

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{x^{2n}+n} = \begin{cases} \frac{1}{x^n + \frac{n}{x^n}} = \frac{1}{\infty} = 0, & \text{ha } |x| > 1, \\ \frac{0}{0+\infty} = 0, & \text{ha } |x| < 1, \\ \frac{\pm 1}{1+\infty} = 0, & \text{ha } x = -1, \\ \frac{1}{1+\infty} = 0, & \text{ha } x = 1, \end{cases}$$

ezért a pontonkénti konvergencia halmaz $D = \mathbb{R}$ és a határfüggvény $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$.

A Weierstrass-kritérium alkalmazásához megvizsgáljuk az $|f_n(x) - f(x)|$ különbséget.

(i) Ha $x \neq 0$, akkor

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{x^n}{x^{2n}+n} - 0 \right| = \frac{|x|^n}{x^{2n}+n} \leq \frac{|x|^n}{2|x|^n\sqrt{n}} = \frac{1}{2\sqrt{n}} =: b_n,$$

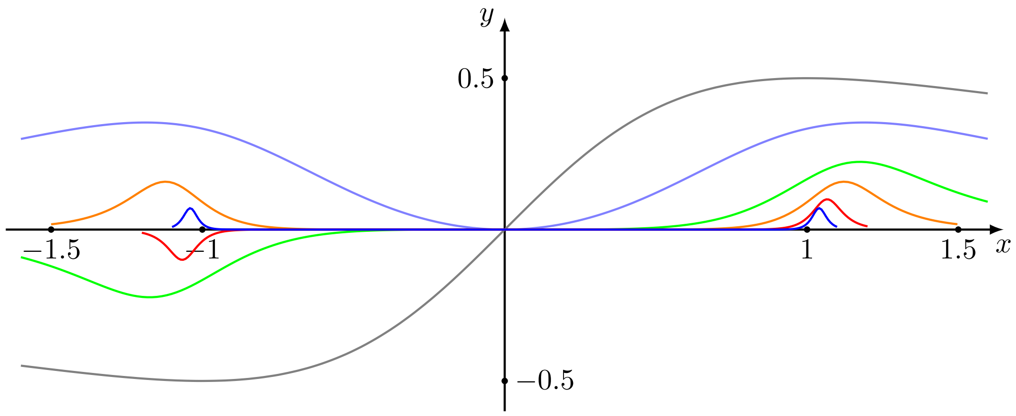
szintén a számtani-mértani egyenlőtlenség alapján minden $x \neq 0$ és $n \in \mathbb{N}^*$ esetén

$$\frac{x^{2n}+n}{2} \geq \sqrt{x^{2n}n} = |x|^n\sqrt{n} \iff x^{2n} + n \geq 2|x|^n\sqrt{n}.$$

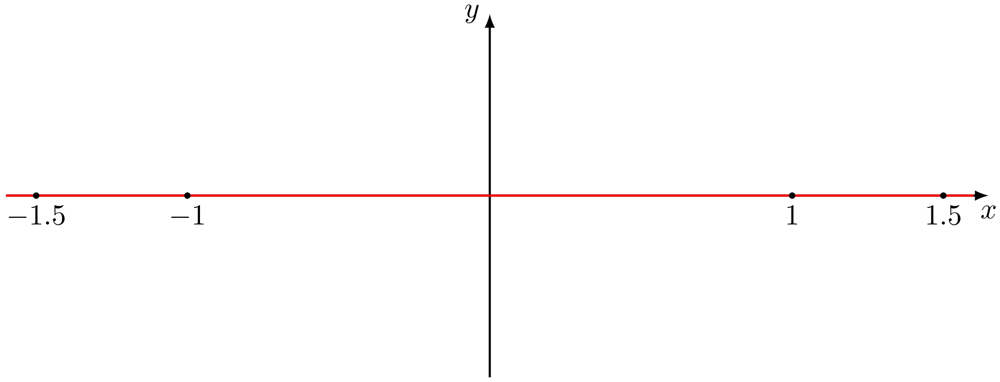
Ha $x = 0$, akkor is teljesül az $|f_n(0) - f(0)| = \left| \frac{0^n}{0^{2n}+n} - 0 \right| = 0 \leq \frac{1}{2\sqrt{n}} = b_n$ egyenlőtlenség, minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén.

(ii) Továbbá $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}} = 0$.

Így a Weierstrass-kritérium (3.3. Tétel) alapján az (f_n) függvénysorozat egyenletesen konvergál a határfüggvényhez az $\mathbb{R}$ halmazon ($f_n \rightrightarrows f \equiv 0$ az $\mathbb{R}$-en).



$f_1(x)=\frac{x}{1+x^2}$, $f_2(x)=\frac{x^2}{2+x^4}$, $f_5(x)=\frac{x^5}{5+x^{10}}$, $f_{10}(x)=\frac{x^{10}}{10+x^{20}}$, $f_{20}(x)=\frac{x^{20}}{20+x^{40}}$, $f_{50}(x)=\frac{x^{50}}{50+x^{100}}$.



$y = f(x)$

$\square$

(c) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{x^n}{(1+x^{2n})^n}$;

Megoldás. Ha $|x| < 1$, akkor $|x| < 1 + x^{2n}$, míg ha $|x| \geq 1$, akkor $|x| \leq x^{2n} < 1 + x^{2n}$. Tehát $\left|\frac{x}{1+x^{2n}}\right| < 1$, minden $x \in \mathbb{R}$ esetén, ezért

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{(1+x^{2n})^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{x}{1+x^{2n}}\right)^n = 0, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Ez alapján a konvergencia halmaz $D = \mathbb{R}$ és a határfüggvény $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 0$.

Teljesülnek a Weierstrass-kritérium feltételei:

(i) Ha $x \neq 0$, akkor minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{x^n}{(1+x^{2n})^n} - 0\right| = \frac{|x|^n}{(1+x^{2n})^n}$$
$$\leq \frac{|x|^n}{\left(2n \cdot |x| \cdot (2n-1)^{-\frac{2n-1}{2n}}\right)^n} = \frac{(2n-1)^{\frac{2n-1}{2}}}{(2n)^n} := b_n,$$

mivel minden $x \in \mathbb{R}$ és $n \in \mathbb{N}^*$ esetén a számtani-mértani egyenlőtlenség alapján

$$\frac{1+x^{2n}}{2n} = \frac{(2n-1)\frac{1}{2n-1} + x^{2n}}{2n} \geq \sqrt[2n]{\left(\frac{1}{2n-1}\right)^{2n-1} x^{2n}} = |x| \cdot (2n-1)^{-\frac{2n-1}{2n}}$$

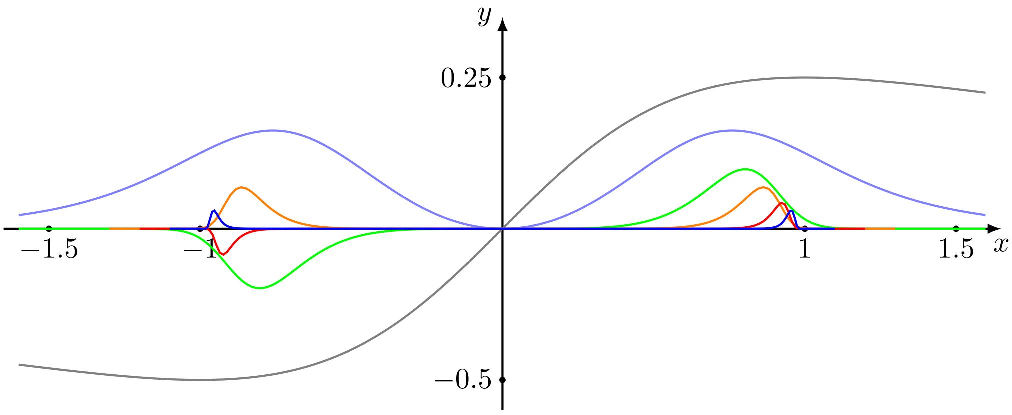
$$\iff 1 + x^{2n} \geq 2n \cdot |x| \cdot (2n-1)^{-\frac{2n-1}{2n}}.$$

Ha $x = 0$, akkor is $|f_n(0) - f(0)| = \left|\frac{0^n}{(1+0^{2n})^n} - 0\right| = 0 \leq \frac{(2n-1)^{\frac{2n-1}{2}}}{(2n)^n} = b_n$ minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén.

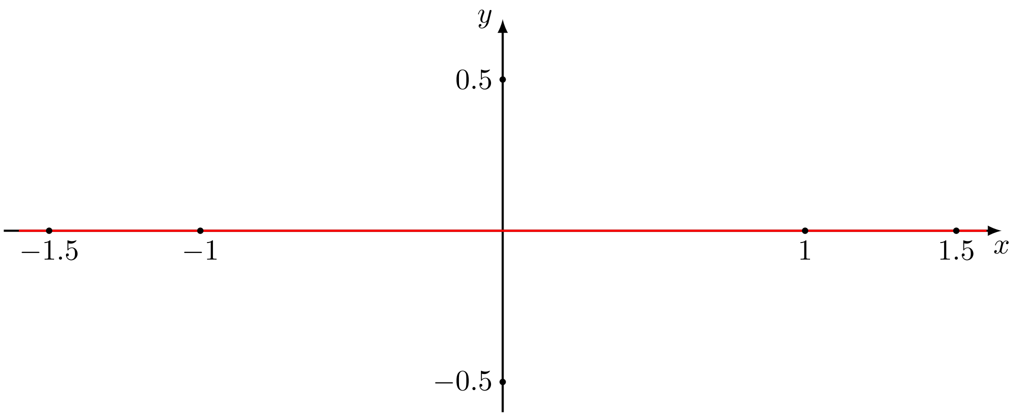
(ii) Továbbá

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} b_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n-1)^{\frac{2n-1}{2}}}{(2n)^n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{(2n-1)^{2n-1}}{(2n)^{2n}}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{(2n-1)^{2n-1}}{(2n)^{2n-1}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{2n}{2n-1}\right)^{2n-1}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)^{2n-1}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n}} = \frac{1}{\sqrt{e}} \cdot 0 \\ &= 0,\end{aligned}$$

ezért az (f_n) függvénysorozat egyenletesen konvergál a határfüggvényhez az $\mathbb{R}$ halmazon ($f_n \rightrightarrows f \equiv 0$ az $\mathbb{R}$-en).



$f_1(x)=\frac{x}{1+x^2}$, $f_2(x)=\frac{x^2}{(1+x^4)^2}$, $f_5(x)=\frac{x^5}{(1+x^{10})^5}$,
$f_{10}(x)=\frac{x^{10}}{(1+x^{20})^{10}}$, $f_{25}(x)=\frac{x^{25}}{(1+x^{50})^{25}}$, $f_{50}(x)=\frac{x^{50}}{(1+x^{100})^{50}}$.



$y = f(x)$

□

(d) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \dfrac{\cos nx}{n^2+1};$

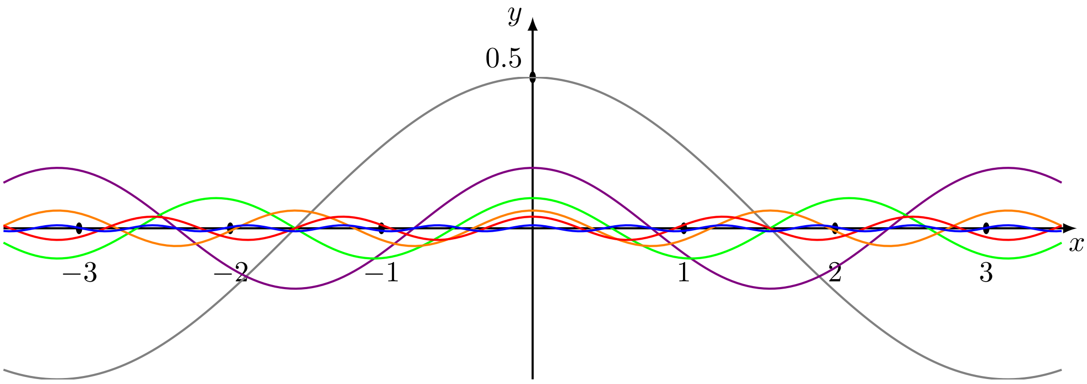
Megoldás. Mivel $\cos nx \in [-1, 1]$, minden $x \in \mathbb{R}$ és $n \in \mathbb{N}^*$ esetén, ezért

$$0 \le |f_n(x) - 0| = |f_n(x)| = \frac{|\cos nx|}{n^2+1} \le \frac{1}{n^2+1}.$$

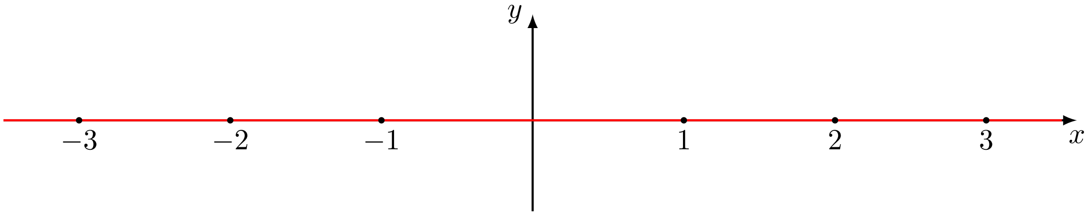
Határértékre térve, mikor n tart a végtelenbe kapjuk, hogy

$$0 \le \lim_{n\to\infty} |f_n(x)| \le \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2+1} = 0,$$

ezért a fogó tétel alapján $\lim\limits_{n\infty} |f_n(x) - 0| = 0$, tehát a függvénysorozat határfüggvénye $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 0$. Másrészt, a $b_n = \frac{1}{n^2+1}$ sorozat esetén teljesülnek a Weierstrass-kritérium feltételei, ezért az (f_n) függvénysorozat egyeneletesen konvergál a határfüggvényhez az $\mathbb{R}$ halmazon ($f_n \rightrightarrows f$ az $\mathbb{R}$-en).



$f_1(x)=\frac{\cos x}{1^2+1}$, $f_2(x)=\frac{\cos 2x}{2^2+1}$, $f_3(x)=\frac{\cos 3x}{3^2+1}$, $f_4(x)=\frac{\cos 4x}{4^2+1}$, $f_5(x)=\frac{\cos 5x}{5^2+1}$, $f_{10}(x)=\frac{\cos 10x}{10^2+1}$.



$y = f(x)$

□

(e) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \dfrac{1}{n}\operatorname{arctg}(x^n);$

Megoldás. Mivel $\operatorname{arctg} y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ minden $y \in \mathbb{R}$ esetén, ezért

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\operatorname{arctg}(x^n) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Tehát a függvénysorozat konvergencia halmaza $D = \mathbb{R}$ és a határfüggvénye $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$.

Az (f_n) függvénysorozat egyenletesen konvergál az f határfüggvényhez az $\mathbb{R}$-en, mivel teljesülnek a Weierstrass-kritérium feltételei (3.3. Tétel):

(i) $|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{1}{n}\operatorname{arctg}(x^n) - 0\right| = \frac{1}{n}|\operatorname{arctg}(x^n)| \le \frac{1}{n} \cdot \frac{\pi}{2}$, minden $n \ge 1$ és minden $x \in \mathbb{R}$ esetén,

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{\pi}{2} = 0.$

$\square$

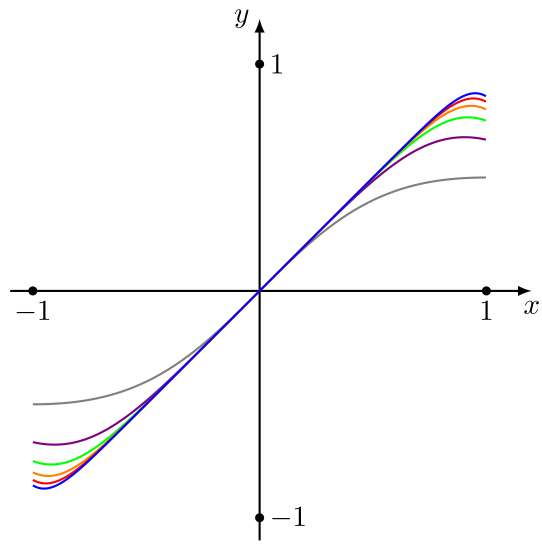
(f) $f_n : [-1,1] \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \dfrac{nx}{x^{2n}+n}.$

Megoldás. Az (f_n) függvénysorozat határfüggvénye $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ a 3.1. Feladat (e) alpontja alapján.

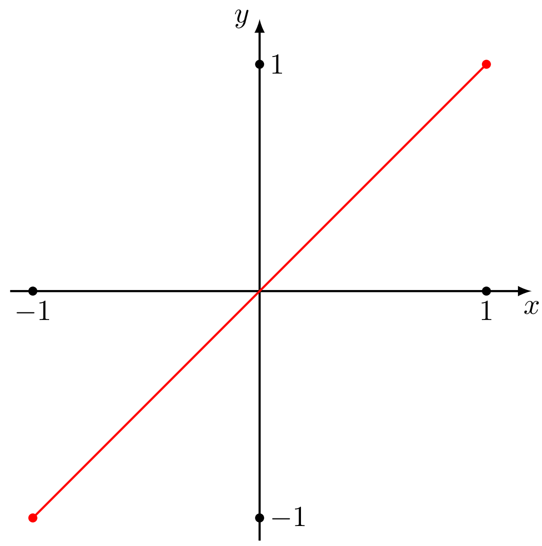
A függvénysorozat egyenletesen konvergál a határfüggvényhez, mert teljesülnek a Weierstrass kritérium (3.3. Tétel) feltételei:

(i) $|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{nx}{x^{2n}+n} - x\right| = \left|\frac{nx - x^{2n+1} - nx}{x^{2n}+n}\right| \leq \frac{|x|^{2n+1}}{x^{2n}+n} \leq \frac{1}{0+n} = \frac{1}{n}$, minden $x \in [-1,1]$ és minden $n \geq 1$ esetén,

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$



$f_1(x)=\frac{x}{x^2+1}$, $f_2(x)=\frac{2x}{x^4+2}$, $f_3(x)=\frac{3x}{x^6+3}$, $f_4(x)=\frac{4x}{x^8+4}$, $f_5(x)=\frac{5x}{x^{10}+5}$, $f_6(x)=\frac{6x}{x^{12}+6}$.



$y = f(x)$

□

3.3. Feladat. Igazold, hogy az $f_n : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{x^{2n}}{2n} 3^{-nx}$ függvénysorozat egyenletesen konvergál a $[0, +\infty)$ intervallumon.

Megoldás. Először igazoljuk a

$$3^x \geq x^2 \iff 3^x - x^2 \geq 0, \quad \forall x \geq 0 \tag{3.1}$$

egyenlőtlenséget. Ha $x \in [0, 1)$, akkor az egyenlőtlenség teljesül, mivel

$$3^x \geq 1 > x \geq x^2, \quad \forall x \in [0, 1). \tag{3.2}$$

Ha $x \geq 1$, akkor tekintjük a $h : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$, $h(x) = 3^x - x^2$ függvényt, amiről igazoljuk, hogy nemnegatív, vagyis $h(x) \geq 0$, minden $x \geq 1$ esetén. Mivel

$$h(1) = 3^1 - 1^2 = 3 - 1 = 2 > 0, \tag{3.3}$$

ezért elég belátni, hogy a h függvény növekvő. Ehhez kiszámítjuk a deriváltját:

$$h'(x) = 3^x \ln 3 - 2x,$$

és igazolni akarjuk, hogy nemnegatív, minden $x \geq 1$ esetén. Az előbb vázolt módszert alkalmazzuk erre is. Mivel

$$h'(1) = 3 \ln 3 - 2 \geq 3 \ln e - 2 > 3 - 2 > 0, \qquad (3 > e), \tag{3.4}$$

így szintén elég belátni, hogy a h' függvény növekvő. Ezért kiszámoljuk a deriváltját:

$$h''(x) = 3^x (\ln 3)^2 - 2 \geq 3(\ln 3)^2 - 2 \geq 3(\ln e)^2 - 2 \geq 3 - 2 \geq 1, \quad \forall x \geq 1, \tag{3.5}$$

mivel a 3^x exponenciális függvény növekvő. Tehát a h' függvény növekvő, ezért $h'(x) \geq h'(1) > 0$, minden $x \geq 1$ esetén a (3.4) összefüggés szerint. Ez azt jelenti, hogy a h függvény is növekvő, tehát $h(x) \geq h(1) > 0$, minden $x \geq 1$ esetén a (3.3) összefüggés alapján. Ezzel beláttunk azt is, hogy

$$h(x) = 3^x - x^2 > 0, \quad \forall x \geq 1. \tag{3.6}$$

A (3.2) és (3.6) egyenlőtlenségek adják a (3.1) egyenlőtlenséget.

A (3.1) egyenlőtlenséget felhasználva

$$0 \leq \frac{x^{2n}}{2n} 3^{-nx} = \frac{1}{2n} \left(\frac{x^2}{3^x} \right)^n \leq \frac{1}{2n}, \quad \forall x \geq 0, \ \forall n \geq 1$$

és határértékre térve

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \frac{x^{2n}}{2n} 3^{-nx} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} = 0,$$

így a fogó tételből adódik, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^{2n}}{2n} 3^{-nx} = 0$, minden $x \geq 0$ esetén. Mivel minden $x \geq 0$ esetén a függvénysorozat konvergens, ezért a konvergencia halmaz $D = [0, +\infty)$ és a határfüggvény $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$.

Az egyenletes konvergencia igazolásához a Weierstrass-kritériumot (3.3. Tétel) fogjuk használni. Ehhez két dolgot látunk be:

(i) $|f_n(x) - f(x)| = \frac{x^{2n}}{2n} 3^{-nx} = \frac{1}{2n} \left(\frac{x^2}{3^x} \right)^n \leq \frac{1}{2n} \cdot 1^n = \frac{1}{2n}$, minden $x \geq 0$ és minden $n \geq 1$ esetén

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2n} = 0$,

ezért a Weierstrass-kritérium alapján a függvénysorozat egyenletesen konvergens a $[0, +\infty)$ intervallumon. □

3.4. Feladat. Igazold, hogy az $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\cos kx}{k^3}$ függvénysorozat egyenletesen konvergál az $\mathbb{R}$ halmazon.

Első megoldás. A Cauchy-kritériumot (3.5. Tétel) fogjuk használni az egyenletes konvergencia igazolásához. Ehhez a következőket kell belátni:

(i) ha $m > n$, akkor

$$\begin{aligned}
|f_m(x) - f_n(x)| &= \left| \frac{\cos(n+1)x}{(n+1)^3} + \frac{\cos(n+2)x}{(n+2)^3} + \cdots + \frac{\cos mx}{m^3} \right| \\
&\le \left| \frac{\cos(n+1)x}{(n+1)^3} \right| + \left| \frac{\cos(n+2)x}{(n+2)^3} \right| + \cdots + \left| \frac{\cos mx}{m^3} \right| \\
&\le \frac{1}{(n+1)^3} + \frac{1}{(n+2)^3} + \cdots + \frac{1}{m^3} \\
&\le \frac{1}{n \cdot (n+1) \cdot 1} + \frac{1}{(n+1) \cdot (n+2) \cdot 1} + \cdots + \frac{1}{(m-1) \cdot m \cdot 1} \\
&= \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{(m-1)m} \\
&= \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m} \right) \\
&= \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \le \frac{1}{n},
\end{aligned}$$

minden $x \in \mathbb{R}$ és minden $m > n > 0$ esetén,

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$,

ezért a Cauchy-kritérium alapján a függvénysorozat egyenletesen konvergens az $\mathbb{R}$-en. □

Második megoldás. Észrevehetjük, hogy az $f_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\cos kx}{k^3}$ a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^3}$ függvénysor részletösszeg sorozata, ezért a f_n egyenletes konvergenciája egyenértékű a függvénysor egyenletes konvergenciájával. A $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^3}$ függvénysor egyenletes konvergenciájára a függvénysorokra vonatkozó Weierstrass-kritériumot (4.2. Tétel) használjuk:

(i) $\left| \frac{\cos kx}{k^3} \right| \le \frac{1}{k^3}$, minden $k \in \mathbb{N}^*$ és minden $x \in \mathbb{R}$ esetén, illetve

(ii) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$ sor konvergens,

ezért a függvénysor egyenletesen konvergens az $\mathbb{R}$-en.

□

3.5. Feladat. Minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén legyen $f_n : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{e^{-kx}}{k}$. Számítsd ki a függvénysorozat konvergencia halmazát! Igazold, hogy az $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ függvénysorozat nem konvergál egyenletesen a $(0, +\infty)$ intervallumon, de egyenletesen konvergál az $[a, +\infty)$ intervallumon, ahol $a > 0$.

Megoldás. Az $f_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{e^{-kx}}{k}$ függvénysorozat a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-kx}}{k}$ függvénysor részletösszeg sorozata. Rögzítjük az x-et és vizsgáljuk a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-kx}}{k}$ pozitív tagú sor konvergenciáját a hányados kritériummal ($a_k = \frac{e^{-kx}}{k}$ az általános tag):

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{e^{-(k+1)x}}{k+1} \frac{k}{e^{-kx}} = \lim_{k\to\infty} e^{-x} \frac{k}{k+1} = e^{-x}.$$

Ha $e^{-x} < 1$ vagyis $x > 0$, akkor a sor konvergens. Ha $e^{-x} > 1$ vagyis $x < 0$, akkor a sor divergens. Ha $e^{-x} = 1$ vagyis $x = 0$, akkor külön vizsgáljuk a sor konvergenciáját: a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-k\cdot 0}}{k} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ harmonikus sor divergens. Tehát $D = (0, +\infty)$ az (f_n) függvénysorozat konvergencia halmaza.

Annak igazolásához, hogy a függvénysorozat nem egyenletesen konvergens a $(0, +\infty)$ intervallumon használjuk a következő harmonikus sorra vonatkozó becslést ($n = 2^m$)

$$\frac{1}{2^{m-1}+1} + \frac{1}{2^{m-1}+2} + \cdots + \frac{1}{2^m} \geq \frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^m} + \cdots + \frac{1}{2^m} = \frac{2^m - 2^{m-1}}{2^m} = \frac{2^{m-1}}{2^m} = \frac{1}{2}, \quad \forall m \geq 1,$$

ahonnan

$$f_{2^m}(x) - f_{2^{m-1}}(x) = \sum_{k=2^{m-1}+1}^{2^m} \frac{e^{-kx}}{k} \geq \sum_{k=2^{m-1}+1}^{2^m} \frac{e^{-x2^m}}{k} = e^{-x2^m} \sum_{k=2^{m-1}+1}^{2^m} \frac{1}{k} \geq \frac{1}{2} e^{-x2^m}.$$

Ezért, ha $x_m \in (0, +\infty)$ egy olyan szám, hogy $e^{-2^m x_m} \geq \frac{1}{2}$, vagyis $x_m \leq \frac{\ln 2}{2^m}$, akkor

$$|f_{2^m-1}(x_m) - f_{2^{m-1}-1}(x_m)| \geq \frac{1}{2} e^{-x_m 2^m} \geq \frac{1}{4}, \quad \forall m \in \mathbb{N}^*$$

és a függvénysorozatokra vonatkozó Cauchy-kritérium (3.5. Tétel) miatt az f_n függvénysorozat nem konvergál egyenletesen a $(0, +\infty)$ intervallumon.

A függvénysorokra vonatkozó Weierstrass-kritérium (4.2. Tétel) alapján a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-k}x}{k}$ függvénysor egyenletesen konvergál a $[a, +\infty)$ intervallumon, mert:

(i) $\left|\frac{e^{-kx}}{k}\right| \leq \frac{e^{-ka}}{k}$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in [a, +\infty)$,

(ii) a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-ak}}{k}$ sor konvergens (hányados kritérium).

Mivel az f_n függvénysorozat ennek a sornak a részletösszeg sorozata, ezért egyenletesen konvergál az $[a, +\infty)$ intervallumon. □

3.3.3. Határfüggvény folytonossága, deriválhatósága és integrálhatósága

3.6. Feladat. Ha $a > 0$, akkor az $f_n : \left[a, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \cos x + \frac{1}{2}\cos^2 x + \cdots + \frac{1}{n}\cos^n x$ függvénysorozat esetén számítsd ki a $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ határfüggvényt.

Megoldás. A határfüggvény kiszámításához a határfüggvény deriválhatóságára vonatkozó tételt (3.9. Tétel) fogjuk használni. Először belátjuk a Cauchy konvergencia kritérium (3.5. Tétel) segítségével, hogy létezik határfüggény az $\left[a, \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumon, majd belátjuk, hogy a deriváltak függvénysorozata egyenletesen tart egy g függényhez, amit ki tudunk számolni. Ez a g függvény lesz a határfüggvény deriváltja, ahonnan végül kiszámoljuk a határfüggvényt.

(i) Ha $m > n$, akkor

$$\begin{aligned}
|f_m(x) - f_n(x)| &= \left|\frac{\cos^{n+1} x}{n+1} + \ldots + \frac{\cos^m x}{m}\right| \\
&\leq \left|\frac{\cos^{n+1} x}{n+1}\right| + \ldots + \left|\frac{\cos^m x}{m}\right| \\
&= \frac{|\cos x|^{n+1}}{n+1} + \ldots + \frac{|\cos x|^m}{m} \\
&\overset{(*)}{\leq} \frac{(\cos a)^{n+1}}{n+1} + \cdots + \frac{(\cos a)^m}{m} \\
&\leq (\cos a)^{n+1} + \cdots + (\cos a)^m
\end{aligned}$$

$$= (\cos a)^{n+1} \left[1 + \cos a + (\cos a)^2 + \ldots + (\cos a)^{m-n-1}\right]$$
$$\leq (\cos a)^{n+1} \left[1 + \cos a + (\cos a)^2 + \ldots + (\cos a)^k + \ldots\right]$$
$$= (\cos a)^{n+1} \frac{1}{1 - \cos a} =: b_n,$$

minden $x \in \left[a, \frac{\pi}{2}\right]$ és ahol a $(*)$ egyenlőtlenségben felhasználtuk, hogy a koszinusz függvény csökkenő a $\left[a, \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumon, ezért $0 \leq |\cos x| = \cos x \leq \cos a$, minden $x \in \left[a, \frac{\pi}{2}\right]$ esetén;

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(\cos a)^{n+1}}{1-\cos a} = 0,$

így a Cauchy konvergencia kritérium alapján az (f_n) függvénysorozat pontonként konvergál az $\left[a, \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumon, és létezik $f : \left[a, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ határfüggvény.

Az f_n függvények deriválhatóak az $\left[a, \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumon és

$$f_n'(x) = \left(\cos x + \frac{1}{2}\cos^2 x + \cdots + \frac{1}{n}\cos^n x\right)' = -\sin x - \cos x \sin x - \cdots - \cos^{n-1} x \sin x$$
$$= (-\sin x) \cdot \left(1 + \cos x + \cdots + \cos^{n-1} x\right) = (-\sin x) \cdot \frac{1 - \cos^n x}{1 - \cos x}.$$

A derivált függvények sorozata pontonként konvergál az $\left[a, \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumon:

$$g(x) := \lim_{n\to\infty} f_n'(x) = \lim_{n\to\infty} (-\sin x) \cdot \frac{1 - \cos^n x}{1 - \cos x} = (-\sin x) \cdot \frac{1 - \lim\limits_{n\to\infty} \cos^n x}{1 - \cos x}$$
$$= (-\sin x) \cdot \frac{1}{1 - \cos x} = \frac{\sin x}{\cos x - 1},$$

minden $x \in \left[a, \frac{\pi}{2}\right]$ esetén.

Az (f_n') függvénysorozat egyenletesen konvergál a g függvényhez:

(1')

$$|f_n'(x) - g(x)| = \left|(-\sin x) \cdot \frac{1 - \cos^n x}{1 - \cos x} - \frac{\sin x}{\cos x - 1}\right| = \left|\frac{\sin x \cos^n x}{1 - \cos x}\right|$$
$$= \frac{\sin x \cos^n x}{1 - \cos x} \leq \frac{1 \cdot (\cos a)^n}{1 - \cos a} = \frac{(\cos a)^n}{1 - \cos a} := b_n',$$

minden $x \in \left[a, \frac{\pi}{2}\right]$ esetén;

(2') $\lim\limits_{n\to\infty} b_n' = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(\cos a)^n}{1-\cos a} = 0$, mert $0 < \cos a < 1$,

ezért a Weierstrass-kritérium (3.3. Tétel) alapján az (f_n') függvénysorozat egyenletesen konvergál a g függvényhez az $\left[a, \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumon.

A fentiek alapján a határfüggvény deriválhatóságára vonatkozó tételt használva az f határfüggvény deriválható és

$$f'(x) = g(x) = \frac{\sin x}{\cos x - 1}, \quad \forall\, x \in \left[a, \frac{\pi}{2}\right].$$

Az f határfüggvény kiszámítható az f' függvényből a Newton-Leibniz–tétel segítségével

$$f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^{x} f'(t) \mathrm{d}\, t.$$

Ehhez ismernünk kell az f határfüggvény értékét egy pontban. Mivel

$$f_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2} + \frac{\cos^2 \frac{\pi}{2}}{2} + \cdots + \frac{\cos^n \frac{\pi}{2}}{n} = 0,$$

minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén, ezért $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{n\to\infty} f_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0.$
Tehát

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x) - f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} f'(t)\mathrm{d}\,t = -\int_{x}^{\frac{\pi}{2}} f'(t)\mathrm{d}\,t = -\int_{x}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{\cos t - 1}\mathrm{d}\,t \\ &= \int_{x}^{\frac{\pi}{2}} \frac{-\sin t}{\cos t - 1}\mathrm{d}\,t = \int_{x}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos t - 1)'}{\cos t - 1}\mathrm{d}\,t. \end{aligned}$$

Az $u = \cos t - 1$ változócserét használva kiszámoljuk, hogy

$$\int \frac{(\cos t - 1)'}{\cos t - 1}\mathrm{d}\,t = \int \frac{1}{u}\mathrm{d}\,u = \ln|u| + C = \ln|\cos t - 1| + C = \ln(1 - \cos t) + C.$$

Innen adódik végül, hogy a határfüggvény

$$f(x) = \int_{x}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos t - 1)'}{\cos t - 1}\mathrm{d}\,t = \ln(1 - \cos t)\Big|_{x}^{\frac{\pi}{2}} = -\ln(1 - \cos x).$$

□

3.7. Feladat. Minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén legyen $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} \sin kx$. Igazold, hogy az (f_n) függvénysorozat konvergál az $\mathbb{R}$ halmazon, a határfüggvénye folytonos és folytonosan deriválható az $\mathbb{R}$ halmazon.

Megoldás. A Cauchy-kritérium (3.5. Tétel) segítségével fogjuk belátni, hogy létezik határfüggvény.

(i) Minden $x \in \mathbb{R}$ és minden $m, n \in \mathbb{N}^*$, $m > n$ esetén

$$\begin{aligned} |f_m(x) - f_n(x)| &= \left| \frac{\sin(n+1)x}{(n+1)^3} + \frac{\sin(n+2)x}{(n+2)^3} + \cdots + \frac{\sin mx}{m^3} \right| \\ &\le \frac{|\sin(n+1)x|}{(n+1)^3} + \frac{|\sin(n+2)x|}{(n+2)^3} + \cdots + \frac{|\sin mx|}{m^3} \\ &\le \frac{1}{(n+1)^3} + \frac{1}{(n+2)^3} + \cdots + \frac{1}{m^3} \\ &\le \frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot 1} + \frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)\cdot 1} + \cdots + \frac{1}{(m-1)\cdot m\cdot 1} \\ &= \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m}\right) \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \\ &\le \frac{1}{n}, \end{aligned}$$

(ii) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,$

ezért a Cauchy-féle kritérium alapján a megadott (f_n) függvénysorozat pontonként és egyenletesen is konvergál az $\mathbb{R}$-en egy f határfüggvényhez.

A határfüggvény deriválhatóságára (3.9. Tétel) és folytonosságára (3.7. Tétel) vonatkozó tételek segítségével fogjuk belátni, hogy az általunk nem ismert f határfüggvény folytonos és folytonosan deriválható az $\mathbb{R}$-en.

A megadott f_n függvények folytonosak az $\mathbb{R}$-en, minden $n \ge 1$ esetén és az (f_n) függvénysorozat egyenletesen konvergál az $\mathbb{R}$-en, ezért az f határfüggvény folytonos az $\mathbb{R}$-en a határfüggvény folytonosságára vonatkozó tétel szerint (3.7. Tétel).

A megadott f_n függvények folytonosan deriválhatóak az $\mathbb{R}$-en, minden $n \geq 1$ esetén:

$$f_n'(x) = \left(\frac{\sin x}{1^3} + \frac{\sin 2x}{2^3} + \ldots + \frac{\sin nx}{n^3}\right)' = \frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 2x}{2^2} + \ldots + \frac{\cos mx}{m^2}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

A Cauchy-féle kritériummal szintén belátható, hogy az (f_n') függvénysorozat egyenetesen konvergál az $\mathbb{R}$-en egy $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényhez.

(i) Minden $x \in \mathbb{R}$ és minden $m, n \in \mathbb{N}^*$, $m > n$ esetén

$$\begin{aligned}
|f_m'(x) - f_n'(x)| &= \left|\frac{\cos(n+1)x}{(n+1)^2} + \frac{\cos(n+2)x}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{\cos mx}{m^2}\right| \\
&\leq \frac{|\cos(n+1)x|}{(n+1)^2} + \frac{|\cos(n+2)x|}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{|\cos mx|}{m^2} \\
&\leq \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{m^2} \\
&\leq \frac{1}{n \cdot (n+1)} + \frac{1}{(n+1) \cdot (n+2)} + \cdots + \frac{1}{(m-1) \cdot m} \\
&= \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m}\right) \\
&= \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \\
&\leq \frac{1}{n},
\end{aligned}$$

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$,

ezért a Cauchy-féle kritérium (3.5. Tétel) alapján a megadott (f_n') függvénysorozat pontonként és egyenletesen is konvergál az $\mathbb{R}$-en egy g határfüggvényhez, amely folytonos a határfüggvény folytonosságra vonatkozó tétel alapján (3.7. Tétel).

Végül a határfüggvény deriválhatóságára vonatkozó tétel alapján az $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ határfüggény deriválható és a deriváltja $f' = g = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'$, amely folytonos. $\square$

4. fejezet

Függvénysorok, hatványsorok

4.1. Elméleti összefoglaló

4.1.1. Függvénysorok

4.1. Értelmezés

Legyenek $H \subseteq \mathbb{R}$ és $f_n : H \to \mathbb{R}$, $n \geq 0$. A $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ függvénysor *pontoként konvergál* a $D \subseteq H$ halmazon, ha minden $x \in D$ esetén a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ valós számsor konvergens. A

$$D = \left\{ x \in H \mid \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \text{ konvergens} \right\}$$

halmaz a függvénysor *konvergencia halmaza* és az $s : D \to \mathbb{R}$, $s(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ függvény a függvénysor *összegfüggvénye.* A $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ függvénysor *egyenletesen konvergens* az $E \subseteq D$ halmazon, ha az $s_N = \sum\limits_{n=0}^{N} f_n$ részletösszeg sorozat egyenletesen konvergens az $E \subseteq D$ halmazon.

4.2. Tétel (Weierstrass-féle kritérium függvénysorokra)

Az $f_n : H \to \mathbb{R}$, $n \geq 0$ általános tagú $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ függvénysor abszolút konvergens és egyenletesen konvergens az $E \subseteq H$ halmazon, ha létezik olyan $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ pozitív tagú számsor, amelyre

(i) $|f_n(x)| \leq a_n$, minden $n \in \mathbb{N}$ és minden $x \in E$ esetén,

(ii) a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ pozitív tagú sor konvergens.

4.3. Tétel (Cauchy-féle kritérium az egyenletes konvergencia eldöntésére)

A $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ függvénysor akkor és csak akkor egyenletesen konvergens az E halmazon, ha létezik olyan $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ valós számsorozat, amelyre

(i) $|f_{n+1}(x) + \dots + f_m(x)| \leq a_n$, minden $n \in \mathbb{N}$, minden $m > n$ és minden $x \in E$ esetén,

(ii) $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$.

4.1.2. Hatványsorok

4.4. Értelmezés

Legyen $x_0 \in \mathbb{R}$. A $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + \dots + a_n(x-x_0)^n + \dots$ alakú függvénysort *hatványsornak* nevezzük, ahol $a_0, a_1, a_2, \dots \in \mathbb{R}$ a hatványsor együtthatói.

4.5. Tétel (Cauchy-Hadamard)

A $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ hatványsor esetén legyen $\ell = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$ (felső határérték) és legyen

$$r = \begin{cases} 0, & \text{ha } \ell = +\infty, \\ \frac{1}{\ell}, & \text{ha } 0 < \ell < +\infty, \\ +\infty, & \text{ha } \ell = 0 \end{cases}$$

a hatványsor *konvergencia sugara.*

(i) Ha $r = +\infty$, akkor a hatványsor abszolút konvergens az $\mathbb{R}$ halmazon.

(ii) Ha $r = 0$, akkor a hatványsor csak az $x = x_0$ pontban konvergens.

(iii) Ha $r \in (0, +\infty)$, akkor a hatványsor abszolút konvergens az $(x_0 - r, x_0 + r)$ intervallumon és divergens a $(-\infty, x_0 - r) \cup (x_0 + r, +\infty)$ halmazon.

A konvergencia sugár kiszámításához felhasználhatjuk, hogy $\ell = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$.

4.6. Megjegyzés

Az $r \in (0, +\infty)$ esetben az $(x_0 - r, x_0 + r)$ intervallum végpontjaiban, vagyis az $x_0 - r$ és $x_0 + r$ pontokban a hatványsor konvergenciáját külön-külön meg kell vizsgálni. ◇

4.7. Tétel (Hatványsor egyenletes konvergenciája)

Ha a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ hatványsor konvergencia sugara r, akkor a hatványsor egyenletesen konvergál bármely $[a, b] \subset (x_0 - r, x_0 + r)$ intervallumon $(a < b)$.

4.8. Tétel (Hatványsor összegfüggvényének folytonossága)

A $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ hatványsor összegfüggvénye folytonos az $(x_0 - r, x_0 + r)$ intervallumon, ahol r a konvergencia sugár.

4.9. Tétel (Hatványsor tagonkénti deriváltja)

A $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0^n)$ hatványsor összegfüggvénye tetszőlegesen sokszor deriválható az $(x_0 - r, x_0 + r)$ intervallumon, ahol r a konvergencia sugár, és

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n(x-x_0)^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n(x-x_0)^{n-1}.$$

4.10. Tétel (Hatványsor tagonkénti integrálása)

Ha $r \geq 0$ a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ hatványsor konvergencia sugara és $a < b \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $[a, b] \subset (x_0 - r, x_0 + r)$, akkor a hatványsor összegfüggvénye integrálható az $[a, b]$ intervallumon, és

$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n\right) \mathrm{d}x = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_a^b (x-x_0)^n \mathrm{d}x\right)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} \cdot \left[(b-x_0)^{n+1} - (a-x_0)^{n+1}\right].$$

4.2. Feladatok

4.2.1. Függvénysorok konvergenciája, konvergencia halmaza

4.1. Feladat. Határozd meg a következő függvénysorok pontonkénti konvergencia halmazát:

(a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{\ln n}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^n$, $x \in \mathbb{R}$;

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(n+x^2)^{-a}$, $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$;

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}\ln(1+a^n)$, $a \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$;

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^a}$, $x \in \mathbb{R}$ és $a > 0$;

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^a}$, $x \in \mathbb{R}$ és $a > 0$;

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}3^{-nx}$, $x > 0$.

4.2. Feladat. Határozd meg a $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$, $x \in \mathbb{R}$ függvénysor konvergencia halmazát és összegfüggvényét! Egyenletesen konvergens-e a függvénysor a konvergencia halmazon? Igazold, hogy a függvénysor egyenletesen konvergens az $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, \infty\right)$ halmazon!

4.3. Feladat. Határozd meg a következő függvénysorok pontonkénti konvergencia halmazát és abszolút konvergencia halmazát:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+2x)^n}{n^2}$;

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!x^n}{n^n}$;

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(1-x)^n}{\sqrt{n}}$;

(d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos nx}{e^{nx}}$, $x \in \mathbb{R}$;

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{n^{\operatorname{tg} x}}$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$;

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^{2x}}$, $x \in \mathbb{R}$;

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(\frac{1-x}{1-2x}\right)^n$, $x \in \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$;

(h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^n x}{n^\alpha}$, $\alpha \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$.

4.4. Feladat. Vizsgáld a következő függvénysorok konvergenciáját a Weierstrass-kritérium (4.2. Tétel) segítségével:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^2}{1+n^3x^4}$, $x \in \mathbb{R}$;

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^2+2^n}$, $x \in \mathbb{R}$;

(c) $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}\frac{2x}{x^2+n^4}$, $x \in \mathbb{R}$;

(d) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{1}{3^x n^2}\right)$, $x > 0$.

4.2.2. Hatványsorok

4.5. Feladat. Határozd meg a következő hatványsorok konvergencia sugarát, konvergencia halmazát (vizsgáld a sor viselkedését az intervallum végpontjaiban):

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$;

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n+3^n}$;

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n2^n}$;

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right)(x-1)^n$;

(e) $\sum_{n=0}^{\infty} 3^{n^2}(x+1)^n$;

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2+n}(x+2)^n$;

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{n^{n+\frac{1}{n}}} x^n$;

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n(x+3)^n$;

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}(x-2)^n$;

(j) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{1}{n}(x-1)^n$.

4.6. Feladat. Határozd meg a következő hatványsorok konvergencia sugarát, konvergencia halmazát (vizsgáld a sor viselkedését az intervallum végpontjaiban):

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^{2n}$;

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} 3^{n+1} x^{2n+1}$;

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} 3^{n^2} x^{n^2}$;

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^n}}{n^n}$;

(e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n}$;

4.2.3. Hatványsorok összegzése

4.7. Feladat. Határozd meg a következő hatványsorok konvergencia halmazát és számítsd ki az összegfüggvényt:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$;

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$;

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+2}$;

(d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+2)(n+3)}$;

(e) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$;

(f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$;

(g) $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$;

(h) $\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)x^n$;

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)x^n$;

(j) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$;

(k) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $(0! = 1)$;

(l) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln a)^n}{n!} x^n$, $a > 0$;

(m) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n-1)!}$;

(n) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{(n+1)!}$.

4.8. Feladat. Határozz meg egy olyan hatványsort, amelynek f összegfüggvénye teljesíti az $f''(x) - f(x) = 0$ differenciálegyenletet és határozd meg a konvergencia halmazát!

4.3. Megoldások

4.3.1. Függvénysorok konvergenciája, konvergencia halmaza

4.1. Feladat. Határozd meg a következő függvénysorok pontonkénti konvergencia halmazát:

(a) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{\ln n}\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)^n$, $x \in \mathbb{R}$;

Megoldás. Ha bevezetjük az $y = \frac{1-x^2}{1+x^2}$ jelölést, akkor a megadott sorból a $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}y^n$ hatványsort kapjuk. A Cauchy-Hadamard–tételt (4.5. Tétel) használva meghatározzuk a konvergencia halmazát. A hatványsor konvergencia sugarának meghatározásához kiszámoljuk a következő határértéket:

$$\ell = \lim_{n\to\infty}\frac{\left|\frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+1)}\right|}{\left|\frac{(-1)^n}{\ln n}\right|} = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\ln(n+1)} \overset{(*)}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\ln(x+1)}$$
$$\overset{(L'H)}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln' x}{\ln'(x+1)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x+1}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x} = 1,$$

ahol a $(*)$ egyenlőségben a sorozathatárértéket átírtuk függvényhatárértékre, majd a L'Hôspital-szabályt használva kiszámoltuk azt. Innen kapjuk, hogy a konvergencia sugár $r = \frac{1}{\ell} = \frac{1}{1} = 1$. Tehát a hatványsor konvergál a $(-1,1)$ intervallumon és divergál a $[-1,1]$ intervallumon kívül, ezért megvizsgáljuk a konvergenciát az intervallum végpontjaiban:

- az $x = 1$ pontban a $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}$ váltakozó előjelű sor konvergens, mert teljesülnek a Leibniz-kritérium (2.24. Tétel) feltételei (a $\left(\frac{1}{\ln n}\right)$ sor csökkenő és $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n} = 0$),
- az $x = -1$ pontban a $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}(-1)^n = \sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$ sor divergens az I. összehasonlítási kritérium (2.8. Tulajdonság) alapján, mivel $\frac{1}{\ln n} \geq \frac{1}{n+1}$ minden $n \geq 2$ esetén és $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n+1} = \sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n}$ divergens.

Tehát a $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}y^n$ hatványsor konvergencia halmaz $D_y = (-1,1]$. Innen kapjuk, hogy az eredeti $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\ln n}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^n$ függvénysor konvergencia halmaza azon $x \in \mathbb{R}$ pontok halmaza, amelyekre

$$\frac{1-x^2}{1+x^2} \in (-1,1] \iff -1 < \frac{1-x^2}{1+x^2} \leq 1 \iff -1-x^2 < 1-x^2 \leq 1+x^2.$$

Mindkét egyenlőtlenség teljesül minden $x \in \mathbb{R}$ esetén, ezért a $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\ln n}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^n$ függvénysor konvergencia halmaza $D = \mathbb{R}$. □

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+x^2)^{-a}$, $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$;

Első megoldás. Megjegyezzük, hogy a megadott sor pozitív tagú, minden $x \in \mathbb{R}$ esetén, továbbá a $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+x^2)^a}$ sor a $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^a}$ általánosított harmonikus sorhoz hasonlít. A III. összehasonlítási kritériummal (2.12. Tulajdonság) összehasonlítjuk őket. Minden $x \in \mathbb{R}$ rögzített számra

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+x^2)^a}}{\frac{1}{n^a}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^a}{(n+x^2)^a} = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+x^2}\right)^a = 1^a = 1 \in (0,+\infty),$$

tehát a kritérium alapján a két sor ugyanolyan természetű, vagyis $a > 1$ esetén konvergensek, míg $a \leq 1$ esetén divergensek. Innen kapjuk, hogy a függvénysor konvergencia halmaza

$$D = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{ha } a > 1, \\ \emptyset, & \text{ha } a \leq 1. \end{cases}$$

□

Második megoldás. Mivel $n + x^2 \geq n \geq 1$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén, ezért $a \leq 0$ esetén a sor általános tagja $\frac{1}{(n+x^2)^a} \geq 1$. Tehát ha $a \leq 0$, akkor a függvénysor divergens, minden $x \in \mathbb{R}$ esetén.

Minden $0 \leq a$ és $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\frac{1}{(n+x^2)^a} \leq \frac{1}{n^a}, \quad \forall\, n \geq 1.$$

Mivel $a > 1$ esetén a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$ általánosított harmonikus sor konvergens, ezért az I. összehasonlítási kritérium (2.8. Tulajdonság) alapján a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+x^2)^a}$ sor is konvergens, minden $x \in \mathbb{R}$ esetén.

Az $0 < a \leq 1$ esetben felhasználjuk, hogy $[x] \leq x < [x] + 1$, minden $x \in \mathbb{R}$ esetén, ahol $[x] \in \mathbb{Z}$ az $x \in \mathbb{R}$ egész része. Tetszőleges rögzített x szám esetén legyen $k = [x] + 1$, így $x^2 < ([x] + 1)^2 = k^2$. Ekkor

$$\frac{1}{(n+k^2)^a} \leq \frac{1}{(n+x^2)^a}, \quad \forall\, n \geq 1.$$

Mivel a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+k^2)^a} = \sum\limits_{n=k^2+1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$ sor divergens $a \in (0, 1]$ esetén, ezért az I. összehasonlítási kritérium alapján a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+x^2)^a}$ sor is divergens. Tehát $0 < a \leq 1$ és minden $x \in \mathbb{R}$ esetén a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+x^2)^a}$ sor divergens.

Összefoglalva a sor konvergencia halmaza

$$D = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{ha } a > 1, \\ \emptyset, & \text{ha } a \leq 1. \end{cases}$$

□

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} \ln(1 + a^n)$, $a \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$;

Megoldás.

(i) Ha $a = 0$, akkor $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1+0^n)}{n^x} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 0 = 0$ konvergens, minden $x \in \mathbb{R}$ esetén.

(ii) Ha $0 < a < 1$, akkor felhasználjuk az

$$e^y \geq y + 1, \quad \forall\, y \in \mathbb{R}$$

egyenlőtlenséget, és $y = a^n$ esetén kapjuk, hogy $e^{a^n} \geq 1 + a^n$, ahonnan

$$a^n = \ln\left(e^{a^n}\right) \geq \ln(1 + a^n), \quad \forall\, n \geq 1.$$

Innen felírhatjuk, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ és $n \geq 1$ esetén

$$\frac{\ln(1 + a^n)}{n^x} \leq \frac{a^n}{n^x}. \tag{4.1}$$

A gyökkritériummal (2.17. Tulajdonság) belátható, hogy a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n^x}$ sor konvergens:

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{a^n}{n^x}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{n^{\frac{x}{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{(\sqrt[n]{n})^x} = \frac{a}{1^x} = a < 1.$$

Így a (4.1) egyenlőtlenség és az I. összehasonlítási kritérium (2.8. Tulajdonság) alapján a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1+a^n)}{n^x}$ sor konvergens, minden $x \in \mathbb{R}$ esetén.

(iii) Ha $a = 1$, akkor $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1+1^n)}{n^x} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln 2}{n^x} = \ln 2 \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ konvergens, ha $x > 1$ és divergens, ha $x \leq 1$.

(iv) Ha $a > 1$, akkor $1 < a < a^n$, minden $n \geq 1$ esetén és ahonnan

$$n \ln a = \ln a^n \leq \ln(1 + a^n) \leq \ln(a^n + a^n) = \ln(2 \cdot a^n) \leq \ln(2^n \cdot a^n) = n \cdot \ln(2a),$$

vagyis

$$n \cdot \ln a \leq \ln(1 + a^n) \leq n \cdot \ln(2a), \quad \forall\, n \geq 1.$$

(Megjegyezzük, hogy $\ln a > 0$, mivel $a > 1$). Innen kapjuk, hogy

$$\frac{n \cdot \ln a}{n^x} \leq \frac{\ln(1 + a^n)}{n^x} \leq \frac{n \cdot \ln(2a)}{n^x}, \quad \forall\, n \geq 1, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}. \tag{4.2}$$

Mivel a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot \ln a}{n^x} = \ln a \cdot \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{x-1}}$ sor divergens, ha $x - 1 \leq 1$, vagyis $x \leq 2$, ezért a (4.2) egyenlőtlenség első feléből az I. összehasonlítási kritérium (2.8. Tulajdonság) alapján következik, hogy a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1+a^n)}{n^x}$ sor divergens, ha $x \leq 2$.

Mivel a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot \ln(2a)}{n^x} = \ln(2a) \cdot \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{x-1}}$ sor konvergens, ha $x - 1 > 1$, vagyis $x > 2$, ezért a (4.1) egyenlőtlenség második feléből az I. összehasonlítási kritérium alapján következik, hogy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1+a^n)}{n^x}$ sor konvergens, ha $x > 2$.

Összegezve azt kapjuk, hogy a sor konvergencia halmaza

$$D = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{ha } a = 0, \\ \mathbb{R}, & \text{ha } 0 < a < 1, \\ (1, +\infty), & \text{ha } a = 1, \\ (2, +\infty), & \text{ha } a > 1. \end{cases}$$

$\square$

(d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{n^a}$, $x \in \mathbb{R}$ és $a > 0$;

Megoldás. A 2.11. Feladat (h) alpontjában beláttuk, hogy a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^a}$ sor konvergál, minden $x \in \mathbb{R}$ és minden $a \in \mathbb{R}$ esetén. Tehát a konvergencia halmaz $D = \mathbb{R}$, minden $a > 0$ esetén. □

(e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos nx}{n^a}$, $x \in \mathbb{R}$ és $a > 0$;

Megoldás. A 2.11. Feladat (i) alpontjában beláttuk, hogy a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^a}$ sor konvergál, minden $x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ és minden $a > 0$ esetén, illetve minden $x \in \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ és minden $a > 1$ esetén. Tehát a konvergencia halmaz

$$D = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{ha } a > 1, \\ \mathbb{R} \setminus \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}, & \text{ha } 0 < a \leq 1. \end{cases}$$

□

(f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n} 3^{-nx}$, $x > 0$.

Megoldás. A hányados kritériumot használjuk (2.15. Tulajdonság):

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} 3^{-(n+1)x} \cdot \frac{n}{x^n} 3^{nx} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \cdot \frac{x}{3^x} = \frac{x}{3^x} < 1,$$

mivel minden $x > 0$ esetén $3^x > e^x > x$. Tehát a függvénysor konvergencia halmaza $D = (0, +\infty)$. □

4.2. Feladat. Határozd meg a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^2}{(1+x^2)^n}$, $x \in \mathbb{R}$ függvénysor konvergencia halmazát és összegfüggvényét! Egyenletesen konvergens-e a függvénysor a konvergencia halmazon? Igazold, hogy a függvénysor egyenletesen konvergens az $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, \infty\right)$ halmazon!

Megoldás. Ha $x = 0$, akkor a sor $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{0^n}{(1+0^2)^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 0 = 0$ konvergens.

Ha $x \neq 0$, akkor a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ sor pozitív tagú és a gyökkritériummal vizsgálva a konvergenciáját:

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{x^2}{(1+x^2)^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(x^2)^{\frac{1}{n}}}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2} < 1,$$

tehát a sor konvergens minden $x \neq 0$ esetén is. Azt kaptuk, hogy a függvénysor konvergencia halmaza $D = \mathbb{R}$.

A függvénysor $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ összefüggvényt a következőképpen számolhatjuk ki.

- Ha $x = 0$, akkor $f(0) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{0^2}{(1+0^2)^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 0 = 0$,

- Ha $x \neq 0$, akkor

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n} = x^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n} \overset{(*)}{=} x^2 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{1+x^2}} = x^2 \cdot \frac{1+x^2}{x^2} = 1+x^2, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

ahol a $(*)$ egyenlőségben felhasználtuk, hogy $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$, ha $q \in (-1,1)$ (a mi esetünkben $q = \frac{1}{1+x^2} \in (0,1)$).

Tehát az összefüggvény $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x = 0, \\ 1 + x^2 & \text{ha } x \neq 0. \end{cases}$$

Mivel az $f_n(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ függvények folytonosak az $\mathbb{R}$-en, minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, de az f összefüggvény nem folytonos az $x = 0$ pontban ($\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1 \neq 0 = f(0)$), ezért a konvergencia nem egyenletes (csak pontokként konvergál).

Teljesülnek a függvénysorokra vonatkozó Weierstrass-kritérium (4.2. Tétel) feltételei:

$$|f_n(x)| = \frac{x^2}{(1+x^2)^n} = \frac{1+x^2-1}{(1+x^2)^n} = \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}} - \frac{1}{(1+x^2)^n} \leq \frac{1}{(1+x^2)^{n-1}} \leq \frac{1}{(1+(\frac{1}{2})^2)^{n-1}},$$

minden $x \in E = (-\infty, -\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, +\infty)$ és $n \geq 1$ esetén, továbbá

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+(\frac{1}{2})^2)^{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} = 0.$$

□

4.3. Feladat. Határozd meg a következő függvénysorok pontonkénti konvergencia halmazát és abszolút konvergencia halmazát:

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(1+2x)^n}{n^2}$;

Megoldás. Először az abszolút konvergencia halmazt határozzuk meg. Ehhez meghatározzuk a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(1+2x)^n}{n^2}\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|1+2x|^n}{n^2}$ függvénysor konvergencia halmazát.

- Ha $1 + 2x = 0$, vagyis $x = -\frac{1}{2}$, akkor $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|0|^n}{n^2} = 0$.
- Ha pedig $1 + 2x \neq 0$, akkor a sor pozitív tagú és a gyökkritériumot használjuk a konvergencia eldöntésére:

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|1+2x|^n}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|1+2x|}{(\sqrt[n]{n})^2} = \frac{|1+2x|}{1^2} = |1+2x|.$$

A gyökkritérium alapján, $|1 + 2x| < 1$ esetén a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|1+2x|^n}{n^2}$ függvénysor konvergens, míg $|1 + 2x| > 1$ esetén divergens. Az $|1 + 2x| = 1$ esetet külön kell vizsgálni: ekkor a sor $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1^n}{n^2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergens.

Összegezve a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|1+2x|^n}{n^2}$ függvénysor konvergens, ha $|1+2x| \leq 1$, vagyis $x \in [-1, 0]$. Tehát az eredeti $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(1+2x)^n}{n^2}$ függvénysor abszolút konvergencia halmaza $A = [-1, 0]$.

A D pontonkénti konvergencia halmaz mindig tartalmazza az abszolút konvergencia halmazt, mert az A abszolút konvergenciából következik a konvergencia. Így elég megvizsgálni az $|1+2x| > 1$ esetet. Ekkor $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|1+2x|^n}{n^2} = +\infty \neq 0$ és ezért $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(1+2x)^n}{n^2} \neq 0$, vagyis a sor általános tagja nem tart a 0-hoz, így a sor divergens. Ezzel beláttuk, hogy a pontonkénti konvergencia halmaz $D = A = [-1, 0]$. □

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!x^n}{n^n}$;

Megoldás. Előbb az abszolút konvergencia halmazt határozzuk meg, vagyis az $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\frac{n!x^n}{n^n}\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!|x|^n}{n^n}$ függvénysor konvergencia halmazát.

- Ha $x = 0$, akkor a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!0^n}{n^n} = 0$ konvergens.
- Ha $x \neq 0$, akkor a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!|x|^n}{n^n}$ pozitív tagú és a hányados kritériumot fogjuk használni a konvergenciájának tanulmányozására:

$$\begin{aligned}
\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)!|x|^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!|x|^n}{n^n}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!|x|^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!|x|^n} \\
&= \lim_{n\to\infty} |x| \cdot \frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \\
&= \frac{|x|}{e}.
\end{aligned}$$

A hányados kritérium alapján, ha $\frac{|x|}{e} < 1$, akkor a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!|x|^n}{n^n}$ sor konvergens, míg $\frac{|x|}{e} > 1$ esetén divergens. Az $\frac{|x|}{e} = 1$ esetet külön vizsgáljuk: ekkor a sorunk $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{n!e^n}{n^n}}_{a_n}$.

Ennek a sornak az általános tagjainak aránya

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)!e^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!e^n}{n^n}} = \frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \geq 1,$$

mivel az $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ sor monoton növekvő és (alulról) tart e-hez. Az (a_n) sorozat monoton növekvő, így $a_n \geq a_1 = e$, minden $n \geq 1$ esetén, tehát $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!e^n}{n^n} \neq 0$. Emiatt a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!e^n}{n^n}$ sor divergens.

Összegezve a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!|x|^n}{n^n}$ függvénysor konvergens, ha $\frac{|x|}{e} < 1$, vagyis $x \in (-e, e)$. Tehát a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!x^n}{n^n}$ függvénysor abszolút konvergencia halmaza $A = (-e, e)$.

A D pontonkénti konvergencia halmaz mindig tartalmazza az A abszolút konvergencia halmazt. Az $\frac{|x|}{e} \geq 1$ esetben a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{n!x^n}{n^n}}_{f_n(x)}$ sor esetén az általános tagok abszolút értékeinek aránya

$$\frac{|f_{n+1}(x)|}{|f_n(x)|} = \frac{\frac{(n+1)!|x|^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!|x|^n}{n^n}} = \frac{|x|}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \geq \frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \geq 1,$$

tehát $(|f_n(x)|)_n$ monoton növekvő sorozat minden $|x| \geq e$ esetén, így

$$|f_{n+1}(x)| \geq |f_1(x)| = |x| \geq e.$$

Azt kaptuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} |f_n(x)| \neq 0$, ahonnan következik, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) \neq 0$, vagyis az általános tag nem tart a nullához, emiatt a sor divergens, minden $|x| \geq e$ esetén. Tehát a pontonkénti konvergencia halmaz $D = A = (-e, e)$. □

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(1-x)^n}{\sqrt{n}}$;

Megoldás. A függvénysor átírható $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(1-x)^n}{\sqrt{n}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(-1)^n (x-1)^n}{\sqrt{n}} = -\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{\sqrt{n}}$ alakba, amely egy hatványsor. Kiszámítjuk a konvergencia sugarát:

$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = 1.$$

A Cauchy-Hadamard–tétel (4.5. Tétel) alapján a hatványsor abszolút konvergens a $(0, 2)$ intervallumon és divergens a $[0, 2]$ intervallumon kívül. Az $x = 0$ és $x = 2$ pontokban külön kell vizsgálni a konvergenciát.

Ha $x = 0$, akkor a függvénysor $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1^n}{\sqrt{n}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ nem abszolút konvergens, mivel a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}}\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ sor divergens (általánosított harmonikus sor, $\alpha = \frac{1}{2} < 1$). A $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ sor feltételesen konvergens a Leibniz-kritérium (2.24. Tétel), mivel váltakozó előjelű és az $(\frac{1}{\sqrt{n}})_{n\geq 1}$ sorozat csökkenő és tart 0-hoz.

Ha $x = 2$, akkor a függvénysor $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = -\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ sor divergens (általánosított harmonikus sor $\alpha = \frac{1}{2} \leq 1$).

Összegezve a függvénysor konvergencia halmaza $D = [0, 2)$ és abszolút konvergencia halmaz $A = (0, 2)$. □

(d) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{e^{nx}}$, $x \in \mathbb{R}$;

Megoldás. Ha $x > 0$, akkor minden $n \geq 0$ esetén $\left|\frac{\cos nx}{e^{nx}}\right| \leq \frac{1}{e^{nx}}$, és a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{e^{nx}}$ mértani sor konvergens ($q = \frac{1}{e^x} < 1$), ezért a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left|\frac{\cos nx}{e^{nx}}\right|$ sor is konvergens. Tehát $x > 0$ esetén a függvénysor abszolút konvergens.

Ha $x = 0$, akkor a sor $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n\cdot 0)}{e^{n\cdot 0}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} 1$ divergens.

Ha $x < 0$, akkor az $\frac{1}{e^{nx}} \geq 1$, minden $n \geq 0$ esetén. Bármely $n \geq 1$ esetén $|\cos nx| \geq \frac{1}{2}$ vagy $|\cos 2nx| \geq \frac{1}{2}$. Valóban, ha $|\cos nx| < \frac{1}{2}$, akkor

$$0 \leq \cos^2 nx < \frac{1}{4} \iff 0 \leq 2\cos^2 nx < \frac{1}{2} \iff -1 \leq 2\cos^2(nx) - 1 < -\frac{1}{2},$$

ahonnan következik, hogy $|\cos 2nx| = |2\cos^2(nx) - 1| > \frac{1}{2}$. Tehát $\left|\frac{\cos nx}{e^{nx}}\right| \geq \frac{1}{2}$ vagy $\left|\frac{\cos 2nx}{e^{2nx}}\right| \geq \frac{1}{2}$, így a sor $\frac{\cos nx}{e^{nx}}$ általános tagja nem tart 0-hoz, ezért a sor divergens $x < 0$ esetén.

Összegezve a sor konvergencia és abszolút konvergencia halmaza $D = A = (0, +\infty)$. □

(e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^{\operatorname{tg} x}}$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$;

Megoldás. Ha $x = 0$, akkor a sor konvergens. Ha $x > \frac{\pi}{4}$, vagyis $\operatorname{tg} x > 1$, akkor a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^{\operatorname{tg} x}} = x \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\operatorname{tg} x}}$ sor (abszolút) konvergens (általánosított harmonikus sor $\alpha = \operatorname{tg} x > 1$), míg ha $x \leq \frac{\pi}{4}$ és $x \neq 0$, akkor a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^{\operatorname{tg} x}} = x \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\operatorname{tg} x}}$ sor divergens (általánosított harmonikus sor $\alpha = \operatorname{tg} x \leq 1$).

Összegezve a sor konvergencia és abszolút konvergencia halmaza $D = A = \{0\} \cup \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$. □

(f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^{2x}}$, $x \in \mathbb{R}$;

Megoldás. Előbb az abszolút konvergencia halmazt számoljuk ki, vagyis a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^{n+1}}{n^{2x}}\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2x}}$ függvénysor konvergencia halmazát. Ez pontosan az általánosított harmonikus sor $\alpha = 2x$, tehát konvergens, ha $\alpha = 2x > 1$ és divergens, ha $\alpha = 2x \leq 1$. Ez alapján az abszolút konvergencia halmaz $A = \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

A D pontonkénti konvergencia halmaz mindig tartalmazza az A abszolút konvergencia halmazt. Emiatt elég vizsgálni a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^{2x}}$ sor konvergenciáját $x \leq \frac{1}{2}$ esetén. Ez egy váltakozó előjelű sor és $0 < 2x \leq 1$ esetén teljesülnek a Leibniz-kritérium feltételei:

- a $\left(\frac{1}{n^{2x}}\right)_{n \geq 1}$ sorozat monoton csökkenő és
- $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n^{2x}} = 0$,

így ebben az esetben a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^{2x}}$ sor konvergens.

Ha $2x \leq 0$, akkor $\frac{1}{n^{2x}} \geq 1$ minden $n \geq 1$ esetén, így $\lim\limits_{n \to \infty} \left|\frac{(-1)^{n+1}}{n^{2x}}\right| \neq 0$, ahonnan következik, hogy $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{2x}} \neq 0$, vagyis a sor általános tagja nem tart nullához, ezért a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{2x}}$ sor divergens.

Összegezve a pontonkénti konvergencia halmaz $D = (0, +\infty)$ és az abszolút konvergencia halmaz $A = (\frac{1}{2}, +\infty)$. □

(g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(\frac{1 - x}{1 - 2x}\right)^n$, $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$;

Megoldás. Az $y = \frac{1-x}{1-2x}$ helyettesítéssel egy $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n})^n y^n$ hatványsorhoz jutunk. A hatványsor konvergencia sugara

$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{(1+\frac{1}{n})^n}{(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}} = \frac{e}{e} = 1.$$

Tehát a hatványsor abszolút konvergens, ha $y \in (-1,1)$, és divergens, ha $|y| > 1$. Ha $y = \pm 1$, akkor a sor általános tagjainak abszolút értéke $(1+\frac{1}{n})^n$ az e számhoz konvergál és nem nullához, ezért $y = \pm 1$ esetén a hatványsor divergens.

Tehát a függvénysor (abszolút) konvergens, ha

$$-1 < \frac{1-x}{1-2x} < 1 \iff -1 < 1 + \frac{x}{1-2x} < 1 \iff -2 < \frac{x}{1-2x} < 0.$$

Ha $1-2x < 0$, vagyis $x > \frac{1}{2}$, akkor a fenti egyenlőtlenségek egyenértékűek a $-2(1-2x) > x > 0$ egyenlőtlenségekkel, azaz $x > \frac{2}{3}$.

Ha $1-2x > 0$, vagyis $x < \frac{1}{2}$, akkor a fenti egyenlőtlenségek egyenértékűek a $-2(1-2x) < x < 0$ egyenlőtlenségekkel, azaz $x < 0$.

Összegezve a függvénysor (abszolút) konvergencia halmaza $A = D = (-\infty, 0) \cup (\frac{2}{3}, +\infty)$.

□

(h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^n x}{n^\alpha}$, $\quad \alpha \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$.

Megoldás. Ha $|\sin x| < 1$, akkor minden $n \geq 1$ esetén $\left|\frac{\sin^n x}{n^\alpha}\right| \leq |\sin x|^n$, és a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\sin x|^n$ mértani sor konvergens, ezért a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\sin^n x}{n^\alpha}\right|$ sor is konvergens, minden $\alpha \geq 0$ esetén.

Ha $\sin x = 1$, azaz $x \in \{(4k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$, akkor a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ sor konvergens $\alpha > 1$ esetén és divergens $0 \leq \alpha \leq 1$ esetén.

Ha $\sin x = -1$, azaz $x \in \{(4k+3)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$, akkor a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ sor váltakozó előjelű, a $(\frac{1}{n^\alpha})_{n\geq 1}$ sorozat csökkenő és tart nullához, ha $\alpha > 0$. Ekkor a Leibniz-kritérium és az általánosított harmonikus sor konvergenciája alapján a sor feltételesen konvergens, ha $\alpha > 0$ és abszolút konvergens, ha $\alpha > 1$. Ha $\sin x = -1$ és $\alpha = 0$, akkor a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1^n}{n^0} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 1$ sor divergens.

Összegezve, az A abszolút konvergencia és D konvergencia halmaz

$$A = \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}, & \text{ha } 0 \leq \alpha \leq 1, \\ \mathbb{R}, & \text{ha } \alpha > 1, \end{cases}$$

$$D = \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}, & \text{ha } \alpha = 0 \\ \mathbb{R} \setminus \{(4k+1)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}, & \text{ha } 0 < \alpha \leq 1 \\ \mathbb{R}, & \text{ha } \alpha > 1 \end{cases}$$

□

4.4. Feladat. Vizsgáld a következő függvénysorok konvergenciáját a Weierstrass-kritérium (4.2. Tétel) segítségével:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^2}{1+n^3x^4}, \quad x\in\mathbb{R};$

Megoldás. Teljesülnek a Weierstrass-kritérium feltételei

- Ha $x\neq 0$, akkor

$$|f_n(x)|=\left|(-1)^n\frac{x^2}{1+n^3x^4}\right|=\frac{x^2}{1+n^3x^4}\overset{(*)}{\leq}\frac{x^2}{2n\sqrt{n}x^2}=\frac{1}{2n\sqrt{n}}, \quad \forall n\geq 1, \quad \forall x\neq 0,$$

ahol a $(*)$ egyenlőtlenségben felhasználtuk a számtani-mértani egyenlőtlenséget:

$$\frac{1+n^3x^4}{2}\geq\sqrt{1\cdot n^3x^4}=n\sqrt{n}x^2, \quad \forall n\geq 1, \quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

Ha $x=0$, akkor is teljesül az $|f_n(0)|=0\leq\frac{1}{2n\sqrt{n}}$ egyenlőtlenség, minden $n\geq 1$ esetén.

- A $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ sor konvergens (általánosított harmonikus sor, $\alpha=\frac{3}{2}>1$).

Tehát a Weierstrass-kritérium alapján a függvénysor egyenletesen konvergál $\mathbb{R}$-en. □

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^2+2^n}, \quad x\in\mathbb{R};$

Megoldás. Teljesülnek a Weierstrass-kritérium feltételei

- $|f_n(x)|=\left|\frac{1}{x^2+2^n}\right|=\frac{1}{x^2+2^n}\leq\frac{1}{2^n}, \quad \forall n\geq 1, \quad \forall x\neq 0,$
- a $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ sor konvergens (mértani sor, $q=\frac{1}{2}<1$).

Tehát a Weierstrass-kritérium alapján a függvénysor egyenletesen konvergál $\mathbb{R}$-en. □

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}\frac{2x}{x^2+n^4}$, $x\in\mathbb{R}$;

Megoldás. Teljesülnek a Weierstrass-kritérium feltételei

- Ha $x\neq 0$, akkor

$$|f_n(x)|=\left|\operatorname{arctg}\left(\frac{2x}{x^2+n^4}\right)\right|\overset{(*)}{=}\operatorname{arctg}\left|\frac{2x}{x^2+n^4}\right|=\operatorname{arctg}\left(\frac{2|x|}{x^2+n^4}\right)$$
$$\overset{(\dagger)}{\leq}\frac{2|x|}{x^2+n^4}\overset{(\ddagger)}{\leq}\frac{2|x|}{2n^2|x|}=\frac{1}{n^2},$$

minden $n\geq 1$ és minden $x\neq 0$ esetén, ahol

– a $(*)$ egyenlőtlenségben felhasználtuk, hogy az arctg függvény páratlan, vagyis $\operatorname{arctg}(-x)=-\operatorname{arctg}(x)$, mivel az inverze a tg függvény is páratlan,

– a $(\dagger)$ egyenlőtlenségben felhasználtuk, hogy $\operatorname{arctg} y\leq y$, ha $y\geq 0$, mivel az inverzére teljesül, hogy $\operatorname{tg} y\geq y$, ha $y\geq 0$,

– a $(\ddagger)$ egyenlőtlenségben felhasználtuk a számtani-mértani egyenlőtlensége

$$\frac{x^2+n^4}{2}\geq\sqrt{x^2\cdot n^4}=|x|n^2, \quad \forall n\geq 1, \quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

Ha $x = 0$, akkor is teljesül az $|f_n(0)| = \operatorname{arctg} 0 = 0 \le \frac{1}{n^2}$ egyenlőtlenség, minden $n \ge 1$ esetén.

- A $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sor konvergens (általánosított harmonikus sor, $\alpha = 2 > 1$).

Tehát a Weierstrass-kritérium alapján a függvénysor egyenletesen konvergál $\mathbb{R}$-en. $\square$

(d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{3^x n^2}\right)$, $x > 0$.

Megoldás. Teljesülnek a Weierstrass-kritérium feltételei:

- $|f_n(x)| = \left|\sin\left(\dfrac{1}{3^x n^2}\right)\right| = \sin\left|\dfrac{1}{3^x n^2}\right| \overset{(*)}{\le} \left|\dfrac{1}{3^x n^2}\right| = \dfrac{1}{3^x n^2} \overset{(\dagger)}{<} \dfrac{1}{n^2}, \quad \forall\, x > 0, \quad \forall\, n \ge 1,$ ahol a $(*)$ egyenlőtlenségben felhasználtuk, hogy a sin függvény páratlan, $\sin|x| \le |x|$ és a $(\dagger)$ egyenlőtlenségben, hogy $1 < 3^x$, minden $x > 0$ esetén.
- A $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sor konvergens (általánosított harmonikus sor, $\alpha = 2 > 1$).

Tehát a Weierstrass-kritérium alapján a függvénysor egyenletesen konvergál $\mathbb{R}$-en. $\square$

4.3.2. Hatványsorok

4.5. Feladat. Határozd meg a következő hatványsorok konvergencia sugarát, konvergencia halmazát (vizsgáld a sor viselkedését az intervallum végpontjaiban):

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$;

Megoldás. A hatványsorunk $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cdot (x-0)^n$ alakú, tehát $x_0 = 0$ és $a_n = \frac{1}{n^2}$, minden $n \ge 1$ esetén. Kiszámoljuk, hogy

$$\ell = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{n^2}\right|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1,$$

ahonnan kapjuk, hogy a hatványsor konvergencia sugara $r = \frac{1}{\ell} = \frac{1}{1} = 1$. A konvergencia halmaz meghatározásához meg kell vizsgálni, hogy az $(x_0 - r, x_0 + r) = (-1, 1)$ intervallum végpontjaiban konvergens-e a hatványsor:

- $x = 1$ esetén a sorunk $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergens (általánosított harmonikus sor, $\alpha = 2 > 1$),
- $x = -1$ esetén a sorunk $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ abszolút konvergens (így konvergens is), mert a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sor konvergens.

Tehát a hatványsor konvergencia halmaza $D = [-1, 1]$. $\square$

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n + 3^n}$;

Megoldás. A hatványsorunk esetén $x_0 = 0$ és a hatványsor együtthatói $a_n = \frac{1}{2^n+3^n}$, minden $n \geq 1$ esetén. Kiszámítjuk, hogy

$$\ell = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\frac{1}{2^{n+1}+3^{n+1}}}{\frac{1}{2^n+3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n+3^n}{2^{n+1}+3^{n+1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{3^{n+1}} \cdot \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1}{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + 1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n + 1}{\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} + 1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{0+1}{0+1} = \frac{1}{3},$$

ahonnan a hatványsor konvergencia sugara $r = \frac{1}{\ell} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$.

A konvergencia halmaz meghatározásához meg kell vizsgálni a hatványsor konvergenciáját a $(-3, 3)$ intervallum végpontjaiban:

- $x = 3$ esetén a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{2^n+3^n}$ sort kapjuk, amely divergens, mert az általános tagok sorozata nem tart nullához: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^n}{2^n+3^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^n}{3^n} \cdot \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^n+1} = 1$.
- $x = -3$ esetén pedig a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n}{2^n+3^n}$ sort kapjuk, amely szintén divergens, mert az általános tagok abszolút értékeinek sorozata nem tart nullához (lásd az előbbi esetet), így az általános tagok sorozata sem tart nullához.

Tehát a hatványsor konvergencia halmaza $D = (-3, 3)$. □

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n2^n}$;

Megoldás. A hatványsorunk $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n2^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} \cdot (x-0)^n$ alakú, tehát $x_0 = 0$ és $a_n = \frac{1}{n2^n}$, minden $n \leq 1$ esetén. Kiszámoljuk, hogy

$$\ell = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{n2^n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{2},$$

ahonnan kapjuk, hogy a konvergencia sugár $r = \frac{1}{\ell} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$. A konvergencia halmaz meghatározásához vizsgáljuk a hatványsor konvergenciáját a $(-2, 2)$ intervallum végpontjaiban:

- $x = 2$ esetén a sorunk $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n2^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, amely divergens (harmonikus sor),
- $x = -2$ esetén a sorunk $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n2^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, amely váltakozó előjelű sor és a Leibniz-kritérium alapján konvergens, mert az $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ sorozat monoton csökkenő és tart a nullába.

Tehát a hatványsor konvergencia halmaza $D = [-2, 2)$. □

(d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right)(x-1)^n$;

Megoldás. A hatványsorunk esetén $x_0 = 1$ és a hatványsor együtthatói $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$, minden $n \geq 1$ esetén. Kiszámoljuk, hogy

$$\begin{aligned}\ell &= \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left|1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n+1}}{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}} \overset{C.S.}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+2}}{\frac{1}{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+2} = 1,\end{aligned}$$

ahonnan a hatványsor konvergencia sugara $r = \frac{1}{\ell} = \frac{1}{1} = 1$.

A konvergencia halmaz meghatározásához meg kell vizsgálni a hatványsor konvergenciáját a $(0, 2)$ intervallum végpontjaiban:

- $x = 2$ esetén a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)$ sort kapjuk, amely divergens, mert az általános tagok sorozata nem tart a nullához (tartanak végtelenbe).
- $x = 0$ esetén a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)$ sort kapjuk, amely szintén divergens, mert az általános tagok abszolút értékének sorozata nem tart a nullához (lásd az előző esetet), így az általános tagok sorozata sem tart nullába.

Tehát a hatványsor konvergencia halmaza $D = (0, 2)$. □

(e) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 3^{n^2} (x+1)^n$;

Megoldás. A hatványsorunk esetén $x_0 = -1$ és a hatványsor együtthatói $a_n = 3^{n^2}$, minden $n \geq 0$ esetén. Kiszámítjuk, hogy

$$\ell = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left|3^{n^2}\right|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} 3^n = +\infty,$$

ahonnan a hatványsor konvergencia sugara $r = 0$. Tehát a hatványsor konvergencia halmaza $D = \{-1\}$. □

(f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2+n} (x+2)^n$;

Megoldás. A hatványsorunk esetén $x_0 = -2$ és a hatványsor együtthatói $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2+n}$, minden $n \geq 1$ esetén. Kiszámítjuk, hogy

$$\ell = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left|\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2+n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2+n}} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = e,$$

ahonnan a hatványsor konvergencia sugara $r = \frac{1}{\ell} = \frac{1}{e}$.

A konvergencia halmaz meghatározásához meg kell vizsgálni a hatványsor konvergenciáját a $\left(-2 - \frac{1}{e}, -2 + \frac{1}{e}\right)$ intervallum végpontjaiban:

- $x = -2 + \frac{1}{e}$ esetén a sorunk $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2+n} \frac{1}{e^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{e}\right)^n$. A $\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}\right)$ sorozat monoton csökkenő és a határértéke e, ezért $\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{e} \geq 1$, minden $n \geq 1$ esetén. Tehát a sor divergens, mert általános tagja nem tart nullához.

- $x = -2 - \frac{1}{e}$ esetén a sorunk $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2+n} \frac{1}{(-e)^n}$. Ez a sor szintén divergens, mert az általános tagok abszolút értékének sorozat nem tart nullához (lásd az előbbi esetet), így az általános tagok sorozata sem tart nullához.

Tehát a hatványsor konvergencia halmaza $D = \left(-2 - \frac{1}{e}, -2 + \frac{1}{e}\right)$. □

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{n^{n+\frac{1}{n}}} x^n$;

Megoldás. A hatványsorunk esetén $x_0 = 0$ és a hatványsor együtthatói $a_n = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{n^{n+\frac{1}{n}}}$, minden $n \geq 1$ esetén. Kiszámoljuk, hogy

$$\begin{aligned}\ell = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} &= \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left|\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{n^{n+\frac{1}{n}}}\right|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{n^{n+\frac{1}{n}}}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{n^{1+\frac{1}{n^2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1+\frac{1}{n}}{n^{\frac{1}{n^2}}} = 0 \cdot \frac{1+0}{1} = 0,\end{aligned}$$

ahonnan a hatványsor konvergencia sugara $r = +\infty$ és a hatványsor konvergencia halmaza $D = \mathbb{R}$. □

(h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^n (x+3)^n$;

Megoldás. A hatványsorunk esetén $x_0 = -3$ és a hatványsor együtthatói $a_n = n^n$, minden $n \geq 1$ esetén. Kiszámoljuk, hogy

$$\ell = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|n^n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^n} = \lim_{n\to\infty} n = +\infty,$$

ahonnan a hatványsor konvergencia sugara $r = 0$ és a hatványsor konvergencia halmaza $D = \{-3\}$. □

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} (x-2)^n$;

Megoldás. A hatványsorunk esetén $x_0 = 2$ és a hatványsor együtthatói $a_n = \frac{n!}{n^n}$, minden $n \geq 1$ esetén. Kiszámítjuk, hogy

$$\begin{aligned}\ell &= \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^n \cdot (n+1)!}{(n+1)^{n+1} \cdot n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \\ &= \frac{1}{e},\end{aligned}$$

ahonnan a hatványsor konvergencia sugara $r = \frac{1}{\ell} = \frac{1}{\frac{1}{e}} = e$.

A konvergencia halmaz meghatározásához meg kell vizsgálni a hatványsor konvergenciáját a $(2-e, 2+e)$ intervallum végpontjaiban:

- $x = 2 + e$ esetén a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} e^n$ sort kapjuk. Mivel $e \geq \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k$, minden $k \geq 1$ esetén, ezért minden $n \geq 1$ esetén

$$\begin{aligned}
e^{n-1} &\geq \left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 \cdot \ldots \cdot \left(1 + \frac{1}{n-2}\right)^{n-2} \cdot \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \\
&= \frac{2^1}{1^1} \cdot \frac{3^2}{2^2} \cdot \ldots \cdot \frac{(n-1)^{n-2}}{(n-2)^{n-2}} \cdot \frac{n^{n-1}}{(n-1)^{n-1}} \\
&= \frac{n^{n-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-2) \cdot (n-1)} \\
&= \frac{n^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{n^n}{n!},
\end{aligned}$$

  ahonnan $\frac{n!}{n^n} e^n \geq e$, minden $n \geq 1$ esetén. Tehát a sor divergens, mert az általános tagok sorozata nem tart nullához.

- $x = 2 - e$ esetén pedig a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} (-e)^n$ sort kapjuk. Ez a sor is divergens, mert az általános tagok abszolút értékeinek sorozata nem tart nullához (lásd az előző esetet), így az általános tagok sorozata sem tart nullához.

Tehát a hatványsor konvergencia halmaza $D = (2 - e, 2 + e)$. □

(j) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} (x - 1)^n$.

Megoldás. A hatványsorunk esetén $x_0 = 1$ és a hatványsor együtthatói $a_n = (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$, minden $n \geq 1$ esetén. Kiszámítjuk, hogy

$$\ell = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\left|(-1)^n \frac{1}{n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{1} = 1,$$

ahonnan a hatványsor konvergencia sugara $r = \frac{1}{\ell} = \frac{1}{1} = 1$.

A konvergencia halmaz meghatározásához meg kell vizsgálni a hatványsor konvergenciáját a $(0, 2)$ intervallum végpontjaiban:

- $x = 0$ esetén a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(-1)^n}{n} = -\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ sort kapjuk, amely divergens (a harmonikus sor ellentetje).
- $x = 2$ esetén pedig a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ sort kapjuk, amely váltakozó előjelű és a Leibniz-kritérium alapján konvergens, mert az $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ sorozat monoton csökkenő és tart nullához.

Tehát a hatványsor konvergencia halmaza $D = (0, 2]$. □

4.6. Feladat. Határozd meg a következő hatványsorok konvergencia sugarát, konvergencia halmazát (vizsgáld a sor viselkedését az intervallum végpontjaiban):

(a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 3^n x^{2n}$;

Megoldás. A hatványsorunk

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^{2n} = 1 + 3 \cdot x^2 + 3^2 \cdot x^4 + 3^3 \cdot x^6 + \dots$$
$$= 1 + 0 \cdot x^1 + 3 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 + 3^2 \cdot x^4 + 0 \cdot x^5 + 3^3 \cdot x^6 + \dots,$$

ahonnan $x_0 = 0$ és a hatványsorunk együtthatói

$$a_m = \begin{cases} 0, & \text{ha } m = 2n+1 \text{ (páratlan)} \\ 3^n, & \text{ha } m = 2n \text{ (páros)} \end{cases}.$$

Kiszámoljuk, hogy

$$\begin{aligned} \ell &= \overline{\lim_{m\to\infty}} \sqrt[m]{|a_m|} = \max\left\{\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{|a_{2n}|},\ \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n+1]{|a_{2n+1}|}\right\} \\ &= \max\left\{\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{3^n},\ \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n+1]{0}\right\} \\ &= \max\left\{\lim_{n\to\infty} 3^{\frac{n}{2n}},\ 0\right\} \\ &= \max\left\{\lim_{n\to\infty} \sqrt{3},\ 0\right\} \\ &= \max\{\sqrt{3},\ 0\} = \sqrt{3}, \end{aligned}$$

ahonnan a hatványsor konvergenciasugara $r = \frac{1}{\ell} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.
A konvergencia halmaz meghatározásához meg kell vizsgálni a hatványsor konvergenciáját a $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ intervallum végpontjaiban:

- $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ esetén a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 3^n \frac{1}{(\sqrt{3})^{2n}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 1$ sort kapjuk, amely divergens.
- $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ esetén a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 3^n \frac{1}{(-\sqrt{3})^{2n}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 1$ sort kapjuk, amely szintén divergens.

Tehát a hatványsorunk konvergencia halmaza $D = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. □

(b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 3^{n+1} x^{2n+1}$;

Megoldás. A hatványsorunk

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3^{n+1} x^{2n+1} = 3 \cdot x^1 + 3^2 \cdot x^3 + 3^3 \cdot x^5 + \dots$$
$$= 0 + 3 \cdot x^1 + 0 \cdot x^2 + 3^2 \cdot x^3 + 0 \cdot x^4 + 3^3 \cdot x^5 + 0 \cdot x^4 + \dots,$$

ahonnan $x_0 = 0$ és a hatványsorunk együtthatói

$$a_m = \begin{cases} 0, & \text{ha } m = 2n \text{ (páros)} \\ 3^{n+1}, & \text{ha } m = 2n+1 \text{ (páratlan)} \end{cases}.$$

Kiszámoljuk, hogy

$$\begin{aligned} \ell &= \overline{\lim_{m\to\infty}} \sqrt[m]{|a_m|} = \max\left\{\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{|a_{2n}|},\ \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n+1]{|a_{2n+1}|}\right\} \\ &= \max\left\{\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{0},\ \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n+1]{3^{n+1}}\right\} \end{aligned}$$

$$= \max\left\{0, \lim_{n\to\infty} 3^{\frac{n+1}{2n+1}}\right\}$$
$$= \max\left\{0, 3^{\frac{1}{2}}\right\} = \sqrt{3},$$

ahonnan a hatványsor konvergenciasugara $r = \frac{1}{\ell} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

A konvergencia halmaz meghatározásához meg kell vizsgálni a hatványsor konvergenciáját a $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ intervallum végpontjaiban:

- $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ esetén a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 3^{n+1} \frac{1}{(\sqrt{3})^{2n+1}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{3}$ sort kapjuk, amely divergens.
- $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ esetén a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 3^{n+1} \frac{1}{(-\sqrt{3})^{2n+1}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} -\sqrt{3}$ sort kapjuk, amely szintén divergens.

Tehát a hatványsorunk konvergencia halmaza $D = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. □

(c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 3^{n^2} x^{n^2}$;

Megoldás. A hatványsorunk

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3^{n^2} x^{n^2} = 1 + 3^1 \cdot x^1 + 3^4 \cdot x^4 + 3^9 \cdot x^9 + \dots$$
$$= 1 + 3^1 \cdot x^1 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 + 3^4 \cdot x^4 + 0 \cdot x^5 + 0 \cdot x^6 + 0 \cdot x^7 + 0 \cdot x^8 + 3^9 \cdot x^9 + \dots,$$

ahonnan $x_0 = 0$ és a hatványsorunk együtthatói

$$a_m = \begin{cases} 3^{n^2}, & \text{ha } m = n^2 \text{ alakú (teljes négyzet)}, \\ 0, & \text{ha } m \neq n^2 \text{ alakú (nem teljes négyzet)}, \end{cases} = \begin{cases} 3^m, & \text{ha } m \text{ teljes négyzet}, \\ 0, & \text{ha } m \text{ nem teljes négyzet}. \end{cases}$$

Kiszámítjuk, hogy

$$\ell = \overline{\lim_{m\to\infty}} \sqrt[m]{|a_m|} = \max\left\{ \lim_{\substack{m\to\infty \\ m \text{ teljes négyzet}}} \sqrt[m]{3^m}, \lim_{\substack{m\to\infty \\ m \text{ nem teljes négyzet}}} \sqrt[m]{0} \right\}$$
$$= \max\left\{ \lim_{\substack{m\to\infty \\ m \text{ teljes négyzet}}} 3, \lim_{\substack{m\to\infty \\ m \text{ nem teljes négyzet}}} 0 \right\} = \max\{3, 0\} = 3,$$

ahonnan a hatványsor konvergenciasugara $r = \frac{1}{\ell} = \frac{1}{3}$.

A konvergencia halmaz meghatározásához vizsgálni kell a hatványsor konvergenciáját az $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ intervallum végpontjaiban:

- $x = \frac{1}{3}$ esetén a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 3^{n^2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n^2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} 1$ sort kapjuk, amely divergens.
- $x = -\frac{1}{3}$ esetén a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 3^{n^2} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{n^2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ sort kapjuk ($(-1)^{n^2} = (-1)^n$, minden $n \geq 0$ esetén), amely divergens.

Tehát a hatványsor konvergencia halmaza $D = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$. □

(d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^n}}{n^n}$;

Megoldás. A hatványsorunk

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^n}}{n^n} = 0 + 1 \cdot x^1 + \frac{1}{2^2} \cdot x^4 + \frac{1}{3^3} \cdot x^{27} + \ldots$$
$$= 0 + 1 \cdot x^1 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 + \frac{1}{4} \cdot x^4 + 0 \cdot x^5 + \ldots + 0 \cdot x^{26} + \frac{1}{27} \cdot x^{27} + 0 \cdot x^{28} + \ldots,$$

ahonnan $x_0 = 0$ és a hatványsorunk együtthatói

$$a_m = \begin{cases} n^n, & \text{ha } m = n^n \text{ alakú} \\ 0, & \text{ha } m \neq n^n \text{ alakú} \end{cases} = \begin{cases} m, & \text{ha } m = n^n \text{ alakú} \\ 0, & \text{ha } m \neq n^n \text{ alakú} \end{cases}.$$

Kiszámoljuk, hogy

$$\ell = \overline{\lim_{m\to\infty}} \sqrt[m]{|a_m|} = \max \left\{ \lim_{\substack{m\to\infty \\ m = n^2 \text{ alakú}}} \sqrt[m]{|a_m|}, \lim_{\substack{m\to\infty \\ m \neq n^2 \text{ alakú}}} \sqrt[m]{|a_m|} \right\}$$
$$= \max \left\{ \lim_{\substack{m\to\infty \\ m = n^2 \text{ alakú}}} \sqrt[m]{m}, \lim_{\substack{m\to\infty \\ m \neq n^2 \text{ alakú}}} \sqrt[m]{0} \right\} = \max\{1,\, 0\} = 1,$$

ahonnan a hatványsor konvergenciasugara $r = \frac{1}{\ell} = \frac{1}{1} = 1$.

A konvergencia halmaz meghatározásához meg kell vizsgálni a hatványsor konvergenciáját a $(-1, 1)$ intervallum végpontjaiban:

- $x = 1$ esetén a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ sort kapjuk. A gyökkritérium alapján a sor konvergens, mert $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 < 1$.
- $x = -1$ esetén a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n^n}}{n^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^n}$ sort kapjuk. Ez a sor abszolút konvergens, mivel az abszolút értékek sora konvergens (lásd az előző esetet).

Tehát a hatványsorunk konvergencia halmaza $D = [-1, 1]$. □

(e) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n}$;

Megoldás. A hatványsorunk

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 - \frac{1}{7!}x^6 + \ldots$$
$$= 1 + 0 \cdot x - \frac{1}{3!} \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 + \frac{1}{5!} \cdot x^4 + 0 \cdot x^5 - \frac{1}{7!} \cdot x^6 + \ldots,$$

ezért $x_0 = 0$ és a hatványsor együtthatói

$$a_m = \begin{cases} 0, & \text{ha } m = 2n + 1 \text{ (páratlan)} \\ \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}, & \text{ha } m = 2n \text{ (páros)} \end{cases}$$

minden $m \geq 0$ esetén. Kiszámoljuk, hogy

$$\ell = \overline{\lim_{m\to\infty}} \sqrt[m]{|a_m|} = \max \left\{ \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{|a_{2n}|}, \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n+1]{|a_{2n+1}|} \right\}$$

$$= \max\left\{\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{\left|\frac{(-1^n)}{(2n+1)!}\right|}, \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n+1]{|0|}\right\}$$
$$= \max\left\{\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{\frac{1}{(2n+1)!}}, 0\right\}$$
$$= \max\{0,0\} = 0,$$

mert

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{\frac{1}{(2n+1)!}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\sqrt[n]{\frac{1}{(2n+1)!}}} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)!}{(2n+3)!}} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2n+2)(2n+3)}} = 0.$$

Tehát a hatványsor konvergencia sugara $r = +\infty$ és a konvergencia halmaza $D = \mathbb{R}$. □

4.3.3. Hatványsorok összegzése

4.7. Feladat. Határozd meg a következő hatványsorok konvergencia halmazát és számítsd ki az összegfüggvényt:

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$;

Megoldás. A hatványsor konvergencia sugara $r = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1}} = 1$ és konvergencia halmaza $D = (-1, 1)$ (nem konvergál a -1 és 1 végpontokban). Az összefüggvény kiszámítható a következőképpen: minden $x \in (-1, 1)$ esetén

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \ldots = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} x^n = \lim_{N\to\infty} \frac{1 - x^{N+1}}{1 - x} = \frac{1 - \lim\limits_{N\to\infty} x^{N+1}}{1 - x} = \frac{1}{1 - x}.$$

Tehát a hatványsor összefüggvénye az $S : (-1, 1) \to \mathbb{R}$, $S(x) = \frac{1}{1-x}$ függvény. □

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$;

Megoldás. A hatványsor konvergencia sugara $r = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ és a konvergencia halmaza $D = [-1, 1)$ (az -1 végpont esetén a Leibniz-sort kapjuk, ami konvergens, míg az 1 végpontban a harmonikus sort, ami divergens). Előbb kiszámoljuk az S összegfüggvény deriváltját a $(-1, 1)$ intervallumon a hatványsor tagonkénti deriváltjára vonatkozó tétel alapján (4.9. Tétel):

$$S'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \sum_{m=0}^{\infty} x^m = \frac{1}{1-x}, \quad \forall\, x \in (-1, 1),$$

az előző alpont alapján. Direkt módon ki tudjuk számolni az összegfüggvény értékét az $x = 0$ pontban:

$$S(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \frac{0^1}{1} + \frac{0^2}{2} + \frac{0^3}{3} + \ldots = 0.$$

Végül a Newton-Leibniz–tételt használva kiszámolhatjuk a hatványsor $S : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ összegfüggvényét:

$$S(x) = S(x) - S(0) = \int_0^x S'(t)\,\mathrm{d}\,t = \int_0^x \frac{\mathrm{d}\,t}{1 - t} = \int_x^0 \frac{\mathrm{d}\,t}{t - 1}$$

$$= [\ln|t-1|]_x^0 = \ln|0-1| - \ln|x-1| = -\ln(1-x), \quad \forall\, x \in (-1,1),$$

ahonnan $S(x) = -\ln(1-x)$, minden $x \in (-1,1)$ esetén. □

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+2}$;

Megoldás. A hatványsor konvergencia sugara $r = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n+2}}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+2} = 1$ és a konvergencia halmaza $D = [-1,1)$ (a -1 végpont esetén a Leibniz-sort kapjuk, ami konvergens, míg az 1 végpontban a harmonikus sort, ami divergens).
Jelölje $S : (-1,1) \to \mathbb{R}$ a hatványsor összegfüggvényét. Ekkor

$$\begin{aligned} x^2 S(x) &= x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n+2} = \sum_{m=2}^{\infty} \frac{x^m}{m} = -x + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^m}{m} \\ &= -x - \ln(1-x), \quad \forall\, x \in (-1,1) \end{aligned}$$

az előző alpont alapján. Innen kapjuk, hogy $S(x) = \frac{-x-\ln(1-x)}{x^2}$, minden $x \in (-1,1)$, $x \neq 0$ esetén.
Az $x = 0$ pontban direkt módon kiszámolható az összegfüggvény:

$$S(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{0^n}{n+2} = \frac{1}{2} + \frac{0}{3} + \frac{0}{4} + \ldots = \frac{1}{2}.$$

Tehát a $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n+2}$ hatványsor összegfüggvénye $S : (-1,1) \to \mathbb{R}$,

$$S(x) = \begin{cases} \frac{-x-\ln(1-x)}{x^2}, & \text{ha } x \in (-1,0) \cup (0,1) \\ \frac{1}{2}, & \text{ha } x = 0 \end{cases}.$$

Megjegyezzük, hogy az összefüggvény folytonos az $x = 0$ pontban is. □

(d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+2)(n+3)}$;

Megoldás. A hatványsor konvergencia sugara

$$r = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{(n+2)(n+3)}}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{(n+2)(n+3)} = 1$$

és a konvergencia halmaza $D = [-1,1]$ (az -1 és 1 végpontokban is konvergens).
Jelölje $S : (-1,1) \to \mathbb{R}$ a hatványsor összegfüggvényét. Ekkor

$$T(x) = x^3 S(x) = x^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+2)(n+3)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+3}}{(n+2)(n+3)}, \quad \forall\, x \in (-1,1)$$

Kétszer deriválva a T függvény kapjuk, hogy

$$T''(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+3}}{(n+2)(n+3)} \right)'' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^{n+3}}{(n+2)(n+3)} \right)' \right)'$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+3)x^{n+2}}{(n+2)(n+3)}\right)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n+2}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^{n+2}}{n+2}\right)' \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2)x^{n+1}}{n+2} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} \\
&= x\sum_{n=0}^{\infty} x^n = x \cdot \frac{1}{1-x}, \quad \forall\, x \in (-1,1).
\end{aligned}$$

Mivel $T'(x) = (x^3 S(x))' = 3x^2 S(x) + x^3 S'(x)$, minden $x \in (-1,1)$ esetén, ezért $T'(0) = 3\cdot 0^2 \cdot S(0) + 0^3 \cdot S'(0) = 0$. A Newton-Leibniz–tétel alapján kapjuk, hogy minden $x \in (-1,1)$ esetén

$$\begin{aligned}
T'(x) = T'(x) - T'(0) &= \int_0^x T''(t)\,\mathrm{d}\,t = \int_0^x \frac{t}{1-t}\mathrm{d}\,t = \int_0^x -1 - \frac{1}{t-1}\mathrm{d}\,t \\
&= [-t - \ln|t-1|]_0^x = -x - \ln|x-1| = -x - \ln(1-x).
\end{aligned}$$

Hasonlóan $T(0) = 0^3 S(0) = 0$ és még egyszer alkalmazhatjuk a Newton-Leibniz–tételt:

$$\begin{aligned}
x^3 S(x) = T(x) = T(x) - T(0) &= \int_0^x (-t - \ln(1-t))\mathrm{d}\,t \\
&= \left[-\frac{t^2}{2} - (1-t) + (1-t)\ln(1-t)\right]_0^x \\
&= -\frac{x^2}{2} + x + (1-x)\ln(1-x), \quad \forall\, x \in (-1,1).
\end{aligned}$$

Innen kapjuk, hogy minden $x \in (-1,1)$, $x \neq 0$ esetén

$$S(x) = \frac{-\frac{x^2}{2} + x - (1-x)\ln(1-x)}{x^3} = -\frac{1}{2x} + \frac{1}{x^2} + \frac{(1-x)\ln(1-x)}{x^3},$$

illetve direkt számolással adódik, hogy $S(0) = \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{0^1}{3\cdot 4} + \frac{0^2}{4\cdot 5} + \cdots = \frac{1}{6}$.
Tehát a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+2)(n+3)}$ hatványsor összegfüggvénye $S : (-1,1) \to \mathbb{R}$,

$$S(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2x} + \frac{1}{x^2} + \frac{(1-x)\ln(1-x)}{x^3}, & \text{ha } x \in (-1,1) \setminus \{0\} \\ \frac{1}{6}, & \text{ha } x = 0 \end{cases}.$$

Megjegyezzük, hogy az S összefüggvény folytonos az $x = 0$ pontban is. □

(e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$;

Megoldás. A hatványsor konvergencia sugara $r = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2n+1]{2n+1}} = 1$ és a konvergencia halmaza $D = [-1,1]$ (az -1 és 1 végpontokban konvergens a hatványsor).
Jelölje $S : (-1,1) \to \mathbb{R}$ a hatványsor összegfüggvényét. A hatványsor tagonkénti deriválására vonatkozó tételt használva minden $x \in (-1,1)$ esetén

$$\begin{aligned}
S'(x) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} \left((-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n+1)x^{2n}}{2n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \frac{1}{1-(-x^2)} = \frac{1}{1+x^2}.
\end{aligned}$$

Mivel $S(0) = \frac{0^1}{1} - \frac{0^3}{3} + \ldots = 0$, ezért Newton-Leibniz–tételt használva kapjuk, hogy

$$S(x) = S(x) - S(0) = \int_0^x S'(t)\mathrm{d}\,t = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}\,t = \operatorname{arctg} t\Big|_0^x = \operatorname{arctg} x,$$

minden $x \in (-1, 1)$ esetén. □

(f) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$;

Megoldás. A hatványsor konvergencia sugara $r = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2n+1]{2n+1}} = 1$ és a konvergencia halmaza $D = (-1, 1)$ (az -1 és 1 végpontokban divergens a hatványsor).
Jelölje $S : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ a hatványsor összegfüggvényét. A hatványsor tagonkénti deriválására vonatkozó tételt használva minden $x \in (-1, 1)$ esetén

$$\begin{aligned} S'(x) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)x^{2n}}{2n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (x^2)^n = \frac{1}{1-x^2}. \end{aligned}$$

Mivel $S(0) = \frac{0^1}{1} + \frac{0^3}{3} + \ldots = 0$, ezért Newton-Leibniz–tételt használva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} S(x) = S(x) - S(0) &= \int_0^x S'(t)\mathrm{d}\,t = \int_0^x \frac{1}{1-t^2}\mathrm{d}\,t = \frac{1}{2}\int_0^x \frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\mathrm{d}\,t \\ &= \frac{1}{2}\left[-\ln|1-t| + \ln|1+t|\right]_0^x = \frac{1}{2}\left[-\ln(1-t) + \ln(1+t)\right]_0^x \\ &= \left[\ln\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\right]_0^x = \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}, \end{aligned}$$

minden $x \in (-1, 1)$ esetén. □

(g) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$;

Megoldás. A hatványsor konvergencia sugara $r = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+1}} = 1$ és a konvergencia halmaza $D = (-1, 1)$ (az -1 és 1 végpontok divergens a hatványsor).
Jelölje $S : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ a hatványsor összegfüggvényét. A hatványsor tagonkénti integrálására vonatkozó tételt használva minden $y \in (-1, 1)$ esetén

$$\int_0^y S(x)\mathrm{d}\,x = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^y (n+1)x^n \mathrm{d}\,x = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1}\Big|_0^y = \sum_{n=0}^{\infty} y^{n+1} = y\sum_{n=0}^{\infty} y^n = y \cdot \frac{1}{1-y}$$

az (a) alpont alapján. Innen deriválással megkaphatjuk az összegfüggvényt

$$S(y) = \left(\int_0^y S(x)\mathrm{d}\,x\right)' = \left(\frac{y}{1-y}\right)' = \left(-1 + \frac{1}{1-y}\right)' = \frac{1}{(1-y)^2}, \quad \forall\, y \in (-1, 1).$$

□

(h) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+2)x^n$;

Megoldás. A hatványsor konvergencia sugara $r = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+2}} = 1$ és a konvergencia halmaza $D = (-1,1)$ (az -1 és 1 végpontok divergens a hatványsor).
Jelölje $S : (-1,1) \to \mathbb{R}$ a hatványsor összegfüggvényét. A hatványsor tagonkénti integrálására vonatkozó tételt használva minden $y \in (-1,1)$ esetén

$$\begin{aligned}\int_0^x tS(t)\mathrm{d}\,t &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (n+2)t^{n+1}\mathrm{d}\,t = \sum_{n=0}^{\infty} t^{n+2}\Big|_0^x \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+2} = x^2 \sum_{n=0}^{\infty} x^n = x^2 \cdot \frac{1}{1-x}\end{aligned}$$

az (a) alpont alapján. Innen deriválással kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}xS(x) &= \left(\int_0^x tS(t)\mathrm{d}\,t\right)' = \left(\frac{x^2}{1-x}\right)' = \left(\frac{x^2-1+1}{1-x}\right)' = \left(-x-1+\frac{1}{1-x}\right)' \\ &= -1 + \frac{1}{(1-x)^2}, \quad \forall\, x \in (-1,1).\end{aligned}$$

Direkt számolással kapjuk, hogy $S(0) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+2)0^n = 2 + 3\cdot 0 + 4 \cdot 0^2 + \cdots = 2$. Végül a hatványsor összegfüggvénye $S : (-1,1) \to \mathbb{R}$,

$$S(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} + \frac{1}{x(1-x)^2}, & \text{ha } x \in (-1,1) \setminus \{0\}, \\ 2, & \text{ha } x = 0. \end{cases}$$

□

(i) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)x^n$;

Megoldás. A hatványsor konvergencia sugara $r = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{(n+1)(n+2)}} = 1$ és a konvergencia halmaza $D = (-1,1)$ (az -1 és 1 végpontok divergens a hatványsor).
Jelölje $S : (-1,1) \to \mathbb{R}$ a hatványsor összegfüggvényét. A hatványsor tagonkénti integrálására vonatkozó tételt használva minden $x \in (-1,1)$ esetén

$$\begin{aligned}T(x) &= \int_0^x S(t)\mathrm{d}\,t = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (n+2)(n+1)t^n \mathrm{d}\,t = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)t^{n+1}\Big|_0^x \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)x^{n+1}.\end{aligned}$$

Újból alkalmazva a hatványsor tagonkénti integrálására vonatkozó tételt kapjuk, hogy minden $x \in (-1,1)$ esetén

$$\begin{aligned}\int_0^x T(t)\mathrm{d}\,t &= \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)t^{n+1}\mathrm{d}\,t = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (n+2)t^{n+1}\mathrm{d}\,t = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+2} = x^2 \sum_{n=0}^{\infty} x^n \\ &= \frac{x^2}{1-x}.\end{aligned}$$

Deriválással kapjuk, hogy

$$T(x) = \left(\int_0^x T(t)\mathrm{d}\,t\right)' = \left(\frac{x^2}{1-x}\right)' = \left(\frac{x^2-1+1}{1-x}\right)' = \left(-x-1+\frac{1}{1-x}\right)'$$

$$= -1 + \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Újra deriválva adódik, hogy

$$S(x) = \left(\int_0^x S(t)\mathrm{d}\,t\right)' = T'(x) = \left(-1 + \frac{1}{(1-x)^2}\right)' = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

□

(j) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$;

Megoldás. A hatványsor konvergencia sugara $r = 1$ és a konvergencia halmaza $D = (-1, 1)$ (az $x = -1$ és $x = 1$ végpontokban a hatványsor divergens). Előbb a hatványsor tagonkénti integrálására vonatkozó tételt használjuk, majd deriválással visszakapjuk a hatványsorunk $S : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ összegfüggvényét.

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = x \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}}_{S_1(x)} = xS_1(x), \quad \forall\, x \in (-1, 1).$$

A $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}$ hatványsor konvergencia sugara szintén $r = 1$, így létezik $S_1 : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ összegfüggvénye, amit a hatványsor tagonkénti integrálására vonatkozó tétel segítségével fogunk kiszámolni.

$$\begin{aligned} S_2(x) &= \int_0^x S_1(t)\mathrm{d}\,t = \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} n^2 t^{n-1}\mathrm{d}\,t = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x n^2 t^{n-1}\mathrm{d}\,t \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n x^n, \quad \forall\, x \in (-1, 1). \end{aligned}$$

A $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$ hatványsor konvergencia sugara szintén $r = 1$, így létezik $S_2 : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ összegfüggvénye, továbbá

$$S_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n x^n = x \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}}_{S_3(x)} = xS_3(x), \quad \forall\, x \in (-1, 1).$$

A $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$ hatványsor konvergencia sugara szintén $r = 1$, így létezik $S_3 : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ összegfüggvénye. A hatványsor tagonkénti integrálására vonatkozó tétel alapján

$$\begin{aligned} \int_0^x S_3(t)\mathrm{d}\,t &= \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}\mathrm{d}\,t = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x n x^{n-1}\mathrm{d}\,t \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} x^n = x \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = x \sum_{m=0}^{\infty} x^m \\ &= \frac{x}{1-x}, \quad \forall\, x \in (-1, 1). \end{aligned}$$

Innen deriválással kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} S_3(x) &= \left(\int_0^x S_3(t)\,\mathrm{d}\,t\right)' = \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \left(\frac{x-1+1}{1-x}\right)' = \left(-1+\frac{1}{1-x}\right)' \\ &= \frac{1}{(1-x)^2}, \quad \forall\, x \in (-1,1), \end{aligned}$$

így adódik, hogy

$$S_2(x) = xS_3(x) = \frac{x}{(1-x)^2}, \quad \forall\, x \in (-1,1).$$

Hasonlóan

$$\begin{aligned} S_1(x) &= \left(\int_0^x S_1(t)\,\mathrm{d}\,t\right)' = S_2'(x) = \left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)' = \left(-\frac{1}{1-x}+\frac{1}{(1-x)^2}\right)' \\ &= -\frac{1}{(1-x)^2}+\frac{2}{(1-x)^3}, \quad \forall\, x \in (-1,1), \end{aligned}$$

és végül a keresett összegfüggvény

$$\begin{aligned} S(x) = xS_1(x) &= -\frac{x}{(1-x)^2}+\frac{2x}{(1-x)^3} \\ &= \frac{1}{(1-x)}-\frac{3}{(1-x)^2}+\frac{2}{(1-x)^3}, \quad \forall\, x \in (-1,1). \end{aligned}$$

□

(k) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $(0! = 1)$;

Megoldás. A hatványsor konvergencia sugara $r = +\infty$ és konvergencia halmaza $D = \mathbb{R}$, így létezik $S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n$ összefüggvény, továbbá minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$S'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n!}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = S(x).$$

Innen adódik, hogy

$$\begin{aligned} S'(x) = S(x) &\iff S'(x) - S(x) = 0 \iff S'(x)e^{-x} - S(x)e^{-x} = 0 \iff \\ &\iff (S(x)e^{-x})' = 0 \iff S(x)e^{-x} = c \iff S(x) = ce^x, \end{aligned}$$

ahol $c \in \mathbb{R}$. Mivel $S(0) = 1$, ezért $c = 1$, így $S(x) = e^x$. □

(l) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln a)^n}{n!}x^n$, $a > 0$;

Megoldás. A hatványsor konvergencia sugara $r = +\infty$ és a konvergencia halmaza $D = \mathbb{R}$, így létezik $S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln a)^n}{n!}x^n$ összefüggvény, továbbá minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln a)^n}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x \cdot \ln a)^n}{n!} = e^{x \cdot \ln a} = a^x,$$

mivel $\sum\limits_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} = e^x$, minden $x \in \mathbb{R}$ esetén. □

(m) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n-1)!}$;

Megoldás. A hatványsor konvergencia sugara $r = +\infty$, így a konvergencia halmaza $D = \mathbb{R}$. Tehát létezik $S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n-1)!}$ összegfüggvény, továbbá minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n-1)!} = x\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = x\sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} = xe^x,$$

mivel $\sum\limits_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} = e^x$, minden $x \in \mathbb{R}$ esetén. □

(n) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{(n+1)!}$.

Megoldás. A hatványsor konvergencia sugara $r = +\infty$, így a konvergencia halmaza $D = \mathbb{R}$. Tehát létezik $S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{(n+1)!}$ összegfüggvény, továbbá minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned}(-x)S(x) &= (-x)\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^{n+1}}{(n+1)!} = \sum_{m=2}^{\infty} \frac{(-x)^m}{m!} \\ &= -1 + \frac{x}{1!} + 1 + \frac{(-x)^1}{1!} + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{(-x)^m}{m!} = -1 + \frac{x}{1!} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-x)^m}{m!} \\ &= -1 + x + e^{-x}\end{aligned}$$

mivel $\sum\limits_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} = e^x$, így $\sum\limits_{m=0}^{\infty} \frac{(-x)^m}{m!} = e^{-x}$, minden $x \in \mathbb{R}$ esetén.

Direkt számolással kapjuk, hogy $S(0) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{0^n}{(n+1)!} = 0$, így a hatványsor összegfüggvénye $S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$S(x) = \begin{cases} \frac{-1+x+e^{-x}}{x}, & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}.$$

(Megjegyezzük, hogy az összefüggvény folytonos az $x = 0$ pontban.) □

4.8. Feladat. Határozz meg egy olyan hatványsort, amelynek f összegfüggvénye teljesíti az $f''(x) - f(x) = 0$ differenciálegyenletet és határozd meg a konvergencia halmazát!

Megoldás. Tegyük fel, hogy f a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hatványsor összefüggvénye és ezen hatványsor konvergencia sugara $r > 0$. Kiszámítjuk az f másodrendű deriváltját a $(-r, r)$ intervallumon a hatványsor tagonkénti deriválására vonatkozó tétel segítségével:

$$f'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

$$\begin{aligned}f''(x) &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \left(n a_n x^{n-1}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) n a_n x^{n-2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n.\end{aligned}$$

A $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n$ hatványsor konvergencia sugara megegyezik a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hatványsor konvergencia sugarával. Mivel a hatványsorok abszolút konvergensek a $(-r,r)$ intervallumon, ezért

$$\begin{aligned} f''(x)-f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)a_{n+2}x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{[(n+1)(n+2)a_{n+2}-a_n]}_{b_n} x^n, \quad \forall\, x\in(-r,r). \end{aligned}$$

Az $f''(x)-f(x)=0$ egyenlet alapján $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n = 0$, minden $x\in(-r,r)$ esetén, ahonnan $b_n=0$, minden $n\geq 0$ esetén. Valóban, az $x=0$ pontban $0=\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n 0^n = b_0$. Továbbá, a hatványsor összes deriváltja is nulla a $(-r,r)$ intervallumon. Az elsőrendű derivált

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty}(b_n x^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} n b_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n b_n x^{n-1}$$

nulla kell legyen az $x=0$ pontban, ezért $b_1=0$. Ezt folytatva kapjuk, hogy $b_n=0$, minden $n\geq 0$ esetén. Tehát az $f''(x)-f(x)=0$ egyenlet az

$$(n+1)(n+2)a_{n+2}-a_n=0 \iff a_{n+2}=\frac{a_n}{(n+1)(n+2)}, \quad \forall\, n\geq 0$$

rekurzióval egyenértékű. Felírva az első néhány tagot kapjuk, hogy

$$a_2=\frac{a_0}{2\cdot 1},\ a_3=\frac{a_1}{3\cdot 2},\ a_4=\frac{a_2}{4\cdot 3},\ a_5=\frac{a_3}{5\cdot 4},\ a_6=\frac{a_4}{6\cdot 5},\ a_7=\frac{a_5}{7\cdot 6},\ \ldots.$$

A páros indexű együtthatókra kapjuk, hogy $a_{2k}=\frac{a_{2k-2}}{(2k)\cdot(2k-1)}$, minden $k\geq 1$ esetén, illetve a páratlan indexű együtthatókra kapjuk, hogy $a_{2k+1}=\frac{a_{2k-1}}{(2k+1)\cdot(2k)}$, minden $k\geq 1$ esetén. Innen adódik, hogy

$$a_{2k}=\frac{a_0}{(2k)!} \quad \text{és} \quad a_{2k+1}=\frac{a_1}{(2k+1)!}, \quad \forall\, k\geq 1.$$

Összegezve az f összefüggvényű $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hatványsorunk együtthatói

$$a_n=\begin{cases} \frac{a_0}{(2k)!}, & \text{ha } n=2k, \\ \frac{a_1}{(2k+1)!}, & \text{ha } n=2k+1, \end{cases} = \begin{cases} \frac{a_0}{n!}, & \text{ha } n \text{ páros}, \\ \frac{a_1}{n!}, & \text{ha } n \text{ páratlan}, \end{cases}$$

ahol a_0 és a_1 tetszőleges valós számok lehetnek.

Kiszámítjuk ennek a hatványsornak a konvergencia sugarát és halmazátÉ

$$\begin{aligned} \ell = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} &= \max\left\{\lim_{k\to\infty} \sqrt[2k]{\frac{|a_0|}{(2k)!}}, \lim_{k\to\infty} \sqrt[2k+1]{\frac{|a_1|}{(2k+1)!}}\right\} \\ &= \max\left\{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_0|}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}, \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_1|}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}\right\} \\ &= \max\{0,0\}=0, \end{aligned}$$

mivel $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0$ és $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a|}=\begin{cases} 0, & \text{ha } a=0, \\ 1, & \text{ha } a\neq 0 \end{cases}$. Tehát a hatványsor konvergencia sugara $r=+\infty$ és konvergencia halmaza $\mathbb{R}$. □

5. fejezet

Belső, torlódási és határpontok

5.1. Elméleti összefoglaló

5.1.1. Belső, torlódási és határpontok $\mathbb{R}$-en

Legyen $x \in \mathbb{R}$ egy pont és $A \subseteq \mathbb{R}$ egy halmaz.

5.1. Értelmezés

(i) Az x pont az A halmaz *belső pontja*, ha létezik olyan $r > 0$ szám, hogy $(x - r,\, x + r)$ nyílt intervallum benne van A-ban, vagyis

$$\exists r > 0 \text{ úgy, hogy } (x - r,\, x + r) \subseteq A.$$

Az A részhalmaz belső pontjainak halmaza $\mathring{A}$.

(ii) Az x pont az A halmaz *torlódási pontja*, ha minden $r > 0$ szám esetén az $(x - r,\, x + r)$ intervallumnak és az A halmaznak van x-től különböző közös pontja, vagyis

$$\forall r > 0 \text{ esetén } (x - r,\, x + r) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset.$$

Az A részhalmaz torlódási pontjainak halmaza A'.

(iii) Az x pont az A halmaz *határpontja*, ha

$$\forall r > 0 \text{ esetén } (x - r,\, x + r) \cap A \neq \emptyset \;\text{ és }\; (x - r,\, x + r) \cap A^c \neq \emptyset,$$

ahol $A^c = \mathbb{R} \setminus A$ az A halmaz komplementere. Az A részhalmaz határpontjainak halmaza $\operatorname{bd}(A)$.

5.1.2. Belső, torlódási és határpontok $\mathbb{R}^2$-en

Legyen $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ egy pont és $A \subseteq \mathbb{R}^2$ egy halmaz.

5.2. Értelmezés

Az x középpontú és r sugarú *nyílt (síkbeli) körlap* vagy *nyílt golyó*:

$$\begin{aligned} B(x; r) &= \{y \in \mathbb{R}^2 \mid \|x - y\| < r\} \\ &= \{y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} < r\} \end{aligned}$$

Az x középpontú és r sugarú *zárt (síkbeli) körlap* vagy *zárt golyó*:

$$\begin{aligned} \overline{B}(x; r) &= \{y \in \mathbb{R}^2 \mid \|x - y\| \leq r\} \\ &= \{y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \leq r\} \end{aligned}$$

5.3. Értelmezés

(i) Az x pont az A halmaz *belső pontja*, ha létezik olyan $r > 0$ szám, hogy a $B(x; r)$ nyílt körlap benne van az A halmazban, vagyis

$$\exists r > 0 \text{ úgy, hogy } B(x; r) \subseteq A.$$

Az A halmaz belső pontjainak halmazát $\mathring{A}$-val jelöljük.

(ii) Az x pont az A halmaz *torlódási pontja*, ha minden $r > 0$ szám esetén a $B(x; r)$ nyílt körlapnak és az A halmaznak van x-től különböző közös pontja, vagyis

$$\forall r > 0 \text{ esetén } B(x; r) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset.$$

Az A halmaz torlódási pontjainak halmazát A'-vel jelöljük.

(iii) Az x pont az A halmaz *határpontja*, ha

$$\forall r > 0 \text{ esetén } B(x; r) \cap A \neq \emptyset \quad \text{és} \quad B(x; r) \cap A^c \neq \emptyset,$$

ahol $A^c = \mathbb{R}^2 \setminus A$ az A halmaz komplementere. Az A halmaz határpontjainak halmazát $\operatorname{bd}(A)$-val vagy ∂A-val jelöljük.

5.4. Tulajdonság

Legyen $n \geq 1$ egész szám és legyen $A \subseteq \mathbb{R}^n$ egy tetszőleges részhalmaz.

1. $\mathring{A} \subseteq A$;
2. $\mathring{A} \subseteq A'$ (minden belső pont torlódási pont is);
3. $\mathring{A} \cap \operatorname{bd}(A) = \emptyset$ (belső pontok nem határpontok);
4. $\bar{A} = A \cup A'$;
5. $\operatorname{bd}(A) = \bar{A} \setminus \mathring{A} = (A \cup A') \setminus \mathring{A}$.

5.2. Feladatok

5.1. Feladat. Határozzuk meg a következő $A \subseteq \mathbb{R}$ halmazok belső, torlódási és határpontjait:

(a) $A = [0, 1]$;

(b) $A = (0, 1]$;

(c) $A = (0, 1)$;

(d) $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$;

(e) $A = \mathbb{Z}$;

(f) $A = \mathbb{Q}$.

5.2. Feladat. Határozzuk meg a következő $A \subseteq \mathbb{R}^2$ halmazok belső, torlódási és határpontjait:

(a) $A = B((1, 2); 3)$;

(b) $A = (0, 1] \times [2, 3)$;

(c) $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\} \times [0, 1]$;

(d) $A = \{(x, \sin\frac{1}{x}) \mid x \in \mathbb{R}^*\}$;

(e) $A = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$;

(f) $A = (0, 1) \times \mathbb{Q}$;

(g) $A = [-2, 5) \times \mathbb{Q}$;

(h) $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\} \times \mathbb{Q}$;

(i) $A = \mathbb{R} \times \mathbb{Q}$.

5.3. Megoldások

5.1. Feladat. Határozzuk meg a következő $A \subseteq \mathbb{R}$ halmazok belső, torlódási és határpontjait:

(a) $A = [0, 1]$;

Megoldás.

- Legyen $x \in (0, 1)$ egy tetszőleges pont. Az x pont távolsága az intervallum 0 végpontjától $\delta(x, 0) = |x - 0| = x > 0$, míg az x pont távolsága az intervallum 1 végpontjától $\delta(x, 1) = |x - 1| = 1 - x > 0$. Legyen $r = \min\{\delta(x, 0), \delta(x, 1)\} = \min\{x, 1 - x\}$. A minimum értelmezése alapján $r \leq x$, ahonnan $0 \leq x - r$, illetve $r \leq 1 - x$, ahonnan $x + r \leq 1$. Ez alapján $(x - r,\ x + r) \subseteq [0, 1]$, tehát x az $A = [0, 1]$ halmaz belső pontja.
  Az $x = 0$ pontra minden $r > 0$ esetén $-\frac{r}{2} \in (-r, r) = (0 - r,\ 0 + r)$, de $-\frac{r}{2} \notin [0, 1] = A$, ezért $(-r, r) \nsubseteq [0, 1] = A$, így $x = 0$ nem belső pontja az $A = [0, 1]$ halmaznak.
  Hasonlóan, az $x = 1$ pontra minden $r > 0$ esetén $1 + \frac{r}{2} \in (1 - r, 1 + r)$, de $1 + \frac{r}{2} \notin [0, 1] = A$, ezért $(1 - r, 1 + r) \nsubseteq [0, 1] = A$, így $x = 1$ nem belső pontja az $A = [0, 1]$ halmaznak.
  Azt kaptuk, hogy az $A = [0, 1]$ halmaz belső pontjainak halmaza $\mathring{A} = (0, 1)$.
- Minden belsőpont egyben torlódási pont is, ezért $\mathring{A} = (0, 1) \subseteq A'$.
  Az $x = 0$ pontra minden $r > 0$ esetén
  $$(-r, r) \cap ([0, 1] \setminus \{0\}) = (-r, r) \cap (0, 1] \neq \emptyset,$$
  mert például tartalmazza az $\frac{r}{2}$ pontot, ha $r \leq 1$, illetve az $\frac{1}{2}$ pontot, ha $r > 1$. Így $0 \in A'$.
  Hasonlóan, az $x = 1$ pontra minden $r > 0$ esetén
  $$(1 - r, 1 + r) \cap ([0, 1] \setminus \{1\}) = (1 - r, 1 + r) \cap [0, 1) \neq \emptyset,$$
  mert például tartalmazza az $1 - \frac{r}{2}$ pontot, ha $r \leq 1$, illetve az $\frac{1}{2}$ pontot, ha $r > 1$. Így $1 \in A'$.
  Az $x < 0$ pontra $r = |x| = -x$ esetén
  $$(x - r, x + r) \cap ([0, 1] \setminus \{x\}) = (x - r, x + r) \cap [0, 1] = (x - r, 0) \cap [0, 1] = \emptyset,$$
  így $x \notin A'$.
  Hasonlóan, az $x > 1$ pontra $r = x - 1$ esetén
  $$(x - r, x + r) \cap ([0, 1] \setminus \{x\}) = (x - r, x + r) \cap [0, 1] = (1, x + r) \cap [0, 1] = \emptyset,$$
  így $x \notin A'$.
  Ezzel beláttuk, hogy az $A = [0, 1]$ halmaz derivált halmaza (torlódási pontjainak halmaza) $A' = [0, 1]$.
- Az $A = [0, 1]$ halmaz burkoló halmaza $\bar{A} = A \cup A' = [0, 1] \cup [0, 1] = [0, 1]$.
- Az $A = [0, 1]$ halmaz határa $\mathrm{bd}\,(A) = \bar{A} \setminus \mathring{A} = [0, 1] \setminus (0, 1) = \{0, 1\}$ (az intervallum végpontjainak halmaza).

□

(b) $A = (0, 1]$;

Megoldás. A belső, torlódási, határpontok meghatározása ugyanúgy történik, mint az előző esetben, csak a $[0, 1]$ zárt intervallumot kell kicserélni a $(0, 1]$ intervallumra.

- Legyen $x \in (0,1)$ egy tetszőleges pont. Az x pont távolsága az intervallum 0 végpontjától $\delta(x,0) = |x-0| = x > 0$, míg az x pont távolsága az intervallum 1 végpontjától $\delta(x,1) = |x-1| = 1-x > 0$. Legyen $r = \min\{\delta(x,0),\, \delta(x,1)\} = \min\{x, 1-x\}$. A minimum értelmezése alapján $r \leq x$, ahonnan $0 \leq x-r$, illetve $r \leq 1-x$, ahonnan $x+r \leq 1$. Ez alapján $(x-r,\, x+r) \subseteq (0,1]$, tehát x az $A = (0,1]$ halmaz belső pontja.
  Az $x = 0$ pontra minden $r > 0$ esetén $-\frac{r}{2} \in (-r,r) = (0-r,\, 0+r)$, de $-\frac{r}{2} \notin (0,1] = A$, ezért $(-r,r) \nsubseteq (0,1] = A$, így $x = 0$ nem belső pontja az $A = (0,1]$ halmaznak.
  Hasonlóan, az $x = 1$ pontra minden $r > 0$ esetén $1 + \frac{r}{2} \in (1-r, 1+r)$, de $1 + \frac{r}{2} \notin (0,1] = A$, ezért $(1-r, 1+r) \nsubseteq (0,1] = A$, így $x = 1$ nem belső pontja az $A = (0,1]$ halmaznak.
  Azt kaptuk, hogy az $A = (0,1]$ halmaz belső pontjainak halmaza $\mathring{A} = (0,1)$.
- Minden belsőpont egyben torlódási pont is, ezért $\mathring{A} = (0,1) \subseteq A'$.
  Az $x = 0$ pontra minden $r > 0$ esetén
  $$(-r,r) \cap ((0,1] \setminus \{0\}) = (-r,r) \cap (0,1] \neq \emptyset,$$
  mert például tartalmazza az $\frac{r}{2}$ pontot, ha $r \leq 1$, illetve az $\frac{1}{2}$ pontot, ha $r > 1$. Így $0 \in A'$.
  Hasonlóan, az $x = 1$ pontra minden $r > 0$ esetén
  $$(1-r, 1+r) \cap ((0,1] \setminus \{1\}) = (1-r, 1+r) \cap (0,1) \neq \emptyset,$$
  mert például tartalmazza az $1 - \frac{r}{2}$ pontot, ha $r \leq 1$, illetve az $\frac{1}{2}$ pontot, ha $r > 1$. Így $1 \in A'$.
  Az $x < 0$ pontra $r = |x| = -x$ esetén
  $$(x-r, x+r) \cap ((0,1] \setminus \{x\}) = (x-r, x+r) \cap (0,1] = (x-r, 0) \cap (0,1] = \emptyset,$$
  így $x \notin A'$.
  Hasonlóan, az $x > 1$ pontra $r = x - 1$ esetén
  $$(x-r, x+r) \cap ((0,1] \setminus \{x\}) = (x-r, x+r) \cap (0,1] = (1, x+r) \cap (0,1] = \emptyset,$$
  így $x \notin A'$.
  Ezzel beláttuk, hogy az $A = (0,1]$ halmaz derivált halmaza (torlódási pontjainak halmaza) $A' = [0,1]$.
- Az $A = (0,1]$ halmaz burkoló halmaza $\bar{A} = A \cup A' = (0,1] \cup [0,1] = [0,1]$.
- Az $A = (0,1]$ halmaz határa $\operatorname{bd}(A) = \bar{A} \setminus \mathring{A} = [0,1] \setminus (0,1) = \{0,1\}$ (az intervallum végpontjainak halmaza).

□

(c) $A = (0,1)$;

Megoldás. A belső, torlódási, határpontok meghatározása ugyanúgy történik, mint az első esetben, csak az $[0,1]$ zárt intervallumot kell kicserélni a $(0,1)$ intervallumra.

- Legyen $x \in (0,1)$ egy tetszőleges pont. Az x pont távolsága az intervallum 0 végpontjától $\delta(x,0) = |x-0| = x > 0$, míg az x pont távolsága az intervallum 1 végpontjától $\delta(x,1) = |x-1| = 1-x > 0$. Legyen $r = \min\{\delta(x,0),\, \delta(x,1)\} = \min\{x, 1-x\}$. A minimum értelmezése alapján $r \leq x$, ahonnan $0 \leq x-r$, illetve $r \leq 1-x$, ahonnan $x + r \leq 1$. Ez alapján $(x-r,\, x+r) \subseteq (0,1)$, tehát x az $A = (0,1)$ halmaz belső pontja.

Az $x=0$ pontra minden $r>0$ esetén $-\frac{r}{2}\in(-r,r)=(0-r,\,0+r)$, de $-\frac{r}{2}\notin(0,1)=A$, ezért $(-r,r)\nsubseteq(0,1)=A$, így $x=0$ nem belső pontja az $A=(0,1)$ halmaznak.
Hasonlóan, az $x=1$ pontra minden $r>0$ esetén $1+\frac{r}{2}\in(1-r,1+r)$, de $1+\frac{r}{2}\notin(0,1)=A$, ezért $(1-r,1+r)\nsubseteq(0,1)=A$, így $x=1$ nem belső pontja az $A=(0,1)$ halmaznak.
Azt kaptuk, hogy az $A=(0,1]$ halmaz belső pontjainak halmaza $\mathring{A}=(0,1)$.

- Minden belsőpont egyben torlódási pont is, ezért $\mathring{A}=(0,1)\subseteq A'$.
  Az $x=0$ pont és minden $r>0$ esetén
  $$(-r,r)\cap((0,1)\setminus\{0\})=(-r,r)\cap(0,1)\neq\emptyset,$$
  mert például tartalmazza az $\frac{r}{2}$ pontot, ha $r\leq 1$, illetve az $\frac{1}{2}$ pontot, ha $r>1$. Így $0\in A'$.
  Hasonlóan, az $x=1$ pont és minden $r>0$ esetén
  $$(1-r,1+r)\cap((0,1)\setminus\{1\})=(1-r,1+r)\cap(0,1)\neq\emptyset,$$
  mert például tartalmazza az $1-\frac{r}{2}$ pontot, ha $r\leq 1$, illetve az $\frac{1}{2}$ pontot, ha $r>1$. Így $1\in A'$.
  Az $x<0$ pontra $r=|x|=-x$ esetén
  $$(x-r,x+r)\cap((0,1)\setminus\{x\})=(x-r,x+r)\cap(0,1)=(x-r,0)\cap(0,1)=\emptyset,$$
  így $x\notin A'$.
  Hasonlóan, az $x>1$ pontra $r=x-1$ esetén
  $$(x-r,x+r)\cap((0,1)\setminus\{x\})=(x-r,x+r)\cap(0,1)=(1,x+r)\cap(0,1)=\emptyset,$$
  így $x\notin A'$.
  Ezzel belátuk, hogy az $A=(0,1)$ halmaz derivált halmaza (torlódási pontjainak halmaza) $A'=[0,1]$.
- Az $A=(0,1)$ halmaz burkoló halmaza $\bar{A}=A\cup A'=(0,1)\cup[0,1]=[0,1]$.
- Az $A=(0,1]$ halmaz határa $\operatorname{bd}(A)=\bar{A}\setminus\mathring{A}=[0,1]\setminus(0,1)=\{0,1\}$ (az intervallum végpontjainak halmaza).

□

(d) $A=\{\frac{1}{n}\,|\,n\in\mathbb{N}^*\}$;

Megoldás.

- Minden $x=\frac{1}{n}$, $n\in\mathbb{N}^*$ pont és minden $r>0$ szám esetén $(\frac{1}{n}-r,\frac{1}{n}+r)\nsubseteq A$, mivel $\frac{1}{n}-\frac{r}{2}\in(\frac{1}{n}-r,\frac{1}{n}+r)\setminus A$, ha $r<\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$, illetve $\frac{1}{2}(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1})\in(\frac{1}{n}-r,\frac{1}{n}+r)\setminus A$, ha $r\geq\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$. Tehát $x=\frac{1}{n}$ nem belső pont, minden $n\in\mathbb{N}^*$ esetén, így $\mathring{A}=\emptyset$.
- Minden $x=\frac{1}{n}$, $n\in\mathbb{N}^*$ esetén legyen $r=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$. Ekkor
  $$(x-r,x+r)\cap(A\setminus\{x\})=\left(\frac{1}{n+1},\frac{2}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\cap(A\setminus\{x\})=\emptyset.$$
  Tehát $x\notin A'$.
  Ha $x\in(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n})$, $n\in\mathbb{N}^*$, akkor legyen $r=\min\{x-\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}-x\}>0$. Ekkor $(x-r,x+r)\cap(A\setminus\{x\})=\emptyset$. Tehát $x\notin A'$.

Az $x < 0$ pont esetén legyen $r = |x| = -x > 0$. Ekkor

$$(x - r, x + r) \cap (A \setminus \{x\}) = (x - r, 0) \cap (A \setminus \{x\}) = \emptyset.$$

Tehát $x \notin A'$.
Az $x > 1$ pont esetén legyen $r = x - 1 > 0$. Ekkor

$$(x - r, x + r) \cap (A \setminus \{x\}) = (1, x + r) \cap (A \setminus \{x\}) = \emptyset.$$

Tehát $x \notin A'$.
Végül $x = 0$ pontra minden $r > 0$ esetén létezik $n = [r] + 1$ úgy, hogy $\frac{1}{n} \in (-r, r) \cap (A \setminus \{0\})$, tehát $(-r, r) \cap (A \setminus \{0\}) \neq \emptyset$, és ezért $0 \in A'$.
Összegezve az $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ halmaz derivált halmaza (torlódási pontjainak halmaza) $A' = \{0\}$.

- Az $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ halmaz burkoló halmaza $\bar{A} = A \cup A' = \{0, \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$.
- Az $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ halmaz határa $\bar{A} \setminus \mathring{A} = \{0, \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\} \setminus \emptyset = \{0, \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$.

□

(e) $A = \mathbb{Z}$;

Megoldás.

- Minden $x \in \mathbb{Z}$ pont és minden $r > 0$ esetén $(x - r, x + r) \not\subseteq \mathbb{Z}$, mivel $x - \frac{r}{2} \in (x - r, x + r) \setminus \mathbb{Z}$, ha $r < 1$, illetve $x - \frac{1}{2} \in (x - r, x + r) \setminus \mathbb{Z}$, ha $r \geq 1$. Tehát x nem belső pont, és $\mathring{A} = \emptyset$.
- Az $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} = \cup_{n \in \mathbb{Z}}(n, n + 1)$ halmaz nyílt, ezért minden $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ esetén $x \notin \mathbb{Z}'$ (nem torlódási pontja az egész számok halmazának).
  Minden $x \in \mathbb{Z}$ pont és $r = \frac{1}{2}$ esetén $(x - r, x + r) \cap (\mathbb{Z} \setminus \{x\}) = \emptyset$, ezért $x \notin \mathbb{Z}'$ (nem torlódási pontja az egész számok halmazának).
  Összegezve az $A = \mathbb{Z}$ halmaz derivált halmaza (torlódási pontjainak halmaza) $A' = \mathbb{Z}' = \emptyset$.
- Az $A = \mathbb{Z}$ halmaz burkoló halmaza $\bar{A} = A \cup A' = \mathbb{Z} \cup \emptyset = \mathbb{Z}$.
- Az $A = \mathbb{Z}$ halmaz határa $\bar{A} \setminus \mathring{A} = \mathbb{Z} \setminus \emptyset = \mathbb{Z}$.

□

(f) $A = \mathbb{Q}$.

Megoldás.

- Minden intervallum tartalmaz racionális és irracionális számot is. Ezért minden $q \in \mathbb{Q}$ és minden $r > 0$ esetén $(q - r, q + r) \not\subseteq \mathbb{Q}$, ezért $\mathring{\mathbb{Q}} = \emptyset$.
- Felhasználva, hogy minden intervallum tartalmaz racionális és irracionális számot is adódik, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ és minden $r > 0$ esetén

$$(x-r, x+r) \cap (\mathbb{Q} \setminus \{x\}) = ((x-r, x) \cup (x, x+r)) \cap \mathbb{Q} = ((x-r, x) \cap \mathbb{Q}) \cup ((x, x+r) \cap \mathbb{Q}) \neq \emptyset.$$

  Tehát $\mathbb{Q}' = \mathbb{R}$.
- A $\mathbb{Q}$ halmaz burkoló halmaza $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}' = \mathbb{R}$.
- A $\mathbb{Q}$ halmaz határa $\mathrm{bd}\,(\mathbb{Q}) = \overline{\mathbb{Q}} \setminus \mathring{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} \setminus \emptyset = \mathbb{R}$.

□

5.2. Feladat. Határozzuk meg a következő $A \subseteq \mathbb{R}^2$ halmazok belső, torlódási és határpontjait:

(a) $A = B((1,2);3)$;

Megoldás.

- Minden $x = (x_1, x_2) \in B((1,2);3)$ pont esetén legyen
$$r = 3 - \|(x_1, x_2) - (1,2)\| > 0$$
(az x pont távolsága a korong szélétől). Ekkor $B(x;r) \subseteq B((1,2);3)$, mivel minden $y = (y_1, y_2) \in B(x;r)$ pont esetén
$$\|(y_1,y_2)-(1,2)\| \leq \|(y_1,y_2)-(x_1,x_2)\|+\|(x_1,x_2)-(1,2)\| < r+\|(x_1,x_2)-(1,2)\| \leq 3.$$
Tehát x belső pontja az $A = B((1,2);3)$ halmaznak, így az $A = B((1,2);3)$ halmaz belső pontjainak halmaza $\mathring{A} = B((1,2);3)$.
- Tudjuk, hogy $\mathring{A} \subseteq A'$ (minden belső pont egyben torlódási pont is).
Az $x = (x_1, x_2) \in C((1,2);3)$ (a korongot határoló körön lévő) pont esetén $\|(x_1, x_2) - (1,2)\| = 3$. Ekkor minden $r > 0$ esetén
$$y = (y_1, y_2) = \left(1 - \frac{r}{2}\right)(x_1, x_2) + \frac{r}{2}(1,2) \in B(x;r) \cap (A \setminus \{x\}),$$
ha $r < 3$, illetve $y = (y_1, y_2) = \frac{1}{2}(x_1, x_2) + \frac{1}{2}(1,2) \in B(x;r) \cap (A \setminus \{x\})$, ha $r \geq 3$. Tehát minden $r > 0$ esetén $B(x;r) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$, ezért $x \in A'$.
Az $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $\|(x_1, x_2) - (1,2)\| > 3$ (a korongon kívüli) pontok esetén legyen
$$r = \|(x_1, x_2) - (1,2)\| - 3 > 0.$$
Ekkor $B(x;r) \cap (A \setminus \{x\}) = \emptyset$, tehát $x \notin A'$.
Összegezve $A' = \bar{B}((1,2);3) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x_1, x_2)\| \leq 3\}$ (az $(1,2)$ középpontú és 3 sugarú zárt korong).
- Az $A = B((1,2);3)$ halmaz burkoló halmaza $\bar{A} = A \cup A' = \bar{B}((1,2);3) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x_1, x_2)\| \leq 3\}$ (az $(1,2)$ középpontú és 3 sugarú zárt korong).
- Az $A = B((1,2);3)$ halmaz határa
$$\mathrm{bd}\,(A) = \bar{A} \setminus \mathring{A} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x_1, x_2)\| = 3\} = C((1,2);3)$$
(az $(1,2)$ középpontú és 3 sugarú kör).

□

(b) $A = (0,1] \times [2,3)$;

Megoldás. Minden $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ középpontú és $r > 0$ sugarú nyílt körlap tartalmaz egy x középpontú és $a = r\sqrt{2}$ oldalhosszúságú nyílt négyzetlapot, vagyis $(x_1 - a, x_1 + a) \times (x_2 - a, x_2 + a) \subset B((x_1, x_2); r)$. Fordítva, minden $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ középpontú és $a > 0$ oldalhosszúságú nyílt négyzetlap tartalmaz egy $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ középpontú és $r = \frac{a}{2}$ sugarú nyílt körlapot, vagyis
$$B((x_1, x_2); \frac{a}{2}) \subseteq (x_1 - a, x_1 + a) \times (x_2 - a, x_2 + a).$$

Ezért $x = (x_1, x_2) \in A \subseteq \mathbb{R}^2$ belső pont pontosan akkor, ha létezik $a > 0$ úgy, hogy $(x_1 - a, x_1 + a) \times (x_2 - a, x_2 + a) \subseteq A$. Sajátosan, ha $A = A_1 \times A_2$, akkor $\mathring{A} = \mathring{A}_1 \times \mathring{A}_2$.

Hasonlóan, az $x = (x_1, x_2) \in A \subseteq \mathbb{R}^2$ torlódási pont pontosan akkor, ha minden $a > 0$ esetén $(x_1 - a, x_1 + a) \times (x_2 - a, x_2 + a) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$. Sajátosan, $A = A_1 \times A_2$ esetén $(x_1 - a, x_1 + a) \times (x_2 - a, x_2 + a) \cap (A_1 \times A_2 \setminus \{(x_1, x_2)\}) \neq \emptyset$ egyenértékű az $(x_1 - a, x_1 + a) \cap (A_1 \setminus \{x_1\}) \neq \emptyset$ és $(x_2 - a, x_2 + a) \cap (A_2 \setminus \{x_2\}) \neq \emptyset$ feltétellel, ezért $A' = A_1' \times A_2'$

- Mivel $A = (0, 1] \times [2, 3)$ az $A_1 = (0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ és $A_2 = [2, 3) \subseteq \mathbb{R}$ halmazok Descartes-féle szorzata, ezért $\mathring{A} = \mathring{A}_1 \times \mathring{A}_2 = (0, 1) \times (2, 3)$.
- Mivel $A = (0, 1] \times [2, 3)$ az $A_1 = (0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ és $A_2 = [2, 3) \subseteq \mathbb{R}$ halmazok Descartes-féle szorzata, ezért $A' = A_1' \times A_2' = [0, 1] \times [2, 3]$.
- Az $A = (0, 1] \times [2, 3)$ halmaz derivált halmaza $\bar{A} = A \cup A' = [0, 1] \times [2, 3]$.
- Az $A = (0, 1] \times [2, 3)$ halmaz határa

$$\mathrm{bd}\,(A) = \bar{A} \setminus \mathring{A} = (\{0, 1\} \times [2, 3]) \cup ([0, 1] \times \{2, 3\})$$

  (a négyzet oldalainak egyesítése).

$\square$

(c) $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\} \times [0, 1]$;

Megoldás.

- $\mathring{A} = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}^\circ \times [0, 1]^\circ = \emptyset \times (0, 1) = \emptyset$.
- $A' = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}' \times [0, 1]' = \{0\} \times [0, 1]$.
- $\bar{A} = A \cup A' = \{0, \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\} \times [0, 1]$.
- $\mathrm{bd}\,(A) = \bar{A} \setminus \mathring{A} = \big(\{0, \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\} \times [0, 1]\big) \setminus \emptyset = \{0, \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\} \times [0, 1]$.

$\square$

(d) $A = \{(x, \sin\frac{1}{x}) \mid x \in \mathbb{R}^*\}$;

Megoldás. $\mathring{A} = \emptyset$;
$A' = \{(x, \sin\frac{1}{x}) \mid x \in \mathbb{R}^*\} \cup (\{0\} \times [-1, 1])$;
$\mathrm{bd}\,(A) = \{(x, \sin\frac{1}{x}) \mid x \in \mathbb{R}^*\} \cup (\{0\} \times [-1, 1])$. $\square$

(e) $A = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$;

Megoldás.

- $\mathring{A} = \mathring{\mathbb{Q}} \times \mathring{\mathbb{Q}} = \emptyset \times \emptyset = \emptyset$.
- $A' = \mathbb{Q}' \times \mathbb{Q}' = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$.
- $\bar{A} = A \cup A' = (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) \cup (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) = \mathbb{R}^2$.
- $\mathrm{bd}\,(A) = \bar{A} \setminus \mathring{A} = \mathbb{R}^2 \setminus \emptyset = \mathbb{R}^2$.

$\square$

(f) $A = (0, 1) \times \mathbb{Q}$;

Megoldás.

- $\mathring{A} = (0,1)^\circ \times \mathring{\mathbb{Q}} = (0,1) \times \emptyset = \emptyset$.
- $A' = (0,1)' \times \mathbb{Q}' = [0,1] \times \mathbb{R}$.
- $\bar{A} = A \cup A' = ((0,1) \times \mathbb{Q}) \cup ([0,1] \times \mathbb{R}) = [0,1] \times \mathbb{R}$.
- $\mathrm{bd}\,(A) = \bar{A} \setminus \mathring{A} = [0,1] \times \mathbb{R} \setminus \emptyset = [0,1] \times \mathbb{R}$.

$\square$

(g) $A = [-2,5) \times \mathbb{Q}$;

Megoldás.

- $\mathring{A} = [-2,5)^\circ \times \mathring{\mathbb{Q}} = (-2,5) \times \emptyset = \emptyset$.
- $A' = [-2,5)' \times \mathbb{Q}' = [-2,5] \times \mathbb{R}$.
- $\bar{A} = A \cup A' = ([-2,5) \times \mathbb{Q}) \cup ([-2,5] \times \mathbb{R}) = [-2,5] \times \mathbb{R}$.
- $\mathrm{bd}\,(A) = \bar{A} \setminus \mathring{A} = [-2,5] \times \mathbb{R} \setminus \emptyset = [-2,5] \times \mathbb{R}$.

$\square$

(h) $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\} \times \mathbb{Q}$;

Megoldás.

- $\mathring{A} = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}^\circ \times \mathring{\mathbb{Q}} = \emptyset \times \emptyset = \emptyset$.
- $A' = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}' \times \mathbb{Q}' = \{0\} \times \mathbb{R}$.
- $\bar{A} = A \cup A' = \big(\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\} \times \mathbb{Q}\big) \cup ([-2,5] \times \mathbb{R}) = \{0, \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\} \times \mathbb{R}$.
- $\mathrm{bd}\,(A) = \bar{A} \setminus \mathring{A} = \{0, \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\} \times \mathbb{R} \setminus \emptyset = \{0, \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\} \times \mathbb{R}$.

$\square$

(i) $A = \mathbb{R} \times \mathbb{Q}$.

Megoldás.

- $\mathring{A} = \mathring{\mathbb{R}} \times \mathring{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} \times \emptyset = \emptyset$.
- $A' = \mathbb{R}' \times \mathbb{Q}' = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$.
- $\bar{A} = A \cup A' = (\mathbb{R} \times \mathbb{Q}) \cup (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) = \mathbb{R}^2$.
- $\mathrm{bd}\,(A) = \bar{A} \setminus \mathring{A} = \mathbb{R}^2 \setminus \emptyset = \mathbb{R}^2$.

$\square$

6. fejezet

Függvények határértéke és folytonossága

6.1. Elméleti összefoglaló

6.1.1. Egyváltozós függvények határértéke

Legyen $A \subseteq \mathbb{R}$ egy halmaz és $x_0 \in A'$ az A halmaz egy torlódási pontja.

(i) Az f függvény határértéke az x_0 pontban $\ell \in \mathbb{R}$, ha minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik $\delta_\varepsilon > 0$ úgy, hogy minden $x \in A$, $x \neq x_0$, $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$ esetén $|f(x) - \ell| < \varepsilon$. Jelölés: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$.

(ii) Az f függvény határértéke az x_0 pontban $+\infty$, ha minden $K > 0$ esetén létezik $\delta_K > 0$ úgy, hogy minden $x \in A$, $x \neq x_0$, $|x - x_0| < \delta_K$ esetén $f(x) > K$. Jelölés: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$.

(iii) Az f függvény határértéke az x_0 pontban $-\infty$, ha minden $K > 0$ esetén létezik $\delta_K > 0$ úgy, hogy minden $x \in A$, $x \neq x_0$, $|x - x_0| < \delta_K$ esetén $f(x) < -K$. Jelölés: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.

Ha egy függvénynek létezik határértéke, akkor az egyértelmű.

6.1. Tétel (Heine-féle kritérium)
Az $f : A \to \mathbb{R}$ függvény $x_0 \in A'$ torlódási pontban vett határértéke ℓ pontosan akkor, ha minden $(y_n)_{n \geq 1}$ sorozat esetén, amelyre $y_n \in A$, $y_n \neq x_0$ (minden $n \geq 1$ esetén) és $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = x_0$ teljesül, hogy $\lim\limits_{n \to \infty} f(y_n) = \ell$.

6.2. Következmény
Adott az $f : A \to \mathbb{R}$ függvény és az $x_0 \in A'$ torlódási pont. Ha létezik két olyan (y_n) és (z_n) számsorozat, hogy $y_n, z_n \in A$, $y_n \neq x_0 \neq z_n$, minden $n \geq 1$ esetén, és $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = \lim\limits_{n \to \infty} z_n = x_0$, de $\lim\limits_{n \to \infty} f(y_n) \neq \lim\limits_{n \to \infty} f(z_n)$, akkor nem létezik a $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ függvényhatárérték.

6.3. Tétel (Cauchy)
Az $f : A \to \mathbb{R}$ függvénynek akkor és csak akkor van határértéke az $x_0 \in A'$ torlódási pontban, ha bármely $\varepsilon > 0$ szám esetén létezik $\delta_\varepsilon > 0$ úgy, hogy minden $x, y \in A$, $x \neq x_0$, $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$ és $y \neq x_0$, $|y - x_0| < \delta_\varepsilon$ esetén $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

6.4. Tulajdonság
Legyen $A \subseteq \mathbb{R}$ egy nemüres részhalmaz, $f_1, f_2 : A \to \mathbb{R}$ függvények, amelyek esetén léteznek a $\lim\limits_{x \to x_0} f_1(x) \in \mathbb{R}$ és $\lim\limits_{x \to x_0} f_2(x) \in \mathbb{R}$ határértékek az $x_0 \in A'$ torlódási pontban.

Ekkor léteznek a következő határértékek:

(i) $\lim\limits_{x \to x_0} (f_1(x) + f_2(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f_1(x) + \lim\limits_{x \to x_0} f_2(x)$;

(ii) $\lim\limits_{x \to x_0} k \cdot f_1(x) = k \cdot \lim\limits_{x \to x_0} k \cdot f_1(x)$, minden $k \in \mathbb{R}$ esetén;

(iii) $\lim\limits_{x \to x_0} f_1(x) f_2(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f_1(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} f_2(x)$;

(iv) $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} f_2(x)}$, ha $\lim\limits_{x\to x_0} f_2(x) \neq 0$;

(v) ha minden $x \in A$ esetén $f_1(x) \leq f_2(x)$, akkor $\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x) \leq \lim\limits_{x\to x_0} f_2(x)$;

(vi) ha $g : A \to \mathbb{R}$ úgy, hogy $f_1(x) \leq g(x) \leq f_2(x)$, minden $x \in A$ esetén, és $\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f_2(x)$, akkor létezik a $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ határérték és $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f_1(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f_2(x)$.

6.5. Tulajdonság (Összetett függvény határértéke)
Legyenek $A, B \subseteq \mathbb{R}$ részhalmazok, $f_1 : A \to \mathbb{R}$ és $f_2 : B \to \mathbb{R}$ függvények úgy, hogy $f_1(A) \subseteq B$ és léteznek a $\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x) = \ell_1$, $\lim\limits_{x\to \ell_1} f_2(x) = \ell_2$ határértékek ($x_0 \in A'$, $\ell_1 \in B'$), továbbá létezik egy $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ intervallum úgy, hogy minden $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A$, $x \neq x_0$ esetén $f_1(x) \neq \ell_1$. Ekkor létezik a $\lim\limits_{x\to x_0} f_2(f_1(x))$ határérték és egyenlő ℓ_2-vel.

6.6. Tétel (L'Hôspital-szabály)
Legyen $x_0 \in [a, b]$ pont és $f, g : (a, b) \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ deriválható függvények úgy, hogy $g'(x) \neq 0$, minden $x \in (a, b) \setminus \{x_0\}$ esetén, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ és létezik a $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ határérték, akkor

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Az $f : A \to \mathbb{R}$ függvény *jobb oldali határértéke* az $x_0 \in A'$ pontban ℓ, ha minden $\varepsilon > 0$ számra létezik $\delta_\varepsilon > 0$ úgy, hogy minden $x \in A$, $x_0 < x < x_0 + \delta_\varepsilon$ esetén $|f(x) - \ell| < \varepsilon$. Jelölés: $\lim\limits_{x\to (x_0)^+} f(x) = \ell$. Az $f : A \to \mathbb{R}$ függvény *bal oldali határértéke* az $x_0 \in A'$ pontban ℓ, ha minden $\varepsilon > 0$ számra létezik $\delta_\varepsilon > 0$ úgy, hogy minden $x \in A$, $x_0 - \delta_\varepsilon < x < x_0$ esetén $|f(x) - \ell| < \varepsilon$. Jelölés: $\lim\limits_{x\to (x_0)^-} f(x) = \ell$.

Egy $f : A \to \mathbb{R}$ függvénynek van határértéke egy $x_0 \in A$ belső pontban, vagyis létezik $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, akkor az x_0 pontban léteznek a jobb és bal oldali határértékek, amelyek megegyeznek a határértékkel, vagyis $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to (x_0)^+} f(x) = \lim\limits_{x\to (x_0)^-} f(x)$.

Fordítva, ha egy $f : A \to \mathbb{R}$ függvénynek léteznek a jobb, illetve bal oldali határértékei egy $x_0 \in A'$ pontban és megegyeznek, azaz $\lim\limits_{x\to (x_0)^+} f(x) = \lim\limits_{x\to (x_0)^-} f(x)$, akkor az f függvénynek létezik határértéke az x_0 pontban és $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to (x_0)^+} f(x) = \lim\limits_{x\to (x_0)^-} f(x)$.

6.1.2. Kétváltozós függvények határértéke

Legyen $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ esetén $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ és legyen $A \subseteq \mathbb{R}^2$ egy nemüres részhalmaz.

6.1.2.1. Globális határérték

Az $f : A \to \mathbb{R}$ függvény határértéke $\ell \in \mathbb{R}$ az $(x_0, y_0) \in A'$ torlódási pontban, ha minden $\varepsilon > 0$ számra létezik $\delta_\varepsilon > 0$ úgy, hogy minden $(x, y) \in A$, $(x, y) \neq (x_0, y_0)$, $\|(x, y) - (x_0, y_0)\| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta_\varepsilon$ esetén $|f(x, y) - \ell| < \varepsilon$. Jelölés: $\ell = \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y)$.

6.7. Tétel (Heine-féle kritérium)
Az $f : A \to \mathbb{R}$ függvény határértéke az $(x_0, y_0) \in A'$ pontban ℓ akkor és csakis akkor, ha minden $(x_n)_{n\geq 1}$, $(y_n)_{\geq 1}$ sorozatokra, ahol $(x_n, y_n) \in A$, $(x_n, y_n) \neq (x_0, y_0)$, $n \geq 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$ teljesül, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = \ell$.

6.1.2.2. Iterált határérték

Legyen $A = A_1 \times A_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ és $x_0 \in A_1'$, $y_0 \in A_2'$ torlódási pontok.

(i) Az $F(x) = \lim\limits_{y \to y_0} f(x,y)$ határértéket az y változó szerinti F *határfüggvénynek* nevezzük az $x \in A_1 \setminus \{x_0\}$ pontban.

(ii) A $G(y) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x,y)$ határértéket az x változó szerinti G *határfüggvénynek* nevezzük az $y \in A_2 \setminus \{y_0\}$ pontban.

(iii) A $\lim\limits_{x \to x_0} \left(\lim\limits_{y \to y_0} f(x,y) \right) = \lim\limits_{x \to x_0} F(x)$ és $\lim\limits_{y \to y_0} \left(\lim\limits_{x \to x_0} f(x,y) \right) = \lim\limits_{y \to y_0} G(y)$ az f függvény *iterált határértékei* az $(x_0, y_0) \in A'$ pontban.

6.1.2.3. Globális és iterált határérték kapcsolata

Legyenek $A_1, A_2 \subseteq \mathbb{R}$ és $A = A_1 \times A_2 \subseteq \mathbb{R}^2$.

6.8. Tétel

Feltételezzük, hogy az $f : A \to \mathbb{R}$ függvénynek létezik (globális) határértéke az $(x_0, y_0) \in A$ pontban, ahol $x_0 \in A_1'$, $y_0 \in A_2'$.

(i) Ha valamely (a,b) intervallum esetén léteznek az $F(x) = \lim\limits_{y \to y_0} f(x,y)$, $x \in (a,b) \cap (A_1 \setminus \{x_0\})$ határértékek, akkor létezik $\lim\limits_{x \to x_0} \left(\lim\limits_{y \to y_0} f(x,y) \right) = \lim\limits_{x \to x_0} F(x)$ és egyenlő a $\lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x,y)$ globális határértékkel.

(ii) Ha valamely (a,b) intervallum esetén léteznek a $G(y) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x,y)$, $y \in (a,b) \cap (A_2 \setminus \{y_0\})$ határértékek, akkor létezik $\lim\limits_{y \to y_0} \left(\lim\limits_{x \to x_0} f(x,y) \right) = \lim\limits_{y \to y_0} G(y)$ és egyenlő a $\lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x,y)$ globális határértékkel.

6.9. Következmény

Ha az $f : A \to \mathbb{R}$ függvény esetén léteznek az $F(x) = \lim\limits_{y \to y_0} f(x,y)$ és $G(y) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x,y)$ határfüggvények és

(i) léteznek a $\lim\limits_{y \to y_0} \lim\limits_{x \to x_0} f(x,y)$ és $\lim\limits_{x \to x_0} \lim\limits_{y \to y_0} f(x,y)$ iterált határértékek, de nem egyenlőek,

vagy

(ii) az $\lim\limits_{y \to y_0} \lim\limits_{x \to x_0} f(x,y)$ és $\lim\limits_{x \to x_0} \lim\limits_{y \to y_0} f(x,y)$ iterált határértéke közül valamelyik nem létezik,

akkor az f függvénynek nem létezik a $\lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x,y)$ globális határértéke az (x_0, y_0) pontban.

6.1.3. Folytonosság

Legyen $A \subseteq \mathbb{R}$. Az $f : A \to \mathbb{R}$ függvény folytonos az $x_0 \in A$ pontban, ha $x_0 \in A'$ torlódási pont esetén $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, vagy ha $x_0 \notin A'$ (izolált pont). Az f függvény folytonossága az $x_0 \in A$ pontban úgy is jellemezhető, hogy minden $\varepsilon > 0$ számra létezik olyan $\delta_\varepsilon > 0$, amelyre minden $x \in A$, $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$ esetén $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Többváltozós függvény esetén hasonlóan értelmezzük a folytonosságot, mi ezt kétváltozós függvényre írjuk fel. Legyen $A \subseteq \mathbb{R}^2$. Az $f : A \to \mathbb{R}$ függvény folytonos az $(x_0, y_0) \in A$ pontban, ha $(x_0, y_0) \in A'$ torlódási pont esetén $\lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0)$, vagy ha $(x_0, y_0) \notin A'$ (izolált pont). Az f függvény folytonossága az $(x_0, y_0) \in A$ pontban úgy is jellemezhető, hogy minden $\varepsilon > 0$ számra létezik olyan $\delta_\varepsilon > 0$, amelyre minden $(x,y) \in A$, $\|(x,y) - (x_0,y_0)\| < \delta_\varepsilon$ esetén $|f(x,y) - f(x_0,y_0)| < \varepsilon$.

6.2. Feladatok

6.2.1. Egyváltozós függvények határértéke

6.1. Feladat. Az értelmezést felhasználva igazold, hogy

(a) $\lim\limits_{x\to1}(x^2-3x+3)=1$;

(b) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{(x-1)^2}=+\infty$;

(c) $\lim\limits_{x\to a}\cos x=\cos a$, $a\in\mathbb{R}$;

(d) $\lim\limits_{x\to a}\ln x=\ln a$, $a>0$;

(e) $\lim\limits_{x\to+\infty}a^x=\begin{cases}+\infty, & \text{ha } a>1\\ 1, & \text{ha } a=1\\ 0, & \text{ha } 0<a<1\end{cases}$;

(f) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$.

6.2. Feladat. A L'Hôspital-szabály felhasználása nélkül igazold, hogy

(a) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$;

(b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$;

(c) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(x+1)}{x}=1$;

(d) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$.

6.3. Feladat. Igazold, hogy a következő függvényhatárértékek nem léteznek:

(a) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}$;

(b) $\lim\limits_{x\to0}\sin\dfrac{1}{x}$;

(c) $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\cos x)e^x$;

(d) $\lim\limits_{x\to1}e^{\frac{x}{x-1}}$.

6.4. Feladat. Számítsd ki a következő függvények jobb és bal oldali határértékeit az $x=0$ pontban:

(a) $f(x)=\dfrac{\left|\sin\frac{1}{x}\right|}{1+2^{\frac{1}{x}}}$;

(b) $f(x)=x\cdot\dfrac{\left|\sin\frac{1}{x}\right|}{1+2^{\frac{1}{x}}}$;

(c) $f(x)=\dfrac{\cos\frac{1}{x^2}}{x}$;

(d) $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$.

6.5. Feladat. Számítd ki a következő függvényhatárértékeket:

(a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x^n}$, $n\in\mathbb{N}$;

(b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{x^n}$, $n\in\mathbb{N}$;

(c) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos^3x}{x\sin x}$;

(d) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$;

(e) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$;

(f) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos 2x}}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$;

(g) $\lim\limits_{x\to0}(1+x^2)^{\operatorname{ctg}^2x}$;

(h) $\lim\limits_{x\to0^+}(1+\operatorname{tg}^2\sqrt{x})^{\frac{1}{2x}}$;

(i) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}}$;

(j) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{x^2}$;

(k) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+5x)}{x}$;

(l) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^x-a^a}{x-a}$, ahol $a>0$.

6.2.2. Többváltozós függvények határértéke

6.6. Feladat. Az értelmezést használva igazold, hogy

(a) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,3)} (xy+2) = 8$;

(b) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \dfrac{x}{y} = \dfrac{1}{2}$;

(c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} = 0$;

(d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = 0$;

(e) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^3}{x^4+y^4} = 0$.

6.7. Feladat. Igazold, hogy a következő függvényeknek nincs határértéke az origóban:

(a) $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x-y}$, $x-y \neq 0$;

(b) $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, $(x,y) \neq (0,0)$.

6.8. Feladat. Tanulmányozd a következő függvények iterált és globális határértékét az origóban:

(a) $f(x,y) = \dfrac{x-y+x^2+y^2}{x+y}$, $\quad x+y \neq 0$;

(b) $f(x,y) = x\sin\dfrac{1}{y}$, $\quad y \neq 0$;

(c) $f(x,y) = (x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}$, $\quad x, y \neq 0$;

(d) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$, $\quad (x,y) \neq (0,0)$;

(e) $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, $\quad (x,y) \neq (0,0)$;

(f) $f(x,y) = \dfrac{x\sin\frac{1}{x}+y}{x+y}$, $\quad x+y \neq 0$.

6.9. Feladat. Igazold, hogy a következő függvényeknek nincs (globális) határértéke az origóban:

(a) $f(x,y) = \dfrac{x^2+y}{x-y}$, $\quad x-y \neq 0$;

(b) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$, $\quad (x,y) \neq (0,0)$;

(c) $f(x,y) = \dfrac{y^2+x}{y^2-x^2}$, $\quad y^2-x^2 \neq 0$;

(d) $f(x,y) = \dfrac{x-y^2}{x^3+y}$, $\quad x^3+y \neq 0$;

(e) $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y}$, $\quad x^2+y \neq 0$.

6.10. Feladat. Számítsd ki a következő határértékeket (ha léteznek):

(a) $\lim\limits_{(x,y)\to(3,\infty)} \dfrac{xy-1}{y+1}$;

(b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$;

(c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)} \dfrac{\sin xy}{x}$;

(d) $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \dfrac{x+y}{x^2+y^2}$;

(e) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{xy}$;

(f) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x}{x+y}$;

(g) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^2}{x^4+y^4}$;

(h) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{(x+y)\,\mathrm{tg}(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

(i) $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,3)} \left(1+\dfrac{y}{x}\right)^x$;

(j) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y^2}{|x|+|y|}$;

(k) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$;

(l) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$.

6.2.3. Többváltozós függvények folytonossága

6.11. Feladat. Az értelmezést felhasználva igazold, hogy a következő függvények folytonosak a megadott pontban

(a) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ f(x,y)=xy+2$ és $(x_0,y_0)=(2,3)$;

(b) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ f(x,y)=x^2+xy$ és $(x_0,y_0)=(1,3)$;

(c) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2+y^2}{|x|+|y|}, & \text{ha } (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & \text{ha } (x,y)=(0,0)\end{cases}$ és $(x_0,y_0)=(0,0)$;

(d) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ f(x,y)=\dfrac{x}{y}$ és $(x_0,y_0)=(1,2)$;

(e) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & \text{ha } (x,y)=(0,0)\end{cases}$ és $(x_0,y_0)=(0,0)$;

(f) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R},\ f(x,y,z)=\begin{cases}\dfrac{x^2y+z^4}{x^2+y^2+z^2}, & \text{ha } (x,y,z)\neq(0,0,0),\\ 0, & \text{ha } (x,y,z)=(0,0,0)\end{cases}$ és $(x_0,y_0,z_0)=(0,0,0)$.

6.12. Feladat. Igazold, hogy a következő függvények folytonosak:

(a) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^6}{x^2+y^4}, & \text{ha } (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \text{ha } (x,y)=(0,0)\end{cases}$;

(b) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+|xy|^{3/2}+y^3}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \text{ha } (x,y)=(0,0)\end{cases}$;

(c) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x^2+y^4)}{x^2+y^4}, & \text{ha } (x,y)\neq(0,0)\\ 1, & \text{ha } (x,y)=(0,0)\end{cases}$;

(d) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x^2-y^2)}{x-y}, & \text{ha } x\neq y\\ x+y, & \text{ha } x=y\end{cases}$.

6.13. Feladat. Igazold, hogy a következő függvényeknek léteznek az iterált határértékei az origóban, de nem folytonosak az origóban:

(a) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \text{ha } (x,y)=(0,0)\end{cases}$;

(b) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}, & \text{ha } (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \text{ha } (x,y)=(0,0)\end{cases}$;

(c) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y)\neq(0,0)\\ 1, & \text{ha } (x,y)=(0,0)\end{cases}$;

(d) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x^2+y^2)}{(x+y)^2}, & \text{ha } x+y\neq 0\\ 1, & \text{ha } x+y=0\end{cases}$.

6.14. Feladat. Tanulmányozd a következő függvények folytonosságát:

(a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x-y}, & \text{ha } x \neq y \\ 0, & \text{ha } x = y \end{cases};$

(b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2 + \sin(x^3 + y^5)}{x^2 + y^4}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases};$

(c) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x+y}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases};$

(d) $f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2-y^2}, & \text{ha } x^2+y^2 \leq 1 \\ 0, & \text{ha } x^2+y^2 > 1 \end{cases};$

(e) $f(x,y) = \begin{cases} (1+xy)^{\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}}, & \text{ha } x > 0 \text{ és } y > 0 \\ 1, & \text{ha } x = 0 \text{ vagy } y = 0 \end{cases};$

(f) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{\ln(1+x^2+y^2)}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 1, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$

6.3. Megoldások

6.3.1. Egyváltozós függvények határértéke

6.1. Feladat. Az értelmezést felhasználva igazold, hogy

(a) $\lim\limits_{x\to 1}(x^2-3x+3)=1$;

Megoldás. Az értelmezés alapján meg kell mutatni, hogy bármely $\varepsilon>0$ szám esetén létezik olyan $\delta_\varepsilon>0$ szám (ezt meg kell határozni ε függvényében), hogy ha $|x-x_0|=|x-1|<\delta_\varepsilon$, $x\neq 1$, akkor

$$|f(x)-\ell|=|x^2-3x+3-1|<\varepsilon. \tag{6.1}$$

Rögzítjük az $\varepsilon>0$ számot és meghatározzuk a δ_ε-t a következő módon. Az $x^2-3x+3-1=x^2-3x+2=(x-1)^2-(x-1)$ alakba írható és

$$\begin{aligned}|x^2-3x+3-1| &= |(x-1+1)^2-3(x-1+1)+2|\\ &= |(x-1)^2+2(x-1)+1-3(x-1)-3+2|\\ &= |(x-1)^2-(x-1)| \overset{(\dagger)}{\leq} |(x-1)^2|+|x-1|\\ &= |x-1|^2+|x-1| \overset{(\ddagger)}{<} \delta_\varepsilon^2+\delta_\varepsilon,\end{aligned} \tag{6.2}$$

ahol felhasználtuk

- a $(\dagger)$ egyenlőtlenségben, hogy $|a\pm b|\leq |a|+|b|$,
- illetve a $(\ddagger)$ egyenlőtlenségben a $|x-1|<\delta_\varepsilon$ feltételt.

Tehát, ha δ_ε-ra teljesül a $\delta_\varepsilon^2+\delta_\varepsilon\leq\varepsilon$ másodfokú egyenlőtlenség, akkor a (6.2) összefüggésből következik a (6.1) összefüggés. Így a $\delta_\varepsilon^2+\delta_\varepsilon<\varepsilon$ másodfokú egyenlőtlenség kell megoldani.

Ha a $\delta_\varepsilon\leq 1$ feltételt is megszabjuk, akkor $\delta_\varepsilon^2\leq\delta_\varepsilon$, továbbá

$$\delta_\varepsilon^2+\delta_\varepsilon\leq 2\delta_\varepsilon. \tag{6.3}$$

Ez alapján, ha δ_ε teljesíti a $2\delta_\varepsilon\leq\varepsilon$ egyenlőtlenséget, akkor teljesíteni fogja a $\delta_\varepsilon^2+\delta_\varepsilon\leq\varepsilon$ egyenlőtlenséget is. Tehát a $\delta_\varepsilon\leq 1$ plusz feltétel megszabásával elég megoldani az egyszerűbb $2\delta_\varepsilon\leq\varepsilon$ egyenlőtlenséget, ahonnan $\delta_\varepsilon\leq\frac{\varepsilon}{2}$.

Összefoglalva, legyen $\delta_\varepsilon=\min\left\{1,\frac{\varepsilon}{2}\right\}$ (vagy egy ennél kisebb szám), mert ekkor $\delta_\varepsilon\leq 1$ és $\delta_\varepsilon<\frac{\varepsilon}{2}$, továbbá a (6.3) és a (6.2) összefüggésekből következik, hogy ha $|x-1|<\delta_\varepsilon$, akkor

$$|x^2-3x+3-1| \overset{(6.2)}{<} \delta_\varepsilon^2+\delta_\varepsilon \overset{(6.3)}{<} 2\delta_\varepsilon = 2\min\left\{1,\frac{\varepsilon}{2}\right\} \leq 2\cdot\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

□

(b) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{(x-1)^2}=+\infty$;

Megoldás. Értelmezés alapján meg kell mutatni, hogy minden $K>0$ számra létezik olyan $\delta_K>0$ szám, hogy $|x-1|<\delta_K$, $x\neq 1$ esetén

$$\frac{1}{(x-1)^2}>K, \tag{6.4}$$

(az $\frac{1}{(x-1)^2}$ átlépi a tetszőlegesen megadott K korlátot, ha az x szám δ_K-nál kisebb távolságra van az 1-től). Ebből az egyenlőtlenségből kifejezzük $|x-1|$-et: keresztbe szorozva és négyzetgyököt vonva

$$\frac{1}{(x-1)^2} > K \iff \frac{1}{K} > (x-1)^2 \iff \frac{1}{\sqrt{K}} > \sqrt{(x-1)^2} = |x-1|, \quad \text{ha } x \neq 1. \quad (6.5)$$

Legyen $\delta_K = \frac{1}{\sqrt{K}}$, mivel a (6.5) összefüggések alapján az $|x-1| < \delta_K$, $x \neq 1$ egyenlőtlenségből következik a (6.4) egyenlőtlenség, amit igazolni akartunk. □

(c) $\lim\limits_{x\to a} \cos x = \cos a$, $a \in \mathbb{R}$;

Megoldás. Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$|\cos x - \cos a| = \left|-2\sin\left(\frac{x+a}{2}\right)\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)\right| \le 2\left|\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)\right| \le 2\cdot\frac{|x-a|}{2} = |x-a|.$$

Tehát minden $\varepsilon > 0$ szám esetén létezik $\delta_\varepsilon = \varepsilon$ úgy, hogy minden $x \neq a$ esetén, amelyre $|x-a| < \delta_\varepsilon$ teljesül a fenti levezetés alapján, hogy $|\cos x - \cos a| \le |x-a| < \delta_\varepsilon = \varepsilon$. □

(d) $\lim\limits_{x\to a} \ln x = \ln a$, $a > 0$;

Megoldás. Minden $\varepsilon > 0$ szám esetén

$$|\ln x - \ln a| < \varepsilon \iff -\varepsilon < \ln x - \ln a < \varepsilon \iff -\varepsilon < \ln\left(\frac{x}{a}\right) < \varepsilon \iff$$
$$\iff e^{-\varepsilon} < \frac{x}{a} < e^{\varepsilon} \iff ae^{-\varepsilon} < x < ae^{\varepsilon} \iff -a(1-e^{-\varepsilon}) < x-a < a(e^{\varepsilon}-1).$$

Tehát bármely $\varepsilon > 0$ számra létezik $\delta_\varepsilon = \min\{a(1-e^{-\varepsilon}), a(e^{\varepsilon}-1)\} > 0$ úgy, hogy minden $x \neq a$ szám esetén, amelyre $|x-a| < \delta_\varepsilon$ fennáll, hogy $-a(1-e^{-\varepsilon}) < x-a < a(e^{\varepsilon}-1)$, ahonnan a fenti egyenértékűségek alapján következik, hogy $|\ln x - \ln a| < \varepsilon$. □

(e) $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = \begin{cases} +\infty, & \text{ha } a > 1 \\ 1, & \text{ha } a = 1 \\ 0, & \text{ha } 0 < a < 1 \end{cases}$;

Megoldás.

- Ha $a > 1$, akkor minden $x > 0$ esetén

$$a^x > K \iff \ln(a^x) > \ln K \iff x\ln a < \ln K \iff x < \frac{\ln K}{\ln a},$$

ahol felhasználtuk, hogy a természetes alapú logaritmus függvény növekvő és $\ln a > 0$, minden $a > 1$ esetén. Ezek alapján minden $K > 0$ (feltehetjük, hogy $K > 1$) számra létezik $\delta_K = \frac{\ln K}{\ln a} > 0$ úgy, hogy minden $x > \delta_K$ esetén

$$x < \delta_K = \frac{\ln K}{\ln a} \iff a^x > K.$$

- Ha $a = 1$, akkor $a^x = 1$, minden $x \in \mathbb{R}$, így minden $\varepsilon > 0$ számra létezik $\delta_\varepsilon = \varepsilon$ úgy, hogy minden $x > \varepsilon$ esetén $|1^x - 1| = 0 < \varepsilon$.

- Ha $0 < a < 1$, akkor minden $x > 0$ esetén

$$0 < a^x < \varepsilon \iff \ln(a^x) < \ln\varepsilon \iff x\ln a < \ln\varepsilon \iff x > \frac{\ln\varepsilon}{\ln a},$$

ahol felhasználtuk, hogy a természetes alapú logaritmus függvény növekvő és $\ln a < 0$, minden $0 < x < 1$ esetén. Ezek alapján minden $\varepsilon > 0$ számra (feltehetjük, hogy $\varepsilon < 1$) létezik $\delta_\varepsilon = \frac{\ln\varepsilon}{\ln a}$ úgy, hogy minden $x > \delta_\varepsilon$ esetén

$$x < \delta_\varepsilon = \frac{\ln\varepsilon}{\ln a} \iff 0 < a^x < \varepsilon \iff |a^x - 0| < \varepsilon.$$

□

(f) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e.$

Megoldás. Tetszőleges $x > 1$ esetén legyen $n = [x]$, az x szám egész része. Ekkor teljesül, hogy $n \le x < n+1$, ahonnan

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{x} \le \frac{1}{n} \iff 1 + \frac{1}{n+1} < 1 + \frac{1}{x} \le 1 + \frac{1}{n} \iff$$
$$\iff \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \le \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Az 1.4. Feladatban igazoltuk, hogy az $e'_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ általános tagú sorozat csökkenő és határértéke e. Ugyanebben a feladatban igazoltuk azt is, hogy az $e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ általános tagú sorozat növekvő és határértéke e. Ez alapján az $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\cdot\frac{n}{n+1} = e_{n+1}\cdot\frac{n}{n+1}$ általános tagú sorozat növekvő (két növekvő sorozat szorzata) és határértéke e. Így minden $\varepsilon > 0$ számra létezik $n_\varepsilon > 0$ úgy, hogy minden $n \ge n_\varepsilon$ esetén

$$e - \varepsilon < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \le \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} < e + \varepsilon. \tag{6.6}$$

Tehát, ha $\delta_\varepsilon > n_\varepsilon + 1$, akkor minden $x > \delta_\varepsilon$ esetén $n + 1 > x > \delta_\varepsilon > n_\varepsilon + 1$, így $n > n_\varepsilon$ és teljesülnek a (6.6) egyenlőtlenségek, ahonnan

$$e - \varepsilon < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x < e + \varepsilon \iff \left|\left(1+\frac{1}{x}\right)^x - e\right| < \varepsilon.$$

□

6.2. Feladat. A L'Hôspital-szabály felhasználása nélkül igazold, hogy

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1;$

Megoldás. Geometriai megfontolások alapján

$$\sin x \le x \le \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),$$

ahonnan $\cos x \le \frac{\sin x}{x} \le 1$, minden $0 < x < \frac{\pi}{2}$ esetén. Hasonlóan, mivel a szinusz és a tangens függvények páratlanok, ezért $\sin y \ge y \ge \operatorname{tg} y = \frac{\sin y}{\cos y}$, minden $-\frac{\pi}{2} < y < 0$ esetén, ahonnan $\cos y \le \frac{\sin y}{y} \le 1$. Összegezve,

$$\cos x \le \frac{\sin x}{x} \le 1, \quad \forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Mivel $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$, ezért a fogó tétel alapján létezik a $\frac{\sin x}{x}$ függvénynek határértéke a 0-ban és $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$. □

(b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e;$

Megoldás.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x &\overset{(y=-x)}{=} \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{-y}\right)^{-y} = \lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y-1}{y}\right)^{-y} = \\
&= \lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y}{y-1}\right)^{y} = \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}\cdot\left(1+\frac{1}{y-1}\right) = \\
&\overset{(z=y-1)}{=} \lim_{z\to+\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{z}\cdot\left(1+\frac{1}{z}\right) = e\cdot 1 = e.
\end{aligned}$$

□

(c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1;$

Megoldás. Kiszámoljuk a jobb és bal oldali határértékeket:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(x+1)}{x} &= \lim_{x\to0^+}\ln\left((1+x)^{\frac{1}{x}}\right) = \ln\left(\lim_{x\to0^+}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right) = \ln\left(\lim_{x\to0^+}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right) \\
&\overset{(y=\frac{1}{x})}{=} \ln\left(\lim_{y\to+\infty}(1+\frac{1}{y})^y\right) = \ln(e) = 1, \\
\lim_{x\to0^-}\frac{\ln(x+1)}{x} &= \lim_{x\to0^-}\ln\left((1+x)^{\frac{1}{x}}\right) = \ln\left(\lim_{x\to0^-}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right) = \ln\left(\lim_{x\to0^-}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right) \\
&\overset{(y=\frac{1}{x})}{=} \ln\left(\lim_{y\to-\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\right) = \ln(e) = 1.
\end{aligned}$$

Mivel a jobb és bal oldali határértékek megegyeznek, ezért $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(x+1)}{x} = e.$ □

(d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x} = \ln a.$

Megoldás. Az $a=1$ esetben a számláló 0, ezért abban az esetben triviálisan igaz az állítás. A többi eset visszavezethető az $a=e$ esetre: minden $a>0$, $a\neq 1$ esetén

$$\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x} = \lim_{x\to0}\frac{e^{x\ln a}-1}{x\ln a}\cdot\ln a \overset{(*)}{=} \lim_{y\to0}\frac{e^y-1}{y}\cdot\ln a,$$

ahol a $(*)$ egyenlőségben $y = x\ln a$ változócserét végeztünk. Az $a=e$ esetben

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x} \overset{(\dagger)}{=} \lim_{y\to0}\frac{y}{\ln(1+y)} = \frac{1}{\lim\limits_{y\to0}\frac{\ln(1+y)}{y}} = \frac{1}{1} = 1,$$

ahol a $(\dagger)$ egyenlőségben $y=e^x-1$ változócserét végeztünk. □

6.3. Feladat. Igazold, hogy a következő függvényhatárértékek nem léteznek:

(a) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x};$

Megoldás. Ha x felülről tart a 0-hoz, akkor az $\frac{1}{x}$ tart $+\infty$-hez, illetve ha x alulról tart a 0-hoz, akkor az $\frac{1}{x}$ tart $-\infty$-hez. Ezért legyen $x'_n = \frac{1}{n} > 0$, $n \in \mathbb{N}^*$, amelyre $\lim\limits_{n\to\infty} x'_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ és $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{x'_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} n = +\infty$, illetve $x''_n = -\frac{1}{n} < 0$, $n \in \mathbb{N}^*$, amelyre $\lim\limits_{n\to\infty} x''_n = \lim\limits_{n\to\infty} -\frac{1}{n} = 0$ és $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{x''_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{-\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} -n = -\infty$. Mivel a két határérték nem egyezik meg, ezért a Heine-kritérium következménye alapján nem létezik a $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}$ függvényhatárérték. □

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \sin \dfrac{1}{x}$;

Megoldás. Legyen $x'_n = \frac{1}{2\pi n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, amelyre $\lim\limits_{n\to\infty} x'_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi n} = 0$ és

$$\lim_{n\to\infty} \sin \frac{1}{x'_n} = \lim_{n\to\infty} \sin \frac{1}{\frac{1}{2\pi n}} = \lim_{n\to\infty} \sin 2\pi n = \lim_{n\to\infty} \sin 0 = 0.$$

Illetve, legyen $x''_n = \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}$, $n \in \mathbb{N}^*$, amelyre $\lim\limits_{n\to\infty} x''_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}} = 0$ és

$$\lim_{n\to\infty} \sin \frac{1}{x''_n} = \lim_{n\to\infty} \sin \frac{1}{\frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}} = \lim_{n\to\infty} \sin \left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right) = \lim_{n\to\infty} \sin \frac{\pi}{2} = 1.$$

Mivel a két határérték nem egyezik meg, ezért a Heine-kritérium következménye alapján nem létezik a $\lim\limits_{x\to 0} \sin \frac{1}{x}$ függvényhatárérték. □

(c) $\lim\limits_{x\to\infty} (1 - \cos x)e^x$;

Megoldás. Legyen $x'_n = 2\pi n$, $n \in \mathbb{N}^*$, amelyre $\lim\limits_{n\to\infty} x'_n = \lim\limits_{n\to\infty} 2\pi n = +\infty$ és

$$\lim_{n\to\infty} (1 - \cos x'_n)e^{x'_n} = \lim_{n\to\infty} (1 - \cos(2\pi n))e^{2\pi n} = \lim_{n\to\infty} (1 - 1) \cdot e^{2\pi n} = \lim_{n\to\infty} 0 = 0.$$

Legyen $x''_n = (2n + 1)\pi$, $n \in \mathbb{N}^*$, amelyre $\lim\limits_{n\to\infty} x''_n = \lim\limits_{n\to\infty} (2n + 1)\pi = 0$ és

$$\lim_{n\to\infty} (1 - \cos x''_n) \cdot e^{x''_n} = \lim_{n\to\infty} [1 - \cos((2n + 1)\pi)] \cdot e^{(2n+1)\pi} = \lim_{n\to\infty} 2 \cdot e^{(2n+1)\pi} = +\infty.$$

Mivel a két sorozatra a határértékek nem egyeznek meg, ezért a Heine-kritérium következménye alapján nem létezik a $\lim\limits_{x\to\infty} (1 - \cos x)e^x$ függvényhatárérték. □

(d) $\lim\limits_{x\to 1} e^{\frac{x}{x-1}}$.

Megoldás. Legyen $x'_n = 1 + \frac{1}{n} > 1$, $n \in \mathbb{N}^*$, amelyre $\lim\limits_{n\to\infty} x'_n = \lim\limits_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$ és

$$\lim_{n\to\infty} e^{\frac{x'_n}{x'_n - 1}} = \lim_{n\to\infty} e^{1 + \frac{1}{x'_n - 1}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{(1+\frac{1}{n})-1}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{\frac{1}{n}}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} 1 + n} = +\infty,$$

illetve $x''_n = 1 - \frac{1}{n} < 1$, $n \in \mathbb{N}^*$, amelyre $\lim\limits_{n\to\infty} x''_n = \lim\limits_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{n} = 1$ és

$$\lim_{n\to\infty} e^{\frac{x'_n}{x'_n - 1}} = \lim_{n\to\infty} e^{1 + \frac{1}{x'_n - 1}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{(1-\frac{1}{n})-1}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{-\frac{1}{n}}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} 1 - n} = 0,$$

Mivel a két sorozatra a határértékek nem egyeznek meg, ezért a Heine-kritérium következménye alapján nem létezik a $\lim\limits_{x\to 1} e^{\frac{x}{x-1}}$ függvényhatárérték. □

6.4. Feladat. Számítsd ki a következő függvények jobb és bal oldali határértékeit az $x = 0$ pontban:

(a) $f(x) = \dfrac{\left|\sin \frac{1}{x}\right|}{1 + 2^{\frac{1}{x}}}$;

Megoldás. Az $x_n = \left(-\frac{1}{2\pi n}\right)_{n\geq 1}$ sorozatra $x_n < 0$, minden $n \geq 1$ esetén, és $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, továbbá

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\sin \frac{1}{x_n}\right|}{1 + 2^{\frac{1}{x_n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|\sin(-2\pi n)|}{1 + 2^{-2\pi n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|0|}{1 + 2^{-2\pi n}} = 0.$$

Az $y_n = \left(-\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n}\right)_{n\geq 1}$ sorozatra $y_n < 0$, minden $n \geq 1$ esetén, és $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$, továbbá

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\sin \frac{1}{y_n}\right|}{1 + 2^{\frac{1}{y_n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\sin(-\frac{\pi}{2} - 2\pi n)\right|}{1 + 2^{\frac{\pi}{2}-2\pi n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|-1|}{1 + 2^{\frac{\pi}{2}-2\pi n}} = \frac{1}{1+0} = 1.$$

Mivel a két sorozatra a határértékek nem egyeznek meg, ezért nem létezik a függvénynek bal oldali határértéke a 0-ban.

A függvény jobb oldali határértéke

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\left|\sin \frac{1}{x}\right|}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} = 0,$$

mivel $|\sin \frac{1}{x}| \in [-1, 1]$, minden $x \neq 0$ és $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{+\infty} = 0$.

□

(b) $f(x) = x \cdot \dfrac{\left|\sin \frac{1}{x}\right|}{1 + 2^{\frac{1}{x}}}$;

Megoldás. A függvény bal oldali határértéke:

$$\lim_{x\to 0^-} x \cdot \frac{\left|\sin \frac{1}{x}\right|}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} = 0,$$

mert $\lim\limits_{x\to 0^-} x = 0$, $|\sin \frac{1}{x}| \in [-1, 1]$, minden $x \neq 0$ esetén, és $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} = 1$.

A függvény jobb oldali határértéke:

$$\lim_{x\to 0^+} x \cdot \frac{\left|\sin \frac{1}{x}\right|}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} = 0,$$

mert $\lim\limits_{x\to 0^+} x = 0$, $|\sin \frac{1}{x}| \in [-1, 1]$, minden $x \neq 0$ esetén és $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} = 0$. □

(c) $f(x) = \dfrac{\cos \frac{1}{x^2}}{x}$;

Megoldás. Legyen $x_n = -\frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$, minden $n \geq 1$ esetén. Ekkor $x_n < 0$, minden $n \geq 1$ esetén, és $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} -\frac{1}{\sqrt{2\pi n}} = 0$, továbbá

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cos \frac{1}{x_n^2}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cos \frac{1}{(-\frac{1}{\sqrt{2\pi n}})^2}}{-\frac{1}{\sqrt{2\pi n}}} = \lim_{n\to\infty} -\sqrt{2\pi n} \cdot \cos(2\pi n) = \lim_{n\to\infty} -\sqrt{2\pi n} = -\infty.$$

Legyen $y_n = -\frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2}+2\pi n}}$, minden $n \geq 1$ esetén. Ekkor $y_n < 0$, minden $n \geq 1$ esetén, és $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} -\frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2}+2\pi n}} = 0$, továbbá

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cos\frac{1}{y_n^2}}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cos\frac{1}{(-\frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2}+2\pi n}})^2}}{-\frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2}+2\pi n}}} = \lim_{n\to\infty} -\sqrt{\frac{\pi}{2}+2\pi n}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty} -\sqrt{\frac{\pi}{2}+2\pi n}\cdot 0 = 0.$$

Mivel a két sorozatra a határértékek nem egyeznek meg, ezért nem létezik bal oldali határértéke a függvénynek a 0 pontban.

Legyen $x'_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$, minden $n \geq 1$ esetén. Ekkor $x'_n > 0$, minden $n \geq 1$ esetén, és $\lim\limits_{n\to\infty} x'_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} = 0$, továbbá

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cos\frac{1}{(x'_n)^2}}{x'_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cos\frac{1}{(\frac{1}{\sqrt{2\pi n}})^2}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi n}}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2\pi n}\cdot\cos(2\pi n) = \lim_{n\to\infty} \sqrt{2\pi n} = +\infty.$$

Legyen $y'_n = \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2}+2\pi n}}$, minden $n \geq 1$ esetén. Ekkor $y'_n > 0$, minden $n \geq 1$ esetén és $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2}+2\pi n}} = 0$, továbbá

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cos\frac{1}{(y'_n)^2}}{y'_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cos\frac{1}{(\frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2}+2\pi n}})^2}}{\frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{2}+2\pi n}}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2}+2\pi n}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2}+2\pi n}\cdot 0 = 0.$$

Mivel a két sorozatra a határértékek nem egyeznek meg, ezért nem létezik jobb oldali határértéke a függvénynek a 0 pontban. □

(d) $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

Megoldás. A függvény bal oldali határértéke az $x = 0$ pontban:

$$\lim_{x\to 0^+} x + \frac{1}{x} = \lim_{x\to 0^+} x + \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = 0 + \infty = +\infty.$$

A függvény jobb oldali határértéke az $x = 0$ pontban:

$$\lim_{x\to 0^-} x + \frac{1}{x} = \lim_{x\to 0^-} x + \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = 0 - \infty = -\infty.$$

A függvénynek nem létezik határértéke az $x = 0$ pontban. □

6.5. Feladat. Számítd ki a következő függvényhatárértékeket:

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}$;

Megoldás. Ha $n = 0$, akkor $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^n} = \lim\limits_{x\to\infty} \ln x = +\infty$.

Ha $n > 0$, akkor „$\frac{\infty}{\infty}$” típusú határozatlansági esettel van dolgunk, ezért használhatjuk a L'Hôspital-szabályt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\ln x)'}{(x^n)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{nx^{n-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{nx^n} = 0.$$

□

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}$;

Megoldás. Ha $n = 0$, akkor $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n} = \lim\limits_{x\to\infty} e^x = +\infty$.
Ha $n \geq 1$, akkor „$\frac{\infty}{\infty}$" típusú határozatlansági esettel van dolgunk és használjuk a L'Hôspital-szabályt n-szer

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n} = \lim_{x\to\infty} \frac{(e^x)'}{(x^n)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{nx^{n-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{(e^x)'}{(nx^{n-1})'} = \ldots = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{n!\,x}$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{(e^x)'}{(n!\,x)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{n!} = +\infty.$$

□

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos^3 x}{x \sin x}$;

Megoldás. Egy „$\frac{0}{0}$" típusú határozatlansági esettel van dolgunk, ezért használjuk a L'Hôspital-szabályt:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^3 x}{x\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos^3 x)'}{(x\sin x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{-3\cos^2 x(-\sin x)}{\sin x + x\cos x} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{(3\cos^2 x \sin x)'}{(\sin x + x\cos x)'}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{-6\cos x \sin^2 x + 3\cos^3 x}{\cos x + \cos x - x\sin x} = \frac{-6\cdot 0 + 3\cdot 1}{1+1-0} = \frac{3}{2}.$$

□

(d) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$;

Megoldás. Egy „1^∞" típusú határozatlansági esettel van dolgunk, ezért az alapot átírjuk $1+f(x)$ alakba, mivel a $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ határérték alapján $\lim\limits_{x\to 0}(1+f(x))^{\frac{1}{f(x)}} = e$, ha $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}\left[\left(1+\frac{\cos x - \cos 2x}{\cos 2x}\right)^{\frac{\cos 2x}{\cos x - \cos 2x}}\right]^{\frac{\cos x - \cos 2x}{\cos 2x}\cdot\frac{1}{x^2}}$$
$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x - \cos 2x}{x^2\cos 2x}} \overset{L'H}{=} e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\sin x + 2\sin 2x}{2x\cos 2x - 2x^2 \sin 2x}}$$
$$\overset{L'H}{=} e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\cos x + 4\cos 2x}{2\cos 2x - 4x\sin 2x - 4x\sin 2x - 4x^2\cos 2x}} \overset{L'H}{=} e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\cos x + 4\cos 2x}{(2-4x^2)\cos 2x - 8x\sin 2x}} = e^{\frac{4-1}{2}}$$
$$= e^{\frac{3}{2}}.$$

□

(e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$;

Megoldás. Egy „$\frac{0}{0}$" típusú határozatlansági esettel van dolgunk, ezért használjuk a L'Hôspital-szabályt

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{n}}-1}{x} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\left((1+x)^{\frac{1}{n}}-1\right)'}{(x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{n}(1+x)^{\frac{1}{n}-1}}{1} = \frac{1}{n}.$$

□

(f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos 2x}}{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$;

Megoldás. Bővítünk először a számláló konjugáltjával

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos 2x}}{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \lim_{x\to 0} \frac{1+x\sin x-\cos 2x}{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}(\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos 2x})}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{(\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos 2x})} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1+x\sin x-\cos 2x}{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = 1\cdot \lim_{x\to 0} \frac{1+x\sin x-(1-2\sin^2 x)}{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x\sin x+2\sin^2 x}{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} \cdot \frac{\frac{\sin x}{x}+2\frac{\sin^2 x}{x^2}}{\frac{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{x^2}} = \frac{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}+2\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2}}{\frac{1}{4}\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{(\frac{x}{2})^2}} = \frac{1+2\cdot 1}{\frac{1}{4}\cdot 1} = 12.$$

□

(g) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{\operatorname{ctg}^2 x}$;

Megoldás. „1^∞" típusú határozatlansági eset, mivel $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{ctg}^2 x = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = +\infty$. Használjuk, hogy ha $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$, akkor $\lim\limits_{x\to x_0} (1+f(x))^{\frac{1}{f(x)}} = e$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}(1+x^2)^{\operatorname{ctg}^2 x} &= \lim_{x\to 0}\left[(1+x^2)^{\frac{1}{x^2}}\right]^{x^2\operatorname{ctg}^2 x} = e^{\lim\limits_{x\to 0} x^2\operatorname{ctg}^2 x}\\ &= e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2\cos^2 x}{\sin^2 x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\cos^2 x \lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin^2 x}} = e^{1\cdot 1^2}\\ &= e.\end{aligned}$$

□

(h) $\lim\limits_{x\to 0^+}(1+\operatorname{tg}^2\sqrt{x})^{\frac{1}{2x}}$;

Megoldás. „1^∞" típusú határozatlansági eset, mivel $\lim\limits_{x\to 0^+}\operatorname{tg}^2\sqrt{x} = 0$ és $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{2x} = +\infty$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+}(1+\operatorname{tg}^2\sqrt{x})^{\frac{1}{2x}} &= \lim_{x\to 0^+}\left[(1+\operatorname{tg}^2\sqrt{x})^{\frac{1}{\operatorname{tg}^2\sqrt{x}}}\right]^{\frac{\operatorname{tg}^2\sqrt{x}}{2x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\operatorname{tg}^2\sqrt{x}}{2x}}\\ &= e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\operatorname{tg}^2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}^2}} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{2}\left(\frac{\operatorname{tg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}.\end{aligned}$$

□

(i) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}}$;

Megoldás. „1^∞" típusú határozatlansági eset, mivel $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ és

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x-\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sin x}\cdot\frac{1}{\frac{x}{\sin x}-1} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{x}{\sin x}-1} = +\infty,$$

mert $|x| > \sin|x|$, minden $x\neq 0$ esetén. Ezért

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}} = \lim_{x\to 0}\left[\left(1+\frac{\sin x-x}{x}\right)^{\frac{x}{\sin x-x}}\right]^{\frac{\sin x-x}{x}\frac{\sin x}{x-\sin x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}-\frac{\sin x}{x}} = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

□

(j) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{x^2}$;

Megoldás.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{x^2} = \left(\frac{1}{1}\right)^0 = 1.$$

□

(k) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+5x)}{x}$;

Első megoldás. „$\frac{0}{0}$" típusú határozatlansági eset, használjuk a L'Hôspital-szabályt:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+5x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{5}{1+5x}}{1} = 5.$$

□

Második megoldás.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+5x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+5x)}{5x}\cdot 5 \overset{(*)}{=} \lim_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y}\cdot 5 = 1\cdot 5 = 5,$$

ahol a $(*)$ egyenlőségben $y = 5x$ változócserét végeztünk. □

(l) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^x - a^a}{x-a}$, ahol $a > 0$.

Megoldás. „$\frac{0}{0}$" típusú határozatlansági eset, használjuk a L'Hôspital-szabályt:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{x^x - a^a}{x-a} &= \lim_{x\to a}\frac{(x^x-a^a)'}{(x-a)'} = \lim_{x\to a}\frac{(e^{x\ln x}-a^a)'}{1} = \lim_{x\to 0} e^{x\ln x}(x\ln x)' \\ &= \lim_{x\to a} x^x\cdot(1+\ln x) \;= a^a\cdot(1+\ln a).\end{aligned}$$

□

6.3.2. Többváltozós függvények határértéke

6.6. Feladat. Az értelmezést használva igazold, hogy

(a) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,3)}(xy+2) = 8$;

Megoldás. Minden $\varepsilon > 0$ szám esetén kell találni egy $\delta_\varepsilon > 0$ számot (ami függhet ε-tól) úgy, hogy ha $\|(x,y)-(2,3)\| = \sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2} < \delta_\varepsilon$, $(x,y)\neq(2,3)$, akkor $|(xy+2)-8| < \varepsilon$.

Feltételezzük, hogy $\|(x,y)-(2,3)\| < \delta_\varepsilon$ és $(x,y)\neq(2,3)$. Ekkor a

$$\|(x,y)-(2,3)\| = \sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2} \geq |x-2|,$$
$$\|(x,y)-(2,3)\| = \sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2} \geq |y-3|$$

egyenlőtlenségek alapján $|x-2| < \delta_\varepsilon$ és $|y-3| < \delta_\varepsilon$. Továbbá szükség szerint fel fogjuk tételezni, hogy $\delta_\varepsilon \leq 1$. Ezen feltételek mellett a következő majorálást végezzük:

$$|(xy+2)-8| = |(x-2+2)(y-3+3)-6|$$

$$\begin{aligned}
&= |(x-2)(y-3)+3(x-2)+2(y-3)| \\
&\overset{(*)}{\leq} |(x-2)(y-3)|+|3(x-2)|+|2(y-3)| \\
&= |x-2|\cdot|y-3|+3\cdot|x-2|+2\cdot|y-3| \\
&\overset{(\dagger)}{<} \delta_\varepsilon\cdot\delta_\varepsilon+3\delta_\varepsilon+2\delta_\varepsilon=\delta_\varepsilon^2+5\delta_\varepsilon \overset{(\ddagger)}{\leq} \delta_\varepsilon+5\delta_\varepsilon=6\delta_\varepsilon,
\end{aligned}$$

ahol

- a $(*)$ egyenlőtlenségben felhasználtuk, hogy összegek (különbségek) abszolút értéke kisebb vagy egyenlő az abszolút értékek összegénél ($|a\pm b|\leq|a|+|b|$),
- a $(\dagger)$ egyenlőtlenségben felhasználtuk, hogy $|x-2|<\delta_\varepsilon$ és $|y-3|<\delta_\varepsilon$,
- illetve a $(\ddagger)$ egyenlőtlenségben pedig, hogy $\delta_\varepsilon^2\leq\delta_\varepsilon$, ami a $\delta_\varepsilon\leq 1$ feltevésből következik.

Ezek alapján a δ_ε számot úgy válasszuk meg, hogy a $6\delta_\varepsilon\leq\varepsilon$ (azaz $\delta_\varepsilon\leq\frac{\varepsilon}{6}$) és $\delta_\varepsilon\leq 1$ egyenlőtlenségek egyszerre teljesüljenek, vagyis $\delta_\varepsilon\leq\min\left\{\frac{\varepsilon}{6},1\right\}$. Tehát minden $\varepsilon>0$ szám esetén létezik olyan $\delta_\varepsilon=\min\left\{\frac{\varepsilon}{6},1\right\}$ (vagy ennél kisebb) pozitív szám úgy, hogy minden $\|(x,y)-(2,3)\|<\delta_\varepsilon$, $(x,y)\neq(2,3)$ feltételt teljesítő (x,y) pár esetén a fenti majorálás alapján

$$|(xy+2)-8|<6\delta_\varepsilon=6\min\left\{1,\frac{\varepsilon}{6}\right\}\leq\varepsilon,$$

tehát értelmezés szerint az $f(x,y)=xy+2$ függvénynek van határértéke a $(2,3)$ pontban és $\lim\limits_{(x,y)\to(2,3)}(xy+2)=8$. □

(b) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)}\dfrac{x}{y}=\dfrac{1}{2}$;

Megoldás. Minden $\varepsilon>0$ szám esetén kell találni egy $\delta_\varepsilon>0$ számot (ez függ az ε-tól) úgy, hogy ha $\|(x,y)-(1,2)\|=\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}<\delta_\varepsilon$, $(x,y)\neq(1,2)$, akkor $\left|\frac{x}{y}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$. Feltételezzük, hogy $\|(x,y)-(1,2)\|<\delta_\varepsilon$ és $(x,y)\neq(1,2)$. Ekkor a

$$\begin{aligned}
\|(x,y)-(1,2)\|&=\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}\geq|x-1| \text{ és}\\
\|(x,y)-(1,2)\|&=\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}\geq|y-2|
\end{aligned}$$

egyenlőtlenségek alapján $|x-1|<\delta_\varepsilon$ és $|y-2|<\delta_\varepsilon$. A következő majorálást végezzük:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{x}{y}-\frac{1}{2}\right|&=\left|\frac{2x-y}{2y}\right|=\left|\frac{2(x-1+1)-(y-2+2)}{2y}\right|=\left|\frac{2(x-1)-(y-2)}{2y}\right|\\
&\overset{(*)}{\leq}\frac{2|x-1|+|y-2|}{2|y|}\overset{(\dagger)}{<}\frac{2\delta_\varepsilon+\delta_\varepsilon}{2|y|}=\frac{3\delta_\varepsilon}{2|y|}\overset{(\ddagger)}{\leq}\frac{3\delta_\varepsilon}{2\cdot 1}=\frac{3}{2}\delta_\varepsilon,
\end{aligned}$$

ahol

- a $(*)$ egyenlőtlenségben felhasználtuk, hogy összegek (különbségek) abszolút értéke kisebb vagy egyenlő az abszolút értékek összegénél,
- a $(\dagger)$ egyenlőtlenségben felhasználtuk, hogy $|x-2|<\delta_\varepsilon$ és $|y-3|<\delta_\varepsilon$, illetve
- a $(\ddagger)$ egyenlőtlenségben az $1\leq|y|$ minorálást használjuk az $|y|$-ra, amelyet következőképpen kapunk:

  $$|y-2|<\delta_\varepsilon \iff -\delta_\varepsilon<y-2<\delta_\varepsilon \iff 2-\delta_\varepsilon<y<2+\delta_\varepsilon$$

  alapján kapjuk, hogy $2-\delta_\varepsilon<y\leq|y|$, továbbá ha feltételezzük, hogy $\delta_\varepsilon\leq 1$, akkor adódik, hogy $1\leq 2-\delta_\varepsilon<|y|$.

Ez alapján a δ_ε számot úgy válasszuk meg, hogy a $\frac{3}{2}\delta_\varepsilon \le \varepsilon$ (azaz $\delta_\varepsilon \le \frac{2}{3}\varepsilon$) és $\delta_\varepsilon \le 1$ egyenlőtlenségek egyszerre teljesüljenek, vagyis $\delta_\varepsilon \le \min\left\{\frac{2}{3}\varepsilon, 1\right\}$. Tehát minden $\varepsilon > 0$ szám esetén létezik olyan $\delta_\varepsilon = \min\left\{\frac{2}{3}\varepsilon, 1\right\}$ (vagy ennél kisebb) pozitív szám úgy, hogy minden $\|(x,y)-(1,2)\| < \delta_\varepsilon$, $(x,y) \ne (1,2)$ feltételt teljesítő (x,y) pár esetén a fenti majorálás alapján

$$\left|\frac{x}{y}-\frac{1}{2}\right| < \frac{3}{2}\delta_\varepsilon = \frac{3}{2}\min\left\{1, \frac{\varepsilon}{6}\right\} \le \varepsilon,$$

tehát értelmezés szerint az $f(x,y) = \frac{x}{y}$ függvénynek van határértéke a $(1,2)$ pontban és $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \frac{x}{y} = \frac{1}{2}$. □

(c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} = 0;$

Megoldás. Minden $\varepsilon > 0$ szám esetén kell találni egy $\delta_\varepsilon > 0$ számot (ez függ az ε-tól) úgy, hogy ha $\|(x,y)-(0,0)\| = \sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2} < \delta_\varepsilon$, $(x,y) \ne (0,0)$, akkor $\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2} - 0\right| < \varepsilon$. Feltételezzük, hogy $\|(x,y)-(0,0)\| < \delta_\varepsilon$, $(x,y) \ne (0,0)$. Ekkor a

$$\|(x,y)-(0,0)\| = \|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2} \ge |x| \text{ és}$$
$$\|(x,y)-(0,0)\| = \|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2} \ge |y|$$

egyenlőtlenségek alapján $|x| < \delta_\varepsilon$ és $|y| < \delta_\varepsilon$. A következő majorálást végezzük:

$$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2} - 0\right| = \left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right| = \frac{x^2}{x^2+y^2}\cdot|y| \overset{(\dagger)}{\le} \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}\cdot|y| = |y| \overset{(*)}{<} \delta_\varepsilon$$

ahol

- a $(\dagger)$ egyenlőtlenségben az $x^2 \le x^2+y^2$ majorálást végeztük,
- a $(*)$ egyenlőtlenségben pedig felhasználtuk, hogy $|y| < \delta_\varepsilon$.

Ez alapján a δ_ε számot úgy válasszuk meg, hogy a $\delta_\varepsilon \le \varepsilon$ egyenlőtlenség teljesüljön. Tehát minden $\varepsilon > 0$ szám esetén létezik olyan $\delta_\varepsilon = \varepsilon$ (vagy ennél kisebb) pozitív szám úgy, hogy minden $\|(x,y)-(0,0)\| < \delta_\varepsilon$, $(x,y) \ne (0,0)$ feltételt teljesítő (x,y) pár esetén a fenti majorálás alapján

$$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2} - 0\right| < \delta_\varepsilon = \varepsilon,$$

tehát értelmezés szerint az $f(x,y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2}$ függvénynek van határértéke a $(0,0)$ pontban és $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = 0$. □

(d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = 0;$

Megoldás. Minden $\varepsilon > 0$ szám esetén kell találni egy $\delta_\varepsilon > 0$ számot (ez függ az ε-tól) úgy, hogy ha $\|(x,y)-(0,0)\| = \sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2} < \delta_\varepsilon$, $(x,y) \ne (0,0)$, akkor $\left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} - 0\right| < \varepsilon$. Feltételezzük, hogy $\|(x,y)-(0,0)\| < \delta_\varepsilon$, $(x,y) \ne (0,0)$. Ekkor a

$$\|(x,y)-(0,0)\| = \|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2} \ge |x| \text{ és}$$
$$\|(x,y)-(0,0)\| = \|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2} \ge |y|$$

egyenlőtlenségek alapján $|x| < \delta_\varepsilon$ és $|y| < \delta_\varepsilon$. A következő majorálást végezzük:

$$\left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} - 0\right| = \left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{|x^3|}{x^2+y^2} + \frac{|y^3|}{x^2+y^2} = \frac{x^2}{x^2+y^2} \cdot |x| + \frac{y^2}{x^2+y^2} \cdot |y|$$
$$\stackrel{(\dagger)}{\leq} \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} \cdot |x| + \frac{y^2+x^2}{x^2+y^2} \cdot |y| = |x| + |y| \stackrel{(*)}{<} \delta_\varepsilon + \delta_\varepsilon = 2\delta_\varepsilon,$$

ahol

- a $(\dagger)$ egyenlőtlenségben az $x^2 \leq x^2 + y^2$ és $y^2 \leq x^2 + y^2$ majorálást végeztük,
- a $(*)$ egyenlőtlenségben pedig felhasználtuk, hogy $|x| < \delta_\varepsilon$ és $|y| < \delta_\varepsilon$.

Ez alapján a δ_ε számot úgy válasszuk meg, hogy a $2\delta_\varepsilon \leq \varepsilon$, azaz a $\delta_\varepsilon \leq \frac{1}{2}\varepsilon$ egyenlőtlenség teljesüljön. Tehát minden $\varepsilon > 0$ szám esetén létezik olyan $\delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2}$ (vagy ennél kisebb) pozitív szám úgy, hogy minden $\|(x,y) - (0,0)\| < \delta_\varepsilon$, $(x,y) \neq (0,0)$ feltételt teljesítő (x,y) pár esetén a fenti majorálás alapján

$$\left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} - 0\right| < 2\delta_\varepsilon = \varepsilon,$$

tehát értelmezés szerint az $f(x,y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ függvénynek van határértéke a $(0,0)$ pontban és $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = 0$. □

(e) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^3}{x^4+y^4} = 0.$$

Megoldás. Minden $\varepsilon > 0$ szám esetén kell találni egy $\delta_\varepsilon > 0$ számot (ez függ az ε-tól) úgy, hogy ha $\|(x,y)-(0,0)\| = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} < \delta_\varepsilon$, $(x,y) \neq (0,0)$, akkor $\left|\frac{x^2y^3}{x^4+y^4} - 0\right| < \varepsilon$. Feltételezzük, hogy $\|(x,y) - (0,0)\| < \delta_\varepsilon$, $(x,y) \neq (0,0)$. Ekkor a

$$\|(x,y) - (0,0)\| = \|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2} \geq |x| \text{ és}$$
$$\|(x,y) - (0,0)\| = \|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2} \geq |y|$$

egyenlőtlenségek alapján $|x| < \delta_\varepsilon$ és $|y| < \delta_\varepsilon$. A következő majorálást végezzük:

$$\left|\frac{x^2y^3}{x^4+y^4} - 0\right| = \left|\frac{x^2y^3}{x^4+y^4}\right| \leq \frac{x^2y^2}{x^4+y^4} \cdot |y| \stackrel{(\dagger)}{\leq} \frac{\frac{1}{2}(x^4+y^4)}{x^4+y^4} \cdot |y| = \frac{1}{2}|y| \stackrel{(*)}{<} \frac{1}{2}\delta_\varepsilon,$$

ahol

- a $(\dagger)$ egyenlőtlenségben az $\frac{x^4+y^4}{2} \geq \sqrt{x^4y^4} = x^2y^2$ számtani-mértani egyenlőtlenséget használtuk fel,
- illetve a $(*)$ egyenlőtlenségben pedig felhasználtuk, hogy $|y| < \delta_\varepsilon$.

Ez alapján a δ_ε számot úgy válasszuk meg, hogy az $\frac{1}{2}\delta_\varepsilon \leq \varepsilon$, azaz a $\delta_\varepsilon \leq 2\varepsilon$ egyenlőtlenség teljesüljön. Tehát minden $\varepsilon > 0$ szám esetén létezik olyan $\delta_\varepsilon = 2\varepsilon$ (vagy ennél kisebb) pozitív szám úgy, hogy minden $\|(x,y) - (0,0)\| < \delta_\varepsilon$, $(x,y) \neq (0,0)$ feltételt teljesítő (x,y) pár esetén a fenti majorálás alapján

$$\left|\frac{x^2y^3}{x^4+y^4} - 0\right| < \frac{1}{2}\delta_\varepsilon = \varepsilon,$$

tehát értelmezés szerint az $f(x,y) = \frac{x^2y^3}{x^2+y^2}$ függvénynek van határértéke a $(0,0)$ pontban és $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^3}{x^4+y^4} = 0$. □

6.7. Feladat. Igazold, hogy a következő függvényeknek nincs határértéke az origóban:

(a) $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x-y}$, $x - y \neq 0$;

Első megoldás. Ha az $y = sx$, $s \neq 1$ egyenletű egyenes mentén tartunk az origóba, akkor a függvény határértéke

$$\lim_{x\to 0} f(x,sx) = \lim_{x\to 0} \frac{x+sx}{x-sx} = \lim_{x\to 0} \frac{1+s}{1-s} = \frac{1+s}{1-s},$$

amely függ az $y = sx$ egyenestől, például $s = 0$ esetén a határérték 1, míg $s = 2$ esetén pedig -3, ezért nem létezik az f függvénynek határértéke az origóban.
(Ha létezne a függvénynek globális határértéke, akkor minden $y = sx$ egyenes mentén tartva az origóba ugyanazt a határértéket kapnánk). □

Második megoldás. Tekintünk két $(x_n, y_n)_{n\geq 1}$ sorozatot úgy, hogy $x_n \neq y_n$ és $(x_n, y_n) \neq (0,0)$, minden $n \geq 1$ esetén, továbbá $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n, y_n) = (0,0)$ és kiszámoljuk, hogy a megfelelő függvényértékek $(f(x_n, y_n))_{n\geq 1}$ sorozatai hova tartanak.

Az első sorozat legyen $(x_n, y_n) = (\frac{1}{n}, 0)$, minden $n \geq 1$ esetén. Megjegyezzük, hogy $x_n \neq y_n$, mivel $\frac{1}{n} \neq 0$ és $(x_n, y_n) \neq (0,0)$, minden $n \geq 1$ esetén, továbbá $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n, y_n) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}, 0\right) = \left(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}, \lim\limits_{n\to\infty} 0\right) = (0,0)$. Ekkor

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}, 0\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}+0}{\frac{1}{n}-0} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1.$$

Az második sorozat legyen $(x'_n, y'_n) = (0, \frac{1}{n})$, minden $n \geq 1$ esetén. Megjegyezzük, hogy $x'_n \neq y'_n$, mivel $0 \neq \frac{1}{n}$ és $(x'_n, y'_n) \neq (0,0)$, minden $n \geq 1$ esetén, továbbá $\lim\limits_{n\to\infty}(x'_n, y'_n) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(0, \frac{1}{n}\right) = \left(\lim\limits_{n\to\infty} 0, \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right) = (0,0)$. Ekkor

$$\lim_{n\to\infty} f(x'_n, y'_n) = \lim_{n\to\infty} f\left(0, \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{0+\frac{1}{n}}{0-\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{-\frac{1}{n}} = -1.$$

Mivel létezik két origóba tartó sorozat, amelyekre a megfelelő függvényértékek határértékei nem egyenlőek, ezért a Heine-kritérium következménye alapján a függvénynek nem létezik határértéke az origóban. □

(b) $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, $(x,y) \neq (0,0)$.

Első megoldás. Ha az $y = sx$ egyenletű egyenes mentén tartunk az origóba, akkor a függvény határértéke

$$\lim_{x\to 0} f(x,sx) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - (sx)^2}{x^2 + (sx)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(1-s^2)}{x^2(1+s^2)} = \frac{1-s^2}{1+s^2},$$

amely függ az $y = sx$ egyenestől, például $s = 0$ esetén a határtérték 1, míg $s = 1$ esetén pedig 0, ezért nem létezik az f függvénynek határértéke az origóban.
(Ha létezne a függvénynek globális határértéke, akkor minden $y = sx$ egyenes mentén tartva az origóba ugyanazt a határértéket kapnánk). □

Második megoldás. Tekintünk két $(x_n, y_n)_{n\geq 1}$ sorozatot úgy, hogy $x_n \neq y_n$ és $(x_n, y_n) \neq (0,0)$ minden $n \geq 1$ esetén, továbbá $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n, y_n) = (0,0)$ és kiszámoljuk, hogy a megfelelő függvényértékek $(f(x_n, y_n))_{n\geq 1}$ sorozatai hova tartanak.

Az első sorozat legyen $(x_n, y_n) = (\frac{1}{n}, 0)$, minden $n \geq 1$ esetén. Megjegyezzük, hogy $(x_n, y_n) \neq (0,0)$, minden $n \geq 1$ esetén és $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n, y_n) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}, 0\right) = \left(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}, \lim\limits_{n\to\infty} 0\right) = (0,0)$. Ekkor

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}, 0\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2 - 0^2}{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + 0^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = 1.$$

Az második sorozat legyen $(x'_n, y'_n) = (0, \frac{1}{n})$, minden $n \geq 1$ esetén. Megjegyezzük, hogy $(x'_n, y'_n) \neq (0,0)$, minden $n \geq 1$ esetén és $\lim\limits_{n\to\infty}(x'_n, y'_n) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(0, \frac{1}{n}\right) = \left(\lim\limits_{n\to\infty} 0, \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right) = (0,0)$. Ekkor

$$\lim_{n\to\infty} f(x'_n, y'_n) = \lim_{n\to\infty} f\left(0, \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{0^2 - \left(\frac{1}{n}\right)^2}{0^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{-\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = -1.$$

Mivel létezik két origóba tartó sorozat, amelyekre a megfelelő függvényértékek határértékei nem egyenlőek, ezért a Heine-kritérium következménye alapján a függvénynek nem létezik határértéke az origóban. □

6.8. Feladat. Tanulmányozd a következő függvények iterált és globális határértékét az origóban:

(a) $f(x,y) = \dfrac{x - y + x^2 + y^2}{x + y}, \quad x + y \neq 0;$

Megoldás. Először kiszámoljuk az iterált határértékeket. Az x változó szerinti határfüggvény

$$G(y) = \lim_{x\to 0}\frac{x - y + x^2 + y^2}{x + y} = \frac{-y + y^2}{y} = -1 + y, \quad (y \neq 0),$$

ahonnan az egyik iterált határérték

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x - y + x^2 + y^2}{x + y}\right) = \lim_{y\to 0} -1 + y = -1.$$

Az y változó szerinti határfüggvény

$$F(x) = \lim_{y\to 0}\frac{x - y + x^2 + y^2}{x + y} = \frac{x + x^2}{x} = 1 + x, \quad (x \neq 0),$$

ahonnan a másik iterált határérték

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x - y + x^2 + y^2}{x + y}\right) = \lim_{x\to 0} 1 + x = 1.$$

Mivel a két iterált határérték létezik, de nem egyeznek meg $(-1 \neq 1)$, ezért nem létezik a függvénynek globális határértéke az origóban, vagyis nem létezik a $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x-y+x^2+y^2}{x+y}$ (globális) határérték a 6.9. Következmény alapján. □

(b) $f(x,y) = x\sin\dfrac{1}{y}, \quad y \neq 0;$

Megoldás. Először kiszámoljuk az iterált határértékeket. Az x változó szerinti határfüggvény

$$G(y) = \lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{y} = \sin\frac{1}{y}\lim_{x\to 0} x = 0, \quad (y \neq 0),$$

ahonnan az egyik iterált határérték

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{y}\right) = \lim_{y\to 0} 0 = 0.$$

Az y változó szerinti

$$F(x) = \lim_{y\to 0} x\sin\frac{1}{y} = x\lim_{y\to 0}\sin\frac{1}{y}, \quad (x \neq 0)$$

határfüggvény nem létezik, mivel a $\lim\limits_{y\to 0}\sin\frac{1}{y}$ határérték nem létezik a 6.3. Feladat (b) alpontja alapján.

Ellenben a globális határérték létezik az origóban és egyenlő 0-val: minden $x \in \mathbb{R}$ és $y \neq 0$ esetén

$$0 \leq \left|x\sin\frac{1}{y}\right| = |x|\cdot\left|\sin\frac{1}{y}\right| \leq |x|\cdot 1 = |x|,$$

továbbá a jobb oldal határértéke $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}|x| = \lim\limits_{x\to 0}|x| = 0$, ezért a fogó tételből következik, hogy $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left|x\sin\frac{1}{y}\right| = 0$, ami egyenértékű azzal, hogy $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x\sin\frac{1}{y} = 0$.

6.10. Megjegyzés

Az értelmezés alapján a következőképpen igazolható, hogy

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x\sin\frac{1}{y} = 0.$$

Minden $\varepsilon > 0$ számra kell találni egy olyan $\delta_\varepsilon > 0$ számot (a δ_ε függ az ε-tól) úgy, hogy ha $\|(x,y)-(0,0)\| = \sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2} < \delta_\varepsilon$ és $(x,y) \neq (0,0)$, akkor

$$\left|x\sin\frac{1}{y} - 0\right| < \varepsilon.$$

Mivel $|x-0| = \sqrt{(x-0)^2} \leq \sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2} = \|(x,y)-(0,0)\|$ és hasonlóan $|y-0| < \|(x,y)-(0,0)\|$, ezért ha a $\|(x,y)-(0,0)\| < \delta_\varepsilon$ feltétel teljesül, akkor $|x| = |x-0| < \delta_\varepsilon$ és $|y| = |y-0| < \delta_\varepsilon$.

Minden $(x,y) \neq (0,0)$ esetén, amelyre teljesül $\|(x,y)-(0,0)\| < \delta_\varepsilon$ a következő majorálást végezhetjük:

$$\left|x\sin\frac{1}{y} - 0\right| = |x|\cdot\left|\sin\frac{1}{y}\right| \leq |x|\cdot 1 = |x| < \delta_\varepsilon. \tag{6.7}$$

Innen, ha $\delta_\varepsilon \leq \varepsilon$, például $\delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2}$, akkor minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik $\delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2} > 0$ szám úgy, hogy ha teljesül $\|(x,y)-(0,0)\| < \delta_\varepsilon$ és $(x,y) \neq (0,0)$, akkor a (6.7) alapján

$$\left|x\sin\frac{1}{y} - 0\right| < \delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon,$$

tehát $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x\sin\frac{1}{y} = 0$. ◇

□

(c) $f(x,y) = (x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}, \quad x, y \neq 0;$

Megoldás. A x változó szerinti $G(y) = \lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$ határfüggvény nem létezik, mert

$$G(y) = \lim_{x\to 0}(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y} = \sin\frac{1}{y}\left(\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} + y\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}\right) = y\sin\frac{1}{y}\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$$

határérték nem létezik a 6.3. Feladat (b) alpontja alapján. A szimmetria miatt az y változó szerinti $F(x) = \lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$ határfüggvény sem létezik. Így az iterált határértékek nem léteznek.

A globális határérték létezik és egyenlő 0-val: minden $x \neq 0$ és $y \neq 0$ esetén

$$0 \leq \left|(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}\right| = |x+y| \cdot \left|\sin\frac{1}{x}\right| \cdot \left|\sin\frac{1}{y}\right| \leq |x+y| \leq |x| + |y|,$$

továbbá a jobboldal határértéke

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} |x| + |y| = \lim_{(x,y)\to(0,0)} |x| + \lim_{(x,y)\to(0,0)} |y| = \lim_{x\to 0} |x| + \lim_{y\to 0} |y| = 0,$$

ezért a fogó tétel alapján $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left|(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}\right| = 0$, ami egyenértékű a

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y} = 0$$

egyenlőséggel.

6.11. Megjegyzés

Az értelmezés alapján a következőképpen igazolható, hogy

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y} = 0.$$

Minden $\varepsilon > 0$ számra kell találni egy olyan $\delta_\varepsilon > 0$ számot (a δ_ε függ az ε-tól) úgy, hogy ha $\|(x,y) - (0,0)\| = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} < \delta_\varepsilon$ és $(x,y) \neq (0,0)$, akkor

$$\left|(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y} - 0\right| < \varepsilon.$$

Minden $(x,y) \neq (0,0)$ esetén, amelyre teljesül $\|(x,y) - (0,0)\| < \delta_\varepsilon$ a következő majorálást végezhetjük:

$$\left|(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y} - 0\right| = |x+y| \cdot \left|\sin\frac{1}{y}\right| \cdot \left|\sin\frac{1}{y}\right| \leq |x| \cdot 1 \cdot 1 = |x+y| \leq |x| + |y| < \delta_\varepsilon + \delta_\varepsilon, \tag{6.8}$$

mivel $|x| \leq \|(x,y)\| < \delta_\varepsilon$ és $|y| \leq \|(x,y)\| < \delta_\varepsilon$. Ezért, ha $2\delta_\varepsilon \leq \varepsilon$, például $\delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{4}$, akkor minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik $\delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{4} > 0$ szám úgy, hogy ha teljesül $\|(x,y) - (0,0)\| < \delta_\varepsilon$ és $(x,y) \neq (0,0)$, akkor a (6.8) alapján

$$\left|(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y} - 0\right| < 2\delta_\varepsilon = 2 \cdot \frac{\varepsilon}{4} \leq \varepsilon,$$

tehát $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y} = 0.$ ◇

□

(d) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}, \quad (x,y) \neq (0,0);$

Megoldás. Kiszámoljuk az iterált határértékeket:

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{0\cdot y}{0^2+y^2}\right) = \lim_{x\to 0} 0 = 0,$$
$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2}\right) = \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{0\cdot x}{x^2+0^2}\right) = \lim_{y\to 0} 0 = 0.$$

Mivel a számlálóban és a nevezőben minden tag ugyanolyan fokú (az x és y változókban közösen másodfokú), ezért az $y = tx$ helyettesítést használjuk, ahol $t \in \mathbb{R}$. Ha x tart 0-hoz, akkor az (x,y) pár az $y = tx$ egyenes mentén (aminek a meredeksége t) tart az origóba. Ha létezik globális határérték, akkor minden t esetén a

$$\lim_{x\to 0}\frac{x(tx)}{x^2+(tx)^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2t}{x^2(1+t^2)} = \lim_{x\to 0}\frac{t}{1+t^2} = \frac{t}{1+t^2}$$

határérték független kellene legyen az egyenes meredekségétől (t-től), ami nem teljesül, mert $t = 0$ esetén a határérték 0, míg $t = 1$ esetén $\frac{1}{2}$. Így nem létezik a $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}$ globális határérték. □

(e) $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, \quad (x,y) \neq (0,0);$

Megoldás. Az iterált hatérértékek

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2} = \lim_{x\to 0} 1 = 1, \tag{6.9}$$
$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) = \lim_{y\to 0}\frac{-y^2}{y^2} = \lim_{y\to 0} -1 = -1. \tag{6.10}$$

Az iterált határértékek léteznek és nem egyeznek meg, ezért nem létezik a $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ globális határérték a 6.9. Következmény alapján.

Megjegyezzük, hogy a határértékben szereplő tört homogén és az előző alpontban alkalmazott módszer is használható annak megmutatására, hogy nem létezik globális határérték. □

(f) $f(x,y) = \dfrac{x\sin\frac{1}{x}+y}{x+y}, \quad x+y \neq 0.$

Megoldás. Az y változó szerinti $F(x) = \lim\limits_{y\to 0}\frac{x\sin\frac{1}{x}+y}{x+y} = \frac{x\sin\frac{1}{x}}{x} = \sin\frac{1}{x}$, $(x \neq 0)$ határfüggvény létezik, de a

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x\sin\frac{1}{x}+y}{x+y}\right) = \lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$$

iterált határérték nem létezik. Így a $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x\sin\frac{1}{x}+y}{x+y}$ globális határérték sem létezik.

Az x változó szerinti határfüggvény $G(y) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sin\frac{1}{x}+y}{x+y} = \frac{0+y}{0+y} = \frac{y}{y} = 1$ és az iterált határérték

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x\sin\frac{1}{x}+y}{x+y}\right) = \lim_{y\to 0} 1 = 1.$$

□

6.9. Feladat. Igazold, hogy a következő függvényeknek nincs (globális) határértéke az origóban:

(a) $f(x,y) = \dfrac{x^2+y}{x-y}, \quad x-y \neq 0;$

Megoldás. Kiszámítjuk az iterált határértékeket az origóban:

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x^2+y}{x-y}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x} = \lim_{x\to 0} 0 = 0 \text{ és } \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x^2+y}{x-y}\right) = \lim_{y\to 0}\frac{y}{-y} = \lim_{y\to 0} -1 = -1.$$

Mivel a két iterált határérték nem egyezik meg, ezért nem létezik a globális határérték az origóban a 6.9. Következmény alapján. □

(b) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}, \quad (x,y) \neq (0,0);$

Megoldás. Ha az iterált határértékeket kiszámítjuk, akkor mindkét esetben nullát fogunk kapni. Így ezzel a módszerrel nem tudjuk belátni, hogy nem létezik a globális határérték az origóban.

Mivel az $\frac{xy}{x^2+y^2}$ tört homogén, ezért az $y = tx$ helyettesítést fogjuk alkalmazni, ahol $t \in \mathbb{R}$ egy rögzített szám. Ha x tart 0-hoz, akkor $y = tx$ is tart 0-hoz és az $y = tx$ egyenes mentén tartva az origóba a függvény határértéke

$$\lim_{x\to 0} f(x,tx) = \lim_{x\to 0}\frac{x(tx)}{x^2+(tx)^2} = \lim_{x\to 0}\frac{tx^2}{x^2(1+t^2)} = \lim_{x\to 0}\frac{t^2}{1+t^2} = \frac{t^2}{1+t^2},$$

ami nem független a t-től, például $t = 0$ esetén 0, míg $t = 1$ esetén $\frac{1}{2}$. Ez azt jelenti, hogy ha az $y = 0$ egyenes (Ox tengely) mentén tartunk az origóba, akkor a függvényértékek határértéke 0, míg ha az $y = x$ egyenes (első szögfelező) mentén tartunk az orgióba, akkor a függvényértékek határértéke $\frac{1}{2}$. Ezért nem létezik a globális határérték, mert a függvényértékek mindig ugyanoda kellene konvergáljanak függetlenül attól, hogy milyen módon tartunk az (x,y) párral a $(0,0)$ pontba (az origóba). □

(c) $f(x,y) = \dfrac{y^2+x}{y^2-x^2}, \quad y^2-x^2 \neq 0;$

Megoldás. Kiszámítjuk az iterált határértékeket:

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{y^2+x}{y^2-x^2}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{y^2}{y^2} = \lim_{y\to 0} 1 = 1,$$
$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{y^2+x}{y^2-x^2}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{-x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{-x},$$

ez utóbbi iterált határérték nem létezik a 6.3. Feladat (a) alpontja alapján. Mivel léteznek a határfüggvények, de nem létezik az egyik iterált határérték, ezért a 6.9. Következmény alapján nem létezik globális határérték az origóban. □

(d) $f(x,y) = \dfrac{x-y^2}{x^3+y}, \quad x^3+y \neq 0;$

Megoldás. Kiszámoljuk az iterált határértékeket:

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x-y^2}{x^3+y}\right) = \lim_{y\to 0}\frac{-y^2}{y} = \lim_{y\to 0} -y = 0,$$
$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x-y^2}{x^3+y}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2} = +\infty$$

nem egyeznek meg, ezért nem létezik a globális határérték a 6.9. Következmény alapján. □

(e) $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y}, \quad x^2+y \neq 0.$

Megoldás. Mindkét iterált határérték 0, ezért ez alapján nem tudjuk mondani, hogy nem létezik a globális határérték az origóban. Ha az $y = tx^5 - x^2$ görbe mentén ($t \in \mathbb{R}^*$ rögzített) tartunk az origóba, akkor a határérték

$$\lim_{x\to 0} f(x, tx^5 - x^2) = \lim_{x\to 0} \frac{x(tx^5-x^2)^2}{x^2+tx^5-x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{t^2x^{11} - 2tx^8 + x^5}{tx^5} = \lim_{x\to 0} tx^6 - 2x^3 + \frac{1}{t} = \frac{1}{t},$$

ami nem független a t-től, ezért nem létezik a globális határérték. □

6.10. Feladat. Számítsd ki a következő határértékeket (ha léteznek):

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(3,\infty)} \frac{xy-1}{y+1};$

Megoldás. Ebben a formában a határérték „$\frac{\infty}{\infty}$" típusú határozatlan eset, ezért kiemelünk a számlálóból és a nevezőből is y-t:

$$\lim_{(x,y)\to(3,\infty)} \frac{xy-1}{y+1} = \lim_{(x,y)\to(3,\infty)} \frac{y(x-\frac{1}{y})}{y(1+\frac{1}{y})} = \lim_{(x,y)\to(3,\infty)} \frac{x-\frac{1}{y}}{1+\frac{1}{y}} = \frac{3-0}{1+0} = 3.$$

□

(b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{xy+1}-1};$

Megoldás. A határérték „$\frac{0}{0}$" típusú határozatlan eset. Bővítünk $(\sqrt{xy+1}+1)$-gyel:

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{xy+1}-1} &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy(\sqrt{xy+1}+1)}{(\sqrt{xy+1}-1)(\sqrt{xy+1}+1)} \\
&= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy(\sqrt{xy+1}+1)}{(xy+1)-1} = \\
&= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy(\sqrt{xy+1}+1)}{xy} \\
&= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{xy+1}+1 \\
&= \sqrt{0+1}+1 = 2.
\end{aligned}$$

□

(c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{\sin xy}{x};$

Megoldás. Bővítünk y-nal:

$$\lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{\sin xy}{x} = \lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{y\sin xy}{xy} = \lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{\sin xy}{xy} \cdot \lim_{y\to 2} y = \lim_{u\to 0} \frac{\sin u}{u} \cdot \lim_{y\to 2} y = 1\cdot 2 = 2,$$

ahol $u = xy$ tart 0, ha (x,y) tart $(0,2)$-höz. □

(d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \frac{x+y}{x^2+y^2};$

Megoldás. Minden $x, y \neq 0$ esetén

$$0 \leq \left| \frac{x+y}{x^2+y^2} \right| \leq \left| \frac{x}{x^2+y^2} \right| + \left| \frac{y}{x^2+y^2} \right| \leq \left| \frac{x}{x^2} \right| + \left| \frac{y}{y^2} \right| = \left| \frac{1}{x} \right| + \left| \frac{1}{y} \right|.$$

A jobb oldal határértéke

$$\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \left| \frac{1}{x} \right| + \left| \frac{1}{y} \right| = \lim_{x\to\infty} \left| \frac{1}{x} \right| + \lim_{y\to\infty} \left| \frac{1}{y} \right| = 0 + 0 = 0,$$

ahonnan a fogó tétel alapján $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \left| \frac{x+y}{x^2+y^2} \right| = 0$, ami egyenértékű azzal, hogy

$$\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \frac{x+y}{x^2+y^2} = 0.$$

□

(e) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2) \sin \dfrac{1}{xy}$;

Megoldás. Mivel $\sin u \in [-1, 1]$ minden $u \in \mathbb{R}$ esetén, ezért $|\sin u| \leq 1$, minden $u \in \mathbb{R}$ esetén, ahonnan minden $x, y \neq 0$ esetén

$$0 \leq \left| (x^2+y^2) \sin \frac{1}{xy} \right| = (x^2+y^2) \left| \sin \frac{1}{xy} \right| \leq x^2 + y^2.$$

A jobb oldal határértéke

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2) = \lim_{x\to 0} x^2 + \lim_{y\to 0} y^2 = 0 + 0 = 0,$$

ahonnan a fogó tétel alapján

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left| (x^2+y^2) \sin \frac{1}{xy} \right| = 0 \iff \lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2) \sin \frac{1}{xy} = 0.$$

□

(f) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x}{x+y}$;

Megoldás. Kiszámoljuk az iterált határértékeket:

$$\lim_{x\to 0} \left(\lim_{y\to 0} \frac{x}{x+y} \right) = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = \lim_{x\to 0} 1 = 1 \quad \text{és} \quad \lim_{y\to 0} \left(\lim_{x\to 0} \frac{x}{x+y} \right) = \lim_{y\to 0} \frac{0}{0+y} = \lim_{y\to 0} 0 = 0.$$

Mivel mindkét iterált határérték létezik és nem egyeznek meg, ezért nem létezik globális határérték, vagyis nem létezik a $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{x+y}$ határérték. □

(g) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^2}{x^4+y^4}$;

Első megoldás. Ez egy homogén tört, ezért az $y = tx$ ($t \in \mathbb{R}$ rögzített szám) egyenes mentén tartva az origóba kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2(tx)^2}{x^4+(tx)^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4t^2}{x^4(1+t^4)} = \lim_{x\to 0} \frac{t^2}{1+t^4} = \frac{t^2}{1+t^4}.$$

Mivel a határérték nem független az egyenes meredekségétől (t-től), például $t = 0$-ra a határérték 0, míg $t = 1$-re $\frac{1}{2}$, ezért nem létezik a globális határérték. □

Második megoldás. Az $(x_n, y_n) = (\frac{1}{n}, 0)$, $n \geq 1$ sorozatra igaz, hogy $(x_n, y_n) \neq (0,0)$, minden $n \geq 1$ esetén és $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n, y_n) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}, 0\right) = \left(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}, \lim\limits_{n\to\infty} 0\right) = (0,0)$, továbbá

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}, 0\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2 \cdot 0^2}{\left(\frac{1}{n}\right)^4 + 0^4} = \lim_{n\to\infty} \frac{0}{\frac{1}{n^4}} = 0.$$

Az $(x'_n, y'_n) = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$, $n \geq 1$ sorozatra igaz, hogy $(x_n, y_n) \neq (0,0)$, minden $n \geq 1$ esetén és $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n, y_n) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \left(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}, \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right) = (0,0)$, továbbá

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2}{\left(\frac{1}{n}\right)^4 + \left(\frac{1}{n}\right)^4} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^4}}{2 \cdot \frac{1}{n^4}} = \frac{1}{2}.$$

Mivel találtunk két origóba tartó sorozatot, amelyekre a függvényértékek sorozata nem ugyanoda konvergál, ezért a függvénynek nem létezik globális határértéke az origóban a Heine-kritérium következménye alapján. □

(h) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y)\operatorname{tg}(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

Megoldás.

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y)\operatorname{tg}(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y)\sqrt{x^2+y^2}\operatorname{tg}(x^2+y^2)}{x^2+y^2} \\
&= \lim_{(x,y)\to(0,0)} (x+y)\sqrt{x^2+y^2} \cdot \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{tg}(x^2+y^2)}{x^2+y^2} \\
&= \lim_{(x,y)\to(0,0)} (x+y)\sqrt{x^2+y^2} \cdot \lim_{u\to 0} \frac{\operatorname{tg} u}{u} = 0 \cdot 1 \\
&= 0,
\end{aligned}$$

ahol az $u = x^2 + y^2$ változócserét végeztük. □

(i) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(\infty,3)} \left(1 + \frac{y}{x}\right)^x$;

Megoldás.

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(\infty,3)} \left(1+\frac{y}{x}\right)^x &= \lim_{(x,y)\to(\infty,3)} \left(1+\frac{y}{x}\right)^{\frac{x}{y}\cdot y} = \lim_{(u,y)\to(\infty,3)} \left(\left(1+\frac{1}{u}\right)^u\right)^y \\
&= \left(\lim_{u\to\infty}\left(1+\frac{1}{u}\right)^u\right)^{\lim\limits_{y\to 3} y} \\
&= e^3,
\end{aligned}$$

ahol $u = \frac{x}{y}$ tart ∞-hez, ha (x,y) tart $(\infty, 3)$-hoz. □

(j) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{|x|+|y|}$;

Megoldás. Mivel $0 \leq x^2 + y^2 = |x|^2 + |y|^2 \leq |x|^2 + |y|^2 + 2|x||y| \leq (|x| + |y|)^2$, ezért minden $(x,y) \neq (0,0)$ esetén

$$0 \leq \frac{x^2+y^2}{|x|+|y|} \leq \frac{(|x|+|y|)^2}{|x|+|y|} = |x| + |y|,$$

továbbá a jobboldal határértéke

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} |x| + |y| = \lim_{x\to 0} |x| + \lim_{y\to 0} |y| = 0 + 0 = 0,$$

ezért a fogó tétel alapján $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{|x|+|y|} = 0.$ □

(k) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}$;

Megoldás. Mivel $x^2 \le x^2 + y^2$ minden $(x,y) \neq (0,0)$ esetén, ezért $\frac{x^2}{x^2+y^2} \le 1$, ahonnan

$$0 \le \left| \frac{x^2 y}{x^2+y^2} \right| \le |y|, \qquad \forall (x,y) \neq (0,0).$$

A jobboldal határértéke $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} |y| = 0$, ahonnan a fogó tétel szerint

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left| \frac{x^2 y}{x^2+y^2} \right| = 0 \iff \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} = 0.$$

□

(l) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$.

Megoldás. Minden $(x,y) \neq (0,0)$ esetén

$$\frac{x^2+y^2}{x^4+y^4} \ge \frac{x^2+y^2}{x^4+y^4+2x^2y^2} = \frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{1}{x^2+y^2}.$$

A jobb oldal határértéke $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{x^2+y^2} = \lim\limits_{r\to 0+} \frac{1}{r} = +\infty$, ahol $r = x^2 + y^2$ tart jobbról 0-hoz, ha (x,y) tart az origóhoz. A fenti egyenlőtlenség alapján $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x^4+y^4} = +\infty$.

□

6.3.3. Többváltozós függvények folytonossága

6.11. Feladat. Az értelmezést felhasználva igazold, hogy a következő függvények folytonosak a megadott pontban

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = xy + 2$ és $(x_0, y_0) = (2,3)$;

Megoldás. Minden $\varepsilon > 0$ szám esetén kell találni egy $\delta_\varepsilon > 0$ számot (ez függhet az ε-tól) úgy, hogy ha $\|(x,y) - (2,3)\| = \sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2} < \delta_\varepsilon$, akkor $|f(x,y) - f(2,3)| < \varepsilon$.

A $\|(x,y) - (2,3)\| < \delta_\varepsilon$ feltételből következik, hogy $|x-2| < \delta_\varepsilon$ és $|y-3| < \delta_\varepsilon$, továbbá szükség szerint fel fogjuk tételezni, hogy $\delta_\varepsilon \le 1$. Ezen feltételek mellett a következő majorálást végezzük:

$$\begin{aligned}
|f(x,y) - f(2,3)| &= |(xy+2) - 8| = |(x-2+2)(y-3+3) - 6| \\
&= |(x-2)(y-3) + 3(x-2) + 2(y-3)| \\
&\le |x-2| \cdot |y-3| + 3 \cdot |x-2| + 2 \cdot |y-3|
\end{aligned}$$

$$\stackrel{(*)}{<} \delta_\varepsilon \cdot \delta_\varepsilon + 3\delta_\varepsilon + 2\delta_\varepsilon = \delta_\varepsilon^2 + 5\delta_\varepsilon \stackrel{(\dagger)}{\leq} \delta_\varepsilon + 5\delta_\varepsilon = 6\delta_\varepsilon,$$

ahol a $(*)$ egyenlőtlenségben felhasználtuk, hogy $|x-2| < \delta_\varepsilon$ és $|y-3| < \delta_\varepsilon$, illetve a $(\dagger)$ egyenlőtlenségben pedig, hogy $\delta_\varepsilon^2 \leq \delta_\varepsilon$, ami a $\delta_\varepsilon \leq 1$ feltevésből következik. Ez alapján a δ_ε számot úgy válasszuk meg, hogy a $6\delta_\varepsilon \leq \varepsilon$ egyenlőtlenség is teljesüljön a fenti feltevéseken kívül.

Végül minden $\varepsilon > 0$ szám esetén létezik olyan $\delta_\varepsilon = \min\left\{\frac{\varepsilon}{6}, 1\right\}$ (vagy ennél kisebb szám) úgy, hogy minden $\|(x,y) - (2,3)\| < \delta_\varepsilon$ feltételt teljesítő (x,y) pár esetén a fenti majorálás alapján

$$|f(x,y) - f(2,3)| < 6\delta_\varepsilon = 6 \cdot \min\left\{\frac{\varepsilon}{6}, 1\right\} \leq 6 \cdot \frac{\varepsilon}{6} = \varepsilon,$$

tehát értelmezés szerint az f függvény folytonos a $(2,3)$ pontban. □

(b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = x^2 + xy$ és $(x_0, y_0) = (1,3)$;

Megoldás. Minden $\varepsilon > 0$ szám esetén kell találni egy $\delta_\varepsilon > 0$ számot (ez függhet az ε-tól) úgy, hogy ha az (x,y) pár esetén teljesül a $\|(x,y) - (1,3)\| = \sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2} < \delta_\varepsilon$ feltétel, akkor $|f(x,y) - f(1,3)| < \varepsilon$.

A $\|(x,y) - (1,3)\| < \delta_\varepsilon$ feltételből következik, hogy $|x-1| < \delta_\varepsilon$ és $|y-3| < \delta_\varepsilon$, továbbá szükség szerint fel fogjuk tételezni, hogy $\delta_\varepsilon \leq 1$. Ezen feltételek mellett a következő majorálást végezzük:

$$\begin{aligned}
|f(x,y) - f(1,3)| &= |(x^2 + xy) - 4| = |(x-1+1)^2 + (x-1+1)(y-3+3) - 4| \\
&= |(x-1)^2 + 2(x-1) + 1 + (x-1)(y-3) + 3(x-1) + (y-3) + 3 - 4| \\
&= |(x-1)^2 + (x-1)(y-3) + 5(x-1) + (y-3)| \\
&\leq |x-1|^2 + |x-1| \cdot |y-3| + 5 \cdot |x-1| + |y-3| \\
&\stackrel{(*)}{<} \delta_\varepsilon^2 + \delta_\varepsilon \cdot \delta_\varepsilon + 5\delta_\varepsilon + \delta_\varepsilon = 2\delta_\varepsilon^2 + 6\delta_\varepsilon \stackrel{(\dagger)}{\leq} 2\delta_\varepsilon + 6\delta_\varepsilon = 8\delta_\varepsilon,
\end{aligned}$$

ahol a $(*)$ egyenlőtlenségben felhasználtuk, hogy $|x-1| < \delta_\varepsilon$ és $|y-3| < \delta_\varepsilon$, illetve a $(\dagger)$ egyenlőtlenségben pedig, hogy $\delta_\varepsilon^2 \leq \delta_\varepsilon$, ami a $\delta_\varepsilon \leq 1$ feltevésből következik. Ez alapján a δ_ε számot úgy válasszuk meg, hogy a $8\delta_\varepsilon \leq \varepsilon$ egyenlőtlenség is teljesüljön a fenti feltevéseken kívül.

Végül minden $\varepsilon > 0$ szám esetén létezik olyan $\delta_\varepsilon = \min\left\{\frac{\varepsilon}{8}, 1\right\}$ (vagy egy ennél kisebb szám) úgy, hogy minden $\|(x,y) - (1,3)\| < \delta_\varepsilon$ feltételt teljesítő (x,y) pár esetén a fenti majorálás alapján

$$|f(x,y) - f(1,3)| < 8\delta_\varepsilon = 8 \cdot \min\left\{\frac{\varepsilon}{8}, 1\right\} \leq 8 \cdot \frac{\varepsilon}{8} = \varepsilon,$$

tehát értelmezés szerint az f függvény folytonos a $(1,3)$ pontban. □

(c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{|x|+|y|}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ és $(x_0, y_0) = (0,0)$;

Megoldás. Minden $\varepsilon > 0$ szám esetén kell találni egy $\delta_\varepsilon > 0$ számot (ez függhet az ε-tól) úgy, hogy ha $\|(x,y) - (0,0)\| = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} < \delta_\varepsilon$, akkor $|f(x,y) - f(0,0)| < \varepsilon$.

A $\|(x,y) - (0,0)\| < \delta_\varepsilon$ feltételből következik, hogy $|x| = |x-0| < \delta_\varepsilon$ és $|y| = |y-0| < \delta_\varepsilon$. Ezen feltételek mellett a következő majorálást végezzük:

$$|f(x,y) - f(0,0)| = \left|\frac{x^2+y^2}{|x|+|y|} - 0\right| = \frac{|x|^2 + |y|^2}{|x|+|y|}$$

$$\le \frac{|x|^2+|y|^2+2|x||y|}{|x|+|y|} = \frac{(|x|+|y|)^2}{|x|+|y|} = |x|+|y|$$
$$\overset{(*)}{<} \delta_\varepsilon + \delta_\varepsilon = 2\delta_\varepsilon,$$

ahol a $(*)$ egyenlőtlenségben felhasználtuk, hogy $|x| < \delta_\varepsilon$ és $|y| < \delta_\varepsilon$. Ez alapján a δ_ε számot úgy válasszuk meg, hogy a $2\delta_\varepsilon \le \varepsilon$ egyenlőtlenség is teljesüljön a fenti feltevéseken kívül.

Végül minden $\varepsilon > 0$ szám esetén létezik olyan $\delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2}$ (vagy egy ennél kisebb szám) úgy, hogy minden $\|(x,y)-(0,0)\| < \delta_\varepsilon$ feltételt teljesítő (x,y) pár esetén a fenti majorálás alapján

$$|f(x,y)-f(0,0)| < 2\delta_\varepsilon = 2\cdot\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

tehát értelmezés szerint az f függvény folytonos a $(0,0)$ pontban. □

(d) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ f(x,y) = \dfrac{x}{y}$ és $(x_0,y_0) = (1,2)$;

Megoldás. Minden $\varepsilon > 0$ szám esetén kell találni egy $\delta_\varepsilon > 0$ számot (amely függhet az ε-tól) úgy, hogy ha $\|(x,y)-(1,2)\| = \sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2} < \delta_\varepsilon$, akkor $|f(x,y)-f(1,2)| < \varepsilon$.

A $\|(x,y)-(1,2)\| < \delta_\varepsilon$ feltételből következik, hogy $|x-1| < \delta_\varepsilon$ és $|y-2| < \delta_\varepsilon$, továbbá szükség szerint fel fogjuk tételezni, hogy $\delta_\varepsilon \le a$, valamilyen $a > 0$ szám esetén. Ezen feltételek mellett a következő majorálást végezzük:

$$\begin{aligned}
|f(x,y)-f(1,2)| &= \left|\frac{x}{y}-\frac{1}{2}\right| = \left|\frac{2x-y}{2y}\right| \\
&= \left|\frac{2(x-1+1)-(y-2+2)}{2y}\right| \\
&= \left|\frac{2(x-1)-(y-2)}{2y}\right| \\
&\le \frac{2|x-1|+|y-2|}{2|y|} \\
&\overset{(*)}{<} \frac{2\delta_\varepsilon+\delta_\varepsilon}{2\cdot 1} = \frac{3}{2}\delta_\varepsilon,
\end{aligned}$$

ahol a $(*)$ egyenlőtlenségben felhasználtuk, hogy $|x-1| < \delta_\varepsilon$, $|y-2| < \delta_\varepsilon$, illetve hogy az $|y-2| < \delta_\varepsilon$ és $\delta_\varepsilon \le 1$ alapján $1 \le 2-\delta_\varepsilon < y$. Ez alapján a δ_ε számot úgy válasszuk meg, hogy a $\frac{3}{2}\delta_\varepsilon \le \varepsilon$ egyenlőtlenség is teljesüljön a fenti feltevéseken kívül.

Végül minden $\varepsilon > 0$ szám esetén létezik olyan $\delta_\varepsilon = \min\left\{\frac{2}{3}\varepsilon, 1\right\}$ (vagy egy ennél kisebb szám) úgy, hogy minden $\|(x,y)-(1,2)\| < \delta_\varepsilon$ feltételt teljesítő (x,y) esetén a fenti majorálás alapján

$$|f(x,y)-f(1,2)| < \frac{3}{2}\delta_\varepsilon = \frac{3}{2}\cdot\min\left\{\frac{2}{3}\varepsilon, 1\right\} \le \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\varepsilon = \varepsilon,$$

tehát értelmezés szerint az f függvény folytonos a $(1,2)$ pontban. □

(e) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y)\ne(0,0), \\ 0, & \text{ha } (x,y)=(0,0) \end{cases}$ és $(x_0,y_0) = (0,0)$;

Megoldás. Minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik $\delta_\varepsilon = \varepsilon > 0$ úgy, hogy minden $(x,y) \ne (0,0)$, $\|(x,y)-(0,0)\| = \sqrt{x^2+y^2} < \delta_\varepsilon = \varepsilon$ esetén

$$|f(x,y)-f(0,0)| = \left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}-0\right| = \frac{x^2}{x^2+y^2}\cdot|y| \le |y| = \sqrt{y^2} \le \sqrt{x^2+y^2} < \delta_\varepsilon = \varepsilon.$$

Tehát az f függvény folytonos az $(x_0,y_0) = (0,0)$ pontban. □

(f) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $f(x,y,z)=\begin{cases}\dfrac{x^2y+z^4}{x^2+y^2+z^2}, & \text{ha } (x,y,z)\neq(0,0,0),\\ 0, & \text{ha } (x,y,z)=(0,0,0)\end{cases}$ és $(x_0,y_0,z_0)=(0,0,0)$.

Megoldás. Minden $\varepsilon>0$ szám esetén kell találni egy $\delta_\varepsilon>0$ számot (ami függhet az ε-tól) úgy, hogy ha $\|(x,y,z)-(0,0,0)\|=\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2+(z-0)^2}<\delta_\varepsilon$, akkor $|f(x,y,z)-f(0,0,0)|<\varepsilon$.

A $\|(x,y,z)-(0,0,0)\|<\delta_\varepsilon$ feltételből következik, hogy $|x|=|x-0|<\delta_\varepsilon$, $|y|=|y-0|<\delta_\varepsilon$ és $|z|=|z-0|<\delta_\varepsilon$, továbbá szükség szerint fel fogjuk tételezni, hogy $\delta_\varepsilon\leq 1$. Ezen feltételek mellett a következő majorálást végezzük:

$$\begin{aligned}
|f(x,y,z)-f(0,0,0)| &= \left|\frac{x^2y+z^4}{x^2+y^2+z^2}-0\right| = \frac{|x^2y+z^4|}{x^2+y^2+z^2}\\
&\leq \frac{|x^2y|+|z^4|}{x^2+y^2+z^2}\\
&= \frac{x^2\cdot|y|+z^2\cdot z^2}{x^2+y^2+z^2}\\
&\leq \frac{(x^2+y^2+z^2)\cdot|y|+(z^2+x^2+y^2)\cdot z^2}{x^2+y^2+z^2}\\
&= |y|+z^2\\
&\overset{(*)}{<} \delta_\varepsilon+\delta_\varepsilon^2 \overset{(\dagger)}{\leq} \delta_\varepsilon+\delta_\varepsilon = 2\delta_\varepsilon,
\end{aligned}$$

ahol a $(*)$ egyenlőtlenségben felhasználtuk, hogy $|y|<\delta_\varepsilon$, $|z|<\delta_\varepsilon$, illetve a $(\dagger)$ egyenlőtlenségben pedig, hogy $\delta_\varepsilon^2\leq\delta_\varepsilon$, amely az $\delta_\varepsilon\leq 1$ feltevésből következik. Ez alapján a δ_ε számot úgy válasszuk meg, hogy a $2\delta_\varepsilon\leq\varepsilon$ egyenlőtlenség is teljesüljön a fenti feltevéseken kívül.

Végül minden $\varepsilon>0$ szám esetén létezik olyan $\delta_\varepsilon=\min\left\{\frac{\varepsilon}{2},1\right\}$ (vagy egy ennél kisebb szám) úgy, hogy minden $\|(x,y,z)-(0,0,0)\|<\delta_\varepsilon$ feltételt teljesítő (x,y,z) hármas esetén a fenti majorálás alapján

$$|f(x,y,z)-f(0,0,0)|<2\delta_\varepsilon=2\cdot\min\left\{\frac{\varepsilon}{2},1\right\}\leq 2\cdot\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

tehát értelmezés szerint az f függvény folytonos a $(0,0,0)$ pontban. □

6.12. Feladat. Igazold, hogy a következő függvények folytonosak:

(a) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^6}{x^2+y^4}, & \text{ha } (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \text{ha } (x,y)=(0,0)\end{cases}$;

Megoldás. Az origón kívül (vagyis mikor a nevező nem nulla) az f függvény folytonossága a következőképpen látható be. Felírhatjuk, hogy $f(x,y)=\frac{g(x,y)}{h(x,y)}$, ahol $g(x,y)=x^3+y^3$ és $h(x,y)=x^2+y^4$. A $g(x,y)$ és $h(x,y)$ függvények folytonosak, mivel felírhatók, mint egyváltozós folytonos függvények összegeként: $g(x,y)=g_1(x)+g_2(y)$, ahol $g_1(x)=x^3$, $g_2(y)=y^3$, illetve $h(x,y)=h_1(x)+h_2(y)$, ahol $h_1(x)=x^2$, $h_2(y)=y^4$. Mivel az origón kívül a nevezőben lévő $g(x,y)=x^2+y^4$ függvény nem nulla, ezért az $f(x,y)=\frac{g(x,y)}{h(x,y)}$ hányados függvény is folytonos.

Az origóban a folytonosságot külön vizsgáljuk. Belátjuk, hogy létezik a $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ (globális) határérték és egyenlő az $f(0,0)=0$ értékkel. A következő majorálás végezzük:

minden $(x,y)\neq(0,0)$ esetén

$$\begin{aligned}0 &\le \left|\frac{x^3+y^6}{x^2+y^4}\right| = \left|\frac{x^3}{x^2+y^4}+\frac{y^6}{x^2+y^4}\right| \\ &\le \left|\frac{x^3}{x^2+y^4}\right| + \left|\frac{y^6}{x^2+y^4}\right| = \frac{x^2\cdot|x|}{x^2+y^4}+\frac{y^2\cdot y^4}{x^2+y^4} \\ &\le \frac{x^2\cdot|x|+y^4\cdot|x|}{x^2+y^4}+\frac{y^4\cdot y^2+x^2\cdot y^2}{x^2+y^4} = \frac{(x^2+y^4)\cdot|x|}{x^2+y^4}+\frac{(y^4+x^2)\cdot y^2}{x^2+y^4} = |x|+y^2.\end{aligned}$$

Mivel $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} |x|+y^2 = \lim\limits_{x\to0}|x|+\lim\limits_{y\to0}y^2 = 0+0=0$, ezért a fenti majorálás alapján fogó tételből következik, hogy $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left|\frac{x^3+y^6}{x^2+y^4}\right| = 0$, amely egyenértékű a $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^6}{x^2+y^4} = 0$ egyenlőséggel. □

(b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+|xy|^{3/2}+y^3}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & \text{ha } (x,y)=(0,0)\end{cases};$

Megoldás. Az f folytonos az origón kívül, mivel a számlálóban lévő $g(x,y)=x^3+|xy|^{3/2}+y^3 = x^3+\sqrt{|x|^3}\sqrt{|y|^3}+y^3$ és a nevezőben lévő $h(x,y)=x^2+y^2$ függvények folytonosak (felírhatóak egyváltozós folytonos függvények szorzata és összegeként), illetve a nevezőben lévő $h(x,y)$ függvény nem nulla az origón kívül.

A folytonosságot az origóban külön vizsgáljuk. Be kell látni, hogy a

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+|xy|^{3/2}+y^3}{x^2+y^2}$$

(globális) határérték létezik és egyenlő az $f(0,0)=0$ értékkel. Ehhez a következő majorálást végezzük: minden $(x,y)\neq(0,0)$ esetén

$$\begin{aligned}0 &\le \left|\frac{x^3+|xy|^{3/2}+y^3}{x^2+y^2}\right| \le \left|\frac{x^3}{x^2+y^2}\right| + \left|\frac{|xy|^{3/2}}{x^2+y^2}\right| + \left|\frac{y^3}{x^2+y^2}\right| \\ &= \frac{x^2\cdot|x|}{x^2+y^2}+\frac{|xy|\cdot\sqrt{|xy|}}{x^2+y^2}+\frac{y^2\cdot|y|}{x^2+y^2} \\ &\le \frac{(x^2+y^2)\cdot|x|}{x^2+y^2}+\frac{\frac{x^2+y^2}{2}\cdot\sqrt{|xy|}}{x^2+y^2}+\frac{(y^2+x^2)\cdot|y|}{x^2+y^2} = |x|+\frac{1}{2}\sqrt{|xy|}+|y|,\end{aligned}$$

ahol a középső tört esetén felhasználtuk a következő számtani-mértani egyenlőtlenséget $\frac{x^2+y^2}{2}\ge\sqrt{x^2y^2}=|xy|$. Mivel $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} |x|+\frac{1}{2}\sqrt{|xy|}+|y| = 0$, ezért a fenti majorálás alapján a fogó tételből következik, hogy $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left|\frac{x^3+|xy|^{3/2}+y^3}{x^2+y^2}\right| = 0$, amely egyenértékű az $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+|xy|^{3/2}+y^3}{x^2+y^2} = 0$ egyenlőséggel. □

(c) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^2+y^4)}{x^2+y^4}, & \text{ha } (x,y)\neq(0,0) \\ 1, & \text{ha } (x,y)=(0,0)\end{cases};$

Megoldás. Az f függvény felírható a $h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $h(x,y)=x^2+y^4$ és $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(u)=\begin{cases}\frac{\sin u}{u} & u\neq0\\ 1 & u=0\end{cases}$ függvények összetételeként, vagyis $f(x,y)=g(h(x,y))$. A h függvény folytonos, mivel felírható, mint $h(x,y) = h_1(x) + h_2(y)$, ahol a $h_1(x) = x^2$ és $h_2(y) = y^4$ egyváltozós függvények folytonosak. A $g(u)$ függvény is folytonos az $u = 0$ kívül, mert két (a $g_1(u) = \sin u$ és az $g_2(u) = u$) folytonos függvény hányadosa és $g_2(u) = u$ nem nulla az $u = 0$ ponton kívül. Továbbá a $g(u)$ folytonos az $u = 0$ pontban, mivel $\lim\limits_{u\to 0} \frac{\sin u}{u} = 1 = g(0)$.

Tehát f folytonos függvények összetétele, ezért folytonos. □

(d) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^2-y^2)}{x-y}, & \text{ha } x \neq y \\ x+y, & \text{ha } x = y \end{cases}.$

Megoldás.

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= \begin{cases} \dfrac{\sin(x^2-y^2)}{x-y}, & \text{ha } x \neq y \\ x+y, & \text{ha } x = y \end{cases} \\
&= \begin{cases} \dfrac{\sin(x^2-y^2)}{x-y}, & \text{ha } x^2 \neq y^2 \\ \dfrac{\sin(x^2-y^2)}{x-y}, & \text{ha } x = -y,\ x \neq y \\ x+y, & \text{ha } x = y \end{cases} \\
&= \begin{cases} \dfrac{\sin(x^2-y^2)}{x-y}, & \text{ha } x^2 \neq y^2 \\ 0, & \text{ha } x = -y,\ x \neq y \\ x+y, & \text{ha } x = y \end{cases} \\
&= \begin{cases} \dfrac{\sin(x^2-y^2)}{x-y}, & \text{ha } x^2 \neq y^2 \\ x+y, & \text{ha } x = -y, x \neq y \\ x+y, & \text{ha } x = y \end{cases} \\
&= \begin{cases} \dfrac{\sin(x^2-y^2)}{x-y}, & \text{ha } x^2 \neq y^2 \\ x+y, & \text{ha } x^2 = y^2 \end{cases} \\
&= \begin{cases} (x+y) \cdot \frac{\sin(x^2-y^2)}{x^2-y^2}, & \text{ha } x \neq y \\ x+y, & \text{ha } x = y \end{cases} \\
&= (x+y) \cdot \begin{cases} \frac{\sin(x^2-y^2)}{x^2-y^2}, & \text{ha } x^2 \neq y^2 \\ 1, & \text{ha } x^2 = y^2 \end{cases},
\end{aligned}$$

ami alapján $f(x,y) = k(x,y) \cdot g(h(x,y))$ alakba írható, ahol $k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $k(x,y) = x+y$, $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $h(x,y) = x^2 - y^2$ és $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(u) = \begin{cases} \frac{\sin u}{u}, & \text{ha } u \neq 0 \\ 1, & \text{ha } u = 0 \end{cases}$. Ezek a függvények folytonosak, ezért az f függvény is folytonos. □

6.13. Feladat. Igazold, hogy a következő függvényeknek léteznek az iterált határértékei az origóban, de nem folytonosak az origóban:

(a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases};$

Megoldás. Az y változó szerinti határfüggvény $F(x) = \lim\limits_{y\to 0} \frac{2xy}{x^2+y^2} = \frac{2x\cdot 0}{x^2+0^2} = 0$, $(x \neq 0)$ és az egyik iterált határérték

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{2xy}{x^2+y^2}\right) = \lim_{x\to 0} 0 = 0.$$

Mivel a függvény szimmetrikus x és y változókban, ezért hasonlóan kapjuk, hogy az x változó szerinti határfüggvény $G(y) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2xy}{x^2+y^2} = \frac{2\cdot 0\cdot y}{0^2+y^2} = 0$, $(y \neq 0)$ és a másik iterált határérték

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{2xy}{x^2+y^2}\right) = \lim_{y\to 0} 0 = 0.$$

Megmutatjuk, hogy nem létezik a globális határérték az origóban, így a függvény nem folytonos az origóban. Mivel a $\frac{2xy}{x^2+y^2}$ tört homogén, ezért az $y = tx$ helyettesítést fogjuk alkalmazni, ahol $t \in \mathbb{R}$ egy rögzített szám. Ha x tart 0-hoz, akkor $y = tx$ is tart 0-hoz és az $y = tx$ egyenes mentén tartva az origóba a függvény határértéke

$$\lim_{x\to 0} f(x,tx) = \lim_{x\to 0}\frac{x(tx)}{x^2+(tx)^2} = \lim_{x\to 0}\frac{tx^2}{x^2(1+t^2)} = \lim_{x\to 0}\frac{t^2}{1+t^2} = \frac{t^2}{1+t^2},$$

ami nem független a t-től, például $t = 0$ esetén 0, míg $t = 1$ esetén $\frac{1}{2}$. Ez azt jelenti, hogy ha az $y = 0$ egyenes (Ox tengely) mentén tartunk az origóba, akkor a függvényértékek határértéke 0, míg ha az $y = x$ egyenes (első szögfelező) mentén tartunk az orgióba, akkor a függvényértékek határértéke $\frac{1}{2}$. Ezért nem létezik a globális határérték, mert a függvényértékek mindig ugyanoda kellene konvergáljanak függetlenül attól, hogy milyen egyenes mentén tartunk az (x, y) párral a $(0, 0)$ pontba (az origóba). □

(b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases};$

Megoldás. Az y változó szerinti határfüggvény $F(x) = \lim\limits_{y\to 0} \frac{2xy^2}{x^2+y^4} = \frac{2x\cdot 0^2}{x^2+0^4} = 0$, $(x \neq 0)$ és az egyik iterált határérték

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{2xy^2}{x^2+y^4}\right) = \lim_{x\to 0} 0 = 0.$$

Hasonlóan kapjuk, hogy az x változó szerinti határfüggvény $G(y) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2xy^2}{x^2+y^4} = \frac{2\cdot 0\cdot y^2}{0^2+y^4} = 0$, $(y \neq 0)$ és a másik iterált határérték

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{2xy^2}{x^2+y^4}\right) = \lim_{y\to 0} 0 = 0.$$

Megmutatjuk, hogy nem létezik a globális határérték az origóban, így a függvény nem folytonos az origóban. Az $x = ty^2$ helyettesítést fogjuk alkalmazni, ahol $t \in \mathbb{R}$ egy rögzített szám. Ha y tart 0-hoz, akkor $x = ty^2$ is tart 0-hoz és az $x = ty^2$ parabola mentén tartva az origóba a függvény határértéke

$$\lim_{y\to 0} f(ty^2,y) = \lim_{y\to 0}\frac{(ty^2)y^2}{(ty^2)^2+y^4} = \lim_{y\to 0}\frac{ty^4}{y^4(t^2+1)} = \lim_{y\to 0}\frac{t}{1+t^2} = \frac{t}{1+t^2},$$

ami nem független a t-től, például $t = 0$ esetén 0, míg $t = 1$ esetén $\frac{1}{2}$. Ez azt jelenti, hogy ha az $x = 0$ egyenes (Oy tengely) mentén tartunk az origóba, akkor a függvényértékek határértéke 0, míg ha az $x = y^2$ parabola mentén tartunk az orgióba, akkor a függvényértékek határértéke $\frac{1}{2}$. Ezért nem létezik a globális határérték, mert a függvényértékek mindig ugyanoda kellene konvergáljanak függetlenül attól, hogy milyen görbe mentén tartunk az (x, y) párral a $(0, 0)$ pontba (az origóba). □

(c) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y)\neq(0,0)\\ 1, & \text{ha } (x,y)=(0,0)\end{cases};$

Megoldás. Az y változó szerinti határfüggvény $F(x)=\lim\limits_{y\to 0}\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}=\frac{x^3+0^3}{x^2+0^2}=\frac{x^3}{x^2}=x$, $(x\neq 0)$ és az egyik iterált határérték

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right)=\lim_{x\to 0}x=0.$$

A függvény szimmetrikus az x és y változókban, így hasonlóan kapjuk, hogy az x változó szerinti határfüggvény $G(y)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}=\frac{0^3+x^3}{0^2+y^2}=\frac{y^3}{y^2}=y$, $(y\neq 0)$ és az egyik iterált határérték

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right)=\lim_{y\to 0}y=0.$$

Az f függvény nem folytonos az origóban, mert ha létezik globális határértéke az origóban, akkor az meg kell egyezzen az iterált határértékekkel, vagyis $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0$, amely nem egyenlő az $f(0,0)=1$ értékkel. Ha pedig nem létezik a globális határérték az origóban, akkor az a f függvény nem lehet folytonos az origóban.

6.12. Megjegyzés

Megmutatható, hogy létezik globális határérték az origóban és egyenlő nullával, vagyis

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}=0.$$

A következő majorálást végezzük: minden $(x,y)\neq(0,0)$ esetén

$$\begin{aligned}0\leq\left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right|&\leq\left|\frac{x^3}{x^2+y^2}\right|+\left|\frac{x^3}{x^2+y^2}\right|=\frac{x^2\cdot|x|}{x^2+y^2}+\frac{y^2\cdot|y|}{x^2+y^2}\\&\leq\frac{(x^2+y^2)\cdot|x|}{x^2+y^2}+\frac{(y^2+x^2)\cdot|y|}{x^2+y^2}=|x|+|y|.\end{aligned}$$

Mivel $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}|x|+|y|=\lim\limits_{x\to 0}|x|+\lim\limits_{y\to 0}|y|=0$, ezért a fenti majorálás alapján a fogó tételből következik, hogy $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right|=0$, amely egyenértékű a $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}=0$ egyenlőséggel. ◇

□

(d) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x^2+y^2)}{(x+y)^2}, & \text{ha } x+y\neq 0\\ 1, & \text{ha } x+y=0\end{cases}.$

Megoldás. Az y változó szerinti határfüggvény

$$F(x)=\lim_{y\to 0}\frac{\sin(x^2+y^2)}{(x+y)^2}=\frac{\sin x^2}{x^2},\quad (x\neq 0),$$

és az egyik iterált határérték

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{\sin(x^2+y^2)}{(x+y)^2}\right)=\lim_{x\to 0}F(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{x^2}=1.$$

A függvény szimmetrikus az x és y változókban, így hasonlóan kapjuk, hogy az x változó szerinti határfüggvény

$$G(y) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2+y^2)}{(x+y)^2} = \frac{\sin y^2}{y^2}, \quad (y \neq 0),$$

és a másik iterált határérték

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2+y^2)}{(x+y)^2}\right) = \lim_{y\to 0} G(y) = \lim_{y\to 0} \frac{\sin y^2}{y^2} = 1.$$

Megmutatjuk, hogy az f függvénynek nem létezik globális határértéke az origóban. Az $y = tx$, $t \neq -1$ helyettesítést alkalmazva kiszámoljuk a

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} f(x,tx) &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2+(tx)^2)}{(x+tx)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin((1+t^2)x^2)}{(1+t)^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin((1+t^2)x^2)}{(1+t^2)x^2} \cdot \frac{1+t^2}{(1+t)^2} \\ &= \frac{1+t^2}{(1+t)^2}\end{aligned}$$

határértéket, amely nem független t-től, például $t = 1$ esetén egyenlő $\frac{1}{2}$-del, míg $t = 2$ esetén egyenlő $\frac{5}{9}$-del. Tehát az $y = x$ egyenes mentén tartva az origóba a függvény határértéke $\frac{1}{2}$, míg az $y = 2x$ egyenes mentén tartva az origóba a függvény határértéke $\frac{5}{9}$. Ezért nem létezik a függvénynek globális határértéke az origóban, így nem is folytonos az origóban. □

6.14. Feladat. Tanulmányozd a következő függvények folytonosságát:

(a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x-y}, & \text{ha } x \neq y \\ 0, & \text{ha } x = y \end{cases};$

Megoldás. Az $x = y$ egyenesen kívül (vagyis azokban az (x_0, y_0) pontokban, ahol $x_0 \neq y_0$) a függvény folytonos, mert felírható az $g(x,y) = xy$ és $h(x,y) = x - y$ folytonos függvények hányadosaként, illetve a nevező itt nem nulla.

Az $(x,y) = (t,t)$ alakú pontokban a függvény nem folytonos, mivel nem létezik globális határérték ezekben a pontokban. Valóban, ha $t \neq 0$, akkor $x = t + 2s$ és $y = t + s$ helyettesítést alkalmazva $(x,y) = (t+2s, t+s)$ tart (t,t)-hez, mikor s tart 0-hoz, de a

$$\lim_{s\to 0} f(t+2s, t+s) = \lim_{s\to 0} \frac{(t+2s)(t+s)}{(t+2s)-(t+s)} = \lim_{s\to 0} \frac{t^2+3st+2s^2}{s} = \lim_{s\to 0} \frac{t^2}{s} + 3t + 2s$$

határérték nem létezik. Ha $t = 0$, akkor $x = s + s^3$ és $y = s$ helyettesítést alkalmazva $(x,y) = (s+s^3, s)$ tart a $(0,0)$ ponthoz, mikor s tart a 0-hoz, de a

$$\lim_{s\to 0} f(s+s^3, s) = \lim_{s\to 0} \frac{(s+s^3)s}{(s+s^3)-s} = \lim_{s\to 0} \frac{s^2+s^4}{s^3} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s} + s$$

határérték nem létezik. Mindkét esetben találtunk olyan görbét, amely mentén közeledve a (t,t) alakú ponthoz nem létezik a függvénynek határértéke, így nem létezhet globális határérték. □

(b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2 + \sin(x^3+y^5)}{x^2+y^4}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases};$

Megoldás. Az origón kívül a függvény folytonos, mivel folytonos függvények hányadosa és a nevező nem nulla az origón kívül.

Az origóban nem folytonos a függvény, mivel nincs globális határértéke az origóban. Valóban, az $x = ty^2$ helyettesítést használva

$$\begin{aligned}\lim_{y\to 0} f(ty^2, y) &= \lim_{y\to 0} \frac{(ty^2)y^2 + \sin((ty^2)^3 + y^5)}{(ty^2)^2 + y^4} = \lim_{y\to 0} \frac{t^2y^4 + \sin((t^3y+1)y^5)}{(t^2+1)y^4} \\ &= \lim_{y\to 0} \frac{t^2}{t^2+1} + \frac{\sin((t^3y+1)y^5)}{(t^3y+1)y^5} \cdot \frac{(t^3y+1)y^5}{(t^2+1)y^4} = \frac{t^2}{t^2+1} + 1\cdot 0 = \frac{t^2}{t^2+1},\end{aligned}$$

ami függ a t-től. Tehát két különböző parabola mentén tartva az origóhoz a függvény határértéke különböző, például $t = 1$ esetén $\frac{1}{2}$, míg $t = 2$ esetén $\frac{4}{5}$. Ezért nem létezik a függvény globális határértéke az origóban. $\square$

(c) $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x+y}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{ha } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$;

Megoldás. Az f függvény folytonos a $(0, 0)$ ponton kívül, mivel $f(x, y) = \frac{f_1(x,y)}{f_2(x,y)}$ két folytonos függvény $f_1(x, y) = x + y$ és $f_2(x, y) = x^2 + y^2$ hányadosa és $f_2(x, y) \neq 0$, ha $(x, y) \neq (0, 0)$.

Az f függvény nem folytonos az origóban, mivel ha tekintjük az $(x_n, y_n) = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ origóba tartó sorozatot, akkor

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n} + \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} n = +\infty.$$

$\square$

(d) $f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{1 - x^2 - y^2}, & \text{ha } x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0, & \text{ha } x^2 + y^2 > 1 \end{cases}$;

Megoldás. Az f függvény felírható, mint a $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x, y) = x^2 + y^2$ és a $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$h(z) = \begin{cases} \sqrt{1-z}, & \text{ha } z \leq 1 \\ 0, & \text{ha } z > 1 \end{cases}$$

függvények összetétele, azaz $f(x, y) = h(g(x, y))$. A g függvény két egyváltozós folytonos függvény összege, ezért folytonos. A h függvény folyonos a $z = 1$ ponton kívül, illetve a $z = 1$ pontban is folytonos, mivel $\lim\limits_{z\to 1^-} h(z) = \lim\limits_{z\to 1^-} \sqrt{1-z} = 0 = h(1)$ és $\lim\limits_{z\to 1^+} h(z) = \lim\limits_{z\to 1^+} 0 = 0 = h(1)$, tehát a $z = 1$ pontban a jobb és bal oldali határérték megegyezik a behelyettesítési értékkel.

Az f függvény két folytonos függvény összetétele, ezért folytonos. $\square$

(e) $f(x, y) = \begin{cases} (1 + xy)^{\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}}, & \text{ha } x > 0 \text{ és } y > 0 \\ 1, & \text{ha } x = 0 \text{ vagy } y = 0 \end{cases}$;

Megoldás. Az f függvény folytonos az (x_0, y_0) pontokban, ha $x_0 > 0$ és $y_0 > 0$.

Vizsgáljuk a folytonosságot a $(0, y_0)$, $y_0 > 0$ pontokban.

$$\lim_{(x,y)\to(0^+,y_0)} (1+xy)^{\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}} = \lim_{(x,y)\to(0^+,y_0)} (1+xy)^{\frac{1}{xy}\cdot\frac{xy}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}} = e^{\lim\limits_{(x,y)\to(0^+,y_0)} \frac{xy}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}} =$$
$$= e^{\frac{0\cdot y_0}{\sqrt{0}+\sqrt{y_0}}} = e^0 = 1 = f(0, y_0),$$

tehát f folytonos a $(0, y_0)$, $y_0 > 0$ pontokban.

Hasonlóan belátható, hogy f folytonos az $(x_0, 0)$, $x_0 > 0$ alakú pontokban is.

Végül vizsgáljuk a folytonosságot a $(0, 0)$ pontban:

$$\lim_{(x,y)\to(0^+,0^+)} (1+xy)^{\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}} = \lim_{(x,y)\to(0^+,0^+)} (1+xy)^{\frac{1}{xy}\cdot\frac{xy}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}} = e^{\lim\limits_{(x,y)\to(0^+,0^+)} \frac{xy}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}}$$
$$\overset{(*)}{=} e^0 = f(0,0),$$

ahol a $(*)$ egyenlőségben felhasználtuk, hogy $\lim\limits_{(x,y)\to(0^+,0^+)} \frac{xy}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = 0$, amelyet a következőképpen láthatunk be: minden $x, y > 0$ esetén

$$0 \leq \left| \frac{xy}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \right| = \left| \frac{x\sqrt{y}\cdot\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \right| \leq \left| \frac{x\sqrt{y}\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \right| = |x\sqrt{y}|,$$

továbbá $\lim\limits_{(x,y)\to(0^+,0^+)} |x\sqrt{y}| = \lim\limits_{x\to 0^+} |x| \cdot \lim\limits_{y\to 0^+} \sqrt{y} = 0 \cdot 0 = 0$, ezért a fogó tétel alapján $\lim\limits_{(x,y)\to(0^+,0^+)} \frac{xy}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = 0$.

Ezzel beláttuk, hogy f folytonos az értelmezési tartománya minden pontjában, azaz folytonos. □

(f) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{\ln(1+x^2+y^2)}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 1, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$

Megoldás. Az f függvény felírható, mint a $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x,y) = x^2 + y^2$ és $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$h(z) = \begin{cases} \frac{z}{\ln(1+z)}, & \text{ha } z \neq 0 \\ 1, & \text{ha } z = 0 \end{cases}$$

függvények összetétele, azaz $f(x,y) = h(g(x,y))$. A g függvény folytonos, mivel két egyváltozós folytonos függvény összege. A h függvény is folytonos $z = 0$ ponton kívül, míg a $z = 0$ pontban is folytonos, mivel $\lim\limits_{z\to 0} \frac{z}{\ln(1+z)} \overset{L'H}{=} \lim\limits_{z\to 0} \frac{1}{\frac{1}{1+z}} = 1 = h(0)$. Tehát f két folytonos függvény összetétele, ezért folytonos minden $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ pontban. □

7. fejezet

Többváltozós függvények parciális deriváltjai

7.1. Elméleti összefoglaló

7.1.1. Többváltozós függvények parciális és iránymenti deriváltjai

7.1. Értelmezés
Legyen p az $A \subseteq \mathbb{R}^n$ halmaz egy belső pontja. Az $f : A \to \mathbb{R}$ függvénynek az $p \in \mathring{A}$ pontban a $v \in \mathbb{R}$ *iránymenti deriváltja*

$$\delta f(p; v) = \lim_{t \to 0} \frac{f(p + tv) - f(p)}{t},$$

ha a határérték létezik és véges.

7.2. Értelmezés
Legyen p az $A \subseteq \mathbb{R}^n$ halmaz egy belső pontja és legyenek $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, $\dots$, $e_n = (0, \dots, 0, 1)$ az $\mathbb{R}^n$ vektortér kanonikus bázisvektorai. Az $f : A \to \mathbb{R}$ függvény $\delta f(p; e_i)$ iránymenti deriváltját az f függvény x_i *változó szerinti parciális deriváltjának* nevezzük az p pontban és $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$-val jelöljük.

7.3. Megjegyzés
Mivel

$$\begin{aligned} p + te_i &= (p_1, \dots, p_{i-1}, p_i, p_{i+1}, \dots, p_n) + t(0, \dots 0, 1, 0, \dots, 0) \\ &= (p_1, \dots, p_{i-1}, p_i + t, p_{i+1}, \dots, p_n), \end{aligned}$$

ezért

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = \lim_{t \to 0} \frac{f(p_1, \dots, p_{i-1}, p_i + t, p_{i+1}, \dots, p_n) - f(p_1, \dots, p_{i-1}, p_i, p_{i+1}, \dots, p_n)}{t}.$$

◇

Sajátosan a kétváltozós esetben ($n = 2$) az $f(x_1, x_2)$ kétváltozós függvényre gyakran az $f(x, y)$ jelölést használjuk, vagyis az x_1 változó helyett x-et, míg az x_2 változó helyett egyszerűen y-t használunk. Ezekkel a jelölésekkel az $\frac{\partial f}{\partial x_1}(p_1, p_2)$ parciális deriváltból $\frac{\partial f}{\partial x}(p_1, p_2)$, míg az $\frac{\partial f}{\partial x_2}(p_1, p_2)$ parciális deriváltból $\frac{\partial f}{\partial y}(p_1, p_2)$ lesz. Továbbá

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(p_1, p_2) &= \lim_{t \to 0} \frac{f(p_1 + t, p_2) - f(p_1, p_2)}{t} = \lim_{x \to p_1} \frac{f(x, p_2) - f(p_1, p_2)}{x - p_1}, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(p_1, p_2) &= \lim_{t \to 0} \frac{f(p_1, p_2 + t) - f(p_1, p_2)}{t} = \lim_{y \to p_2} \frac{f(p_1, y) - f(p_1, p_2)}{y - p_2}. \end{aligned}$$

Az $\frac{\partial f}{\partial x}$-et az f függvény x-szerinti parciális deriváltjának, illetve az $\frac{\partial f}{\partial y}$-et az f függvény y-szerinti parciális deriváltjának nevezzük.

Háromváltozós függvények esetén ($n = 3$) az x_3 harmadik változót z-vel szokták jelölni. Ekkor az $f(x, y, z)$ háromváltozós függvény elsőrendű parciális deriváltjai a (p_1, p_2, p_3) pontban:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(p_1,p_2,p_3) &= \lim_{t\to 0}\frac{f(p_1+t,p_2,p_3)-f(p_1,p_2,p_3)}{t} = \lim_{x\to p_1}\frac{f(x,p_2,p_3)-f(p_1,p_2,p_3)}{x-p_1},\\
\frac{\partial f}{\partial y}(p_1,p_2,p_3) &= \lim_{t\to 0}\frac{f(p_1,p_2+t,p_3)-f(p_1,p_2,p_3)}{t} = \lim_{y\to p_2}\frac{f(p_1,y,p_3)-f(p_1,p_2,p_3)}{y-p_2},\\
\frac{\partial f}{\partial z}(p_1,p_2,p_3) &= \lim_{t\to 0}\frac{f(p_1,p_2,p_3+t)-f(p_1,p_2,p_3)}{t} = \lim_{y\to p_3}\frac{f(p_1,p_2,z)-f(p_1,p_2,p_3)}{z-p_3}.
\end{aligned}$$

Megjegyzés. Mikor x (y, illetve z) szerint parciálisan deriválunk akkor a többi változót konstansnak tekintjük.

Adottak az $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvények, amelyeknek léteznek a parciális deriváltjai. Ekkor léteznek az $(f + g)$ összegfüggvény parciális deriváltjai és

$$\frac{\partial(f+g)}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) \qquad \text{és} \qquad \frac{\partial(f+g)}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)+\frac{\partial g}{\partial y}(x,y).$$

Ennek egy sajátos esete, ha $h(x, y) = f(x) + g(y)$, akkor $\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = f'(x)$ és $\frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = g'(y)$.

7.4. Példa

Ha $f(x, y) = x^3 + y^4$, akkor $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^3+y^4\right) = 3x^2$ és $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^3+y^4\right) = 4y^3$. ◇

Az $f \cdot g$ szorzat függvénynek is léteznek a parciális deriváltjai és

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(f\cdot g)}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\cdot g(x,y) + f(x,y)\cdot\frac{\partial g}{\partial x}(x,y),\\
\frac{\partial(f\cdot g)}{\partial y}(x,y) &= \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\cdot g(x,y) + f(x,y)\cdot\frac{\partial g}{\partial y}(x,y).
\end{aligned}$$

Ennek egy sajátos esete, ha $h(x, y) = f(x)g(y)$, akkor

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(f(x)g(y)) = \left(\frac{\partial}{\partial x}f(x)\right)g(y) + f(x)\left(\frac{\partial}{\partial x}g(y)\right) = f'(x)g(y)$$

és hasonlóan

$$\frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(f(x)g(y)) = \left(\frac{\partial}{\partial y}f(x)\right)g(y) + f(x)\left(\frac{\partial}{\partial y}g(y)\right) = f(x)g'(y).$$

7.5. Példa

Ha $f(x, y) = x^6y^{11}$, akkor $\frac{\partial f}{\partial x} = 6x^5y^{11}$ és $\frac{\partial f}{\partial x} = 11x^6y^{10}$. ◇

7.6. Példa

Ha $g(x) = (x^2 + 1)$ és $h(y) = e^{3y}$, akkor

$$\frac{\partial}{\partial x}\left((x^2+1)e^{3y}\right) = \left(x^2+1\right)' e^{3y} = 2xe^{3y} \text{ és } \frac{\partial}{\partial x}\left((x^2+1)e^{3y}\right) = (x^2+1)\left(e^{3y}\right)' = (x^2+1)3e^{3y}.$$

◇

Ha $g(x, y) \neq 0$, minden $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ esetén, akkor az $\left(\frac{f}{g}\right)(x,y) = \frac{f(x,y)}{g(x,y)}$ hányados függvény parciális deriváltja:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f}{g}\right)(x,y) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\cdot g(x,y) - f(x,y)\cdot\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}}{g^2(x,y)},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f}{g}\right)(x,y)=\frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\cdot g(x,y)-f(x,y)\cdot\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y)}{g^2(x,y)}.$$

7.7. Példa

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x+\sqrt{y}}{y+\sqrt{x}}\right)=\frac{y+\sqrt{x}-(x+\sqrt{y})x^{-\frac{1}{2}}}{(y+\sqrt{x})^2}=\frac{y\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}(y+\sqrt{x})^2}.$$

◇

7.8. Tétel

Ha léteznek az $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ és $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ parciális derivált függvények és folytonosak az (x_0,y_0) egy kis környezetében, akkor léteznek az iránymenti deriváltak is az (x_0,y_0) pontban és

$$\delta f((x_0,y_0);\vec{v})=a\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)+b\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0),\qquad \text{ahol } \vec{v}=(a,b).$$

7.9. Példa

Ha $f(x,y)=x^2+2xy+3y^2$ és $\vec{v}=(a,b)$, akkor

$$\delta f((x,y);\vec{v})=\lim_{t\to 0}\frac{f(x+ta,y+tb)-f(x,y)}{t}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{(x+ta)^2+2(x+ta)(y+tb)+3(y+tb)^2-x^2-2xy-3y^2}{t}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{2xat+a^2t^2+2xbt+2yat+2abt^2+6ybt+3b^2t^2}{t}=2xa+2xb+2ya+6yb.$$

Mivel $\dfrac{\partial f}{\partial x}=2x+2y$ és $\dfrac{\partial f}{\partial y}=2x+6y$, ezért a fenti tétel alapján

$$\delta f((x,y);\vec{v})=a\frac{\partial f}{\partial x}+b\frac{\partial f}{\partial y}=a(2x+2y)+b(2x+6y)=2xa+2ya+2xb+6yb.$$

◇

7.1.2. Összetett függvények parciális deriváltjai. Láncszabály

A $\varphi(u)$ egyváltozós függvény u változója helyére behelyettesítjük az $u(x,y)$ kétváltozós függvényt, így kapva az $f(x,y)=\varphi(u(x,y))$ szintén kétváltozós függvényt. Ekkor

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\varphi'(u(x,y))\cdot\frac{\partial u}{\partial x}(x,y),$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\varphi'(u(x,y))\cdot\frac{\partial u}{\partial y}(x,y),$$

ahol φ' az φ egyváltozós függvény deriváltját jelöli.

A $\varphi(u,v)$ kétváltozós függvény, amelybe behelyettesítjük az u változó helyére az $u(x,y)$, illetve a v változó helyére a $v(x,y)$ kétváltozós függvényeket, így kapva az $f(x,y)=\varphi(u(x,y),v(x,y))$ függvényt. Ekkor

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial\varphi}{\partial u}(u(x,y),v(x,y))\cdot\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)+\frac{\partial\varphi}{\partial v}(u(x,y),v(x,y))\cdot\frac{\partial v}{\partial x}(x,y),$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial\varphi}{\partial u}(u(x,y),v(x,y))\cdot\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)+\frac{\partial\varphi}{\partial v}(u(x,y),v(x,y))\cdot\frac{\partial v}{\partial y}(x,y).$$

7.2. Feladatok

7.2.1. Egyváltozós függvények deriváltja

7.1. Feladat. Számítsuk ki a következő függvények deriváltját:

(a) $f(x) = \cos(1 - x^2)$;

(b) $f(x) = e^{\sin \frac{1}{x}}$;

(c) $f(x) = 2^{\operatorname{tg}(x^2)}$;

(d) $f(x) = \operatorname{ctg}(\sqrt[3]{1 + x^3})$;

(e) $f(x) = \ln(1 + \sqrt{1 + x^2})$;

(f) $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}\right)$;

(g) $f(x) = \arccos\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$, $(x > 1)$;

(h) $f(x) = \operatorname{arctg}(\sin x)$;

(i) $f(x) = \operatorname{arcctg}(\cos x)$.

7.2.2. Többváltozós függvények parciális és iránymenti deriváltjai

7.2. Feladat. Az értelmezés alapján számítsd ki a következő függvények parciális deriváltjait:

(a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\dfrac{\pi}{4}, 0\right)$ és $\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right)$, ha $f(x, y) = \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 y}$;

(b) $\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(1, \dfrac{\pi}{2}\right)$ és $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1, 0)$, ha $f(x, y) = e^{\sin(x^2 y)}$;

(c) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1, 1)$ és $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1, -1)$, ha $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^4}$;

(d) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1, 1, 0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1, 1, 2)$ és $\dfrac{\partial f}{\partial z}(1, -1, 1)$, ha $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

7.3. Feladat. Igazold, hogy az

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \neq 0 \text{ és } y \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \text{ vagy } y = 0 \end{cases}$$

függvény nem folytonos az origóban, de léteznek parciális deriváltjai az origóban!

7.4. Feladat. Az értelmezés alapján számítsd ki a következő függvények $\delta f((x, y); \vec{v})$ iránymenti deriváltjait:

(a) $f(x, y) = \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 y}$ és $\vec{v} = (1, -3)$;

(b) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^4}$ és $\vec{v} = (2, 1)$;

(c) $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ és $\vec{v} = (2, 1, 3)$.

7.5. Feladat. Számítsd ki a következő függvények elsőrendű parciális deriváltjait direkt deriválással:

(a) $f(x, y) = \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 y}$;

(b) $f(x, y) = e^{\sin(x^2 y)}$;

(c) $f(x, y) = x^2 \sin^2 y$;

(d) $f(x, y) = e^{x - y^2}$;

(e) $f(x, y, z) = e^{x^2 + y^2} \cos z$;

(f) $f(x, y, z) = x^{y^z}$, $\quad x, y, z > 0$;

(g) $f(x, y, z) = e^{xy} \ln(x + z)$, $\quad x + z > 0$;

(h) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^4}$.

7.6. Feladat. Számítsd ki a következő függvények parciális és iránymenti deriváltjait:

(a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases};$

(b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+3y^4}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases};$

(c) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+3y^4}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$

7.2.3. Összetett függvények parciális deriváltjai. Láncszabály

7.7. Feladat. A láncszabályt használva a következő esetekben számítsd ki a $\frac{\partial f}{\partial x}$ és $\frac{\partial f}{\partial y}$ parciális derivált függvényeket, ha $f(x,y)=\varphi(u(x,y),v(x,y))$:

(a) $\varphi(u,v)=\ln(u^2+v)$, ahol $u(x,y)=e^{x+y^2}$ és $v(x,y)=x^2+y$;

(b) $\varphi(u,v)=\operatorname{arctg}\left(\frac{u}{v}\right)$, ahol $u(x,y)=x\sin y$ és $v(x,y)=x\cos y$;

(c) $\varphi=\varphi(u,v)$, ahol $u(x,y)=x+y$ és $v(x,y)=x^2+y^2$;

(d) $\varphi=\varphi(u,v)$, ahol $u(x,y)=x^2-y^2$ és $v(x,y)=e^{xy}$.

7.8. Feladat. Igazold, hogy a következő függvények teljesítik a megadott egyenleteket:

(a) $f(x,y)=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ teljesíti az $x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=0$ egyenletet;

(b) $f(x,y)=\varphi\left(\frac{y^2}{x}\right)$ teljesíti az $2x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=0$ egyenletet;

(c) $f(x,y,z)=\varphi(xy,x^2+y^2-z^2)$ teljesíti az $xz\frac{\partial f}{\partial x}-yz\frac{\partial f}{\partial y}+(x^2-y^2)\frac{\partial f}{\partial z}=0$ egyenletet;

(d) $f(x,y)=y\varphi(x^2-y^2)$ teljesíti az $\frac{1}{x}\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{y^2}f$ egyenletet;

(e) $f(x,y)=xy+x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ teljesíti az $x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=xy+f$ egyenletet;

(f) $f(x,y)=xy\varphi(x^2-y^2)$ teljesíti az $xy^2\frac{\partial f}{\partial x}+x^2y\frac{\partial f}{\partial y}=(x^2+y^2)f$ egyenletet.

7.3. Megoldások

7.3.1. Egyváltozós függvények deriváltja

7.1. Feladat. Számítsuk ki a következő függvények deriváltját:

(a) $f(x) = \cos(1 - x^2)$;

Megoldás.

$$f'(x) = \cos'(1 - x^2) \cdot (1 - x^2)' = -\sin(1 - x^2) \cdot (-2x) = 2x \sin(1 - x^2).$$

□

(b) $f(x) = e^{\sin \frac{1}{x}}$;

Megoldás.

$$f'(x) = e^{\sin \frac{1}{x}} \cdot \left(\sin \frac{1}{x}\right)' = e^{\sin \frac{1}{x}} \cdot \sin' \left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' = e^{\sin \frac{1}{x}} \cdot \cos \left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right).$$

□

(c) $f(x) = 2^{\operatorname{tg}(x^2)}$;

Megoldás.

$$f'(x) = 2^{\operatorname{tg}(x^2)} \cdot \ln 2 \cdot (\operatorname{tg}(x^2))' = 2^{\operatorname{tg}(x^2)} \cdot \ln 2 \cdot \frac{1}{\cos^2(x^2)} \cdot 2x = \frac{2x \cdot 2^{\operatorname{tg}(x^2)} \cdot \ln 2}{\cos^2(x^2)}.$$

□

(d) $f(x) = \operatorname{ctg}(\sqrt[3]{1 + x^3})$;

Megoldás.

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{\sin^2(\sqrt[3]{1 + x^3})} \cdot (\sqrt[3]{1 + x^3})' = -\frac{1}{\sin^2(\sqrt[3]{1 + x^3})} \cdot ((1 + x^3)^{1/3})' \\ &= -\frac{1}{\sin^2(\sqrt[3]{1 + x^3})} \cdot \frac{1}{3} \cdot (1 + x^3)^{-2/3} \cdot 3x^2 = \frac{-x^2}{\sin^2(\sqrt[3]{1 + x^3}) \cdot (\sqrt[3]{1 + x^3})^2}. \end{aligned}$$

□

(e) $f(x) = \ln(1 + \sqrt{1 + x^2})$;

Megoldás.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1 + \sqrt{1 + x^2}} \cdot (1 + \sqrt{1 + x^2})' = \frac{1}{1 + \sqrt{1 + x^2}} \cdot (1 + (1 + x^2)^{1/2})' \\ &= \frac{1}{1 + \sqrt{1 + x^2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot (1 + x^2)^{-1/2} \cdot 2x = \frac{x}{(1 + \sqrt{1 + x^2}) \cdot \sqrt{1 + x^2}} \\ &= \frac{x}{1 + x^2 + \sqrt{1 + x^2}}. \end{aligned}$$

□

(f) $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)$;

Megoldás.

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}} \cdot \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)' = \frac{1+x^2}{\sqrt{(1+x^2)^2-(1-x^2)^2}} \cdot \frac{-2x\cdot(1+x^2)-(1-x^2)\cdot 2x}{(1+x^2)^2}$$
$$= \frac{1+x^2}{\sqrt{4x^2}} \cdot \frac{-4x}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{|2x|}\cdot\frac{-4x}{1+x^2} = \frac{-2x}{|x|\cdot(1+x^2)}.$$

□

(g) $f(x) = \arccos\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$, $(x>1)$;

Megoldás.

$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{|x|}}} \cdot \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}} \cdot \frac{-1}{2} \cdot x^{-\frac{3}{2}}$$
$$= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}} \cdot \frac{1}{2\cdot x\cdot\sqrt{x}} = \frac{1}{2x\sqrt{x-1}}.$$

□

(h) $f(x) = \operatorname{arctg}(\sin x)$;

Megoldás.

$$f'(x) = \frac{1}{1+(\sin x)^2}\cdot(\sin x)' = \frac{1}{1+\sin^2 x}\cdot\cos x = \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}.$$

□

(i) $f(x) = \operatorname{arcctg}(\cos x)$.

Megoldás.

$$f'(x) = \frac{-1}{1+(\cos x)^2}\cdot(\cos x)' = \frac{-1}{1+\cos^2 x}\cdot(-\sin x) = \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}.$$

□

7.3.2. Többváltozós függvények parciális és iránymenti deriváltjai

7.2. Feladat. Az értelmezés alapján számítsd ki a következő függvények parciális deriváltjait:

(a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\dfrac{\pi}{4}, 0\right)$ és $\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right)$, ha $f(x,y) = \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 y}$;

Megoldás.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\pi}{4},0\right) &= \lim_{t\to 0}\frac{f\left(\frac{\pi}{4}+t,0\right)-f\left(\frac{\pi}{4},0\right)}{t}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+t\right)+\cos^2 0}-\sqrt{\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right)+\cos^2 0}}{t}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+t\right)+1}-\sqrt{\frac{3}{2}}}{t}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{\left(\sqrt{\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+t\right)+1}\right)^2-\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2}{t\left(\sqrt{\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+t\right)+1}+\sqrt{\frac{3}{2}}\right)}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+t\right)+1-\frac{3}{2}}{t\left(\sqrt{\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+t\right)+1}+\sqrt{\frac{3}{2}}\right)}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+t\right)-\frac{1}{2}}{t}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{1}{\sqrt{\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+t\right)+1}+\sqrt{\frac{3}{2}}}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+t\right)-\frac{1}{2}}{t}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{3}{2}}}\\
&\overset{L'H}{=} \lim_{t\to 0}\frac{2\sin\left(\frac{\pi}{4}+t\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+t\right)}{1}\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}\\
&= 2\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}\\
&= 2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}\\
&= \frac{1}{\sqrt{6}},\\
\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right) &= \lim_{t\to 0}\frac{f\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}+t\right)-f\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)}{t}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+t\right)}-\sqrt{\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right)}}{t}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{\frac{1}{2}+\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+t\right)}-1}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\left(\sqrt{\frac{1}{2}+\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+t\right)}\right)^2-1^2}{t\left(\sqrt{\frac{1}{2}+\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+t\right)}+1\right)}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{2}+\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+t\right)-1}{t\left(\sqrt{\frac{1}{2}+\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+t\right)}+1\right)}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+t\right)-\frac{1}{2}}{t}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}+\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+t\right)}+1}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+t\right)-\frac{1}{2}}{t}\cdot\frac{1}{2}\\
&\overset{L'H}{=} \lim_{t\to 0}\frac{-2\cos\left(\frac{\pi}{4}+t\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}+t\right)}{1}\cdot\frac{1}{2}\\
&= -2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot\frac{1}{2} = -2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

$$= -\frac{1}{2}.$$

□

(b) $\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(1, \dfrac{\pi}{2}\right)$ és $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,0)$, ha $f(x,y) = e^{\sin(x^2 y)}$;

Megoldás.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}\left(1, \frac{\pi}{2}\right) &= \lim_{t\to 0} \frac{f\left(1+t, \frac{\pi}{2}\right) - f\left(1, \frac{\pi}{2}\right)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{e^{\sin((1+t)^2\cdot\frac{\pi}{2})} - e^{\sin(1^2\cdot\frac{\pi}{2})}}{t} \\
&\overset{L'H}{=} \lim_{t\to 0} \frac{e^{\sin((1+t)^2\cdot\frac{\pi}{2})}\cdot\cos((1+t)^2\cdot\frac{\pi}{2})\cdot 2\cdot(1+t)\cdot\frac{\pi}{2}}{1} \\
&= e^{\sin(\frac{\pi}{2})}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot 2\cdot\frac{\pi}{2} = 0, \\
\frac{\partial f}{\partial y}(1,0) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(1, 0+t) - f(1,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{e^{\sin(1^2\cdot(0+t))} - e^{\sin(1^2\cdot 0)}}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{e^{\sin t} - e^0}{t} \overset{L'H}{=} \lim_{t\to 0} \frac{e^{\sin t}\cdot\cos t}{1} = e^0\cdot 1 = 1.
\end{aligned}$$

□

(c) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1)$ és $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,-1)$, ha $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^4}$;

Megoldás.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(1+t,1) - f(1,1)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{(1+t)^2+1^4} - \sqrt{1^2+1^4}}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{(1+t)^2+1} - \sqrt{2}}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{(\sqrt{(1+t)^2+1})^2 - (\sqrt{2})^2}{t(\sqrt{(1+t)^2+1}+\sqrt{2})} = \lim_{t\to 0} \frac{(1+t)^2+1-2}{t(\sqrt{(1+t)^2+1}+\sqrt{2})} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{t^2+2t}{t(\sqrt{(1+t)^2+1}+\sqrt{2})} = \lim_{t\to 0} \frac{t+2}{\sqrt{(1+t)^2+1}+\sqrt{2}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}, \\
\frac{\partial f}{\partial y}(1,-1) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(1,-1+t) - f(1,-1)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{1^2+(-1+t)^4} - \sqrt{1^2+(-1)^4}}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{1+(t-1)^4} - \sqrt{2}}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{(\sqrt{1+(t-1)^4})^2 - (\sqrt{2})^2}{t(\sqrt{1+(t-1)^4}+\sqrt{2})} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1+(t-1)^4-2}{t(\sqrt{1+(t-1)^4}+\sqrt{2})} = \lim_{t\to 0} \frac{t^4-4t^3+6t^2-4t}{t(\sqrt{1+(t-1)^4}+\sqrt{2})} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{t^3-4t^2+6t-4}{\sqrt{1+(t-1)^4}+\sqrt{2}} = \frac{-4}{2\sqrt{2}} = -\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

□

(d) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1,0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1,2)$ és $\dfrac{\partial f}{\partial z}(1,-1,1)$, ha $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Megoldás.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(1,1,0) &= \lim_{t\to 0}\frac{f(1+t,1,0)-f(1,1,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{(1+t)^2+1^2+0^2}-\sqrt{1^2+1^2+0^2}}{t}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{(1+t)^2+1}-\sqrt{2}}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{(\sqrt{(1+t)^2+1})^2-(\sqrt{2})^2}{t(\sqrt{(1+t)^2+1}+\sqrt{2})}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{(1+t)^2+1-2}{t(\sqrt{(1+t)^2+1}+\sqrt{2})} = \lim_{t\to 0}\frac{t^2+2t}{t(\sqrt{(1+t)^2+1}+\sqrt{2})}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{t+2}{\sqrt{(1+t)^2+1}+\sqrt{2}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}},\\
\frac{\partial f}{\partial y}(1,1,2) &= \lim_{t\to 0}\frac{f(1,1+t,2)-f(1,1,2)}{t}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{1^2+(1+t)^2+2^2}-\sqrt{1^2+1^2+2^2}}{t}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{(1+t)^2+5}-\sqrt{6}}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{(\sqrt{(1+t)^2+5})^2-(\sqrt{6})^2}{t(\sqrt{(1+t)^2+5}+\sqrt{6})}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{(1+t)^2+5-6}{t(\sqrt{(1+t)^2+5}+\sqrt{6})} = \lim_{t\to 0}\frac{t^2+2t}{t(\sqrt{(1+t)^2+5}+\sqrt{6})}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{t+2}{\sqrt{(1+t)^2+5}+\sqrt{6}} = \frac{2}{2\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}},\\
\frac{\partial f}{\partial z}(1,-1,1) &= \lim_{t\to 0}\frac{f(1,-1,1+t)-f(1,-1,1)}{t}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{1^2+(-1)^2+(1+t)^2}-\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}}{t}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{(1+t)^2+2}-\sqrt{3}}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{(\sqrt{(1+t)^2+2})^2-(\sqrt{3})^2}{t(\sqrt{(1+t)^2+2}+\sqrt{3})}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{(1+t)^2+2-3}{t(\sqrt{(1+t)^2+2}+\sqrt{3})} = \lim_{t\to 0}\frac{t^2+2t}{t(\sqrt{(1+t)^2+2}+\sqrt{3})}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{t+2}{\sqrt{(1+t)^2+2}+\sqrt{3}} = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

□

7.3. Feladat. Igazold, hogy az

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\quad f(x,y)=\begin{cases}1, & \text{ha } x\neq 0 \text{ és } y\neq 0\\ 0, & \text{ha } x=0 \text{ vagy } y=0\end{cases}$$

függvény nem folytonos az origóban, de léteznek parciális deriváltjai az origóban!

Megoldás. Előbb kiszámítjuk a függvény parciális deriváltjait az origóban:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{t\to 0}\frac{f(0+t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{0-0}{t} = 0,\\
\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{t\to 0}\frac{f(0,0+t)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{0-0}{t} = 0.
\end{aligned}$$

Az f függvény nem folytonos az origóban, mert az $y=0$ egyenes (Ox tengely) mentén tartva az origóba a függvény határértéke $\lim\limits_{x\to 0} f(x,0) = \lim\limits_{t\to 0} 0 = 0$, míg ha az $y=x$ egyenes mentén tartunk az origóba, akkor $\lim\limits_{t\to 0} f(x,x) = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$. A két határérték nem egyezik meg, ezért nem létezik globális határérték az origóban s így a függvény nem lehet folytonos az origóban. □

7.4. Feladat. Az értelmezés alapján számítsd ki a következő függvények $\delta f((x,y);\ \vec{v})$ iránymenti deriváltjait:

(a) $f(x,y) = \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 y}$ és $\vec{v} = (1,-3)$;

Megoldás.

$$\delta f((x,y);(1,-3)) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+1\cdot t, y+(-3)\cdot t) - f(x,y)}{t} =$$
$$= \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{\sin^2(x+t)+\cos^2(y-3t)} - \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 y}}{t} =$$
$$\stackrel{L'H}{=} \lim_{t\to 0} \frac{\frac{1}{2\sqrt{\sin^2(x+t)+\cos^2(y-3t)}} \cdot [2\sin(x+t)\cos(x+t) + 2\cos(y-3t)(-\sin(y-3t))(-3)]}{1} =$$
$$= \frac{\sin x \cos x + 3\sin y \cos y}{\sqrt{\sin^2 x + \cos^2 y}}.$$

□

(b) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^4}$ és $\vec{v} = (2,1)$;

Megoldás.

$$\delta f((x,y),(2,1)) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+2\cdot t, y+1\cdot t) - f(x,y)}{t}$$
$$= \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{(x+2t)^2+(y+t)^4} - \sqrt{x^2+y^4}}{t}$$
$$\stackrel{L'H}{=} \lim_{t\to 0} \frac{\frac{1}{2\sqrt{(x+2t)^2+(y+t)^4}} \cdot [2(x+2t)\cdot 2 + 4(y+t)^3]}{1}$$
$$= \frac{2x+2y^3}{\sqrt{x^2+y^4}}.$$

□

(c) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ és $\vec{v} = (2,1,3)$.

Megoldás.

$$\delta f((x,y,z);(2,1,3)) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+2t, y+t, z+3t) - f(x,y,z)}{t} =$$
$$= \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{(x+2t)^2+(y+t)^2+(z+3t)^2} - \sqrt{x^2+y^2+z^2}}{t}$$
$$\stackrel{l'H}{=} \lim_{t\to 0} \frac{\frac{1}{2\sqrt{(x+2t)^2+(y+t)^2+(z+3t)^2}} \cdot [4(x+2t) + 2(y+t) + 6(z+t)]}{1}$$
$$= \frac{2x+y+3z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

□

7.5. Feladat. Számítsd ki a következő függvények elsőrendű parciális deriváltjait direkt deriválással:

(a) $f(x,y) = \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 y}$;

Megoldás. Direkt deriválással számolva a parciális deriváltak:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{\sin^2 x + \cos^2 y}\right) = \frac{1}{2\sqrt{\sin^2 x + \cos^2 y}} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\sin^2 x + \cos^2 y\right) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\sin^2 x + \cos^2 y}} \cdot \left(\frac{\partial \sin^2 x}{\partial x} + \frac{\partial \cos^2 y}{\partial x}\right) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\sin^2 x + \cos^2 y}} \cdot (2\sin x \cos x + 0) \\
&= \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{\sin^2 x + \cos^2 y}}, \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{\sin^2 x + \cos^2 y}\right) = \frac{1}{2\sqrt{\sin^2 x + \cos^2 y}} \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left(\sin^2 x + \cos^2 y\right) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\sin^2 x + \cos^2 y}} \cdot \left(\frac{\partial \sin^2 x}{\partial y} + \frac{\partial \cos^2 y}{\partial y}\right) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\sin^2 x + \cos^2 y}} \cdot (0 + 2\cos y(-\sin y)) \\
&= \frac{-\cos y \sin y}{\sqrt{\sin^2 x + \cos^2 y}}.
\end{aligned}$$

7.10. Megjegyzés

A 7.2.(a) feladatban kiszámolt eredeményeket úgy is megkaphatjuk, hogy ha a direkt deriválással kiszámolt parciális derivált függvényekbe behelyettesítjük a megfelelő értékeket:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\pi}{4}, 0\right) &= \frac{\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}}{\sqrt{\sin^2\frac{\pi}{4} + \cos^2 0}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1^2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{6}}, \\
\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) &= \frac{-\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{4}}{\sqrt{\sin^2\frac{\pi}{4} + \cos^2\frac{\pi}{4}}} = \frac{-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{1}} = -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

◇

□

(b) $f(x,y) = e^{\sin(x^2 y)}$;

Megoldás.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{\sin(x^2y)}\right) = e^{\sin(x^2y)} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\sin(x^2y) = e^{\sin(x^2y)} \cdot \cos(x^2y) \cdot \frac{\partial}{\partial x}(x^2y) \\
&= e^{\sin(x^2y)} \cdot \cos(x^2y) \cdot 2xy, \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{\sin(x^2y)}\right) = e^{\sin(x^2y)} \cdot \frac{\partial}{\partial y}\sin(x^2y) = e^{\sin(x^2y)} \cdot \cos(x^2y) \cdot \frac{\partial}{\partial y}(x^2y) \\
&= e^{\sin(x^2y)} \cdot \cos(x^2y) \cdot x^2,
\end{aligned}$$

7.11. Megjegyzés
A 7.2.(b) feladatban kiszámolt eredeményeket úgy is megkaphatjuk, hogy ha a direkt deriválással kiszámolt parciális derivált függvényekbe behelyettesítjük a megfelelő értékeket:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}\left(1,\frac{\pi}{2}\right) &= e^{\sin(1^2\cdot\frac{\pi}{2})}\cdot\cos\left(1^2\cdot\frac{\pi}{2}\right)\cdot 2\cdot 1\cdot\frac{\pi}{2} = e^{\sin\frac{\pi}{2}}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot\pi = 0.\\ \frac{\partial f}{\partial y}(1,0) &= e^{\sin(1^2\cdot 0)}\cdot\cos(1^2\cdot 0)\cdot 1^2 = e^{\sin 0}\cdot\cos 0 = e^0\cdot 1 = 1.\end{aligned}$$

◇

□

(c) $f(x,y) = x^2\sin^2 y$;

Megoldás.

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\sin^2 y\right) = \frac{\partial x^2}{\partial x}\cdot\sin^2 y + x^2\cdot\frac{\partial\sin^2 y}{\partial x} = 2x\cdot\sin^2 y + 0\cdot x^2\\ &= 2x\sin^2 y,\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2\sin^2 y\right) = \frac{\partial x^2}{\partial y}\cdot\sin^2 y + x^2\cdot\frac{\partial\sin^2 y}{\partial y} = 0\cdot\sin^2 y + x^2\cdot 2\sin y\cos y\\ &= 2x^2\sin y\cos y.\end{aligned}$$

□

(d) $f(x,y) = e^{x-y^2}$;

Megoldás.

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{x-y^2}\right) = e^{x-y^2}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(x-y^2\right)\\ &= e^{x-y^2}\cdot\left(\frac{\partial x}{\partial x}-\frac{\partial y^2}{\partial x}\right) = e^{x-y^2}\cdot(1-0)\\ &= e^{x-y^2},\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{x-y^2}\right) = e^{x-y^2}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(x-y^2\right)\\ &= e^{x-y^2}\cdot\left(\frac{\partial x}{\partial y}-\frac{\partial y^2}{\partial y}\right) = e^{x-y^2}\cdot(0-2y)\\ &= -2ye^{x-y^2}.\end{aligned}$$

□

(e) $f(x,y,z) = e^{x^2+y^2}\cos z$;

Megoldás.

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{x^2+y^2}\cos z\right) = \cos z\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{x^2+y^2}\right) = \cos z e^{x^2+y^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2+y^2\right)\\ &= e^{x^2+y^2}2x\cos z,\\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{x^2+y^2}\cos z\right) = \cos z\frac{\partial}{\partial y}\left(e^{x^2+y^2}\right) = \cos z e^{x^2+y^2}\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2+y^2\right)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= e^{x^2+y^2} 2y \cos z, \\
\frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z}\left(e^{x^2+y^2}\cos z\right) = e^{x^2+y^2}\frac{\partial}{\partial z}(\cos z) = e^{x^2+y^2}(-\sin z) \\
&= -e^{x^2+y^2}\sin z.
\end{aligned}
$$

□

(f) $f(x,y,z) = x^{y^z}, \quad x,y,z>0;$

Megoldás.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(x^{(y^z)}\right) = y^z \cdot x^{(y^z)-1}, \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(x^{(y^z)}\right) = x^{y^z}\cdot \ln x \cdot \frac{\partial}{\partial y}(y^z) = x^{y^z}\cdot \ln x \cdot y^{z-1}\cdot z, \\
\frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z}\left(x^{(y^z)}\right) = x^{y^z}\cdot \ln x \cdot \frac{\partial}{\partial z}(y^z) = x^{y^z}\cdot \ln x \cdot y^{z}\cdot \ln y.
\end{aligned}
$$

□

(g) $f(x,y,z) = e^{xy}\ln(x+z), \quad x+z>0;$

Megoldás.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{xy}\ln(x+z)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{xy}\right)\ln(x+z) + e^{xy}\frac{\partial}{\partial x}\left(\ln(x+z)\right) \\
&= e^{xy} y \ln(x+z) + e^{xy}\frac{1}{x+z}, \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{xy}\ln(x+z)\right) = \ln(x+z)\frac{\partial}{\partial y}\left(e^{xy}\right) = \ln(x+z)\cdot e^{xy}\cdot x, \\
\frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z}\left(e^{xy}\ln(x+z)\right) = e^{xy}\frac{\partial}{\partial z}\left(\ln(x+z)\right) = e^{xy}\cdot\frac{1}{x+z} = \frac{e^{xy}}{x+z}.
\end{aligned}
$$

□

(h) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^4}.$

Megoldás.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{x^2+y^4}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^4}}\cdot\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^4) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^4}}\cdot\left(\frac{\partial x^2}{\partial x}+\frac{\partial y^4}{\partial x}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^4}}\cdot(2x+0) \\
&= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^4}}, \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{x^2+y^4}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^4}}\cdot\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^4) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^4}}\cdot\left(\frac{\partial x^2}{\partial y}+\frac{\partial y^4}{\partial y}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^4}}\cdot\left(0+4y^3\right) \\
&= \frac{2y^3}{\sqrt{x^2+y^4}}.
\end{aligned}
$$

7.12. Megjegyzés
A 7.2.(c) feladatban kiszámolt eredeményeket úgy is megkaphatjuk, hogy ha a direkt deriválással kiszámolt parciális derivált függvényekbe behelyettesítjük a megfelelő értékeket:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) &= \frac{1}{\sqrt{1^2+1^4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \\
\frac{\partial f}{\partial y}(1,-1) &= \frac{2(-1)^3}{\sqrt{1^2+(-1)^4}} = \frac{-2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

◇

□

7.6. Feladat. Számítsd ki a következő függvények parciális és iránymenti deriváltjait:

(a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases};$

Megoldás. Az origón kívüli pontokban a parciális deriváltakat direkt deriválással fogjuk kiszámolni: minden $(x,y) \neq (0,0)$ esetén

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \frac{\frac{\partial xy}{\partial x} \cdot \sqrt{x^2+y^2} - xy \cdot \frac{\partial \sqrt{x^2+y^2}}{\partial x}}{x^2+y^2} \\
&= \frac{y \cdot \sqrt{x^2+y^2} - xy \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2)}{x^2+y^2} \\
&= \frac{y \cdot \sqrt{x^2+y^2} - xy \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} \cdot 2x}{x^2+y^2} \\
&= \frac{y \cdot (x^2+y^2) - x^2 y}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \frac{\frac{\partial xy}{\partial y} \cdot \sqrt{x^2+y^2} - xy \cdot \frac{\partial \sqrt{x^2+y^2}}{\partial y}}{x^2+y^2} \\
&= \frac{x \cdot \sqrt{x^2+y^2} - xy \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2)}{x^2+y^2} \\
&= \frac{x \cdot \sqrt{x^2+y^2} - xy \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} \cdot 2y}{x^2+y^2} \\
&= \frac{x \cdot (x^2+y^2) - xy^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}.
\end{aligned}$$

Az origóban a parciális deriváltakat az értelmezés alapján számoljuk ki:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(0+t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{(0+t)\cdot 0}{\sqrt{(0+t)^2+0^2}} - 0}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = 0, \\
\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(0,0+t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{0\cdot(0+t)}{\sqrt{0^2+(0+t)^2}} - 0}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = 0.
\end{aligned}$$

Összegezve az f parciális derivált függvényei:

$$\frac{\partial f}{\partial x}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, & \text{ha } (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \text{ha } (x,y)=(0,0)\end{cases},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, & \text{ha } (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \text{ha } (x,y)=(0,0)\end{cases}.$$

□

(b) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+3y^4}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \text{ha } (x,y)=(0,0)\end{cases};$

Megoldás. Az origón kívüli pontokban a parciális deriváltakat direkt deriválással fogjuk kiszámolni: minden $(x,y)\neq(0,0)$ esetén

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)&=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^3+3y^4}{x^2+y^2}\right)=\frac{\frac{\partial(x^3+3y^4)}{\partial x}\cdot(x^2+y^2)-(x^3+3y^4)\cdot\frac{\partial(x^2+y^2)}{\partial x}}{(x^2+y^2)^2}\\&=\frac{3x^2\cdot(x^2+y^2)-(x^3+3y^4)\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}\\&=\frac{x^4+3x^2y^2-6xy^4}{(x^2+y^2)^2},\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)&=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^3+3y^4}{x^2+y^2}\right)=\frac{\frac{\partial(x^3+3y^4)}{\partial y}\cdot(x^2+y^2)-(x^3+3y^4)\cdot\frac{\partial(x^2+y^2)}{\partial y}}{(x^2+y^2)^2}\\&=\frac{12y^3\cdot(x^2+y^2)-(x^3+3y^4)\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}\\&=\frac{-2x^3y+12x^2y^3+6y^5}{(x^2+y^2)^2}.\end{aligned}$$

Az origóban a parciális deriváltakat az értelmezés alapján számoljuk ki:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{t\to0}\frac{f(0+t,0)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{\frac{(0+t)^3+3\cdot0^4}{(0+t)^2+0^2}-0}{t}=\lim_{t\to0}\frac{\frac{t^3}{t^2}-0}{t}=\lim_{t\to0}\frac{t^3}{t^3}=1,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{t\to0}\frac{f(0,0+t)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{\frac{0^3+3\cdot(0+t)^4}{0^2+(0+t)^2}-0}{t}=\lim_{t\to0}\frac{\frac{3t^4}{t^2}}{t}=\lim_{t\to0}\frac{3t^4}{t^3}=0.$$

Összegezve az f parciális derivált függvényei:

$$\frac{\partial f}{\partial x}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^4+3x^2y^2-6xy^4}{(x^2+y^2)^2}, & \text{ha } (x,y)\neq(0,0)\\ 1, & \text{ha } (x,y)=(0,0)\end{cases},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{-2x^3y+12x^2y^3+6y^5}{(x^2+y^2)^2}, & \text{ha } (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \text{ha } (x,y)=(0,0)\end{cases}.$$

□

(c) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2+3y^4}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \text{ha } (x,y)=(0,0)\end{cases}.$

Megoldás. Az origón kívüli pontokban a parciális deriváltakat direkt deriválással fogjuk kiszámolni: minden $(x,y)\neq(0,0)$ esetén

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2+3y^4}{x^2+y^2}\right) = \frac{\frac{\partial(x^2+3y^4)}{\partial x}\cdot(x^2+y^2)-(x^2+3y^4)\cdot\frac{\partial(x^2+y^2)}{\partial x}}{(x^2+y^2)^2}\\
&= \frac{2x\cdot(x^2+y^2)-(x^2+3y^4)\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}\\
&= \frac{2xy^2-6xy^4}{(x^2+y^2)^2},\\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2+3y^4}{x^2+y^2}\right) = \frac{\frac{\partial(x^2+3y^4)}{\partial y}\cdot(x^2+y^2)-(x^2+3y^4)\cdot\frac{\partial(x^2+y^2)}{\partial y}}{(x^2+y^2)^2}\\
&= \frac{12y^3\cdot(x^2+y^2)-(x^2+3y^4)\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}\\
&= \frac{12x^2y^3-2x^2y+6y^5}{(x^2+y^2)^2}.
\end{aligned}$$

Az origóban a parciális deriváltakat az értelmezés alapján számoljuk ki:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{t\to 0}\frac{f(0+t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{(0+t)^2+3\cdot 0^4}{(0+t)^2+0^2}-0}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{t^2}{t^2}-0}{t}\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{t^2}{t^3} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t} \text{ határérték nem létezik},\\
\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{t\to 0}\frac{f(0,0+t)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{0^2+3\cdot(0+t)^4}{0^2+(0+t)^2}-0}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{3t^4}{t^2}}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{3t^4}{t^3} = 0.
\end{aligned}$$

Összegezve az f parciális derivált függvényei:

$$\frac{\partial f}{\partial x}:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R},\quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{2xy^2-6xy^4}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{12x^2y^3-2x^2y+6y^5}{(x^2+y^2)^2}, & \text{ha } (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \text{ha } (x,y)=(0,0)\end{cases}.$$

□

7.3.3. Összetett függvények parciális deriváltjai. Láncszabály

7.7. Feladat. A láncszabályt használva a következő esetekben számítsd ki a $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ és $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ parciális derivált függvényeket, ha $f(x,y) = \varphi(u(x,y), v(x,y))$:

(a) $\varphi(u,v) = \ln(u^2+v)$, ahol $u(x,y) = e^{x+y^2}$ és $v(x,y) = x^2+y$;

Megoldás.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\varphi}{\partial u}(u,v) &= \frac{\partial}{\partial u}\big(\ln(u^2+v)\big) = \ln'(u^2+v)\cdot\frac{\partial(u^2+v)}{\partial u} = \frac{1}{u^2+v}\cdot 2u = \frac{2u}{u^2+v},\\
\frac{\partial\varphi}{\partial v}(u,v) &= \frac{\partial}{\partial v}\big(\ln(u^2+v)\big) = \ln'(u^2+v)\cdot\frac{\partial(u^2+v)}{\partial v} = \frac{1}{u^2+v}\cdot 1 = \frac{1}{u^2+v}.\\
\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{x+y^2}\right) = e^{x+y^2}\cdot\frac{\partial}{\partial x}(x+y^2) = e^{x+y^2}\cdot 1 = e^{x+y^2},\\
\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{x+y^2}\right) = e^{x+y^2}\cdot\frac{\partial}{\partial y}(x+y^2) = e^{x+y^2}\cdot 2y = 2ye^{x+y^2}.\\
\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2+y\right) = 2x,\\
\frac{\partial v}{\partial y}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2+y\right) = 1.
\end{aligned}$$

Innen kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial\varphi}{\partial u}(u(x,y),v(x,y))\cdot\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial\varphi}{\partial v}(u(x,y),v(x,y))\cdot\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)\\
&= \frac{2u(x,y)}{u(x,y)^2+v(x,y)}\cdot e^{x+y^2} + \frac{1}{u(x,y)^2+v(x,y)}\cdot 2x\\
&= \frac{2e^{x+y^2}}{(e^{x+y^2})^2+(x^2+y)}\cdot e^{x+y^2} + \frac{1}{(e^{x+y^2})^2+(x^2+y)}\cdot 2x\\
&= \frac{2e^{2x+2y^2}+2x}{e^{2x+2y^2}+x^2+y},\\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{\partial\varphi}{\partial u}(u(x,y),v(x,y))\cdot\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial\varphi}{\partial v}(u(x,y),v(x,y))\cdot\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)\\
&= \frac{2u(x,y)}{u(x,y)^2+v(x,y)}\cdot 2ye^{x+y^2} + \frac{1}{u(x,y)^2+v(x,y)}\cdot 1\\
&= \frac{2e^{x+y^2}}{(e^{x+y^2})^2+(x^2+y)}\cdot 2ye^{x+y^2} + \frac{1}{(e^{x+y^2})^2+(x^2+y)}\\
&= \frac{4ye^{2x+2y^2}+1}{e^{2x+2y^2}+x^2+y}.
\end{aligned}$$

□

(b) $\varphi(u,v) = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{u}{v}\right)$, ahol $u(x,y) = x\sin y$ és $v(x,y) = x\cos y$;

Megoldás.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\varphi}{\partial u}(u,v) &= \frac{\partial}{\partial u}\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{u}{v}\right)\right) = \operatorname{arctg}'\left(\frac{u}{v}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{1}{1+\left(\frac{u}{v}\right)^2}\cdot\frac{1}{v}\\
&= \frac{v}{u^2+v^2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\varphi}{\partial v}(u,v) &= \frac{\partial}{\partial v}\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{u}{v}\right)\right) = \operatorname{arctg}'\left(\frac{u}{v}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{1}{1+\left(\frac{u}{v}\right)^2}\cdot\left(-\frac{u}{v^2}\right)\\
&= \frac{-u}{u^2+v^2}.\\
\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(x\sin y\right) = \sin y,\\
\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(x\sin y\right) = x\cos y.\\
\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(x\cos y\right) = \cos y,\\
\frac{\partial v}{\partial y}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(x\cos y\right) = -x\sin y.
\end{aligned}$$

Innen kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial\varphi}{\partial u}(u(x,y),v(x,y))\cdot\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial\varphi}{\partial v}(u(x,y),v(x,y))\cdot\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)\\
&= \frac{v(x,y)}{u(x,y)^2+v(x,y)^2}\cdot\sin y + \frac{-u(x,y)}{u(x,y)^2+v(x,y)^2}\cdot\cos y\\
&= \frac{x\cos y}{(x\sin y)^2+(x\cos y)^2}\cdot\sin y + \frac{-x\sin y}{(x\sin y)^2+(x\cos y)^2}\cdot\cos y\\
&= \frac{x\cos y\sin y - x\sin y\cos y}{(x\sin y)^2+(x\cos y)^2}\\
&= 0,\\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{\partial\varphi}{\partial u}(u(x,y),v(x,y))\cdot\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial\varphi}{\partial v}(u(x,y),v(x,y))\cdot\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)\\
&= \frac{v(x,y)}{u(x,y)^2+v(x,y)^2}\cdot x\cos y + \frac{-u(x,y)}{u(x,y)^2+v(x,y)^2}\cdot(-x\sin y)\\
&= \frac{x\cos y}{(x\sin y)^2+(x\cos y)^2}\cdot x\cos y + \frac{-x\sin y}{(x\sin y)^2+(x\cos y)^2}\cdot(-x\sin y)\\
&= \frac{x^2\cos^2 y + x^2\sin^2 y}{x^2\sin^2 y + x^2\cos^2 y} = 1.
\end{aligned}$$

$\square$

(c) $\varphi = \varphi(u,v)$, ahol $u(x,y) = x+y$ és $v(x,y) = x^2+y^2$;

Megoldás.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(x+y\right) = 1,\\
\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(x+y\right) = 1.\\
\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2+y^2\right) = 2x,\\
\frac{\partial v}{\partial y}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2+y^2\right) = 2y.
\end{aligned}$$

Innen kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial\varphi}{\partial u}(u(x,y),v(x,y))\cdot\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial\varphi}{\partial v}(u(x,y),v(x,y))\cdot\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)\\
&= \frac{\partial\varphi}{\partial u}(x+y,x^2+y^2)\cdot 1 + \frac{\partial\varphi}{\partial v}(x+y,x^2+y^2)\cdot 2x
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\partial \varphi}{\partial u}(x+y, x^2+y^2) + \frac{\partial \varphi}{\partial v}(x+y, x^2+y^2)\cdot 2x,\\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u(x,y), v(x,y))\cdot \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u(x,y), v(x,y))\cdot \frac{\partial v}{\partial y}(x,y)\\
&= \frac{\partial \varphi}{\partial u}(x+y, x^2+y^2)\cdot 1 + \frac{\partial \varphi}{\partial v}(x+y, x^2+y^2)\cdot 2y\\
&= \frac{\partial \varphi}{\partial u}(x+y, x^2+y^2) + \frac{\partial \varphi}{\partial v}(x+y, x^2+y^2)\cdot 2y.
\end{aligned}
$$

□

(d) $\varphi = \varphi(u,v)$, ahol $u(x,y) = x^2 - y^2$ és $v(x,y) = e^{xy}$.

Megoldás.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2-y^2\right) = 2x,\\
\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2-y^2\right) = -2y.\\
\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{xy}\right) = ye^{xy},\\
\frac{\partial v}{\partial y}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{xy}\right) = xe^{xy}.
\end{aligned}
$$

Innen kapjuk, hogy

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u(x,y), v(x,y))\cdot \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u(x,y), v(x,y))\cdot \frac{\partial v}{\partial x}(x,y)\\
&= \frac{\partial \varphi}{\partial u}(x^2-y^2, e^{xy})\cdot 2x + \frac{\partial \varphi}{\partial v}(x^2-y^2, e^{xy})\cdot ye^{xy}\\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u(x,y), v(x,y))\cdot \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u(x,y), v(x,y))\cdot \frac{\partial v}{\partial y}(x,y)\\
&= \frac{\partial \varphi}{\partial u}(x^2-y^2, e^{xy})\cdot (-2y) + \frac{\partial \varphi}{\partial v}(x^2-y^2, e^{xy})\cdot xe^{xy}.
\end{aligned}
$$

□

7.8. Feladat. Igazold, hogy a következő függvények teljesítik a megadott egyenleteket:

(a) $f(x,y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ teljesíti az $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ egyenletet;

Megoldás. Kiszámoljuk a $\frac{\partial f}{\partial x}$ és $\frac{\partial f}{\partial y}$ parciális deriváltakat a φ függvényében:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi\left(\frac{y}{x}\right)\right) = \varphi'\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right),\\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\varphi\left(\frac{y}{x}\right)\right) = \varphi'\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\frac{1}{x},
\end{aligned}
$$

majd behelyettesítjük a megadott egyenlet baloldalára:

$$
x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = x\cdot\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right) + y\cdot\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\frac{1}{x} = \varphi'\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\underbrace{\left(-\frac{xy}{x^2}+\frac{y}{x}\right)}_{0} = 0.
$$

Tehát az $f(x,y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ alakú függvényekre teljesül a megadott egyenlet. □

(b) $f(x,y)=\varphi\left(\frac{y^2}{x}\right)$ teljesíti az $2x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=0$ egyenletet;

Megoldás. Kiszámoljuk a $\frac{\partial f}{\partial x}$ és $\frac{\partial f}{\partial y}$ parciális deriváltakat a φ függvényében:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}&=\frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi\left(\frac{y^2}{x}\right)\right)=\varphi'\left(\frac{y^2}{x}\right)\cdot\left(-\frac{y^2}{x^2}\right),\\ \frac{\partial f}{\partial y}&=\frac{\partial}{\partial y}\left(\varphi\left(\frac{y^2}{x}\right)\right)=\varphi'\left(\frac{y^2}{x}\right)\cdot\frac{2y}{x},\end{aligned}$$

majd behelyettesítjük a megadott egyenlet baloldalára:

$$\begin{aligned}2x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}&=2x\cdot\varphi'\left(\frac{y^2}{x}\right)\cdot\left(-\frac{y^2}{x^2}\right)+y\cdot\varphi'\left(\frac{y^2}{x}\right)\cdot\frac{2y}{x}\\ &=\varphi'\left(\frac{y^2}{x}\right)\cdot\underbrace{\left(-\frac{2xy^2}{x^2}+\frac{2y^2}{x}\right)}_{0}=0.\end{aligned}$$

Tehát az $f(x,y)=\varphi\left(\frac{y^2}{x}\right)$ alakú függvényekre teljesül a megadott egyenlet. □

(c) $f(x,y,z)=\varphi(xy,x^2+y^2-z^2)$ teljesíti az $xz\frac{\partial f}{\partial x}-yz\frac{\partial f}{\partial y}+(x^2-y^2)\frac{\partial f}{\partial z}=0$ egyenletet;

Megoldás. Kiszámoljuk a $\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}$ parciális deriváltakat a $\varphi=\varphi(u,v)$ függvényében.

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}&=\frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi(xy,x^2+y^2-z^2)\right)\\ &=\frac{\partial\varphi}{\partial u}(xy,x^2+y^2-z^2)\cdot\frac{\partial xy}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial v}(xy,x^2+y^2-z^2)\cdot\frac{\partial(x^2+y^2-z^2)}{\partial x}\\ &=\frac{\partial\varphi}{\partial u}(xy,x^2+y^2-z^2)\cdot y+\frac{\partial\varphi}{\partial v}(xy,x^2+y^2-z^2)\cdot 2x,\\ \frac{\partial f}{\partial y}&=\frac{\partial}{\partial y}\left(\varphi(xy,x^2+y^2-z^2)\right)\\ &=\frac{\partial\varphi}{\partial u}(xy,x^2+y^2-z^2)\cdot\frac{\partial xy}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial v}(xy,x^2+y^2-z^2)\cdot\frac{\partial(x^2+y^2-z^2)}{\partial y}\\ &=\frac{\partial\varphi}{\partial u}(xy,x^2+y^2-z^2)\cdot x+\frac{\partial\varphi}{\partial v}(xy,x^2+y^2-z^2)\cdot 2y,\\ \frac{\partial f}{\partial z}&=\frac{\partial}{\partial z}\left(\varphi(xy,x^2+y^2-z^2)\right)\\ &=\frac{\partial\varphi}{\partial u}(xy,x^2+y^2-z^2)\cdot\frac{\partial xy}{\partial z}+\frac{\partial\varphi}{\partial v}(xy,x^2+y^2-z^2)\cdot\frac{\partial(x^2+y^2-z^2)}{\partial z}\\ &=\frac{\partial\varphi}{\partial u}(xy,x^2+y^2-z^2)\cdot 0+\frac{\partial\varphi}{\partial v}(xy,x^2+y^2-z^2)\cdot(-2z)\\ &=\frac{\partial\varphi}{\partial v}(xy,x^2+y^2-z^2)\cdot(-2z).\end{aligned}$$

Ezeket pedig behelyettesítjük a megadott egyenlet bal oldalán álló kifejezésbe, majd csoportosítjuk $\frac{\partial\varphi}{\partial u}(xy,x^2+y^2-z^2)$, illetve $\frac{\partial\varphi}{\partial v}(xy,x^2+y^2-z^2)$ szerint:

$$xz\frac{\partial f}{\partial x}-yz\frac{\partial f}{\partial y}+(x^2-y^2)\frac{\partial f}{\partial z}=$$

$$
\begin{aligned}
&= xz\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}(xy, x^2+y^2-z^2)\cdot y + \frac{\partial\varphi}{\partial v}(xy, x^2+y^2-z^2)\cdot 2x\right)\\
&-yz\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}(xy, x^2+y^2-z^2)\cdot x + \frac{\partial\varphi}{\partial v}(xy, x^2+y^2-z^2)\cdot 2y\right)\\
&+(x^2-y^2)\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial v}(xy, x^2+y^2-z^2)\cdot(-2z) =
\end{aligned}
$$

$$
= \frac{\partial\varphi}{\partial u}(xy, x^2+y^2-z^2)\underbrace{(xzy-yzx)}_{0} + \frac{\partial\varphi}{\partial v}(xy, x^2+y^2-z^2)\underbrace{\left(2x^2z-2y^2z-2(x^2-y^2)z\right)}_{0}
$$

$$
= 0.
$$

Tehát az $f(x,y,z)=\varphi(xy, x^2+y^2-z^2)$ alakú függvényekre teljesül a megadott egyenlet. $\square$

(d) $f(x,y)=y\varphi(x^2-y^2)$ teljesíti az $\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{1}{y}\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{1}{y^2}f$ egyenletet;

Megoldás. Kiszámoljuk a $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ és $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ parciális deriváltakat a φ függvényében:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(y\varphi(x^2-y^2)\right) = y\frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi(x^2-y^2)\right) = y\varphi'(x^2-y^2)\cdot\frac{\partial(x^2-y^2)}{\partial x}\\
&= 2xy\varphi'(x^2-y^2).\\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(y\varphi(x^2-y^2)\right) = 1\cdot\varphi(x^2-y^2) + y\varphi'(x^2-y^2)\cdot\frac{\partial(x^2-y^2)}{\partial y}\\
&= \varphi(x^2-y^2) - 2y^2\varphi'(x^2-y^2).
\end{aligned}
$$

A megadott egyenlet minden tagját a bal oldalra hozzuk, hogy a jobb oldalon csak 0 maradjon, majd az így kapott egyenlet bal oldalán álló kifejezésbe behelyettesítjük a fent kiszámoltakat és csoportosítjuk a kapottakat φ, illetve φ' szerint:

$$
\frac{1}{x}\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{1}{y^2}f =
$$

$$
= \frac{1}{x}\cdot 2xy\varphi'(x^2-y^2) + \frac{1}{y}\cdot\left(\varphi(x^2-y^2)-2y^2\varphi'(x^2-y^2)\right) - \frac{1}{y^2}\cdot y\varphi(x^2-y^2) =
$$

$$
= \varphi(x^2-y^2)\cdot\underbrace{\left(\frac{1}{y}-\frac{y}{y^2}\right)}_{0} + \varphi'(x^2-y^2)\cdot\underbrace{\left(\frac{2xy}{x}-\frac{2y^2}{y}\right)}_{0} = 0.
$$

Tehát az $f(x,y)=y\varphi(x^2-y^2)$ alakú függvényekre teljesül a megadott egyenlet. $\square$

(e) $f(x,y)=xy+x\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$ teljesíti az $x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}=xy+f$ egyenletet;

Megoldás. Kiszámoljuk a $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ és $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ parciális deriváltakat a φ függvényében:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(xy+x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)\right) = y+\varphi\left(\frac{y}{x}\right)+x\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)\\
&= y+\varphi\left(\frac{y}{x}\right)-\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\frac{y}{x},\\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(xy+x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)\right) = x+x\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\frac{1}{x}\\
&= x+\varphi'\left(\frac{y}{x}\right).
\end{aligned}
$$

A megadott egyenlet minden tagját a bal oldalra hozzuk, hogy a jobb oldalon csak 0 maradjon, majd az így kapott egyenlet bal oldalán álló kifejezésbe behelyettesítjük a fent kiszámoltakat és csoportosítjuk a kapottakat φ, φ', illetve az ezektől független tagok szerint:

$$\begin{aligned} x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}-xy-f&= \\ =x\cdot\left(y+\varphi\left(\frac{y}{x}\right)-\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\frac{y}{x}\right)+y\cdot\left(x+\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)\right)-xy-\left(xy+x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)\right) \\ =\varphi\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\underbrace{(x-x)}_{0}+\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\underbrace{\left(-\frac{xy}{x}+y\right)}_{0}+\underbrace{(xy+yx-xy-xy)}_{0}=0. \end{aligned}$$

Tehát az $f(x,y)=xy+x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ alakú függvényekre teljesül a megadott egyenlet. □

(f) $f(x,y)=xy\varphi(x^2-y^2)$ teljesíti az $xy^2\frac{\partial f}{\partial x}+x^2y\frac{\partial f}{\partial y}=(x^2+y^2)f$ egyenletet.

Megoldás. Kiszámoljuk a $\frac{\partial f}{\partial x}$ és $\frac{\partial f}{\partial y}$ parciális deriváltakat a φ függvényében:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}&=\frac{\partial}{\partial x}\left(xy\varphi(x^2-y^2)\right)=y\varphi(x^2-y^2)+xy\varphi'(x^2-y^2)\cdot 2x \\ &=y\varphi(x^2-y^2)+2x^2y\varphi'(x^2-y^2), \\ \frac{\partial f}{\partial y}&=\frac{\partial}{\partial y}\left(xy\varphi(x^2-y^2)\right)=x\varphi(x^2-y^2)+xy\varphi'(x^2-y^2)\cdot(-2y) \\ &=x\varphi(x^2-y^2)-2xy^2\varphi'(x^2-y^2). \end{aligned}$$

A megadott egyenlet minden tagját a bal oldalra hozzuk, hogy a jobb oldalon csak 0 maradjon, majd az így kapott egyenlet bal oldalán álló kifejezésbe behelyettesítjük a fent kiszámoltakat és csoportosítjuk a kapottakat φ, illetve φ' szerint:

$$\begin{aligned} xy^2\frac{\partial f}{\partial x}+x^2y\frac{\partial f}{\partial y}-(x^2+y^2)f&= \\ =xy^2\cdot\left(y\varphi(x^2-y^2)+2x^2y\varphi'(x^2-y^2)\right)+x^2y\cdot\left(x\varphi(x^2-y^2)-2xy^2\varphi'(x^2-y^2)\right) \\ -(x^2+y^2)\cdot\left(xy\varphi(x^2-y^2)\right)&= \\ =\varphi(x^2-y^2)\cdot\underbrace{\left(xy^3+x^3y-(x^2+y^2)xy\right)}_{0}+\varphi'(x^2-y^2)\cdot\underbrace{\left(2x^3y^3-2x^3y^3\right)}_{0}=0. \end{aligned}$$

Tehát az $f(x,y)=xy\varphi(x^2-y^2)$ alakú függvényekre teljesül a megadott egyenlet. □

8. fejezet

Többváltozós függvények differenciálhatósága

8.1. Elméleti összefoglaló

8.1. Értelmezés
Az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény *differenciálható* az $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ pontban, ha létezik $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\varphi(h_1, h_2) = a \cdot h_1 + b \cdot h_2$ lineáris függvény $(a, b \in \mathbb{R})$, amelyre

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - f(x_0, y_0) - \varphi(h_1, h_2)}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = 0, \tag{8.1}$$

(ahol $\|h\| = \sqrt{h_1^2 + h_2^2}$ az euklideszi norma). A $\varphi(h_1, h_2)$ lineáris leképezést az f függvény *differenciáljának* nevezzük és használjuk rá a $df(x_0, y_0)(h_1, h_2)$ jelölést is.

A következő tétel alapján $a = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ és $b = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.

8.2. Tétel
Ha az f függvény differenciálható az (x_0, y_0) pontban, akkor léteznek az elsőrendű parciális deriváltak az (x_0, y_0) pontban és

$$\varphi(h_1, h_2) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot h_2.$$

Továbbá léteznek az iránymenti deriváltak is és $\vec{v} = (v_1, v_2)$ irány esetén

$$\delta(f(a, b); \vec{v}) = \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0) = v_1 \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + v_2 \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \varphi(v_1, v_2).$$

8.3. Megjegyzés
Ha az (x_0, y_0) pontban léteznek a parciális deriváltak, akkor még nem biztos, hogy léteznek az iránymenti deriváltak is az adott pontban (lásd a 8.2. Feladatot), illetve nem következtethetünk, hogy a függvény differenciálható az (x_0, y_0) pontban (lásd a 8.5. Feladatot). Továbbá, ha az (x_0, y_0) pontban léteznek az iránymenti deriváltak, akkor nem következtethetünk, hogy a függvény differenciálható az adott pontban (lásd a 8.6. Feladatot). ◇

A fenti tétel megfordítható, ha megszabjuk, hogy a parciális deriváltak létezzenek és folytonosak legyenek az (x_0, y_0) pont egy kis környezetében.

8.4. Tétel
Ha léteznek az $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ és $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ parciális derivált függvények az (x_0, y_0) egy kis környezetében és folytonosak az (x_0, y_0) pontban, akkor az f függvény differenciálható az (x_0, y_0) pontban és a differenciálja

$$\varphi(h_1, h_2) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot h_2.$$

8.2. Feladatok

8.1. Feladat. Az értelmezést használva igazold, hogy az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^3 + xy + y^2$ függvény differenciálható az $(1, 2)$ pontban!

8.2. Feladat. Igazold, hogy az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^{\frac{4}{3}}}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

függvénynek léteznek a parciális deriváltjai az $(x, y) = (0, 0)$ pontban, de nem létezik a $\vec{v} = (1, 1)$ iránymenti deriváltja a $(0, 0)$ pontban! Folytonosak a parciális deriváltak a $(0, 0)$ pont környezetében?

8.3. Feladat. Igazold, hogy az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

függvény differenciálható az $(x, y) = (0, 0)$ pontban, de a parciális derivált függvényei nem folytonosak az $(x, y) = (0, 0)$ pontban!

8.4. Feladat. Igazold, hogy az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

függvény differenciálható az $(x, y) = (0, 0)$ pontban, de a parciális derivált függvényei nem folytonosak az $(x, y) = (0, 0)$ pontban!

8.5. Feladat. Igazold, hogy az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

függvénynek léteznek a parciális deriváltjai az $(x, y) = (0, 0)$ pontban, de nem differenciálható ebben a pontban! Folytonosak a parciális deriváltak ebben a pontban?

8.6. Feladat. Igazold, hogy az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^4+y^2}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

függvénynek léteznek az iránymenti deriváltjai az $(x, y) = (0, 0)$ pontban, de nem differenciálható ebben a pontban!

8.7. Feladat. A megadott pontban vizsgáld a következő függvények differenciálhatóságát:

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + y^2$ és $(x_0, y_0) = (1, 0)$;

(b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^3 + xy + y^2$ és $(x_0, y_0) = (1, 1)$;

(c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ és $(x_0, y_0) = (0, 0)$;

(d) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \text{ha } (x,y)=(0,0)\end{cases}$ és $(x_0,y_0)=(0,0)$;

(e) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{ha } (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \text{ha } (x,y)=(0,0)\end{cases}$ és $(x_0,y_0)=(0,0)$;

(f) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \text{ha } (x,y)=(0,0)\end{cases}$ és $(x_0,y_0)=(0,0)$;

(g) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \text{ha } (x,y)=(0,0)\end{cases}$ és $(x_0,y_0)=(0,0)$;

(h) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \text{ha } (x,y)=(0,0)\end{cases}$ és $(x_0,y_0)=(0,0)$;

(i) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y)\neq(0,0)\\ 1, & \text{ha } (x,y)=(0,0)\end{cases}$ és $(x_0,y_0)=(0,0)$;

(j) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \text{ha } (x,y)=(0,0)\end{cases}$ és $(x_0,y_0)=(0,0)$;

(k) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x^4+y^4)}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \text{ha } (x,y)=(0,0)\end{cases}$ és $(x_0,y_0)=(0,0)$;

(l) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ f(x,y)=e^{x-y^2}$ és $(x_0,y_0)=(2,2)$.

8.3. Megoldások

8.1. Feladat. Az értelmezést használva igazold, hogy az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^3 + xy + y^2$ függvény differenciálható az $(1,2)$ pontban!

Megoldás. A 8.2. Tételt használjuk arra, hogy megsejtsük, hogy mi kellene legyen a differenciálhatóság értelmezésben szereplő φ függvény. Ha az f függvény differenciálható az $(1,2)$ pontban, akkor ebben a pontban a differenciálja $\varphi(h_1,h_2) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(1,2)\cdot h_1 + \dfrac{\partial f}{\partial y}(1,2)\cdot h_2$. Ezért kiszámoljuk az f parciális deriváltjait:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(x^3+xy+y^2) = 3x^2 + y,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(x^3+xy+y^2) = x + 2y,$$

ahonnan felírhatjuk a $\varphi(h_1,h_2) = 5\cdot h_1 + 5\cdot h_2$ lineáris függvényt.

Végül az f függvény pontosan akkor differenciálható az $(1,2)$ pontban, ha

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f(1+h_1,2+h_2) - f(1,2) - \varphi(h_1,h_2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 0$$
$$\iff \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{(1+h_1)^3 + (1+h_1)(2+h_2) + (2+h_2)^2 - 7 - 5h_1 - 5h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 0$$
$$\iff \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{h_1^3 + 3h_1^2 + h_1h_2 + h_2^2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 0.$$

Ez utóbbi egyenlőséget a fogó tétellel igazoljuk: minden $(h_1,h_2) \neq (0,0)$ esetén

$$\begin{aligned}
0 &\le \left|\frac{h_1^3 + 3h_1^2 + h_1h_2 + h_2^2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\right| \le \frac{|h_1|^3 + 3|h_1|^2 + |h_1h_2| + |h_2|^2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \\
&= \frac{|h_1|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\cdot(|h_1|^2 + 3|h_1| + |h_2|) + \frac{|h_2|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\cdot|h_2| \\
&\overset{(*)}{\le} \frac{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\cdot(|h_1|^2 + 3|h_1| + |h_2|) + \frac{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\cdot|h_2| \\
&= |h_1|^2 + 3|h_1| + |h_2| + |h_2| = |h_1|^2 + 3|h_1| + 2|h_2|,
\end{aligned}$$

ahol a $(*)$ egyenlőtlenségben felhasználtuk, hogy minden (h_1,h_2) esetén $|h_1| = \sqrt{h_1^2} \le \sqrt{h_1^2+h_2^2}$, illetve $|h_2| = \sqrt{h_2^2} \le \sqrt{h_1^2+h_2^2}$. Mivel

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} |h_1|^2 + 3|h_1| + 2|h_2| = \lim_{h_1\to 0}(|h_1|^2 + 3|h_1|) + \lim_{h_2\to 0} 2|h_2| = 0 + 0 = 0,$$

ezért a fenti egyenlőtlenség és a fogó tétel alapján $\lim\limits_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \left|\frac{h_1^3+3h_1^2+h_1h_2+h_2^2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\right| = 0$, ami egyenértékű az igazolni kívánt $\lim\limits_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{h_1^3+3h_1^2+h_1h_2+h_2^2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 0$ egyenlőséggel. Tehát igazoltuk, hogy az $f(x,y) = x^3 + xy + y^2$ függvény differenciálható az $(1,2)$ pontban és a differenciálja ebben a pontban $\varphi(h_1,h_2) = 5h_1 + 5h_2$.

Megjegyzés. A 8.4. Tétel alapján könnyebben beláthatjuk, hogy az f differenciálható. Mivel a $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 + y$ és $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x + 2y$ parciális derivált függvények folytonosak (minden pontban), ezért a 8.4. Tétel alapján az f függvény bármely (x_0,y_0) pontban differenciálható és a differenciálja ebben a pontban

$$\varphi(h_1,h_2) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot h_2 = (3x_0^2 + y_0)h_1 + (x_0 + 2y_0)h_2.$$

Sajátosan $(x_0,y_0) = (1,2)$ esetén $\varphi(h_1,h_2) = (3+2)h_1 + (1+4)h_2 = 5h_1 + 5h_2$. □

8.2. Feladat. Igazold, hogy az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^{\frac{4}{3}}}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

függvénynek léteznek a parciális deriváltjai az $(x,y) = (0,0)$ pontban, de nem létezik a $\vec{v} = (1,1)$ iránymenti deriváltja a $(0,0)$ pontban! Folytonosak a parciális deriváltak a $(0,0)$ pont környezetében?

Megoldás. Kiszámoljuk a függvény parciális deriváltjait. Az origóban a függvény x szerinti parciális deriváltja

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0+t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{x\cdot 0^{\frac{4}{3}}}{x^2+0^2}-0}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = 0,$$

míg az origón kívül, ha $(x,y) \neq (0,0)$, akkor

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{xy^{\frac{4}{3}}}{x^2+y^2}\right) = \frac{y^{\frac{4}{3}}(x^2+y^2) - xy^{\frac{4}{3}}\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^{\frac{4}{3}}(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}.$$

Tehát az f függvény x szerinti parciális derivált függvénye:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^{\frac{4}{3}}(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Az y szerinti parciális derivált függvényt hasonlóan számoljuk ki. Az origóban a függvény y szerinti parciális deriváltja

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,0+t)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{0\cdot t^{\frac{4}{3}}}{0^2+t^2}-0}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = 0,$$

míg az origón kívül, ha $(x,y) \neq (0,0)$, akkor

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{xy^{\frac{4}{3}}}{x^2+y^2}\right) = \frac{\frac{4}{3}\cdot xy^{\frac{1}{3}}(x^2+y^2) - xy^{\frac{4}{3}}\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\frac{4}{3}x^3y^{\frac{1}{3}} - \frac{2}{3}xy^{\frac{7}{3}}}{(x^2+y^2)^2}.$$

Tehát az f függvény y szerinti parciális derivált függvénye:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{3}\cdot \frac{2x^3y^{\frac{1}{3}} - xy^{\frac{7}{3}}}{(x^2+y^2)^2}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Az f függvény $\vec{v} = (1,1)$ iránymenti deriváltja

$$\begin{aligned} \delta f((0,0);(1,1)) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(0+1\cdot t, 0+1\cdot t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t\cdot t^{\frac{4}{3}}}{t^2+t^2}-0}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{t^{\frac{7}{3}}}{2t^3} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{2}\cdot t^{-\frac{2}{3}} = +\infty, \end{aligned}$$

tehát a függvénynek nem létezik (véges) $\vec{v} = (1,1)$ iránymenti deriváltja a $(0,0)$ pontban.

A függvény parciális deriváltjai folytonosak az origón kívül. Ha az origóban folytonosak lennének, akkor differenciálható lenne az origóban, így léteznének az iránymenti deriváltjai az origóban.

Direkt számolással is belátható, hogy a parciális deriváltak nem folytonosak az origóban. Ha az $x = 2y$ egyenes mentén tartunk az origóba, vagyis $(x, y) = (2u, u) \to (0, 0)$, mikor $u \to 0$, akkor

$$\lim_{u\to 0} \frac{\partial f}{\partial x}(2u, u) = \lim_{u\to 0} \frac{u^{\frac{4}{3}} \cdot (u^2 - (2u)^2)}{(u^2 + (2u)^2)^2} = \lim_{u\to 0} \frac{-3u^{\frac{10}{3}}}{25u^4} = \lim_{u\to 0} \frac{-3}{25} \cdot u^{-\frac{2}{3}} = -\infty \neq \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0.$$

Az y szerinti parciális derivált sem folytonos az origóban. Az $x = y$ egyenes mentén tartva az origóba, vagyis $(x, y) = (u, u) \to (0, 0)$, mikor $u \to 0$, akkor

$$\lim_{u\to 0} \frac{\partial f}{\partial y}(u, u) = \lim_{u\to 0} \frac{2}{3} \cdot \frac{2u^3 \cdot u^{\frac{1}{3}} - u \cdot u^{\frac{7}{3}}}{(u^2 + u^2)^2} = \lim_{u\to 0} \frac{2}{3} \cdot \frac{u^{\frac{10}{3}}}{4u^4} = \lim_{u\to 0} \frac{1}{6} \cdot u^{-\frac{2}{3}} = +\infty \neq \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0.$$

□

8.3. Feladat. Igazold, hogy az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \dfrac{1}{x^2 + y^2}, & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{ha } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

függvény differenciálható az $(x, y) = (0, 0)$ pontban, de a parciális derivált függvényei nem folytonosak az $(x, y) = (0, 0)$ pontban!

Megoldás. Előbb kiszámoljuk a parciális derivált függvényeket. Az x szerinti parciális deriváltat az origóban az értelmezés alapján számoljuk ki:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{t\to 0} \frac{(t^2 + 0^2) \sin \frac{1}{t^2+0^2} - 0}{t} = \lim_{t\to 0} t \sin \frac{1}{t^2} = 0,$$

mivel $|\sin \frac{1}{t^2}| \leq 1$, minden $t \in \mathbb{R}$ esetén és $\lim\limits_{t\to 0} t = 0$. Az origón kívül direkt deriválással számoljuk ki az x szerinti parciális deriváltat: minden $(x, y) \neq (0, 0)$ esetén

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left((x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2} \right) \\ &= 2x \cdot \sin \frac{1}{x^2 + y^2} + (x^2 + y^2) \cdot \cos \frac{1}{x^2 + y^2} \cdot \frac{-2x}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= 2x \cdot \sin \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2x}{x^2 + y^2} \cdot \cos \frac{1}{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Tehát a függvény x szerinti parciális derivált függvénye:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} 2x \cdot \sin \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x}{x^2+y^2} \cdot \cos \frac{1}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x, y) = (0, 0) \\ 0, & \text{ha } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Ez a függvény nem folytonos az origóban, mivel az $(x_n, y_n)_{n\geq 1} = (\frac{1}{\sqrt{2\pi n}}, 0)_{n\geq 1}$ sorozattal tartva az origóba kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x_n, y_n) &= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{2\pi n}} \sin \frac{1}{\frac{1}{2\pi n} + 0} - \frac{\frac{2}{\sqrt{2\pi n}}}{\frac{1}{2\pi n} + 0} \cdot \cos \frac{1}{\frac{1}{2\pi n} + 0} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{2\pi n}} \sin 2\pi n - \frac{4\pi n}{\sqrt{2\pi n}} \cdot \cos 2\pi n \\ &= \lim_{n\to\infty} -2\sqrt{2\pi n} = -\infty \neq \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0, \end{aligned}$$

ezért az x szerinti parciális derivált függvény nem folytonos az origóban.

A függvény értelmezése szimmetrikus az x és y változóban, így az y változó szerinti parciális derivált sem folytonos az origóban.

Ha az f függvény differenciálható az origóban, akkor a differenciálja az origóban:

$$\varphi(h_1, h_2) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)h_2 = 0 \cdot h_1 + 0 \cdot h_2 = 0.$$

De a függvény pontosan akkor differenciálható a $(0,0)$ pontban, ha

$$\begin{aligned}
&\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f(0+h_1, 0+h_2) - f(0,0) - \varphi(h_1,h_2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 0 \\
\iff &\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{(h_1^2+h_2^2)\sin\frac{1}{h_1^2+h_2^2} - 0 - 0}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 0 \\
\iff &\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \sqrt{h_1^2+h_2^2}\sin\frac{1}{h_1^2+h_2^2} = 0.
\end{aligned}$$

Mivel $\lim\limits_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \sqrt{h_1^2+h_2^2} = 0$ és a szinusz függvény korlátos ($|\sin\frac{1}{h_1^2+h_2^2}| \leq 1$, minden $(h_1,h_2) \neq (0,0)$ esetén), ezért

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \sqrt{h_1^2+h_2^2}\sin\frac{1}{h_1^2+h_2^2} = 0.$$

Tehát az f függvény differenciálható az origóban és a differenciálja $\varphi(h_1,h_2) = 0$. □

8.4. Feladat. Igazold, hogy az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

függvény differenciálható az $(x,y) = (0,0)$ pontban, de a parciális derivált függvényei nem folytonosak az $(x,y) = (0,0)$ pontban!

Megoldás. A 8.2. Tételt alapján, ha az f függvény differenciálható a $(0,0)$ pontban, akkor ebben a pontban a differenciálja $\varphi(h_1,h_2) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)\cdot h_1 + \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)\cdot h_2 = 0\cdot h_1 + 0\cdot h_2 = 0$, mivel

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{t\to 0}\frac{f(0+t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{t\cdot 0\cdot\sin\frac{1}{t^2+0^2} - 0}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{0}{t} = 0, \\
\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{t\to 0}\frac{f(0,0+t)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{0\cdot t\cdot\sin\frac{1}{0^2+t^2} - 0}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{0}{t} = 0.
\end{aligned}$$

Az f függvény pontosan akkor differenciálható a $(0,0)$ pontban, ha

$$\begin{aligned}
&\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f(0+h_1, 0+h_2) - f(0,0) - \varphi(h_1,h_2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 0 \\
\iff &\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{h_1h_2\sin\left(\frac{1}{h_1^2+h_2^2}\right) - 0 - 0}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 0 \\
\iff &\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{h_1h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\cdot\sin\left(\frac{1}{h_1^2+h_2^2}\right) = 0.
\end{aligned}$$

Ez utóbbi egyenlőséget a fogó tétel segítségével igazoljuk: minden $(h_1,h_2) \neq (0,0)$ esetén

$$0 \leq \left|\frac{h_1h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\cdot\sin\left(\frac{1}{h_1^2+h_2^2}\right)\right| = \frac{|h_1h_2|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\cdot\left|\sin\left(\frac{1}{h_1^2+h_2^2}\right)\right| \leq \frac{|h_1h_2|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{h_1^2}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \cdot |h_2| \leq \frac{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \cdot |h_2| = |h_2|,$$

továbbá $\lim\limits_{(h_1,h_2)\to(0,0)} |h_2| = \lim\limits_{h_2\to 0} |h_2| = 0$, ezért a fogó tétel alapján teljesül a fenti egyenlőség.

Ezzel beláttuk, hogy az f függvény differenciálható a $(0,0)$ pontban és ebben a pontban a differenciálja $\varphi(h_1,h_2) = 0$.

Kiszámoljuk a parciális deriváltakat, hogy megvizsgáljuk a folytonosságukat az origóban. Korábban kiszámoltuk a parciális deriváltakat az origóban. Az origón kívül az x szerinti parciális derivált: ha $(x,y) \neq (0,0)$, akkor

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(xy\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right) = y\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) + xy\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\cdot\frac{-2x}{(x^2+y^2)^2} \\ &= y\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) - \frac{2x^2y}{(x^2+y^2)^2}\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right).\end{aligned}$$

Felírhatjuk az x szerinti parciális derivált függvényt:

$$\frac{\partial f}{\partial x}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} y\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) - \frac{2x^2y}{(x^2+y^2)^2}\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right), & \text{ha } (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0).\end{cases}$$

A Heine-kritérium segítségével belátható, hogy a $\frac{\partial f}{\partial x}$ függvény nem folytonos az origóban. Az $(x_n,y_n) = \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi n}}, \frac{1}{2\sqrt{\pi n}}\right)$ origóba tartó sorozat esetén

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\partial f}{\partial x}(x_n,y_n) = \lim_{n\to\infty} y_n\sin\left(\frac{1}{x_n^2+y_n^2}\right) - \frac{2x_n^2y_n}{(x_n^2+y_n^2)^2}\cos\left(\frac{1}{x_n^2+y_n^2}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\sqrt{\pi n}}\sin\left[\frac{1}{\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi n}}\right)^2+\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi n}}\right)^2}\right] - \frac{2\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi n}}\right)^3}{\left(\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi n}}\right)^2+\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi n}}\right)^2\right)^2}\cos\left[\frac{1}{\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi n}}\right)^2+\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi n}}\right)^2}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\sqrt{\pi n}}\sin 2\pi n - \sqrt{\pi n}\cos 2\pi n = \lim_{n\to\infty} -2\sqrt{\pi n} = -\infty.$$

Az f függvény szimmetrikus az x és y változókban, ezért hasonlóan belátható, hogy az y szerinti parciális derivált sem folytonos az origóban. □

8.5. Feladat. Igazold, hogy az $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0)\end{cases}$$

függvénynek léteznek a parciális deriváltjai az $(x,y) = (0,0)$ pontban, de nem differenciálható ebben a pontban! Folytonosak a parciális deriváltak ebben a pontban?

Megoldás. A függvény x változó szerinti parciális deriváltja az origóban

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(0+t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{t\cdot 0}{t^2+0^2}-0}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{0-0}{t} = 0,$$

az y változó szerinti parciális deriváltja pedig

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(0,0+t)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{0\cdot t}{0^2+t^2}-0}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{0-0}{t} = 0.$$

A 8.2. Tétel szerint ha az f függvény differenciálható az origóban, akkor léteznek a parciális deriváltjai az origóban és a differenciálja

$$\varphi(h_1, h_2) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \cdot h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \cdot h_2 = 0 \cdot h_1 + 0 \cdot h_2 = 0.$$

Ekkor az f függvény pontosan akkor differenciálható az origóban, ha

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f(0+h_1, 0+h_2) - f(0,0) - \varphi(h_1,h_2)}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = 0$$

$$\iff \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\frac{h_1 h_2}{h_1^2+h_2^2} - 0 - 0}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = 0 \iff \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{h_1 h_2}{\left(\sqrt{h_1^2 + h_2^2}\right)^3} = 0.$$

A $\lim\limits_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{h_1 h_2}{(\sqrt{h_1^2+h_2^2})^3} \neq 0$, mivel ha $(u_n, v_n) = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ sorozattal tartunk az origóba, akkor

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n v_n}{\left(\sqrt{u_n^2 + v_n^2}\right)^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}}{\left(\sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2}\right)^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\left(\sqrt{\frac{2}{n^2}}\right)^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot n = +\infty \neq 0.$$

Tehát az f függvény nem differenciálható az origóban.

Az f függvény parciális deriváltjai léteznek és folytonosak az origón kívül. Így ha a függvény parciális deriváltjai folytonosak az origóban, akkor a parciális derivált függvények mindenhol folytonosak, sajátosan az origó egy kis környezetében is, és ezért az f függvény differenciálható kell legyen az origóban. Mivel a függvény nem differenciálható az origóban, ezért a parciális deriváltak közül valamelyik nem folytonos az origóban. A függvény szimmetrikus az x és y változókban, ezért ha az egyik parciális derivált nem folytonos az origóban, akkor a másik sem.

Megjegyzés. Ha az f függvény differenciálható az origóban, akkor folytonos is az origóban. De az f függvény nem folytonos az origóban, mert nem létezik (globális) határértéke az origóban a 6.8. Feladat (d) alpontja alapján. □

8.6. Feladat. Igazold, hogy az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^4 + y^2}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

függvénynek léteznek az iránymenti deriváltjai az $(x,y) = (0,0)$ pontban, de nem differenciálható ebben a pontban!

Megoldás. Előbb kiszámoljuk az f függvény egy tetszőleges (v,w) iránymenti deriváltját a $(0,0)$ pontban: ha $\vec{v} = (v_1, v_2) \neq (0,0)$, akkor

$$\delta f((0,0);(v,w)) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0+tv_1, 0+tv_2) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{(tv_1)(tv_2)}{(tv_1)^4+(tv_2)^2} - 0}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{v_1 v_2}{t^2 v_1^4 + v_2^2} = \begin{cases} \frac{v_1}{v_2}, & \text{ha } v_2 \neq 0 \\ \lim\limits_{t\to 0} \frac{0}{t^2 v_1^4} = 0, & \text{ha } v_2 = 0 \end{cases},$$

illetve ha $(v_1, v_2) = (0,0)$, akkor

$$\delta f((0,0);(0,0)) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0 + t \cdot 0, 0 + t \cdot 0) - f(0,0)}{t} = \lim_{n\to\infty} \frac{0}{t} = 0.$$

Ha az f függvény differenciálható a $(0,0)$ pontban, akkor a 8.2. Tétel alapján a differenciálja ebben a pontban $\varphi(h_1,h_2) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \cdot h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \cdot h_2 = 0 \cdot h_1 + 0 \cdot h_2 = 0$, mivel

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \delta f((0,0);(1,0)) = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \delta f((0,0);(0,1)) = \frac{0}{1} = 0,$$

a fenti számolás alapján. A parciális deriváltak sajátos iránymenti deriváltak. Az x szerinti parciális derivált megegyezik az $(1,0)$ iránymenti deriválttal, míg y szerinti parciális derivált megegyezik az $(0,1)$ iránymenti deriválttal.

Az f függvény pontosan akkor differenciálható a $(0,0)$ pontban, ha

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f(0+h_1,0+h_2) - f(0,0) - \varphi(h_1,h_2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 0$$
$$\iff \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\frac{h_1h_2}{h_1^4+h_2^2} - 0 - 0}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 0$$
$$\iff \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{h_1h_2}{(h_1^4+h_2^2)\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 0.$$

Ezutóbbi egyenlőség nem áll fenn, mert a Heine-kritérium alapján található olyan $(0,0)$-ba tartó (a_n,b_n) sorozat, amelyre a $g(h_1,h_2) = \frac{h_1h_2}{(h_1^4+h_2^2)\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$ függvény esetén $\lim\limits_{n\to\infty} g(a_n,b_n) \neq 0$. Valóban, az $(a_n,b_n) = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2})$ sorozat tart a $(0,0)$-ba, de

$$\lim_{n\to\infty} g\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n^2}}{\left(\left(\frac{1}{n}\right)^4 + \left(\frac{1}{n^2}\right)^2\right)\sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{1}{n^2}\right)^2}} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^3}}{\frac{2}{n^4}\sqrt{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = \frac{+\infty}{2} = +\infty.$$

□

8.7. Feladat. A megadott pontban vizsgáld a következő függvények differenciálhatóságát:

(a) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2+y^2$ és $(x_0,y_0) = (1,0)$;

Megoldás. Az f függvény parciális deriváltjai $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x$ és $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y$ folytonosak minden $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ pontban, ezért a függvény differenciálható minden (x,y) pontban, sajátosan az $(x_0,y_0) = (1,0)$ pontban is, ahol a differenciálja

$$df(1,0)(h_1,h_2) = \varphi(h_1,h_2) = \frac{\partial f}{\partial x}(1,0)\cdot h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(1,0)\cdot h_2 = 2\cdot 1\cdot h_1 + 2\cdot 0\cdot h_2 = 2h_1.$$

□

(b) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y) = x^3+xy+y^2$ és $(x_0,y_0) = (1,1)$;

Megoldás. Az f függvény parciális deriváltjai $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2+y$ és $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x+2y$ folytonosak minden $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ pontban, ezért a függvény differenciálható minden (x,y) pontban, sajátosan az $(x_0,y_0) = (1,1)$ pontban is, ahol a differenciálja

$$df(1,1)(h_1,h_2) = \varphi(h_1,h_2) = \frac{\partial f}{\partial x}(1,1)\cdot h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)\cdot h_2$$
$$= (3\cdot 1^2+1)\cdot h_1 + (1+2\cdot 1)\cdot h_2 = 4h_1+3h_2.$$

□

(c) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \text{ha } (x,y)=(0,0)\end{cases}$ és $(x_0,y_0)=(0,0)$;

Megoldás. A 8.2. Tétel alapján felírjuk, hogy mi kellene legyen az f függvény differenciálja a $(0,0)$ pontban, ha az f differenciálható. Ehhez kiszámoljuk az f parciális deriváltjait a $(0,0)$ pontban:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{t\to0}\frac{f(0+t,0)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{\frac{(0+t)^20}{(0+t)^2+0^2}-0}{t}=\lim_{t\to0}\frac{0-0}{t}=0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{t\to0}\frac{f(0,0+t)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{\frac{0^2(0+t)}{0^2+(0+t)^2}-0}{t}=\lim_{t\to0}\frac{0-0}{t}=0,$$

tehát $\varphi(h_1,h_2)=\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)\cdot h_1+\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)\cdot h_2=0\cdot h_1+0\cdot h_2=0.$

Az f differenciálható a $(0,0)$ pontban pontosan akkor, ha

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{f(0+h_1,0+h_2)-f(0,0)-\varphi(h_1,h_2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}=0\iff$$
$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{\frac{h_1^2h_2}{h_1^2+h_2^2}-0-0}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}=0\iff\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{h_1^2h_2}{(h_1^2+h_2^2)\sqrt{h_1^2+h_2^2}}=0.$$

A $h_1=h_2$ első szögfelező mentén tartva a $(0,0)$ pontba

$$\lim_{\substack{(h_1,h_2)\to(0,0)\\h_1=h_2}}\frac{h_1^2h_2}{(h_1^2+h_2^2)\sqrt{h_1^2+h_2^2}}=\lim_{h_1\to0}\frac{h_1^2h_1}{(h_1^2+h_1^2)\sqrt{h_1^2+h_1^2}}=$$
$$=\lim_{h_1\to0}\frac{h_1^3}{2h_1^2\sqrt{2h_1^2}}=\lim_{h_1\to0}\frac{h_1}{2\sqrt2|h_1|},$$

amely határérték nem létezik, mivel a

$$\lim_{\substack{h_1\to0\\h_1>0}}\frac{h_1}{2\sqrt2|h_1|}=\lim_{\substack{h_1\to0\\h_1>0}}\frac{h_1}{2\sqrt2h_1}=\frac{1}{2\sqrt2}\quad\text{és}\quad\lim_{\substack{h_1\to0\\h_1<0}}\frac{h_1}{2\sqrt2|h_1|}=\lim_{\substack{h_1\to0\\h_1<0}}\frac{h_1}{-2\sqrt2h_1}=-\frac{1}{2\sqrt2},$$

jobb és bal oldali határértékek nem egyenlőek. Tehát nem létezik a

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{h_1^2h_2}{(h_1^2+h_2^2)\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$$

globális határérték, ezért a függvény nem differenciálható a $(0,0)$ pontban. □

(d) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \text{ha } (x,y)=(0,0)\end{cases}$ és $(x_0,y_0)=(0,0)$;

Megoldás. A 8.2. Tétel alapján felírjuk, hogy mi kellene legyen az f függvény differenciálja a $(0,0)$ pontban, ha differenciálható. Ehhez kiszámoljuk az f parciális deriváltjait a $(0,0)$ pontban:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{t\to0}\frac{f(0+t,0)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{\frac{(0+t)^20^2}{(0+t)^2+0^2}-0}{t}=\lim_{t\to0}\frac{0-0}{t}=0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,0+t)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{0^2(0+t)^2}{0^2+(0+t)^2}-0}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = 0,$$

tehát $\varphi(h_1,h_2) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\cdot h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\cdot h_2 = 0\cdot h_1 + 0\cdot h_2 = 0.$

Az f differenciálható a $(0,0)$ pontban pontosan akkor, ha

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f(0+h_1,0+h_2)-f(0,0)-\varphi(h_1,h_2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 0$$

$$\iff \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\frac{h_1^2h_2^2}{h_1^2+h_2^2}-0-0}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 0$$

$$\iff \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{h_1^2h_2^2}{(h_1^2+h_2^2)\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 0.$$

Ez utóbbi egyenlőséget a fogó tétellel fogjuk igazolni: minden $(h_1,h_2)\neq(0,0)$ esetén

$$0 \le \frac{h_1^2h_2^2}{(h_1^2+h_2^2)\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \frac{h_1^2}{h_1^2+h_2^2}\cdot\frac{|h_2|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\cdot|h_2| = \frac{h_1^2}{h_1^2+h_2^2}\cdot\frac{\sqrt{h_2^2}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\cdot|h_2|$$
$$\le \frac{h_1^2+h_2^2}{h_1^2+h_2^2}\cdot\frac{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\cdot|h_2| = |h_2|,$$

továbbá $\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} |h_2| = \lim_{h_2\to 0}|h_2| = 0$, ezért a fogó tétel alapján fennáll a kívánt egyenlőség.

Ezzel igazoltuk, hogy az f függvény differenciálható a $(0,0)$ pontban és ebben a pontban a differenciálja $\varphi(h_1,h_2)=0$. □

(e) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{ha } (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & \text{ha } (x,y)=(0,0) \end{cases}$ és $(x_0,y_0)=(0,0);$

Megoldás. A 8.2. Tétel alapján ha az f függvény differenciálható a $(0,0)$ pontban, akkor ebben a pontban a differenciálja $\varphi(h_1,h_2) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\cdot h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\cdot h_2 = 0\cdot h_1 + 0\cdot h_2 = 0$, mivel

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0+t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t\cdot 0}{\sqrt{t^2+0^2}}-0}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,0+t)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{0\cdot t}{\sqrt{0^2+t^2}}-0}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = 0.$$

Az f függvény pontosan akkor differenciálható a $(0,0)$ pontba, ha

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f(0+h_1,0+h_2)-f(0,0)-\varphi(h_1,h_2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 0 \iff$$
$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\frac{h_1h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}-0-0}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 0 \iff \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{h_1h_2}{h_1^2+h_2^2} = 0.$$

Az utóbbi egyenlőség nem áll fenn, mivel nem létezik a $g(h_1,h_2) = \frac{h_1h_2}{h_1^2+h_2^2}$ függvénynek (globális) határértéke az origóban. Valóban a $h_2 = th_1$ egyenes mentén tartva az origóba a g függvény határértéke

$$\lim_{h_1\to 0} g(h_1,th_1) = \lim_{h_1\to 0}\frac{th_1^2}{h_1^2+t^2h_1^2} = \lim_{h_1\to 0}\frac{t}{1+t^2} = \frac{t}{1+t^2},$$

amely nem független t-től (az egyenes meredekségétől), ezért nem létezik a g függvénynek (globális) határértéke az origóban. Tehát az f függvény nem differenciálható a $(0,0)$ pontban. $\square$

(f) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \text{ha } (x,y)=(0,0)\end{cases}$ és $(x_0,y_0)=(0,0)$;

Megoldás. Az origóban a differenciálhatóságot az értelmezés alapján vizsgáljuk. Ha az f függvény differenciálható az origóban, akkor a 8.2. Tétel alapján az origóban a differenciálja

$$df(0,0)(h_1,h_2)=\varphi(h_1,h_2)=\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\cdot h_1+\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\cdot h_2.$$

Kiszámoljuk a parciális deriváltakat az origóban:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(0+t,0)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{t^3-0^3}{t^2+0^2}-0}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{t^3}{t^3}=1,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(0,0+t)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{0^3-t^3}{0^2+t^2}-0}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{-t^3}{t^3}=-1.$$

Tehát, ha az f függvény differenciálható, akkor a differenciálja $\varphi(h_1,h_2)=h_1-h_2$ kell legyen. Az f differenciálható a $(0,0)$ pontban pontosan akkor, ha

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{f(0+h_1,0+h_2)-f(0,0)-\varphi(h_1,h_2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}=0$$
$$\iff\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{\frac{h_1^3-h_2^3}{h_1^2+h_2^2}-0-(h_1-h_2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}=0$$
$$\iff\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{h_1^3-h_2^3-(h_1^2+h_2^2)(h_1-h_2)}{\left(\sqrt{h_1^2+h_2^2}\right)^3}=0$$
$$\iff\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{h_1^2h_2-h_1h_2^2}{\left(\sqrt{h_1^2+h_2^2}\right)^3}=0.$$

A $\lim\limits_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{h_1^2h_2-h_1h_2^2}{\left(\sqrt{h_1^2+h_2^2}\right)^3}$ határérték nem létezik, mivel ha a $h_2=-h_1$ egyenesen mentén két oldalról tartva az origóba (vagyis $(h_1,h_2)=(-u,u)\to(0,0)$, mikor $u\to 0^+$, illetve $u\to 0^-$), akkor a

$$\lim_{u\to 0^+}\frac{u^2\cdot u-(-u)\cdot u^2}{\left(\sqrt{u^2+u^2}\right)^3}=\lim_{u\to 0^+}\frac{2u^3}{\left(\sqrt{2}\cdot|u|\right)^3}=\lim_{u\to 0^+}\frac{2u^3}{2\sqrt{2}\cdot u^3}=\frac{1}{\sqrt{2}},$$
$$\lim_{u\to 0^-}\frac{u^2\cdot u-(-u)\cdot u^2}{\left(\sqrt{u^2+u^2}\right)^3}=\lim_{u\to 0^-}\frac{2u^3}{\left(\sqrt{2}\cdot|u|\right)^3}=\lim_{u\to 0^-}\frac{2u^3}{-2\sqrt{2}\cdot u^3}=-\frac{1}{\sqrt{2}},$$

amelyek nem egyeznek meg. Tehát az f függvény nem differenciálható az origóban. $\square$

(g) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \text{ha } (x,y)=(0,0)\end{cases}$ és $(x_0,y_0)=(0,0)$;

Megoldás. Az origóban a differenciálhatóságot az értelmezés alapján vizsgáljuk. Ha az f függvény differenciálható az origóban, akkor a 8.2. Tétel szerint az origóban a differenciálja

$$df(0,0)(h_1,h_2) = \varphi(h_1,h_2) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\cdot h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\cdot h_2.$$

Kiszámoljuk a parciális deriváltakat az origóban:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(0+t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{t^3+0^3}{t^2+0^2}-0}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{t^3}{t^3} = 1,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(0,0+t)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{0^3+t^3}{0^2+t^2}-0}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{t^3}{t^3} = 1.$$

Tehát, ha az f függvény differenciálható, akkor a differenciálja $\varphi(h_1,h_2) = h_1 + h_2$ kell legyen. Az f differenciálható a $(0,0)$ pontban pontosan akkor, ha

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{f(0+h_1,0+h_2)-f(0,0)-\varphi(h_1,h_2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 0$$
$$\iff \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{\frac{h_1^3+h_2^3}{h_1^2+h_2^2}-0-(h_1+h_2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 0$$
$$\iff \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{h_1^3+h_2^3-(h_1^2+h_2^2)(h_1+h_2)}{\left(\sqrt{h_1^2+h_2^2}\right)^3} = 0$$
$$\iff \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{h_1^2h_2+h_1h_2^2}{\left(\sqrt{h_1^2+h_2^2}\right)^3} = 0.$$

A $\lim\limits_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{h_1^2h_2+h_1h_2^2}{\left(\sqrt{h_1^2+h_2^2}\right)^3}$ határérték nem létezik, mivel ha a $h_2 = h_1$ egyenesen mentén két oldalról tartva az origóba (vagyis $(h_1,h_2) = (u,u)\to(0,0)$, mikor $u\to 0^+$, illetve $u\to 0^-$), akkor a

$$\lim_{u\to 0^+}\frac{u^2\cdot u+u\cdot u^2}{\left(\sqrt{u^2+u^2}\right)^3} = \lim_{u\to 0^+}\frac{2u^3}{\left(\sqrt{2}\cdot|u|\right)^3} = \lim_{u\to 0^+}\frac{2u^3}{2\sqrt{2}\cdot u^3} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$
$$\lim_{u\to 0^-}\frac{u^2\cdot u+u\cdot u^2}{\left(\sqrt{u^2+u^2}\right)^3} = \lim_{u\to 0^-}\frac{2u^3}{\left(\sqrt{2}\cdot|u|\right)^3} = \lim_{u\to 0^-}\frac{2u^3}{-2\sqrt{2}\cdot u^3} = -\frac{1}{\sqrt{2}},$$

amelyek nem egyeznek meg. Tehát az f függvény nem differenciálható az origóban. □

(h) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ f(x,y) = \begin{cases}\dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \text{ha } (x,y)=(0,0)\end{cases}$ és $(x_0,y_0) = (0,0)$;

Megoldás. Az origóban a differenciálhatóságot az értelmezés alapján vizsgáljuk. Ha az f függvény differenciálható az origóban, akkor a 8.2. Tétel alapján az origóban a differenciálja

$$df(0,0)(h_1,h_2) = \varphi(h_1,h_2) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\cdot h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\cdot h_2.$$

Kiszámoljuk a parciális deriváltakat az origóban:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(0+t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{t^4+0^4}{t^2+0^2}-0}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{t^4}{t^3} = \lim_{t\to 0} t = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(0,0+t)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{0^4+t^4}{0^2+t^2}-0}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{t^4}{t^3} = \lim_{t\to 0} t = 0.$$

Tehát, ha az f függvény differenciálható, akkor a differenciálja $\varphi(h_1, h_2) = 0 \cdot h_1 + 0 \cdot h_2 = 0$ kell legyen. Az f függvény pontosan akkor differenciálható a $(0,0)$ pontban, ha

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f(0+h_1, 0+h_2) - f(0,0) - \varphi(h_1,h_2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 0$$

$$\iff \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\frac{h_1^4+h_2^4}{h_1^2+h_2^2} - 0 - 0}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 0$$

$$\iff \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{h_1^4+h_2^4}{\left(\sqrt{h_1^2+h_2^2}\right)^3} = 0.$$

A következő majorálást végezzük: minden $(h_1, h_2) \neq (0,0)$ esetén

$$0 \le \frac{h_1^4+h_2^4}{\left(\sqrt{h_1^2+h_2^2}\right)^3} = |h_1| \cdot \frac{\left(\sqrt{h_1^2}\right)^3}{\left(\sqrt{h_1^2+h_2^2}\right)^3} + |h_2| \cdot \frac{\left(\sqrt{h_2^2}\right)^3}{\left(\sqrt{h_1^2+h_2^2}\right)^3}$$
$$\le |h_1| \cdot \frac{\left(\sqrt{h_1^2+h_2^2}\right)^3}{\left(\sqrt{h_1^2+h_2^2}\right)^3} + |h_2| \cdot \frac{\left(\sqrt{h_1^2+h_2^2}\right)^3}{\left(\sqrt{h_1^2+h_2^2}\right)^3} = |h_1| + |h_2|,$$

továbbá $\lim\limits_{(h_1,h_2)\to(0,0)} |h_1| + |h_2| = \lim\limits_{h_1\to 0} |h_1| + \lim\limits_{h_2\to 0} |h_2| = 0 + 0 = 0$, ezért a fogó tétel alapján $\lim\limits_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{h_1^4+h_2^4}{\left(\sqrt{h_1^2+h_2^2}\right)^3} = 0$. Tehát az f függvény differenciálható az origóban és a differenciálja az origóban $\varphi(h_1, h_2) = 0$. □

(i) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 1, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ és $(x_0, y_0) = (0,0)$;

Megoldás. Az origóban a differenciálhatóságot az értelmezés alapján vizsgáljuk. Ha az f függvény differenciálható az origóban, akkor a 8.2. Tétel alapján léteznek a parciális deriváltjai az origóban és ott a differenciálja

$$df(0,0)(h_1,h_2) = \varphi(h_1,h_2) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \cdot h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \cdot h_2.$$

Kiszámoljuk a parciális deriváltakat az origóban:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0+t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{\sin(t^2+0^2)}{t^2+0^2} - 0}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin(t^2)}{t^3} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t},$$

amely határérték nem létezik, mivel $\lim\limits_{t\to 0^+} \frac{1}{t} = +\infty$, míg $\lim\limits_{t\to 0^-} \frac{1}{t} = -\infty$. (Hasonlóan az y változó szerinti parciális derivált sem létezik az origóban). Mivel nem létezik az x változó szerinti parciális derivált az origóban, ezért a függvény nem differenciálható az origóban. □

(j) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ és $(x_0, y_0) = (0,0)$;

Megoldás. Az origóban a differenciálhatóságot az értelmezés alapján vizsgáljuk. Ha az f függvény differenciálható az origóban, akkor a 8.2. Tétel alapján léteznek a parciális deriváltjai az origóban és a differenciálja az origóban

$$df(0,0)(h_1,h_2) = \varphi(h_1,h_2) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \cdot h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \cdot h_2.$$

Kiszámoljuk a parciális deriváltakat az origóban:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0+t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{\sin(t^3+0^3)}{t^2+0^2}-0}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin(t^3)}{t^3} = 1,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,0+t)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{\sin(0^3+t^3)}{0^2+t^2}-0}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin(t^3)}{t^3} = 1.$$

Tehát, ha az f függvény differenciálható az origóban, akkor a differenciálja $\varphi(h_1,h_2) = h_1+h_2$ kell legyen. Az f függvény pontosan akkor differenciálható a $(0,0)$ pontban, ha

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f(0+h_1,0+h_2)-f(0,0)-\varphi(h_1,h_2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 0$$

$$\iff \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\frac{\sin(h_1^3+h_2^3)}{h_1^2+h_2^2}-0-(h_1+h_2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 0$$

$$\iff \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\sin(h_1^3+h_2^3)-(h_1^2+h_2^2)(h_1+h_2)}{\left(\sqrt{h_1^2+h_2^2}\right)^3} = 0.$$

A $\lim\limits_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\sin(h_1^3+h_2^3)-(h_1^2+h_2^2)(h_1+h_2)}{\left(\sqrt{h_1^2+h_2^2}\right)^3}$ határérték nem létezik, mivel a $h_2 = h_1$ egyenesen mentén két oldalról tartva az origóba (vagyis $(h_1,h_2) = (u,u) \to (0,0)$, mikor $u \to 0^+$, illetve $u \to 0^-$)

$$\lim_{u\to 0^+} \frac{\sin(u^3+u^3)-(u^2+u^2)(u+u)}{\left(\sqrt{u^2+u^2}\right)^3} = \lim_{u\to 0^+} \frac{\sin(2u^3)-4u^3}{\left(\sqrt{2u^2}\right)^3}$$

$$= \lim_{u\to 0^+} \frac{\sin(2u^3)-4u^3}{2\sqrt{2}|u|^3} = \lim_{u\to 0^+} \frac{\sin(2u^3)-4u^3}{2\sqrt{2}u^3} = -\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\lim_{u\to 0^-} \frac{\sin(u^3+u^3)-(u^2+u^2)(u+u)}{\left(\sqrt{u^2+u^2}\right)^3} = \lim_{u\to 0^-} \frac{\sin(2u^3)-4u^3}{\left(\sqrt{2u^2}\right)^3}$$

$$= \lim_{u\to 0^-} \frac{\sin(2u^3)-4u^3}{2\sqrt{2}|u|^3} = \lim_{u\to 0^-} \frac{\sin(2u^3)-4u^3}{-2\sqrt{2}u^3} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

amelyek nem egyeznek meg. Tehát az f függvény nem differenciálható az origóban. □

(k) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^4+y^4)}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ és $(x_0,y_0) = (0,0)$;

Megoldás. A 8.2. Tétel alapján felírjuk, hogy mi kellene legyen az f függvény differenciálja a $(0,0)$ pontban, ha az f differenciálható. Ehhez kiszámoljuk az f parciális deriváltjait a $(0,0)$ pontban:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0+t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{\sin((0+t)^4+0^4)}{(0+t)^2+0^2}-0}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{\sin t^4}{t^2}}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\sin t^4}{t^3} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin t^4}{t^4} \cdot t = 1\cdot 0 = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,0+t)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{\sin(0^4+(0+t)^4)}{0^2+(0+t)^2}-0}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{\sin t^4}{t^2}}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\sin t^4}{t^3} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin t^4}{t^4} \cdot t = 1\cdot 0 = 0,$$

tehát $\varphi(h_1, h_2) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) \cdot h_1 + \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) \cdot h_2 = 0 \cdot h_1 + 0 \cdot h_2 = 0.$

Az f függvény pontosan akkor differenciálható a $(0,0)$ pontban, ha

$$\begin{aligned}
&\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f(0+h_1, 0+h_2) - f(0,0) - \varphi(h_1,h_2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 0 \\
\iff &\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\frac{\sin(h_1^4+h_2^4)}{h_1^2+h_2^2} - 0 - 0}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 0 \\
\iff &\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\sin(h_1^4+h_2^4)}{(h_1^2+h_2^2)\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 0 \\
\iff &\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\sin(h_1^4+h_2^4)}{h_1^4+h_2^4} \cdot \frac{h_1^4+h_2^4}{(h_1^2+h_2^2)\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 0 \\
\iff &\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\sin(h_1^4+h_2^4)}{h_1^4+h_2^4} \cdot \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{h_1^4+h_2^4}{(h_1^2+h_2^2)\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 0 \\
\iff &1 \cdot \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{h_1^4+h_2^4}{(h_1^2+h_2^2)\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 0 \\
\iff &\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{h_1^4+h_2^4}{(h_1^2+h_2^2)\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 0,
\end{aligned}$$

ahol felhasználtuk, hogy $\displaystyle\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\sin(h_1^4+h_2^4)}{h_1^4+h_2^4} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$, mivel $t = h_1^4 + h_2^4$ tart 0-hoz, amikor (h_1, h_2) tart $(0,0)$-hoz.

A $\displaystyle\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{h_1^4+h_2^4}{(h_1^2+h_2^2)\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 0$ egyenlőséget a fogó tétel segítségével látjuk be: minden $(h_1, h_2) \neq (0,0)$ esetén

$$\begin{aligned}
0 \le \frac{h_1^4+h_2^4}{(h_1^2+h_2^2)\sqrt{h_1^2+h_2^2}} &= \frac{h_1^2}{h_1^2+h_2^2} \cdot \frac{|h_1|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \cdot |h_1| + \frac{h_2^2}{h_1^2+h_2^2} \cdot \frac{|h_2|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \cdot |h_2| = \\
&= \frac{h_1^2}{h_1^2+h_2^2} \cdot \frac{\sqrt{h_1^2}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \cdot |h_1| + \frac{h_2^2}{h_1^2+h_2^2} \cdot \frac{\sqrt{h_2^2}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \cdot |h_2| \le \\
&\le \frac{h_1^2+h_2^2}{h_1^2+h_2^2} \cdot \frac{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \cdot |h_1| + \frac{h_1^2+h_2^2}{h_1^2+h_2^2} \cdot \frac{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \cdot |h_2| = |h_1| + |h_2|,
\end{aligned}$$

továbbá $\displaystyle\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} |h_1| + |h_2| = 0$, ezért a fogó tétel alapján fennáll a kívánt egyenlőség.

Ezzel beláttuk, hogy az f függvény differenciálható a $(0,0)$ pontban és ebben a pontban a differenciálja $\varphi(h_1, h_2) = 0$. □

(l) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = e^{x-y^2}$ és $(x_0, y_0) = (2,2)$.

Megoldás. A függvény parciális deriváltjai $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^{x-y^2}$ és $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2ye^{x-y^2}$ folytonosak minden $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ pontban, ezért az f függvény differenciálható minden pontban, sajátosan a $(2,2)$ pontban is, ahol a differenciálja

$$df(2,2)(h_1,h_2) = \frac{\partial f}{\partial x}(2,2) \cdot h_1 + \frac{\partial f}{\partial x}(2,2) \cdot h_2 = e^{-2} \cdot h_1 - 4e^{-2} h_2.$$

□

9. fejezet

Többváltozós függvények másodrendű parciális deriváltjai

9.1. Elméleti összefoglaló

Ha $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ egy kétváltozós függvény, akkor

- az $f(x, y)$ függvény x változó szerinti másodrendű parciális deriváltja:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right),$$

  vagyis először az x változó szerint deriválunk parciálisan, majd kapott függvényt újra az x változó szerint deriváljuk parciálisan;

- az $f(x, y)$ függvény y változó szerinti másodrendű parciális deriváltja:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right),$$

  vagyis először az y változó szerint deriválunk parciálisan, majd kapott függvényt újra az y változó szerint deriváljuk parciálisan;

- az $f(x, y)$ függvény vegyes másodrendű parciális deriváltjai

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right),$$

  vagyis először az y változó szerint deriválunk parciálisan, majd kapott függvényt az x változó szerint deriváljuk parciálisan, illetve

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right),$$

  vagyis először az x változó szerint deriválunk parciálisan, majd kapott függvényt az y változó szerint deriváljuk parciálisan.

Ha $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ egy háromváltozós függvény, akkor az $f(x, y, z)$ másodrendű parciális derivált függvényei:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right),\\
&\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right),\\
&\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right).
\end{aligned}$$

9.1. Tétel (Schwarz)
Legyen $f : A \to \mathbb{R}$ egy n-változós függvény, ahol $A \subseteq \mathbb{R}^n$ és legyen p az A halmaz egy belső pontja. Ha valamely $1 \le i < j \le n$ esetén léteznek az $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ és $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ parciális derivált függvények a $p \in \mathring{A}$ pont egy kis környezetében és folytonosak p-ben, akkor egyenlőek is p-ben:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(p).$$

9.2. Példa
Ha $f(x, y) = x^y$, akkor $\dfrac{\partial f}{\partial x} = yx^{y-1}$ és $\dfrac{\partial f}{\partial y} = x^y \ln x$. Ez alapján $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = x^{y-1} + yx^{y-1} \ln x$. ◇

9.3. Tétel (Young)
Legyen $f : A \to \mathbb{R}$ egy n-változós függvény, ahol $A \subseteq \mathbb{R}^n$ és legyen p az A halmaz egy belső pontja, $p \in \mathring{A}$. Ha valamely $1 \le i < j \le n$ esetén léteznek az $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ és $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ parciális derivált függvények és differenciálhatóak a p pontban, akkor

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(p).$$

9.2. Feladatok

9.1. Feladat. Igazold, hogy az $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$,

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \text{ha } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

függvény esetén $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)\neq\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$.

9.2. Feladat. Számítsd ki az $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$,

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \text{ha } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

függvény másodrendű parciális deriváljait!

9.3. Feladat. Számítsd ki az $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$,

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \text{ha } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

függvény másodrendű parciális deriváljait!

9.4. Feladat. Igazold, hogy az $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$,

$$f(x,y)=\begin{cases} y^2\ln\left(1+\frac{x^2}{y^2}\right), & \text{ha } y\neq 0\\ 0, & \text{ha } y=0\end{cases}$$

függvény másodrendű parciális deriváltjai nem folytonosak az origóban, de

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$$

(példa, ahol nem teljesülnek a Schwarz-tétel feltételei)!

9.5. Feladat. Számítsd ki a következő függvények másodrendű parciális deriváltjait:

(a) $f(x,y)=e^x\cos y$;

(b) $f(x,y)=\sin(xy^2)$;

(c) $f(x,y,z)=xyz$;

(d) $f(x,y,z)=\sin(xy)+\cos(yz)+zx$;

(e) $f(x,y)=x^2\sin^2 y$;

(f) $f(x,y)=\ln(xy)\cos(x^2-y^2)$, $x,y>0$;

(g) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^4}$;

(h) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=\begin{cases} x^2y\ln(x^2), & \text{ha } x\neq 0\\ 0, & \text{ha } x=0\end{cases}$.

9.3. Megoldások

9.1. Feladat. Igazold, hogy az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

függvény esetén $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

Megoldás. Előbb kiszámoljuk az elsőrendű parciális derivált függvényeket. Minden $(x,y) \neq (0,0)$ esetén

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2y-xy^3}{x^2+y^2}\right) \\ &= \frac{(x^2+y^2)\frac{\partial}{\partial x}(x^3y-xy^3) - (x^3y-xy^3)\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} \\ &= \frac{(x^2+y^2)(3x^2y-y^3) - (x^3y-xy^3)2x}{(x^2+y^2)^2} \\ &= \frac{x^4y+4x^2y^3-y^5}{(x^2+y^2)^2}, \end{aligned}$$

és $(x,y) = (0,0)$ esetén

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(0+t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{t\cdot 0\cdot\frac{t^2-0^2}{t^2+0^2}-0}{t} \lim_{t\to 0}\frac{0-0}{t} = 0.$$

Tehát az x változó szerinti elsőrendű parciális derivált függvény: $\frac{\partial f}{\partial x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4y+4x^2y^3-y^5}{(x^2+y^2)^2}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Hasonlóan számoljuk ki az y változó szerinti elsőrendű parciális derivált függvényt is. Minden $(x,y) \neq (0,0)$ esetén

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2y-xy^3}{x^2+y^2}\right) \\ &= \frac{(x^2+y^2)\frac{\partial}{\partial y}(x^3y-xy^3) - (x^3y-xy^3)\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} \\ &= \frac{(x^2+y^2)(x^3-3xy^2) - (x^3y-xy^3)2y}{(x^2+y^2)^2} \\ &= \frac{x^5-4x^3y^2-xy^4}{(x^2+y^2)^2}, \end{aligned}$$

és $(x,y) = (0,0)$ esetén

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(0,0+t)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{0\cdot t\cdot\frac{0^2-t^2}{0^2+t^2}-0}{t} \lim_{t\to 0}\frac{0-0}{t} = 0.$$

Tehát $\frac{\partial f}{\partial y} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \frac{x^5-4x^3y^2-xy^4}{(x^2+y^2)^2}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Kiszámoljuk a vegyes másodrendű parciális derivált függvényeket az origóban:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0+t) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{0^4\cdot t - 4\cdot 0^2\cdot t^3 - t^5}{(t^2+0^2)^2} - 0}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} -\frac{t^5}{t^5} = -1, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(0+t,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{t^5 - 4\cdot t^3\cdot 0^2 - t\cdot 0^4}{(t^2+0^2)^2} - 0}{t} \\
&= \lim_{t\to 0}\frac{t^5}{t^5} = 1,
\end{aligned}$$

tehát $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$. □

9.2. Feladat. Számítsd ki az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

függvény másodrendű parciális deriváljait!

Megoldás. Előbb kiszámoljuk az elsőrendű parciális deriváltakat. Az origón kívül az elsőrendű parciális deriváltakat kiszámolhatjuk a direkt deriválás módszerével: minden $(x,y) \neq (0,0)$ esetén

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}\right) = \frac{\frac{\partial}{\partial x}(x^4+y^4)\cdot(x^2+y^2) - (x^4+y^4)\cdot\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} \\
&= \frac{4x^3\cdot(x^2+y^2) - (x^4+y^4)\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2x^5+4x^3y^2-2xy^4}{(x^2+y^2)^2}, \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}\right) = \frac{\frac{\partial}{\partial y}(x^4+y^4)\cdot(x^2+y^2) - (x^4+y^4)\cdot\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} \\
&= \frac{4y^3\cdot(x^2+y^2) - (x^4+y^4)\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2y^5+4y^3x^2-2yx^4}{(x^2+y^2)^2}.
\end{aligned}$$

Az origóban az elsőrendű deriváltakat az értelmezés alapján számítjuk ki:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^4+0^4}{x^2+0^2} - 0}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^3} = \lim_{x\to 0} x = 0, \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0}\frac{\frac{0^4+y^4}{0^2+y^2} - 0}{x} = \lim_{y\to 0}\frac{y^4}{y^3} = \lim_{y\to 0} y = 0.
\end{aligned}$$

Összegezve, az elők rendű parciális derivált függvények:

$$\frac{\partial f}{\partial x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \frac{2x^5+4x^3y^2-2xy^4}{(x^2+y^2)^2}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \frac{2y^5+4y^3x^2-2yx^4}{(x^2+y^2)^2}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Rátérünk a másodrendű parciális deriváltak kiszámítására. Az origón kívül a másodrendű parciális deriváltak szintén kiszámíthatók a direkt deriválás módszerével: minden $(x,y) \neq (0,0)$ esetén

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2x^5+4x^3y^2-2xy^4}{(x^2+y^2)^2}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\frac{\partial}{\partial x}(2x^5+4x^3y^2-2xy^4)\cdot(x^2+y^2)^2 - \frac{\partial}{\partial x}((x^2+y^2)^2)\cdot(2x^5+4x^3y^2-2xy^4)}{(x^2+y^2)^4}\\
&= \frac{(10x^4+12x^2y^2-2y^4)\cdot(x^2+y^2)^2 - 4x(x^2+y^2)\cdot(2x^5+4x^3y^2-2xy^4)}{(x^2+y^2)^4}\\
&= \frac{(10x^4+12x^2y^2-2y^4)\cdot(x^2+y^2) - 4x\cdot(2x^5+4x^3y^2-2xy^4)}{(x^2+y^2)^3}\\
&= \frac{2x^6+6x^4y^2+18x^2y^4-2y^6}{(x^2+y^2)^3},\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2x^5+4x^3y^2-2xy^4}{(x^2+y^2)^2}\right)\\
&= \frac{\frac{\partial}{\partial y}(2x^5+4x^3y^2-2xy^4)\cdot(x^2+y^2)^2 - \frac{\partial}{\partial y}((x^2+y^2)^2)\cdot(2x^5+4x^3y^2-2xy^4)}{(x^2+y^2)^4}\\
&= \frac{(8x^3y-8xy^3)\cdot(x^2+y^2)^2 - 4y(x^2+y^2)\cdot(2x^5+4x^3y^2-2xy^4)}{(x^2+y^2)^4}\\
&= \frac{8xy(x^2-y^2)\cdot(x^2+y^2) - 8xy\cdot(x^4+2x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^3}\\
&= \frac{8xy(-2x^2y^2)}{(x^2+y^2)^3} = \frac{-16x^3y^3}{(x^2+y^2)^3},\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2y^5+4y^3x^2-2yx^4}{(x^2+y^2)^2}\right)\\
&= \frac{\frac{\partial}{\partial x}(2y^5+4y^3x^2-2yx^4)\cdot(x^2+y^2)^2 - \frac{\partial}{\partial x}((x^2+y^2)^2)\cdot(2y^5+4y^3x^2-2yx^4)}{(x^2+y^2)^4}\\
&= \frac{(8y^3x-8yx^3)\cdot(x^2+y^2)^2 - 4x(x^2+y^2)\cdot(2y^5+4y^3x^2-2yx^4)}{(x^2+y^2)^4}\\
&= \frac{8xy(y^2-x^2)\cdot(x^2+y^2) - 8xy\cdot(y^4+2y^2x^2-x^4)}{(x^2+y^2)^3}\\
&= \frac{8xy(-2y^2x^2)}{(x^2+y^2)^3} = \frac{-16x^3y^3}{(x^2+y^2)^3},\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2y^5+4y^3x^2-2yx^4}{(x^2+y^2)^2}\right)\\
&= \frac{\frac{\partial}{\partial y}(2y^5+4y^3x^2-2yx^4)\cdot(x^2+y^2)^2 - \frac{\partial}{\partial y}((x^2+y^2)^2)\cdot(2y^5+4y^3x^2-2yx^4)}{(x^2+y^2)^4}\\
&= \frac{(10y^4+12y^2x^2-2x^4)\cdot(x^2+y^2)^2 - 4y(x^2+y^2)\cdot(2y^5+4y^3x^2-2yx^4)}{(x^2+y^2)^4}\\
&= \frac{(10y^4+12y^2x^2-2x^4)\cdot(x^2+y^2) - 4y\cdot(2x^5+4x^3y^2-2xy^4)}{(x^2+y^2)^3}\\
&= \frac{2y^6+6y^4x^2+18y^2x^4-2x^6}{(x^2+y^2)^3}.
\end{aligned}
$$

A másodrendű deriváltakat az origóban az értelmezés alapján számítjuk ki:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{2x^5+4x^3\cdot 0^2-2x\cdot 0^4}{(x^2+0^2)^2}-0}{x-0}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{2x^5}{x^4}-0}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{2x^5}{x^5} = 2,\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(0,0) = \lim_{y\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0}\frac{\frac{2\cdot 0^5+4\cdot 0^3\cdot y^2-2\cdot 0\cdot y^4}{(0^2+y^2)^2}-0}{y-0}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{x\to 0} \frac{0-0}{y} = 0,\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2\cdot 0^5 + 4\cdot 0^3\cdot x^2 - 2\cdot 0\cdot x^4}{(x^2+0^2)^2} - 0}{x-0}\\
&= \lim_{x\to 0} \frac{0-0}{x} = 0,\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(0,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0} \frac{\frac{2\cdot y^5 + 4\cdot y^3\cdot 0^2 - 2\cdot y\cdot 0^4}{(0^2+y^2)^2} - 0}{y-0}\\
&= \lim_{y\to 0} \frac{\frac{2y^5}{y^4}}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{2y^5}{y^5} = 2.
\end{aligned}
$$

□

9.3. Feladat. Számítsd ki az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$
f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}
$$

függvény másodrendű parciális deriváljait!

Megoldás. Előbb kiszámoljuk az elsőrendű parciális deriváltakat. Az origón kívül az elsőrendű parciális deriváltakat kiszámolhatjuk a direkt deriválás módszerével: minden $(x,y) \neq (0,0)$ esetén

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\right) = \frac{\frac{\partial}{\partial x}(x^2y^2)\cdot(x^2+y^2) - x^2y^2\cdot\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}\\
&= \frac{2xy^2\cdot(x^2+y^2) - x^2y^2\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2},\\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\right) = \frac{\frac{\partial}{\partial y}(x^2y^2)\cdot(x^2+y^2) - x^2y^2\cdot\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}\\
&= \frac{2x^2y\cdot(x^2+y^2) - x^2y^2\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2x^4y}{(x^2+y^2)^2}.
\end{aligned}
$$

Az origóban az elsőrendű deriváltakat az értelmezés alapján számítjuk ki:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^2\cdot 0^2}{x^2+0^2} - 0}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{0-0}{x} = 0,\\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0} \frac{\frac{0^2\cdot y^2}{0^2+y^2} - 0}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{0-0}{y} = 0.
\end{aligned}
$$

Összegezve, az előrendű parciális derivált függvények:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases},\\
&\frac{\partial f}{\partial y} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \frac{2x^4y}{(x^2+y^2)^2}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}.
\end{aligned}
$$

Rátérünk a másodrendű parciális deriváltak kiszámítására. Az origón kívül a másodrendű parciális deriváltak szintén kiszámíthatók a direkt deriválás módszerével: minden $(x,y) \neq (0,0)$ esetén

$$
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2}\right)
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\frac{\partial}{\partial x}(2xy^4)\cdot(x^2+y^2)^2 - \frac{\partial}{\partial x}((x^2+y^2)^2)\cdot 2xy^4}{(x^2+y^2)^4}\\
&= \frac{2y^4\cdot(x^2+y^2)^2 - 4x(x^2+y^2)\cdot 2xy^4}{(x^2+y^2)^4} = \frac{2y^4\cdot(x^2+y^2) - 4x\cdot 2xy^4}{(x^2+y^2)^3}\\
&= \frac{2y^6-6x^2y^4}{(x^2+y^2)^3},\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2}\right)\\
&= \frac{\frac{\partial}{\partial y}(2xy^4)\cdot(x^2+y^2)^2 - \frac{\partial}{\partial y}((x^2+y^2)^2)\cdot 2xy^4}{(x^2+y^2)^4}\\
&= \frac{8xy^3\cdot(x^2+y^2)^2 - 4y(x^2+y^2)\cdot 2xy^4}{(x^2+y^2)^4} = \frac{8xy^3\cdot(x^2+y^2) - 4y\cdot 2xy^4}{(x^2+y^2)^3}\\
&= \frac{8x^3y^3}{(x^2+y^2)^3},\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2x^4y}{(x^2+y^2)^2}\right)\\
&= \frac{\frac{\partial}{\partial x}(2x^4y)\cdot(x^2+y^2)^2 - \frac{\partial}{\partial x}((x^2+y^2)^2)\cdot 2x^4y}{(x^2+y^2)^4}\\
&= \frac{8x^3y\cdot(x^2+y^2)^2 - 4x(x^2+y^2)\cdot 2x^4y}{(x^2+y^2)^4} = \frac{8x^3y\cdot(x^2+y^2) - 4x\cdot 2x^4y}{(x^2+y^2)^3}\\
&= \frac{8x^3y^3}{(x^2+y^2)^3},\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2x^4y}{(x^2+y^2)^2}\right)\\
&= \frac{\frac{\partial}{\partial y}(2x^4y)\cdot(x^2+y^2)^2 - \frac{\partial}{\partial y}((x^2+y^2)^2)\cdot 2x^4y}{(x^2+y^2)^4}\\
&= \frac{2x^4\cdot(x^2+y^2)^2 - 4y(x^2+y^2)\cdot 2x^4y}{(x^2+y^2)^4} = \frac{2x^4\cdot(x^2+y^2) - 4y\cdot 2x^4y}{(x^2+y^2)^3}\\
&= \frac{2x^6-6x^4y^2}{(x^2+y^2)^3}.
\end{aligned}
$$

A másodrendű deriváltakat az origóban az értelmezés alapján számítjuk ki:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{2\cdot x\cdot 0^4}{(x^2+0^2)^2}-0}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{0-0}{x} = 0,\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(0,0) = \lim_{y\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0}\frac{\frac{2\cdot 0\cdot y^4}{(0^2+y^2)^2}-0}{y-0} = \lim_{y\to 0}\frac{0-0}{y} = 0,\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{2\cdot x^4\cdot 0}{(x^2+0^2)^2}-0}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{0-0}{x} = 0,\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(0,0) = \lim_{y\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(0,y)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{y-0} = \lim_{y\to 0}\frac{\frac{2\cdot 0^4\cdot y}{(0^2+y^2)^2}-0}{y-0} = \lim_{y\to 0}\frac{0-0}{y} = 0.
\end{aligned}
$$

$\square$

9.4. Feladat. Igazold, hogy az $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$,

$$
f(x,y) = \begin{cases} y^2\ln\left(1+\frac{x^2}{y^2}\right), & \text{ha } y\neq 0\\ 0, & \text{ha } y = 0\end{cases}
$$

függvény másodrendű parciális deriváltjai nem folytonosak az origóban, de

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$$

(példa, ahol nem teljesülnek a Schwarz-tétel feltételei)!

Megoldás. Minden $x \in \mathbb{R}$ és $y \neq 0$, akkor

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(y^2 \ln\left(1+\frac{x^2}{y^2}\right)\right) = \frac{\partial f}{\partial x}\left(y^2\ln(x^2+y^2) - y^2\ln(y^2)\right) = \frac{2xy^2}{x^2+y^2},$$

illetve minden $x \in \mathbb{R}$ és $y = 0$ esetén

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(x+t,0)-f(x,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{0-0}{t} = 0,$$

tehát $\frac{\partial f}{\partial x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy^2}{x^2+y^2}, & \text{ha } y \neq 0 \\ 0, & \text{ha } y = 0 \end{cases}.$$

Minden $x \in \mathbb{R}$ és $y \neq 0$, akkor

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(y^2 \ln\left(1+\frac{x^2}{y^2}\right)\right) = \frac{\partial f}{\partial y}\left(y^2\ln(x^2+y^2) - y^2\ln(y^2)\right) \\ &= 2y\ln(x^2+y^2) + \frac{2y^3}{x^2+y^2} - 2y(1+\ln(y^2)),\end{aligned}$$

illetve minden $x \in \mathbb{R}$ és $y = 0$ esetén

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) &= \lim_{t\to 0}\frac{f(x,0+t)-f(x,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{t^2\ln(x^2+t^2) - t^2\ln(t^2) - 0}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} t\ln(x^2+t^2) - t\ln(t^2) = 0,\end{aligned}$$

tehát $\frac{\partial f}{\partial y} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} 2y\ln(x^2+y^2) + \frac{2y^3}{x^2+y^2} - 2y(1+\ln(y^2)), & \text{ha } y \neq 0 \\ 0, & \text{ha } y = 0 \end{cases}.$$

Kiszámoljuk a vegyes másodrendű parciális derivált függvényeket. Minden $x \in \mathbb{R}$ és $y \neq 0$ esetén

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2xy^2}{x^2+y^2}\right) = \frac{4x^3y}{(x^2+y^2)^2},$$

illetve minden $x \in \mathbb{R}$ és $y = 0$ esetén

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,0) = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,0+t) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{2xt^2}{x^2+t^2} - 0}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{2xt}{x^2+t^2} = 0,$$

tehát

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \begin{cases} \frac{4x^3y}{(x^2+y^2)^2}, & \text{ha } y \neq 0 \\ 0, & \text{ha } y = 0 \end{cases}.$$

Az $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ függvény nem folytonos az $(x,y) = (0,0)$ pontban, mivel a $y = tx$ egyenes mentén tartva a $(0,0)$ pontba kapjuk, hogy

$$\lim_{u\to 0}\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(u,tu) = \lim_{u\to 0}\frac{4u^3\cdot(tu)}{(u^2+(tu)^2)^2} = \lim_{t\to 0}\frac{4t\cdot u^4}{4(1+t^2)^2\cdot u^4} = \frac{4t}{(1+t^2)^2},$$

amely nem egyezik meg a $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = 0$ behelyettesítési értékkel (például $t = 1$ esetén a fenti határérték 1).

Minden $x \in \mathbb{R}$ és $y \neq 0$ esetén

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(2y\ln(x^2+y^2) + \frac{2y^3}{x^2+y^2} - 2y(1+\ln(y^2))\right) = \frac{4x^3 y}{(x^2+y^2)^2},$$

illetve minden $x \in \mathbb{R}$ és $y = 0$ esetén

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,0) = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x+t,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = 0,$$

tehát

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \begin{cases} \frac{4x^3 y}{(x^2+y^2)^2}, & \text{ha } y \neq 0 \\ 0, & \text{ha } y = 0 \end{cases}.$$

Tehát a $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ vegyes másodrendű parciális derivált függvények nem folytonosak az origóban, de $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 0 = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$. □

9.5. Feladat. Számítsd ki a következő függvények másodrendű parciális deriváltjait:

(a) $f(x,y) = e^x \cos y$;

Megoldás. Előbb kiszámoljuk az elsőrendű parciális deriváltakat a direkt deriválás módszerével:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(e^x \cos y\right) = \cos y \frac{\partial e^x}{\partial x} = e^x \cos y,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(e^x \cos y\right) = e^x \frac{\partial \cos y}{\partial y} = -e^x \sin y.$$

Rátérünk a másodrendű parciális deriváltak kiszámítására:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(e^x \cos y\right) = e^x \cos y,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(e^x \cos y\right) = -e^x \sin y,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-e^x \sin y\right) = -\sin y \frac{\partial e^x}{\partial x} = -e^x \sin y,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-e^x \sin y\right) = -e^x \frac{\partial \sin y}{\partial y} = -e^x \cos y.$$

Megjegyzés. Mivel az elsőrendű parciális deriváltak folytonosak, ezért a vegyes másodrendű parciális deriváltaknak meg kell egyezniük a Schwarz-tétel szerint ($\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$). □

(b) $f(x,y) = \sin(xy^2)$;

Megoldás. Előbb kiszámoljuk az elsőrendű parciális deriváltakat a direkt deriválás módszerével:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\sin(xy^2)\right) = \sin'(xy^2) \cdot \frac{\partial}{\partial x}(xy^2) = \cos(xy^2) \cdot y^2,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\sin(xy^2)\right) = \sin'(xy^2) \cdot \frac{\partial}{\partial y}(xy^2) = \cos(xy^2) \cdot 2xy.$$

Rátérünk a másodrendű parciális deriváltak kiszámítására:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\cos(xy^2)\cdot y^2\right) = y^2\frac{\partial}{\partial x}\left(\cos(xy^2)\right) \\
&= y^2\cos'(xy^2)\cdot\frac{\partial}{\partial x}(xy^2) = -y^4\sin(xy^2), \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\cos(xy^2)\cdot y^2\right) = \frac{\partial\cos(xy^2)}{\partial y}\cdot y^2 + \cos(xy^2)\cdot\frac{\partial y^2}{\partial y} \\
&= -\sin(xy^2)\cdot 2xy\cdot y^2 + \cos(xy^2)\cdot 2y = -2xy^3\sin(xy^2) + 2y\cos(xy^2), \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\cos(xy^2)\cdot 2xy\right) = \frac{\partial\cos(xy^2)}{\partial x}\cdot 2xy + \cos(xy^2)\cdot\frac{\partial 2xy}{\partial x} \\
&= -\sin(xy^2)\cdot y^2\cdot 2xy + \cos(xy^2)\cdot 2y = -2xy^3\sin(xy^2) + 2y\cos(xy^2), \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\cos(xy^2)\cdot 2xy\right) = \frac{\partial\cos(xy^2)}{\partial y}\cdot 2xy + \cos(xy^2)\cdot\frac{\partial 2xy}{\partial y} \\
&= -\sin(xy^2)\cdot 2xy\cdot 2xy + \cos(xy^2)\cdot 2x = -4x^2y^2\sin(xy^2) + 2x\cos(xy^2).
\end{aligned}
$$

Megjegyzés. Mivel az elsőrendű parciális deriváltak folytonosak, ezért a vegyes másodrendű parciális deriváltaknak meg kell egyezniük a Schwarz-tétel szerint ($\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)$). □

(c) $f(x,y,z) = xyz$;

Megoldás. Előbb kiszámoljuk az elsőrendű parciális deriváltakat a direkt deriválás módszerével:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial x}(xyz) = yz, \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial y}(xyz) = xz, \\
\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial z}(xyz) = xy,
\end{aligned}
$$

Rátérünk a másodrendű parciális deriváltak kiszámítására. Mivel az elsőrendű parciális deriváltak folytonosak, ezért a vegyes másodrendű parciális deriváltaknak meg kell egyezniük ($\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y,z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y,z)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}(x,y,z) = \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}(x,y,z)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}(x,y,z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}(x,y,z)$) a Schwarz-tétel szerint.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)\right) = \frac{\partial}{\partial x}(yz) = 0, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)\right) = \frac{\partial}{\partial y}(yz) = z, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)\right) = \frac{\partial}{\partial z}(yz) = y, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)\right) = \frac{\partial}{\partial x}(xz) = z, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)\right) = \frac{\partial}{\partial y}(xz) = 0, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)\right) = \frac{\partial}{\partial z}(xz) = x, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\right) = \frac{\partial}{\partial x}(xy) = y,
\end{aligned}
$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\right) = \frac{\partial}{\partial y}(xy) = x,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\right) = \frac{\partial}{\partial z}(xy) = 0.$$

□

(d) $f(x,y,z) = \sin(xy) + \cos(yz) + zx;$

Megoldás. Előbb kiszámoljuk az elsőrendű parciális deriváltakat a direkt deriválás módszerével:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\sin(xy) + \cos(yz) + zx\right) = \cos(xy) \cdot y + z,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\sin(xy) + \cos(yz) + zx\right) = \cos(xy) \cdot x - \sin(yz) \cdot z,$$
$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\sin(xy) + \cos(yz) + zx\right) = -\sin(yz) \cdot y + x,$$

Rátérünk a másodrendű parciális deriváltak kiszámítására. Mivel az elsőrendű parciális deriváltak folytonosak, ezért a vegyes másodrendű parciális deriváltaknak meg kell egyezniük ($\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y,z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y,z)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,y,z) = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x,y,z)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x,y,z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x,y,z)$) a Schwarz-tétel szerint.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(y\cos(xy) + z\right) = -y^2\sin(xy),$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)\right) = \frac{\partial}{\partial y}(y\cos(xy) + z) = \cos(xy) - xy\sin(xy),$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)\right) = \frac{\partial}{\partial z}(y\cos(xy) + z) = 1,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)\right) = \frac{\partial}{\partial x}(x\cos(xy) - z\sin(yz)) = \cos(xy) - xy\sin(xy),$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)\right) = \frac{\partial}{\partial y}(x\cos(xy) - z\sin(yz)) = -x^2\sin(xy) - z^2\cos(yz),$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)\right) = \frac{\partial}{\partial z}(x\cos(xy) - z\sin(yz)) = -\sin(yz) - zy\cos(yz),$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\right) = \frac{\partial}{\partial x}(-y\sin(yz) + x) = 1,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\right) = \frac{\partial}{\partial y}(-y\sin(yz) + x) = -\sin(yz) - yz\cos(yz),$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\right) = \frac{\partial}{\partial z}(-y\sin(yz) + x) = -y^2\cos(yz).$$

□

(e) $f(x,y) = x^2\sin^2 y;$

Megoldás. Előbb kiszámoljuk az elsőrendű parciális deriváltakat a direkt deriválás módszerével:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\sin^2 y\right) = \sin^2 y\frac{\partial x^2}{\partial x} = 2x\sin^2 y,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2\sin^2 y\right) = x^2\frac{\partial \sin^2 y}{\partial y} = 2x^2\sin y\cos y = x^2\sin(2y).$$

Rátérünk a másodrendű parciális deriváltak kiszámítására:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(2x\sin^2 y\right) = 2\sin^2 y,\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(2x\sin^2 y\right) = 4x\sin y\cos y = 2x\sin(2y),\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(2x^2\sin y\cos y\right) = 4x\sin y\cos y = 2x\sin(2y),\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(2x^2\sin y\cos y\right) = 2x^2\cos^2 y - 2x^2\sin^2 y = 2x^2\cos(2y).
\end{aligned}$$

Megjegyzés. Mivel az elsőrendű parciális deriváltak folytonosak, ezért a vegyes másodrendű parciális deriváltaknak meg kell egyezniük a Schwarz-tétel szerint ($\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)$). □

(f) $f(x,y) = \ln(xy)\cos(x^2-y^2)$, $x,y>0$;

Megoldás. Előbb kiszámoljuk az elsőrendű parciális deriváltakat a direkt deriválás módszerével:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\ln(xy)\cos(x^2-y^2)\right) = \frac{\partial \ln(xy)}{\partial x}\cos(x^2-y^2) + \ln(xy)\frac{\partial \cos(x^2-y^2)}{\partial x}\\
&= \frac{1}{x}\cdot\cos(x^2-y^2) - 2x\ln(xy)\sin(x^2-y^2),\\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\ln(xy)\cos(x^2-y^2)\right) = \frac{\partial \ln(xy)}{\partial y}\cos(x^2-y^2) + \ln(xy)\frac{\partial \cos(x^2-y^2)}{\partial y}\\
&= \frac{1}{y}\cdot\cos(x^2-y^2) + 2y\ln(xy)\sin(x^2-y^2).
\end{aligned}$$

Rátérünk a másodrendű parciális deriváltak kiszámítására:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x}\cdot\cos(x^2+y^2) - 2x\ln(xy)\sin(x^2-y^2)\right)\\
&= -[4+2\ln(xy)]\sin(x^2-y^2) - \left[4x^2\ln(xy) + \frac{1}{x^2}\right]\cos(x^2-y^2),\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x}\cdot\cos(x^2-y^2) - 2x\ln(xy)\sin(x^2-y^2)\right)\\
&= 4xy\ln(xy)\cos(x^2-y^2) + 2\frac{y^2-x^2}{xy}\sin(x^2-y^2),\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = 4xy\ln(xy)\cos(x^2-y^2) + 2\frac{y^2-x^2}{xy}\sin(x^2-y^2),\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{y}\cdot\cos(x^2-y^2) + 2y\ln(xy)\sin(x^2-y^2)\right)\\
&= -\left(4y^2\ln(xy) + \frac{1}{y^2}\right)\cos(x^2-y^2) + (4+2\ln(xy))\sin(x^2-y^2).
\end{aligned}$$

Megjegyzés. Mivel az elsőrendű parciális deriváltak folytonosak, ezért a vegyes másodrendű parciális deriváltaknak meg kell egyezniük a Schwarz-tétel szerint ($\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)$). □

(g) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^4}$;

Megoldás. Kiszámoljuk az elsőrendű parciális derivált függvényeket. Minden $(x, y) \neq (0, 0)$ esetén

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{x^2 + y^4}\right) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^4}},$$

és $(x, y) = (0, 0)$ esetén

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0 + t, 0) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{t^2 + 0^4} - 0}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{|t|}{t},$$

amely határérték nem létezik, mivel $\lim\limits_{t\to 0^+} \frac{|t|}{t} = \lim\limits_{t\to 0^+} \frac{t}{t} = 1$, míg $\lim\limits_{t\to 0^-} \frac{|t|}{t} = \lim\limits_{t\to 0^-} -\frac{t}{t} = -1$. Tehát az x változó szerinti elsőrendű parciális derivált függvény

$$\frac{\partial f}{\partial x} : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^4}}.$$

Hasonlóan, minden $(x, y) \neq (0, 0)$ esetén

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(\sqrt{x^2 + y^4}) = \frac{2y^3}{\sqrt{x^2 + y^4}},$$

míg $(x, y) = (0, 0)$ esetén

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0, 0 + t) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{0^2 + t^4} - 0}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^2 - 0}{t} = \lim_{t\to 0} t = 0.$$

Tehát az y változó szerinti elsőrendű parciális derivált függvény

$$\frac{\partial f}{\partial y} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \begin{cases} \frac{2y^3}{\sqrt{x^2+y^4}}, & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{ha } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Kiszámoljuk a másodrendű parciális derivált függvényeket.
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^4}}\right) \\ &= \frac{\sqrt{x^2 + y^4}\,\frac{\partial}{\partial x}(x) - x\frac{\partial}{\partial x}(\sqrt{x^2 + y^4})}{(\sqrt{x^2 + y^4})^2} \\ &= \frac{\sqrt{x^2 + y^4} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^4}}}{(\sqrt{x^2 + y^4})^2} = \frac{y^4}{(x^2 + y^4)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^4}}\right) = -\frac{2xy^3}{(x^2 + y^4)^{\frac{3}{2}}}.$$

Minden $(x, y) \neq (0, 0)$ esetén

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2y^3}{\sqrt{x^2 + y^4}}\right) = -\frac{2xy^3}{(x^2 + y^4)^{\frac{3}{2}}},$$

illetve $(x,y)=(0,0)$ esetén

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)&=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(0+t,0)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{2\cdot 0^3}{\sqrt{t^2+0^4}}-0}{t}\\&=\lim_{t\to 0}\frac{0-0}{t}=0.\end{aligned}$$

tehát $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=\begin{cases}-\frac{2xy^3}{(x^2+y^4)^{\frac{3}{2}}}, & \text{ha } (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \text{ha } (x,y)=(0,0)\end{cases}.$$

Minden $(x,y)\neq(0,0)$ esetén

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)&=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2y^3}{\sqrt{x^2+y^4}}\right)\\&=\frac{(x^2+y^4)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{\partial}{\partial y}(2y^3)-2y^3\cdot\frac{\partial}{\partial y}((x^2+y^4)^{\frac{1}{2}})}{x^2+y^4}\\&=\frac{(x^2+y^4)^{\frac{1}{2}}\cdot 6y^2-2y^3\cdot\frac{1}{2}\cdot(x^2+y^4)^{-\frac{1}{2}}\cdot 4y^3}{x^2+y^4}\\&=\frac{6x^2y^2+2y^6}{(x^2+y^4)^{\frac{3}{2}}},\end{aligned}$$

míg $(x,y)=(0,0)$ esetén

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)&=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(0,0+t)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{2t^3}{\sqrt{0^2+t^4}}-0}{t}\\&=\lim_{t\to 0}\frac{2t^3}{t^3}=2,\end{aligned}$$

tehát $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=\begin{cases}\frac{6x^2y^2+2y^6}{(x^2+y^4)^{\frac{3}{2}}}, & \text{ha } (x,y)\neq(0,0)\\ 2, & \text{ha } (x,y)=(0,0)\end{cases}.$$

□

(h) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ f(x,y)=\begin{cases}x^2y\ln(x^2), & \text{ha } x\neq 0\\ 0, & \text{ha } x=0\end{cases}.$

Megoldás. Minden $x\neq 0$ és $y\in\mathbb{R}$ esetén

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2y\ln(x^2)\right)=2xy(1+\ln(x^2)),$$

illetve $x=0$ és minden $y\in\mathbb{R}$ esetén

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)=\lim_{t\to 0}\frac{f(0+t,y)-f(0,y)}{t}=\lim_{n\to\infty}\frac{t^2\cdot y\cdot\ln(t^2)-0}{t}=\lim_{t\to 0}ty\ln(t^2)=0.$$

Tehát az x változó szerinti elsőrendű parciális derivált függvény

$$\frac{\partial f}{\partial x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} 2xy(1+\ln(x^2)), & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}.$$

Minden $x \neq 0$ és $y \in \mathbb{R}$ esetén

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 y \ln(x^2)\right) = x^2 \ln(x^2),$$

illetve $x = 0$ és minden $y \in \mathbb{R}$ esetén

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,y) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,y+t) - f(0,y)}{t} = \lim_{n\to\infty} \frac{0-0}{t} = 0.$$

Tehát az y változó szerinti elsőrendű parciális derivált függvény

$$\frac{\partial f}{\partial y} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} x^2\ln(x^2), & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}.$$

Kiszámítjuk a másodrendű parciális derivált függvényeket. Minden $x \neq 0$ és $y \in \mathbb{R}$ esetén

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(2xy(1+\ln(x^2))\right) = 2y(1+\ln(x^2)) + 2xy \cdot \frac{2x}{x^2} = 2y(3+\ln(x^2)),$$

illetve $x = 0$ és $y \in \mathbb{R}$ esetén

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,y) = \lim_{t\to 0} \frac{2ty(1+\ln(t^2)) - 0}{t} = \lim_{t\to 0} 2y(1+\ln(t^2)) = \begin{cases} +\infty, & \text{ha } y < 0 \\ 0, & \text{ha } y = 0 \\ -\infty, & \text{ha } y < 0 \end{cases}.$$

Tehát $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} : \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0 \text{ vagy } y = 0\} \to \mathbb{R}$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \begin{cases} 2y(3+\ln(x^2)), & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Minden $x \neq 0$ és $y \in \mathbb{R}$ esetén

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(2xy(1+\ln(x^2))\right) = 2x(1+\ln(x^2)),$$

illetve $x = 0$ és $y \in \mathbb{R}$ esetén

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,y) = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y+t) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,y)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = 0,$$

tehát $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \begin{cases} 2x(1+\ln(x^2)), & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}.$$

Minden $x \neq 0$ és $y \in \mathbb{R}$ esetén

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\ln(x^2)\right) = 2x(1+\ln(x^2)),$$

illetve $x = 0$ és $y \in \mathbb{R}$ esetén

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, y) = \lim_{t \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(0 + t, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, y)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{t^2 \ln(t^2) - 0}{t} = \lim_{t \to 0} t \ln(t^2) = 0,$$

tehát $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \begin{cases} 2x(1 + \ln(x^2)), & \text{ha } x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}.$$

Minden $x \neq 0$ és $y \in \mathbb{R}$ esetén

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 \ln(x^2)\right) = 0,$$

illetve $x = 0$ és $y \in \mathbb{R}$ esetén

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, y) = \lim_{t \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(0, y + t) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, y)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{0 - 0}{t} = 0,$$

tehát $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0$. $\square$

10. fejezet

Többváltozós függvények helyi szélsőértékei

10.1. Elméleti összefoglaló

10.1.1. Kvadratikus alakok, Sylvester-tétel

Legyen $B = (b_{ij})_{i,j=1}^{n}$ egy szimmetrikus valós mátrix ($b_{ij} = b_{ji} \in \mathbb{R}$, minden $1 \le i, j \le n$ esetén). Ehhez hozzárendelünk egy $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ másodrendű homogén polinomfüggvényt (kvadratikus alakot):

$$Q(h) = Q(h_1, \dots, h_n) = \begin{pmatrix} h_1 & h_2 & \dots & h_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & & & \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} h_i h_j = b_{11} h_1^2 + (b_{12} + b_{21}) h_1 h_2 + b_{22} h_2^2 + \dots + b_{nn} h^n.$$

A B mátrixot a *kvadratikus alak mátrixának* nevezzük.

10.1. Értelmezés
A Q kvadratikus alak (vagy a B mátrix)

(i) *pozitív definit*, ha $Q(h) > 0$, minden $h \neq \vec{0} \in \mathbb{R}^n$ vektor esetén;

(ii) *negatív definit*, ha $Q(h) < 0$, minden $h \neq \vec{0} \in \mathbb{R}^n$ vektor esetén;

(iii) *indefinit*, ha létezik olyan $h \in \mathbb{R}^n$, amelyre $Q(h) > 0$ és létezik olyan $k \in \mathbb{R}^n$, amelyre $Q(k) < 0$.

10.2. Megjegyzés
Létezik olyan kvadratikus alak is, amely se nem pozitív definit, se nem negatív definit, se nem indefinit, például $Q(h_1, h_2) = h_1^2$, mivel $Q(h_1, h_2) \ge 0$, minden $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ esetén és $Q(0, 1) = 0$. ◇

10.1.1.1. Pozitív és negatív definit kvadratikus alakok jellemzési tétele.

Legyen $B = (b_{ij})_{ij=1}^{n}$ a Q kvadratikus alak mátrixa. Tekintjük a B mátrix *főminorjait*

$$\Delta_1 = b_{11}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}, \quad \dots, \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & & & \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

10.3. Tétel (Sylvester)

(i) A Q kvadratikus alak akkor és csak akkor pozitív definit, ha

$$\Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \Delta_3 > 0, \quad \dots, \quad \Delta_n > 0.$$

(ii) A Q kvadratikus alak akkor és csak akkor negatív definit, ha

$$\Delta_1 < 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \Delta_3 < 0, \quad \Delta_4 > 0 \quad \dots \qquad (\Delta_{2k+1} < 0 \text{ és } \Delta_{2k} > 0, \forall k).$$

10.4. Megjegyzés
A Q kvadratikus alak negatív definit pontosan, akkor ha a $-Q$ kvadratikus alak (amelynek mátrixa $-B$) pozitív definit. ◇

10.5. Megjegyzés
A B szimmetrikus valós mátrix sajátértékei valósak, illetve B diagonalizálható ortogonális mátrix segítségével. Ez alapján B pozitív definit pontosan akkor, ha minden sajátértéke pozitív; B negatív definit pontosan akkor, ha minden sajátértéke negatív; B indefinit pontosan akkor, ha van negatív és pozitív sajátértéke is. ◇

10.6. Példa
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ pozitív definit, $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ negatív definit, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ indefinit $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ nem pozitív definit, sem negatív definit, sem indefinit. ◇

10.1.2. Többváltozós függvények helyi szélsőértéke

10.7. Értelmezés
Legyen $f : A \to \mathbb{R}$ egy n-változós függvény, ahol $A \subseteq \mathbb{R}^n$.

(i) A $p \in A$ pont az f függvény *helyi maximumpontja*, ha létezik olyan $\delta > 0$, hogy $f(x) \leq f(p)$ minden $x \in A$ esetén, amelyre $\|x-p\| < \delta$ (azaz a p pont közelébben az f-nek nincs nagyobb értéke, mint $f(p)$).

(ii) A $p \in A$ pont az f függvény *szigorúan helyi maximumpontja*, ha létezik olyan $\delta > 0$, hogy $f(x) < f(p)$, minden $x \neq p \in A$ esetén, amelyre $\|x - p\| < \delta$ (azaz a p pont közelébben az f-nek legnagyobb értéke $f(p)$).

(iii) A $p \in A$ pont az f függvény *helyi minimumpontja*, ha létezik olyan $\delta > 0$, hogy $f(x) \geq f(p)$, minden $x \in A$ esetén, amelyre $\|x-p\| < \delta$ (azaz a p pont közelébben az f-nek nincs kisebb értéke mint $f(p)$).

(iv) A $p \in A$ pont az f függvény *szigorúan helyi minimumpontja*, ha létezik olyan $\delta > 0$, hogy $f(x) > f(p)$, minden $x \neq p \in A$ esetén, amelyre $\|x - p\| < \delta$ (azaz a p pont közelébben az f-nek legkisebb értéke $f(p)$).

A p pont az f függvény *helyi szélsőérték pontja*, ha helyi maximumpont vagy helyi minimumpont vagy szigorúan helyi maximumpont vagy szigorúan helyi minimumpont.

10.1.3. Stacionárius pontok

Legyen $A \subseteq \mathbb{R}^n$ egy nyílt halmaz és $f : A \to \mathbb{R}$ egy n-változós függvény, amelynek léteznek az elsőrendű parciális deriváltjai. A $p \in \mathring{A}$ belső pont az f függvény *stacionárius pontja*, ha

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(p) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(p) = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}(p) = 0,$$

azaz a p pontban az f összes parciális deriváltja eltűnik.

Helyi szélsőérték pontok létezésének *szükséges* feltétele a következő.

10.8. Tétel
Ha $A \subseteq \mathbb{R}^n$ egy nyílt halmaz és $f : A \to \mathbb{R}$ egy n-változós függvény, amelynek léteznek a parciális deriváltjai. Ha p az f függvény helyi szélsőérték pontja, akkor

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(p) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(p) = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}(p) = 0.$$

10.9. Megjegyzés
Létezhetnek olyan stacionárius pontok is, amelyek nem helyi szélsőérték pontok. Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ függvény esetén az $x = 0$ stacionárius pont, de nem helyi szélsőérték pont, mert bár $f'(0) = 0$, ahol $f'(x) = 3x^2$, de $f(x) < 0$, ha $x < 0$, illetve $f(x) > 0$, ha $x > 0$. ◇

10.1.4. Hesse-féle mátrix

Legyen $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Ha az $f : A \to \mathbb{R}$ n-változós függvénynek léteznek a másodrendű parciális deriváltjai, akkor a

$$Hf = \nabla^2 f = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \dots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} \\ \vdots & & & \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} & \dots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

mátrixot az f függvény *Hesse-féle mátrixának* nevezzük. A

$$Hf(p) = \nabla^2 f(p) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(p) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(p) & \dots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(p) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(p) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(p) & \dots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(p) \\ \vdots & & & \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(p) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(p) & \dots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^n}(p) \end{pmatrix}$$

az f függvény Hesse-féle mátrixa a p pontban.

10.10. Megjegyzés
Ha az f függvényre teljesül, hogy a másodrendű parciális deriváltjai folytonosak, akkor a Hf Hesse-féle mátrix szimmetrikus. ◇

10.1.5. Helyi szélsőértékek létezésének elégséges feltétele

10.11. Tétel
Legyen $A \subseteq \mathbb{R}^n$ nyílt halmaz és $f : A \to \mathbb{R}$ kétszer folytonosan deriválható függvény. Ha $p \in A$ az f függvény stacionárius pontja és a $Hf(p)$ Hesse-féle mátrix a p pontban

(i) pozitív definit, akkor p az f függvény szigorúan helyi minimum pontja;

(ii) negatív definit, akkor p az f függvény szigorúan helyi maximum pontja;

(iii) indefinit, akkor a p pont f függvénynek nem helyi szélsőértéke.

10.2. Feladatok

10.2.1. Kvadratikus alakok

10.1. Feladat. Döntsd el, hogy a következő mátrixok pozitív definitek, negatív definitek, indefinitek vagy egyik sem:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$;

(b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$;

(c) $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$;

(d) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 8 \\ -2 & 2 & 3 \\ 8 & 3 & 5 \end{bmatrix}$;

(e) $\begin{bmatrix} 10 & 5 & 9 \\ 5 & 5 & 8 \\ 9 & 8 & 13 \end{bmatrix}$;

(f) $\begin{bmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$;

(g) $\begin{bmatrix} -10 & -4 & 4 \\ -4 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & -9 \end{bmatrix}$.

10.2.2. Többváltozós függvények helyi szélsőértékei

10.2. Feladat. Határozd meg a következő függvények helyi szélsőértékeit:

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$;

(b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = 3xy^2 - x^3 - 15x - 36y + 9$;

(c) $f : (0, 2\pi)^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \sin x \sin y \sin(x+y)$;

(d) $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = xy \ln(x^2 + y^2)$;

(e) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z$;

(f) $f : (0, \pi)^3 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y,z) = \sin x + \sin y + \sin z - \sin(x+y+z)$;

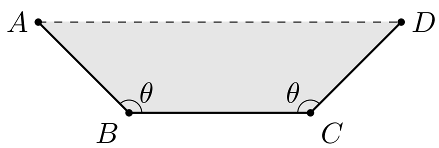
(g) $f : (0, \infty)^3 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y,z) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{z} + \dfrac{z}{16}$;

(h) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = e^{x+3y}(x^2 + y^2)$.

10.3. Feladat. Határozd meg annak a téglatestnek a méreteit, amelynek térfogata v és a felszíne minimális!

10.4. Feladat. Határozd meg annak a téglatest alakú és v térfogatú medencének a méreteit, amelynek elkészítéséhez a legkevesebb anyag kell (felszíne minimális)!

10.5. Feladat. Egy egységnyi szélességű lemezből olyan egyenlőszárú trapéz keresztmetszetű csatornát szeretnénk készíteni, a trapéz két oldala és az egyik alapja alkotja a csatorna két falát, illetve alját (lásd a 10.2. ábrát). Határozd meg annak a trapéznak a méreteit amelynek a legnagyobb áteresztőképessége (a trapéz területe a legnagyobb)!



10.1. ábra. Csatorna keresztmetszete.

10.3. Megoldások

10.3.1. Kvadratikus alakok

10.1. Feladat. Döntsd el, hogy a következő mátrixok pozitív definitek, negatív definitek, indefinitek vagy egyik sem:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$;

Megoldás. Kiszámoljuk a mátrix főminorjait: $\Delta_1 = 1 > 0$ és $\Delta_2 = 1 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = -3 < 0$. Nem teljesülnek a Sylvester-tétel feltételei, ezért a mátrix se nem pozitív definit, se nem negatív definit. Megvizsgáljuk a mátrix indefinit-e. Ehhez felírjuk a mátrixhoz tartozó kvadratikus alakot:

$$\begin{aligned} Q(h_1, h_2) &= \begin{pmatrix} h_1 & h_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = h_1^2 + 4h_1h_2 + h_2^2 = \\ &= [h_1^2 + 2h_1(2h_2) + (2h_2)^2] - 3h_2^2 = (h_1 + 2h_2)^2 - 3h_2^2. \end{aligned}$$

Mivel $Q(1, 0) = 1^2 - 3 \cdot 0^2 = 1 > 0$ és $Q(-2, 1) = 0^2 - 3 \cdot 1^2 = -3 < 0$, ezért indefinit. □

(b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$;

Megoldás. Kiszámoljuk a mátrix főminorjait: $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = -1 < 0$. A Sylvester-tétel alapján nem lehet se pozitív definit, se negatív definit. A mátrixhoz tartozó kvadratikus alak

$$Q(h_1, h_2) = \begin{pmatrix} h_1 & h_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = 2h_1h_2.$$

Mivel $Q(1, 1) = 2 > 0$ és $Q(-1, 1) = -2 < 0$, ezért indefinit. □

(c) $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$;

Megoldás. Kiszámoljuk a mátrix főminorjait: $\Delta_1 = -1 < 0$, $\Delta_2 = -3 < 0$. A Sylvester-tétel alapján se nem pozitív definit, se nem negatív definit. Felírjuk a hozzátartozó kvadratikus alakot:

$$\begin{aligned} Q(h_1, h_2) &= \begin{pmatrix} h_1 & h_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = -h_1^2 + 2h_1h_2 + 2h_2^2 \\ &= -(h_1^2 - 2h_1h_2 + h_2^2) + 3h_2^2 = -(h_1 - h_2)^2 + 3h_2^2. \end{aligned}$$

Mivel $Q(1, 0) = -1^2 + 3 \cdot 0^2 < 0$ és $Q(1, 1) = -0^2 + 3 \cdot 1^2 = 3 > 0$, ezért indefinit. □

(d) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 8 \\ -2 & 2 & 3 \\ 8 & 3 & 5 \end{bmatrix}$;

Megoldás. Kiszámoljuk a mátrix főminorjait: $\Delta_1 = 1 > 0$, $\Delta_2 = -2 < 0$, $\Delta_3 = -243 < 0$. A Sylvester-tétel alapján se nem pozitív definit, se nem negatív definit. Felírjuk a hozzátartozó kvadratikus alakot

$$Q(h_1, h_2, h_3) = \begin{pmatrix} h_1 & h_2 & h_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 8 \\ -2 & 2 & 3 \\ 8 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} =$$

$$
\begin{aligned}
&= h_1^2 - 4h_1h_2 + 16h_1h_3 + 2h_2^2 + 6h_2h_3 + 5h_3^2 \\
&= [h_1^2 - 2h_1(2h_2) + 2h_1(8h_3) + (-2h_2)^2 + (8h_3)^2 + 2(-2h_2)(8h_3)] - 2h_2^2 + 38h_2h_3 - 59h_3^2 \\
&= (h_1 - 2h_2 + 8h_3)^2 - 2\left[h_2^2 - 2h_2\left(\frac{19}{2}h_3\right) + \left(\frac{19}{2}h_3\right)^2\right] + 243h_3^2 \\
&= (h_1 - 2h_2 + 8h_3)^2 - 2\left(h_2 + \frac{19}{2}h_3\right)^2 + \frac{243}{2}h_3^2.
\end{aligned}
$$

Mivel $Q(1,0,0) = 1^2 - 2\cdot 0^2 + \frac{243}{2}\cdot 0^2 = 1 > 0$ és $Q(2,1,0) = 0^2 - 2\cdot 1^2 + \frac{243}{2}\cdot 0^2 = -2 < 0$, ezért indefinit.

10.12. Megjegyzés

Az indefinitség a következőképpen is megmutatható. Már a Δ_1 és Δ_2 előjele alapján nem lehet sem pozitív definit, sem negatív definit, ezért csak a h_1 és h_2 változókat tekintjük a Q-ban (h_3 helyébe 0-t teszünk):

$$Q(h_1, h_2, 0) = h_1^2 - 4h_1h_2 + 2h_2^2 = (h_1^2 - 4h_1h_2 + 4h_2^2) - 2h_2^2 = (h_1 - 2h_2)^2 - 2h_2^2,$$

ahonnan $Q(2,1,0) = -4 < 0$ és $Q(1,0,0,) = 2 > 0$, ezért indefinit. ◇

□

(e) $\begin{bmatrix} 10 & 5 & 9 \\ 5 & 5 & 8 \\ 9 & 8 & 13 \end{bmatrix}$;

Megoldás. Kiszámoljuk a mátrix főminorjait: $\Delta_1 = 10 > 0$, $\Delta_2 = 25 > 0$, $\Delta_3 = 0$. A Sylvester-tétel alapján se nem pozitív definit, se nem negatív definit.

$$
\begin{aligned}
Q(h_1, h_2, h_3) &= \begin{pmatrix} h_1 & h_2 & h_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 5 & 9 \\ 5 & 5 & 8 \\ 9 & 8 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = \\
&= 10h_1^2 + 10h_1h_2 + 18h_1h_3 + 5h_2^2 + 16h_2h_3 + 13h_3^2 = \\
&= 10\left(h_1 + \frac{1}{2}h_2 + \frac{9}{10}h_3\right)^2 + 10\left(\frac{1}{2}h_2 + \frac{7}{10}h_3\right)^2 \geq 0,
\end{aligned}
$$

minden $(h_1, h_2, h_3) \in \mathbb{R}^3$ esetén, de $Q(1,7,-5) = 0$, ezért nem lesz indefinit sem. □

(f) $\begin{bmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$;

Megoldás. Kiszámoljuk a mátrix főminorjait: $\Delta_1 = 5 > 0$, $\Delta_2 = 6 > 0$, $\Delta_3 = 25 > 0$. A Sylvester-tétel alapján pozitív definit. □

(g) $\begin{bmatrix} -10 & -4 & 4 \\ -4 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & -9 \end{bmatrix}$.

Megoldás. Kiszámoljuk a mátrix főminorjait: $\Delta_1 = -10 < 0$, $\Delta_2 = 14 > 0$, $\Delta_3 = -100 < 0$. A Sylvester-tétel alapján negatív definit. □

10.3.2. Többváltozós függvények helyi szélsőértékei

10.2. Feladat. Határozd meg a következő függvények helyi szélsőértékeit:

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$;

Megoldás. Felírjuk a stacionárius pontokra vonatkozó egyenletrendszert:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3y = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 3x = 0 \end{cases}.$$

Ezt a rendszert a következőképpen oldjuk meg. Első egyenletből kifejezhető $y = x^2$, amelyet behelyettesítünk a második egyenletbe:

$$x^4 - x = 0 \iff x(x^3 - 1) = 0 \iff x(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0,$$

amelynek valós megoldásai $x_1 = 0$ és $x_2 = 1$. Ezeket visszahelyettesítve az $y = x^2$ egyenletbe, kapjuk, hogy

$$(x_1, y_1) = (0, 0) \quad \text{és} \quad (x_2, y_2) = (1, 1)$$

az egyenletrendszer megoldásai. Ezek az f függvény stacionárius pontjai.

Hogy eldöntsük, hogy ezek a stacionárius pontok helyi maximumpontok/minimumpontok vagy sem kiszámítjuk az f függvény Hesse-féle mátrixát. A mátrix felírásához ki kell számolni a másodrendű parciális deriváltakat:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -3,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -3, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y.$$

Ezek alapján az f függvény Hesse-féle mátrixa:

$$\nabla^2(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}.$$

(i) A $(0, 0)$ stacionárius pontban a Hesse-féle mátrix értéke:

$$\nabla^2(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Kiszámítjuk ennek a mátrixnak a főminorjait:

$$\Delta_1 = 0, \quad \Delta_2 = 9 < 0.$$

Nem teljesülnek a Sylvester-tétel feltételei, ezért nem pozitív definit, sem negatív definit. Felírjuk a mátrixhoz rendelt kvadratikus alakot:

$$Q(h_1, h_2) = \begin{pmatrix} h_1 & h_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = -6h_1h_2.$$

Mivel $Q(1, 1) = -6 < 0$ és $Q(-1, 1) = 6 > 0$, ezért indefinit. Így a $(0, 0)$ stacionárius pont nem helyi szélsőértékpontja az f függvénynek (nyeregpont).

(ii) Az $(1, 1)$ stacionárius pontban a Hesse-féle mátrix értéke:

$$\nabla^2(0, 0) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Kiszámítjuk a főminorjait:

$$\Delta_1 = 6 > 0, \quad \Delta_2 = 27 > 0,$$

tehát a mátrix pozitív definit a Sylvester-tétel alapján, ezért az $(1, 1)$ pont az f függvény helyi minimumpontja. □

(b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = 3xy^2 - x^3 - 15x - 36y + 9;$

Megoldás. Felírjuk a stacionárius pontokra vonatkozó egyenletrendszert:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 3y^2 - 3x^2 - 15 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 6xy - 36 = 0 \end{cases}.$$

Ezt a rendszert a következőképpen oldjuk meg. A második egyenletből kifejezhetjük az x-et

$$6xy - 36 = 0 \iff xy - 6 = 0 \iff xy = 6 \iff x = \frac{6}{y},$$

és behelyettesítjük az első egyenletbe:

$$3y^2 - 3\left(\frac{6}{y}\right)^2 - 15 = 0 \iff y^2 - \frac{36}{y^2} - 5 = 0 \iff y^4 - 36 - 5y^2 = 0.$$

Ha y^2-et elnevezzük u-nak, akkor az $y^4 - 36 - 5y^2 = 0$ egyenletből egy másodfokú egyenletet kapunk u ismeretlenben:

$$u^2 - 36 - 5u = 0.$$

Ennek az egyenletnek a gyökei

$$u_1 = \frac{5 + \sqrt{169}}{2} = \frac{5 + 13}{2} = 9 \quad \text{és} \quad u_2 = \frac{5 - \sqrt{169}}{2} = \frac{5 - 13}{2} = -4.$$

Az u_1-re azt kapjuk, hogy $y^2 = 9$, ahonnan $y = \pm\sqrt{9} = \pm 3$. Az u_2-re azt kapjuk, hogy $y^2 = -4$, amelynek nincsenek valós megoldásai. Tehát $y = 3$ vagy $y = -3$. Ha $y = 3$, akkor $x = \frac{6}{3} = 2$, míg ha $y = -3$, akkor $x = \frac{6}{-3} = -2$.

Összegezve, két stacionárius pontot kaptunk: $(x_1, y_1) = (2, 3)$ és $(x_2, y_2) = (-2, -3)$.

El kell dönteni, hogy ezek a stacionárius pontok helyi maximumok/minimumok vagy sem. Kiszámítjuk az f függvény Hesse-féle mátrixát. A mátrix felírásához ki kell számolni a másodrendű parciális deriváltakat:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\big(3y^2 - 3x^2 - 15\big) = -6x, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\big(3y^2 - 3x^2 - 15\big) = 6y,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(6xy - 36) = 6y, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(6xy - 36) = 6x.$$

Ezek alapján az f függvény Hesse-féle mátrixa:

$$\nabla^2(x, y) = \begin{pmatrix} -6x & 6y \\ 6y & 6x \end{pmatrix}.$$

(i) A $(2, 3)$ stacionárius pontban a Hesse-féle mátrix értéke:

$$\nabla^2(2, 3) = \begin{pmatrix} -12 & 18 \\ 18 & 12 \end{pmatrix}.$$

Kiszámítjuk ennek a mátrixnak a főminorjait:

$$\Delta_1 = -12 < 0, \quad \Delta_2 = -468 < 0.$$

A Sylvester-tétel alapján a $\nabla^2(2, 3)$ mátrix nem pozitív definit, sem negatív definit. Mivel a főátlón van negatív és pozitív érték, ezért a mátrix indefinit lesz. Valóban, felírva a kvadratikus alakot

$$Q(h_1, h_2) = \begin{pmatrix} h_1 & h_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -12 & 18 \\ 18 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = -12h_1^2 + 36h_1h_2 + 12h_2^2$$

és kiszámítva $Q(1,0) = -12 < 0$ és $Q(0,1) = 12 > 0$ értékeket kapjuk, hogy a mátrix indefinit. Emiatt a $(2,3)$ stacionárius pont az f függvénynek nem helyi szélsőértékpontja (nyeregpont).

(ii) A $(-2,-3)$ stacionárius pontban a Hesse-féle mátrix értéke:

$$\nabla^2(2,3) = \begin{pmatrix} 12 & -18 \\ -18 & -12 \end{pmatrix}.$$

Mivel a főátlón van negatív és pozitív érték, ezért a mátrix indefinit lesz. Valóban, felírva a kvadratikus alakot

$$Q(h_1,h_2) = \begin{pmatrix} h_1 & h_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 & -18 \\ -18 & -12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = 12h_1^2 - 36h_1h_2 - 12h_2^2$$

és kiszámítva $Q(1,0) = 12 > 0$ és $Q(0,1) = -12 < 0$ értékeket kapjuk, hogy a mátrix indefinit. Emiatt a $(2,3)$ stacionárius pont az f függvénynek nem helyiszélsőértékpontja (nyeregpont). $\square$

(c) $f : (0,2\pi)^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \sin x \sin y \sin(x+y);$

Megoldás. Felírjuk a stacionárius pontokra vonatkozó egyenletrendszert:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \cos x \cdot \sin y \cdot \sin(x+y) + \sin x \cdot \sin y \cdot \cos(x+y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \sin x \cdot \cos y \cdot \sin(x+y) + \sin x \cdot \sin y \cdot \cos(x+y) = 0 \end{cases}.$$

Ezt a rendszert a következőképpen oldjuk meg.

$$\begin{cases} \cos x \cdot \sin y \cdot \sin(x+y) + \sin x \cdot \sin y \cdot \cos(x+y) = 0 \\ \sin x \cdot \cos y \cdot \sin(x+y) + \sin x \cdot \sin y \cdot \cos(x+y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \sin y \cdot \sin(2x+y) = 0 \\ \sin x \cdot \sin(x+2y) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \sin y = 0 \text{ vagy } \sin(2x+y) = 0 \\ \sin x = 0 \text{ vagy } \sin(x+2y) = 0 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} \sin y = 0 \\ \sin x = 0 \end{cases} \text{vagy} \begin{cases} \sin y = 0 \\ \sin(x+2y) = 0 \end{cases} \text{vagy} \begin{cases} \sin(2x+y) = 0 \\ \sin x = 0 \end{cases} \text{vagy} \begin{cases} \sin(2x+y) = 0 \\ \sin(x+2y) = 0 \end{cases}$$

Az első egyenletrendszer megoldásai $x, y \in (0,2\pi) \cap \pi\mathbb{Z} = \{\pi\}$, vagyis $(x,y) = (\pi,\pi)$.

A második egyenletrendszer első egyenletéből $y \in (0,2\pi) \cap \pi\mathbb{Z} = \{\pi\}$, vagyis $y = \pi$, amit behelyettesítve a másodikba kapjuk, hogy $\sin(x+2\pi) = 0$, ahonnan $x \in (0,2\pi) \cap \pi\mathbb{Z} = \{\pi\}$, vagyis $x = \pi$. Tehát a megoldása $(x,y) = (\pi,\pi)$.

A harmadik egyenletrendszer a második szimmetrikusa, ezért a megoldása $(x,y) = (\pi,\pi)$.

A negyedik egyenletrendszerből $2x+y, x+2y \in (0,6\pi) \cap \pi\mathbb{Z} = \{k\pi \mid k = 1,\ldots,5\}$, mivel ha $x,y \in (0,2\pi)$, akkor $2x+y, x+2y \in (0,6\pi)$. Innen $x, y \in \{k\frac{\pi}{3} \mid k = 1,\ldots,5\}$, ahonnan kapjuk, hogy a megoldások

$$\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right), \left(\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right), (\pi,\pi), \left(\frac{4\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right), \left(\frac{5\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right),$$
$$\left(\frac{\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right), \left(\frac{4\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right), \left(\frac{2\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right), \left(\frac{5\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right).$$

Kiszámoljuk a Hesse-mátrixot:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\sin y \cdot \sin(2x+y)\right) = 2\sin y \cdot \cos(2x+y),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(\sin y \cdot \sin(2x+y)) = \cos y \cdot \sin(2x+y) + \sin y \cdot \cos(2x+y) = \sin(2x+2y),$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(\sin x \cdot \sin(x+2y)) = \sin(2x+2y),$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(\sin x \cdot \sin(x+2y)) = 2\sin x \cdot \cos(x+2y),$$

ahonnan
$$\nabla^2(x,y) = \begin{pmatrix} 2\sin y \cdot \cos(2x+y) & \sin(2x+2y) \\ \sin(2x+2y) & 2\sin x \cdot \cos(x+2y) \end{pmatrix}.$$

Megvizsgáljuk, hogy a stacionárius pontok helyi szélsőértékek-e.

- Ha $(x,y) = \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$, akkor
$$\nabla^2\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) = \begin{pmatrix} 2\sin\frac{\pi}{3} \cdot \cos\pi & \sin\frac{4\pi}{3} \\ \sin\frac{4\pi}{3} & 2\sin\frac{\pi}{3} \cdot \cos\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$
Kiszámítjuk a főminorokat: $\Delta_1 = -\sqrt{3} < 0$, $\Delta_2 = 3 - \frac{3}{4} > 0$, tehát negatív definit a mátrix, így az $(x,y) = \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ stacionárius pont helyi maximumpont.
- Ha $(x,y) = \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$, akkor
$$\nabla^2\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right) = \begin{pmatrix} 2\sin\frac{2\pi}{3} \cdot \cos 2\pi & \sin\frac{8\pi}{3} \\ \sin\frac{8\pi}{3} & 2\sin\frac{2\pi}{3} \cdot \cos 2\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$
Kiszámítjuk a főminorokat: $\Delta_1 = \sqrt{3} > 0$, $\Delta_2 = 3 - \frac{3}{4} > 0$, tehát pozitív definit a mátrix, így az $(x,y) = \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$ stacionárius pont helyi minimumpont.
- Ha $(x,y) = (\pi,\pi)$, akkor
$$\nabla^2(\pi,\pi) = \begin{pmatrix} 2\sin\pi \cdot \cos 3\pi & \sin 4\pi \\ \sin 4\pi & 2\sin\pi \cdot \cos 3\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Ez a mátrix nem pozitív definit, sem negatív definit, sem indefinit, így ezzel a módszerrel nem dönthető el, hogy $(x,y) = (\pi,\pi)$ helyi szélsőérték-e.

10.13. Megjegyzés

Ha az $2y+x = 3\pi$ egyenes mentén vizsgáljuk az $f(x,y)$ függvény változását az $(x,y) = (\pi,\pi)$ pont környezetében, akkor $x = \pi + 2t$, $y = \pi - t$, ahol $t \in \mathbb{R}$ helyettesítéssel
$$f(x,y) = f(\pi+2t, \pi-t) = \sin(\pi+2t)\sin(\pi-t)\sin(2\pi+t)$$
$$= -\sin(2t)\sin t \sin t = -\sin(2t)(\sin t)^2,$$
ahonnan $f(\pi,\pi) = 0$, míg kicsi $t < 0$ esetén $f(\pi+2t,\pi-t) = -\sin(2t)(\sin t)^2 > 0$ és kicsi $t > 0$ esetén $f(\pi+2t,\pi-t) = -\sin(2t)(\sin t)^2 < 0$. Tehát $(x,y) = (\pi,\pi)$ nem helyi szélsőérték. ◇

- Ha $(x,y) = \left(\frac{4\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right)$, akkor
$$\nabla^2\left(\frac{4\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right) = \begin{pmatrix} 2\sin\frac{4\pi}{3} \cdot \cos 4\pi & \sin\frac{16\pi}{3} \\ \sin\frac{16\pi}{3} & 2\sin\frac{4\pi}{3} \cdot \cos 4\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$
Kiszámítjuk a főminorokat: $\Delta_1 = -\sqrt{3} < 0$, $\Delta_2 = 3 - \frac{3}{4} > 0$, tehát negatív definit a mátrix, így az $(x,y) = \left(\frac{4\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right)$ stacionárius pont helyi maximumpont.

- Ha $(x,y) = \left(\frac{5\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right)$, akkor

$$\nabla^2\left(\frac{5\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right) = \begin{pmatrix} 2\sin\frac{5\pi}{3}\cdot\cos 5\pi & \sin\frac{20\pi}{3} \\ \sin\frac{20\pi}{3} & 2\sin\frac{5\pi}{3}\cdot\cos 5\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Kiszámítjuk a főminorokat: $\Delta_1 = \sqrt{3} > 0$, $\Delta_2 = 3 - \frac{3}{4} > 0$, tehát pozitív definit a mátrix, így az $(x,y) = \left(\frac{5\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right)$ stacionárius pont helyi minimumpont.

- Ha $(x,y) = \left(\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right)$, akkor

$$\nabla^2\left(\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right) = \begin{pmatrix} 2\sin\frac{4\pi}{3}\cdot\cos 2\pi & \sin\frac{10\pi}{3} \\ \sin\frac{10\pi}{3} & 2\sin\frac{\pi}{3}\cdot\cos 3\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Kiszámítjuk a főminorokat: $\Delta_1 = -\sqrt{3} < 0$, $\Delta_2 = 3 - \frac{3}{4} > 0$, tehát negatív definit a mátrix, így az $(x,y) = \left(\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right)$ stacionárius pont helyi maximumpont.

- Ha $(x,y) = \left(\frac{4\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$, akkor

$$\nabla^2\left(\frac{4\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) = \begin{pmatrix} 2\sin\frac{\pi}{3}\cdot\cos 3\pi & \sin\frac{10\pi}{3} \\ \sin\frac{10\pi}{3} & 2\sin\frac{4\pi}{3}\cdot\cos 2\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Kiszámítjuk a főminorokat: $\Delta_1 = -\sqrt{3} < 0$, $\Delta_2 = 3 - \frac{3}{4} > 0$, tehát negatív definit a mátrix, így az $(x,y) = \left(\frac{4\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ stacionárius pont helyi maximumpont.

- Ha $(x,y) = \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right)$, akkor

$$\nabla^2\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right) = \begin{pmatrix} 2\sin\frac{5\pi}{3}\cdot\cos 3\pi & \sin\frac{14\pi}{3} \\ \sin\frac{14\pi}{3} & 2\sin\frac{2\pi}{3}\cdot\cos 4\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Kiszámítjuk a főminorokat: $\Delta_1 = \sqrt{3} > 0$, $\Delta_2 = 3 - \frac{3}{4} > 0$, tehát pozitív definit a mátrix, így az $(x,y) = \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right)$ stacionárius pont helyi minimumpont.

- Ha $(x,y) = \left(\frac{5\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$, akkor

$$\nabla^2\left(\frac{5\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right) = \begin{pmatrix} 2\sin\frac{2\pi}{3}\cdot\cos 4\pi & \sin\frac{14\pi}{3} \\ \sin\frac{14\pi}{3} & 2\sin\frac{5\pi}{3}\cdot\cos 3\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Kiszámítjuk a főminorokat: $\Delta_1 = \sqrt{3} > 0$, $\Delta_2 = 3 - \frac{3}{4} > 0$, tehát pozitív definit a mátrix, így az $(x,y) = \left(\frac{5\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$ stacionárius pont helyi minimumpont.

□

(d) $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = xy\ln(x^2+y^2);$

Megoldás. A stacionárius pontokra vonatkozó egyenletrendszer:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = y\ln(x^2+y^2) + \dfrac{xy}{x^2+y^2}\cdot 2x = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = x\ln(x^2+y^2) + \dfrac{xy}{x^2+y^2}\cdot 2y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y\left(\ln(x^2+y^2) + \dfrac{2x^2}{x^2+y^2}\right) = 0 \\ x\left(\ln(x^2+y^2) + \dfrac{2y^2}{x^2+y^2}\right) = 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \text{ vagy } \begin{cases} y = 0 \\ \ln(x^2+y^2) + \dfrac{2y^2}{x^2+y^2} = 0 \end{cases} \text{ vagy } \begin{cases} \ln(x^2+y^2) + \dfrac{2x^2}{x^2+y^2} = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$\text{vagy}\quad \begin{cases} \ln(x^2+y^2) + \dfrac{2x^2}{x^2+y^2} = 0 \\ \ln(x^2+y^2) + \dfrac{2y^2}{x^2+y^2} = 0 \end{cases}.$$

Az első egyenletrendszer nem teljesülhet, mert az f értelmezése alapján x és y egyszerre nem lehet 0.

A második egyenletrendszerből $y = 0$ és $\ln x^2 = 0$, ahonnan $x = \pm 1$.

A harmadik egyenletrendszer a második szimmetrikusa, így $x = 0$ és $y = \pm 1$.

A negyedik egyenletrendszer két egyenletét kivonva egymásból kapjuk, hogy

$$\frac{2x^2}{x^2+y^2} - \frac{2y^2}{x^2+y^2} = 0 \iff 2\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = 0 \iff x^2 = y^2 \iff y = \pm x.$$

Visszahelyettesítve az első egyenletbe kapjuk, hogy

$$\ln(x^2+x^2) + \frac{2x^2}{x^2+y^2} = 0 \iff \ln(2x^2) + 1 = 0 \iff \ln(2x^2) = -1 \iff$$
$$\iff 2x^2 = e^{-1} \iff x^2 = \frac{1}{2e} \iff x = \pm\frac{1}{\sqrt{2e}}.$$

Tehát $(x,y) = \left(\pm\frac{1}{\sqrt{2e}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)$ (4 pont).

Összefoglalva a stacionárius pontok a következők: $(x,y) = (0,\pm 1)$, $(x,y) = (\pm 1, 0)$, $(x,y) = \left(\pm\frac{1}{\sqrt{2e}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2e}}\right)$ (összesen 8 darab stacionárius pont).

Kiszámoljuk a Hesse-mátrixot.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(y\left(\ln(x^2+y^2) + \frac{2x^2}{x^2+y^2}\right)\right) = y\left(\frac{2x}{x^2+y^2} + \frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2}\right) \\
&= 2xy \cdot \frac{x^2+3y^2}{(x^2+y^2)^2}, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(y\left(\ln(x^2+y^2) + \frac{2x^2}{x^2+y^2}\right)\right) \\
&= \ln(x^2+y^2) + \frac{2x^2}{x^2+y^2} + \frac{2y^2}{x^2+y^2} - \frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} \\
&= \ln(x^2+y^2) + 2 - \frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \ln(x^2+y^2) + 2 - \frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= 2xy \cdot \frac{3x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2},
\end{aligned}$$

ahonnan

$$\nabla^2(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy \cdot \dfrac{x^2+3y^2}{(x^2+y^2)^2} & \ln(x^2+y^2) + 2 - \dfrac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} \\ \ln(x^2+y^2) + 2 - \dfrac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} & 2xy \cdot \dfrac{3x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix}.$$

Megvizsgáljuk egyenként, hogy a stacionárius pontok helyi szélsőértékek-e.

- Ha $(x, y) = (0, \pm 1)$ vagy $(x, y) = (\pm 1, 0)$, akkor

$$\nabla^2(0, \pm 1) = \nabla^2(0, \pm 1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

  A mátrixhoz rendelt kvadratikus alak $Q(h_1, h_2) = 4h_1h_2$, ami indefinit, mert $Q(1, 1) = 4 > 0$ és $Q(-1, 1) = -4 < 0$. Tehát az $(x, y) = (0, \pm 1)$ vagy $(x, y) = (\pm 1, 0)$ pontok nem helyi szélsőértékpontok (nyeregpontok).

- Ha $(x, y) = \left(\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}\right)$ vagy $(x, y) = \left(\frac{-1}{\sqrt{2e}}, \frac{-1}{\sqrt{2e}}\right)$, akkor

$$\nabla^2\left(\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}\right) = \nabla^2\left(\frac{-1}{\sqrt{2e}}, \frac{-1}{\sqrt{2e}}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

  Mivel $\Delta_1 = 2 > 0$, $\Delta_2 = 4 > 0$, ezért a Sylvester-tétel alapján a mátrix pozitív definit és a $\left(\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}\right)$, $\left(\frac{-1}{\sqrt{2e}}, \frac{-1}{\sqrt{2e}}\right)$ pontok helyi minimumpontok.

- Ha $(x, y) = \left(\frac{-1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}\right)$ vagy $(x, y) = \left(\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{-1}{\sqrt{2e}}\right)$, akkor

$$\nabla^2\left(\frac{-1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}\right) = \nabla^2\left(\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{-1}{\sqrt{2e}}\right) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

  Mivel $\Delta_1 = -2 < 0$, $\Delta_2 = 4 > 0$, ezért a Sylvester-tétel alapján a mátrix negatív definit és a $\left(\frac{-1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{-1}{\sqrt{2e}}\right)$ pontok helyi maximumpontok.

□

(e) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z;$

Megoldás. Felírjuk a stacionárius pontokra vonatkozó egyenletrendszert:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 2 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2y + 4 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z} = 2z - 6 = 0 \end{cases},$$

ahonnan $(x, y, z) = (-1, -2, 3)$ az egyetlen stacionárius pont.

Kiszámoljuk a Hesse-mátrixot.

$$\nabla^2(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Behelyettesítjük a stacionárius pontot a Hesse-mátrixba

$$\nabla^2(1, 2, -3) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Kiszámoljuk a főminorokat, $\Delta_1 = 2 > 0$, $\Delta_2 = 4 > 0$, $\Delta_3 = 8 > 0$, ezért a mátrix pozitív definit a Sylvester-tétel alapján. Így az $(x, y, z) = (-1, -2, 3)$ helyi minimumpontja az f függvénynek. □

(f) $f : (0, \pi)^3 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y, z) = \sin x + \sin y + \sin z - \sin(x + y + z);$

Megoldás. Felírjuk a stacionárius pontokra vonatkozó egyenletrendszert:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \cos x - \cos(x+y+z) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \cos y - \cos(x+y+z) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z} = \cos z - \cos(x+y+z) = 0 \end{cases}.$$

Innen látható, hogy $\cos x = \cos y = \cos z = \cos(x+y+z)$. Mivel $x, y, z \in (0, \pi)$ és $\cos : (0, \pi) \to (-1, 1)$ injektív, ezért $x = y = z$. Visszahelyettesítve az első egyenletbe kapjuk, hogy

$$\cos x - \cos 3x = 0 \iff -2 \sin \frac{x-3x}{2} \sin \frac{x+3x}{2} = 0 \iff \sin(-x) \sin 2x = 0.$$

Mivel $x \in (0, \pi)$, ezért $\sin(-x) \neq 0$, így $\sin 2x = 0$ alapján $2x = \pi$, vagyis $x = \frac{\pi}{2}$. Összegezve, az egyetlen stacionárius pont $(x, y, z) = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Kiszámoljuk a Hesse-mátrixot:

$$\nabla^2(x,y,z) = \begin{bmatrix} -\sin x + \sin(x+y+z) & \sin(x+y+z) & \sin(x+y+z) \\ \sin(x+y+z) & -\sin y + \sin(x+y+z) & \sin(x+y+z) \\ \sin(x+y+z) & \sin(x+y+z) & -\sin z + \sin(x+y+z) \end{bmatrix}.$$

Behelyettesítjük a stacionárius pontot a Hesse-mátrixba:

$$\nabla^2\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Kiszámoljuk ezen mátrix főminorjait:

$$\Delta_1 = -2 < 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 3 > 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -4 < 0,$$

tehát a Sylvester-tétel alapján a $\nabla^2\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ mátrix negatív definit. Így a $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ stacionárius pont helyi maximumpont. □

(g) $f : (0, \infty)^3 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y,z) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{z} + \dfrac{z}{16};$

Megoldás. A stacionárius pontokra vonatkozó egyenletrendszer:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} + \frac{1}{z} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{y}{z^2} + \frac{1}{16} = 0 \end{cases}.$$

Ezt az egyenletrendszert a következőképpen oldjuk meg. Az első egyenletből adódik, hogy $y = x^2$, amit behelyettesítve a másodikba kapjuk, hogy $xz = y^2 = x^4$. Mivel $x \neq 0$, ezért $z = x^3$. Végül a harmadik egyenletbe helyettesítve ezeket, kapjuk, hogy $16x^2 = x^6$, ahonnan $x = \pm 2$. Ha $x = -2$, akkor $y = 4$ és $z = -8$. Ha $x = 2$, akkor $y = 4$ és $z = 8$. Így a fenti egyenletrendszer két megoldása a két stacionárius pont:

$$(-2, 4, -8) \quad \text{és} \quad (2, 4, 8).$$

Erről a két stacionárius pontról kell eldönteni, hogy helyi minimumok vagy maximumok vagy egyik sem.

A Hesse-féle mátrix felírásához kiszámítjuk a másodrendű parciális deriváltakat:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{2}{x^3},\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=-\frac{1}{y^2},\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}=0,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-\frac{1}{y^2},\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{2x}{y^3},\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}=-\frac{1}{z^2},$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}=0,\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}=-\frac{1}{z^2},\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=\frac{2y}{z^3},$$

ami alapján a Hesse-féle mátrix:

$$\nabla^2(x,y,z)=\begin{pmatrix} \frac{2}{x^3} & -\frac{1}{y^2} & 0\\ -\frac{1}{y^2} & \frac{2x}{y^3} & -\frac{1}{z^2}\\ 0 & -\frac{1}{z^2} & \frac{2y}{z^3}\end{pmatrix}.$$

- A $(-2,4,-8)$ stacionárius pontra kiszámoljuk a Hesse-féle mátrix értékét:

$$\nabla^2(-2,4,-8)=\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{16} & 0\\ -\frac{1}{16} & -\frac{1}{16} & -\frac{1}{64}\\ 0 & -\frac{1}{64} & -\frac{1}{64}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4^2} & 0\\ -\frac{1}{4^2} & -\frac{1}{4^2} & -\frac{1}{4^3}\\ 0 & -\frac{1}{4^3} & -\frac{1}{4^3}\end{pmatrix}.$$

  Kiszámoljuk a mátrix főminorjait:

$$\Delta_1=-\frac{1}{4}<0,\quad \Delta_2=\frac{3}{4^4}>0,\quad \Delta_3=-\frac{2}{4^7}<0.$$

  Ezek alapján a $\nabla^2(-2,4,-8)$ mátrix negatív definit s ebből kifolyólag a $(-2,4,-8)$ stacionárius pont helyi maximumpontja az f függvénynek.

- Hasonlóan a $(2,4,8)$ stacionárius pontra is kiszámoljuk a Hesse-féle mátrix értékét:

$$\nabla^2(2,4,8)=\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{16} & 0\\ -\frac{1}{16} & \frac{1}{16} & -\frac{1}{64}\\ 0 & -\frac{1}{64} & \frac{1}{64}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4^2} & 0\\ -\frac{1}{4^2} & \frac{1}{4^2} & -\frac{1}{4^3}\\ 0 & -\frac{1}{4^3} & \frac{1}{4^3}\end{pmatrix}.$$

  Kiszámoljuk ennek a mátrixnak a főminorjait:

$$\Delta_1=\frac{1}{4}>0,\quad \Delta_2=\frac{3}{4^4}>0,\quad \Delta_3=\frac{2}{4^7}>0.$$

  Tehát a $\nabla^2(2,4,8)$ mátrix pozitív definit és ebből kifolyólag a $(2,4,8)$ stacionárius pont az f függvény helyi minimumpontja.

□

(h) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=e^{x+3y}(x^2+y^2)$.

Megoldás. Kiszámoljuk az elsőrendű parciális deriváltakat:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{x+3y}(x^2+y^2)\right) = e^{x+3y}(x^2+2x+y^2),$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{x+3y}(x^2+y^2)\right) = e^{x+3y}(3x^2+3y^2+2y).$$

Kiszámoljuk a stacionárius pontokat a következő egyenletrendszerből:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} e^{x+3y}(x^2+2x+y^2) = 0 \\ e^{x+3y}(3x^2+3y^2+2y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2+2x+y^2 = 0 \\ 3x^2+3y^2+2y = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x^2+2x+y^2 = 0 \\ -6x+2y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 10x^2+2x = 0 \\ y = 3x \end{cases},$$

ahonnan kapjuk az $(x_1,y_1) = (0,0)$ és $(x_2,y_2) = (-\frac{1}{5},-\frac{3}{5})$ stacionárius pontokat.

A Hesse-féle mátrix felírásához kiszámítjuk a másodrendű parciális deriváltakat:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{x+3y}(x^2+2x+y^2)\right) = e^{x+3y}(x^2+y^2+4x+2),$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{x+3y}(x^2+2x+y^2)\right) = e^{x+3y}(3x^2+3y^2+6x+2y),$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = e^{x+3y}(3x^2+3y^2+6x+2y),$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{x+3y}(3x^2+3y^2+2y)\right) = e^{x+3y}(9x^2+9y^2+12y+2).$$

Ez alapján felírhatjuk a Hesse-féle mátrixot:

$$\nabla^2(x,y,z) = \begin{pmatrix} e^{x+3y}(x^2+y^2+4x+2) & e^{x+3y}(3x^2+3y^2+6x+2y) \\ e^{x+3y}(3x^2+3y^2+6x+2y) & e^{x+3y}(9x^2+9y^2+12y+2) \end{pmatrix}.$$

- A $(0,0)$ stacionárius pontra a Hesse-féle mátrix értéke:

  $$\nabla^2(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

  Kiszámoljuk a mátrix főminorjait:

  $$\Delta_1 = 2 > 0, \quad \Delta_2 = 4 > 0.$$

  A Sylvester-tétel alapján a $\nabla^2(0,0)$ mátrix pozitív definit, és ezért a $(0,0)$ stacionárius pont az f függvény helyi minimumpontja.

- A $(-\frac{1}{5},-\frac{3}{5})$ stacionárius pontra a Hesse-féle mátrix értéke:

  $$\nabla^2\left(-\frac{1}{5},-\frac{3}{5}\right) = \begin{pmatrix} \frac{8}{5}\cdot e^{-2} & -\frac{6}{5}\cdot e^{-2} \\ -\frac{6}{5}\cdot e^{-2} & -\frac{8}{5}\cdot e^{-2} \end{pmatrix}.$$

  Kiszámoljuk a mátrix főminorjait:

  $$\Delta_1 = \frac{8}{5}\cdot e^{-2} > 0, \quad \Delta_2 = -4\cdot e^{-4} < 0.$$

  A Sylvester-tétel alapján a $\nabla^2(-\frac{1}{3},-\frac{3}{5})$ mátrix nem pozitív definit, sem negatív definit. A Hesse-féle mátrixhoz rendelt kvadratikus alak:

  $$Q(h_1,h_2) = \begin{pmatrix} h_1 & h_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{8}{5}\cdot e^{-2} & -\frac{6}{5}\cdot e^{-2} \\ -\frac{6}{5}\cdot e^{-2} & -\frac{8}{5}\cdot e^{-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \frac{2}{5}e^{-2}(4h_1^2 - 6h_1h_2 - 4h_2^2).$$

  Ez az kvadratikus indefinit, mivel $Q(1,0) = \frac{8}{5}\cdot e^{-2} > 0$ és $Q(0,1) = -\frac{8}{5}\cdot e^{-2} < 0$. Tehát a $(-\frac{1}{5},-\frac{3}{5})$ pont nem helyi szélsőérték (nyeregpont).

□

10.3. Feladat. Határozd meg annak a téglatestnek a méreteit, amelynek térfogata v és a felszíne minimális!

Megoldás. Legyen a téglatest hosszúsága x, szélessége y, magassága z, ahol $x, y, x > 0$. Ekkor a térfogata $V(x, y, z) = xyz = v$, illetve a felszíne $F(x, y, z) = 2xy + 2yz + 2zx$. Kifejezzük a magasságot a térfogatra vonatkozó relációból $z = \frac{v}{xy}$, majd behelyettesítjük a felszín képletébe, így kapva az

$$f(x, y) = F\left(x, y, \frac{v}{xy}\right) = 2xy + \frac{2v}{x} + \frac{2v}{y}, \quad x, y > 0$$

függvényt, amelynek meg kell határozni a minimumpontját.

Kiszámoljuk az elsőrendű parciális deriváltakat:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(2xy + \frac{2v}{x} + \frac{2v}{y}\right) = 2y - \frac{2v}{x^2},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(2xy + \frac{2v}{x} + \frac{2v}{y}\right) = 2x - \frac{2v}{y^2}.$$

Felírjuk a stacionárius pontokra vonatkozó egyenletrendszert:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2y - \frac{2v}{x^2} = 0 \\ 2x - \frac{2v}{y^2} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = \frac{v}{x^2} \\ x = \frac{x^4}{v} \end{cases},$$

ahonnan kapjuk az $(x, y) = (\sqrt[3]{v}, \sqrt[3]{v})$ stacionárius pontot.

Megvizsgáljuk, hogy ez a stacionárius pont (helyi) minimumpont-e. Kiszámoljuk a másodrendű parciális deriváltakat:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(2y - \frac{2v}{x^2}\right) = \frac{4v}{x^3},$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(2y - \frac{2v}{x^2}\right) = 2,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(2x - \frac{2v}{y^2}\right) = 2,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(2x - \frac{2v}{y^2}\right) = \frac{4v}{y^3}.$$

Felírjuk a Hesse-féle mátrixot

$$\nabla^2(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{4v}{x^3} & 2 \\ 2 & \frac{4v}{y^3} \end{pmatrix},$$

amelybe behelyettesítjük a stacionárius pontot

$$\nabla^2(\sqrt[3]{v}, \sqrt[3]{v}) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Kiszámítjuk ezen mátrix főminorjait $\Delta_1 = 4 > 0$, $\Delta_2 = 12 > 0$, így a Sylvester-tétel alapján a $\nabla^2(\sqrt[3]{v}, \sqrt[3]{v})$ mátrix pozitív definit, és ezért a $(\sqrt[3]{v}, \sqrt[3]{v})$ stacionárius pont helyi minimumpontja az f függvénynek. Mivel ez az egyetlen stacionárius, ezért egyben globális minimumpont is. Ezt a következőképpen is beláthatjuk: minden $x, y > 0$ esetén

$$f(\sqrt[3]{v}, \sqrt[3]{v}) = 6\sqrt[3]{v^2} = 3\sqrt[3]{(2xy) \cdot \left(\frac{2v}{x}\right) \cdot \left(\frac{2v}{y}\right)} \leq 2xy + \frac{2v}{x} + \frac{2v}{y}$$

a számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenség alapján.

Tehát az adott v térfogatú és minimális felszínű téglatest egy $\sqrt[3]{v}$ élhosszúságú kocka. □

10.4. Feladat. Határozd meg annak a téglatest alakú és v térfogatú medencének a méreteit, amelynek elkészítéséhez a legkevesebb anyag kell (felszíne minimális)!

Megoldás. Legyen a medence alapja egy x hosszúságú és y szélességű téglalap, illetve legyen a medence magassága z, ahol $x, y, z > 0$. Ekkor a medence térfogata $V(x, y, z) = xyz = v$, illetve a felszíne $F(x, y, z) = xy + 2yz + 2zx$. Kifejezzük a magasságot a térfogatra vonatkozó relációból $z = \frac{v}{xy}$, majd behelyettesítjük a felszín képletébe, így kapva az

$$f(x, y) = F\left(x, y, \frac{v}{xy}\right) = xy + \frac{2v}{x} + \frac{2v}{y}, \quad x, y > 0$$

függvényt, amelynek meg kell határozni a minimumpontját.

Kiszámoljuk az elsőrendű parciális deriváltakat:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(xy + \frac{2v}{x} + \frac{2v}{y}\right) = y - \frac{2v}{x^2},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(xy + \frac{2v}{x} + \frac{2v}{y}\right) = x - \frac{2v}{y^2}.$$

Felírjuk a stacionárius pontokra vonatkozó egyenletrendszert:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y - \frac{2v}{x^2} = 0 \\ x - \frac{2v}{y^2} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = \frac{2v}{x^2} \\ x = \frac{x^4}{2v} \end{cases},$$

ahonnan kapjuk az $(x, y) = (\sqrt[3]{2v}, \sqrt[3]{2v})$ stacionárius pontot.

Megvizsgáljuk, hogy ez a stacionárius pont (helyi) minimumpont-e. Kiszámoljuk a másodrendű parciális deriváltakat:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(y - \frac{2v}{x^2}\right) = \frac{4v}{x^3},$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(y - \frac{2v}{x^2}\right) = 1,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x - \frac{2v}{y^2}\right) = 1,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(x - \frac{2v}{y^2}\right) = \frac{4v}{y^3}.$$

Felírjuk a Hesse-féle mátrixot

$$\nabla^2(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{4v}{x^3} & 1 \\ 1 & \frac{4v}{y^3} \end{pmatrix},$$

amelybe behelyettesítjük a stacionárius pontot

$$\nabla^2(\sqrt[3]{v}, \sqrt[3]{v}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

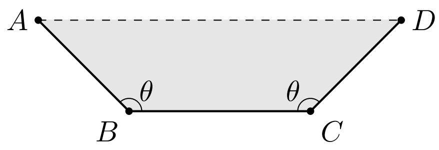
Ennek a mátrixnak kiszámítjuk a főminorjait $\Delta_1 = 2 > 0$, $\Delta_2 = 3 > 0$, így a Sylvester-tétel alapján a $\nabla^2(\sqrt[3]{v}, \sqrt[3]{v})$ mátrix pozitív definit, és ezért a $(\sqrt[3]{v}, \sqrt[3]{v})$ stacionárius pont helyi minimumpontja az f függvénynek. Mivel ez az egyetlen stacionárius, ezért egyben globális minimumpont is. Ezt a következőképpen is beláthatjuk: minden $x, y > 0$ esetén

$$f(\sqrt[3]{2v}, \sqrt[3]{2v}) = 3\sqrt[3]{4v^2} = 3\sqrt[3]{(xy) \cdot \left(\frac{2v}{x}\right) \cdot \left(\frac{2v}{y}\right)} \leq xy + \frac{2v}{x} + \frac{2v}{y}$$

a számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenség alapján.

Tehát az adott v térfogatú és minimális felszínű medence alapja $\sqrt[3]{2v}$ oldalhosszúságú négyzet, illetve a magasága $z = \frac{v}{\sqrt[3]{4v^2}} = \frac{\sqrt[3]{2v}}{2}$. □

10.5. Feladat. Egy egységnyi szélességű lemezből olyan egyenlőszárú trapéz keresztmetszetű csatornát szeretnénk készíteni, a trapéz két oldala és az egyik alapja alkotja a csatorna két falát, illetve alját (lásd a 10.2. ábrát). Határozd meg annak a trapéznak a méreteit amelynek a legnagyobb áteresztőképessége (a trapéz területe a legnagyobb)!



10.2. ábra. Csatorna keresztmetszete.

Megoldás. Legyen a csatorna keresztmetszete az $ABCD$ trapéz melynek szárai AB és CD, illetve egyik alapja BC. A csatornát az AB, BC és CD alkotját. Legyen az AB és CD szárak hossza x, a BC alaphossza y, a DA alap hossza pedig z, végül az ABC szög mértéke θ.

A lemez szélessége egységnyi, ezért $2x + y = 1$, ahonnan $y = 1 - 2x$. A trapéz magassága $h = x \cdot \cos(\theta - \frac{\pi}{2}) = x \cdot \sin\theta$. A trapéz (nagy)alapjának hossza $z = y + 2x\cos\theta = 1 - 2x - 2x\cos\theta$. Ekkor a trapéz területe

$$\begin{aligned} T(x,\theta) &= \frac{y+z}{2} \cdot h = \frac{(1-2x) + (1-2x-2x\cos\theta)}{2} \cdot x\sin\theta \\ &= x\sin\theta - 2x^2\sin\theta - x^2\sin\theta\cos\theta \\ &= x\sin\theta - 2x^2\sin\theta - \frac{x^2}{2}\sin 2\theta, \end{aligned}$$

ahol $x \in (0,1)$ és $\theta \in (0,\pi)$. Tehát a

$$T : (0,1) \times (0,\pi) \to \mathbb{R}, \quad T(x,\theta) = x\sin\theta - 2x^2\sin\theta - \frac{x^2}{2}\sin 2\theta$$

függvényt kell maximalizálni.

Kiszámoljuk a T függvény elsőrendű parciális deriváltjait:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(x\sin\theta - 2x^2\sin\theta - \frac{x^2}{2}\sin 2\theta\right) = \sin\theta - 4x\sin\theta - x\sin 2\theta, \\ \frac{\partial T}{\partial \theta} &= \frac{\partial}{\partial \theta}\left(x\sin\theta - 2x^2\sin\theta - \frac{x^2}{2}\sin 2\theta\right) = x\cos\theta - 2x^2\cos\theta - x^2\cos 2\theta. \end{aligned}$$

Kiszámoljuk a stacionárius pontokat. Megjegyezzük, hogy $x \neq 0$ és $\sin\theta \neq 0$, így

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial T}{\partial \theta} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \sin\theta - 4x\sin\theta - x\sin 2\theta = 0 \\ x\cos\theta - 2x^2\cos\theta - x^2\cos 2\theta = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \sin\theta(1 - 4x - 2x\cos\theta) = 0 \\ x[\cos\theta - 2x\cos\theta - x(2\cos^2\theta - 1)] = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 1 - 4x - 2x\cos\theta = 0 \\ \cos\theta - 2x\cos\theta - 2x\cos^2\theta + x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 1 - 4x - 2x\cos\theta = 0 \\ 2x\cos\theta + x = 0 \end{cases},$$

ahol a második egyenletből kivontuk az első egyenlet $\cos x$-szeresét. Az utolsó egyenletből kapjuk, hogy $\cos\theta = -\frac{1}{2}$, vagyis $\theta = \frac{2\pi}{3}$ (azaz 120°), illetve $x = \frac{1}{3}$.

Megvizsgáljuk, hogy az $(x,\theta) = (\frac{1}{3}, \frac{2\pi}{3})$ (helyi) szélsőérték-e. Kiszámoljuk a T függvény másodrendű parciális deriváltjait:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(\sin\theta - 4x\sin\theta - x\sin 2\theta) = -4\sin\theta - \sin 2\theta,$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 T}{\partial\theta\partial x} &= \frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta - 4x\sin\theta - x\sin 2\theta) = \cos\theta - 4x\cos\theta - 2x\cos 2\theta,\\
\frac{\partial^2 T}{\partial x\partial\theta} &= \frac{\partial^2 T}{\partial\theta\partial x} = \cos\theta - 4x\cos\theta - 2x\cos 2\theta,\\
\frac{\partial^2 T}{\partial\theta^2} &= \frac{\partial}{\partial\theta}\left(x\cos\theta - 2x^2\cos\theta - x^2\cos 2\theta\right) = -x\sin\theta + 2x^2\sin\theta + 2x^2\sin 2\theta.
\end{aligned}$$

Ezek után felírhatjuk a Hesse-féle mátrixot

$$\nabla^2(x,\theta) = \begin{pmatrix} -4\sin\theta - \sin 2\theta & (1-4x)\cos\theta - 2x\cos 2\theta \\ (1-4x)\cos\theta - 2x\cos 2\theta & -x\sin\theta + 2x^2\sin\theta + 2x^2\sin 2\theta \end{pmatrix},$$

amelybe behelyettesítjük a stacionárius pontot

$$\nabla^2\left(\frac{1}{3},\frac{2\pi}{3}\right) = \begin{pmatrix} -4\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} & \left(1-\frac{4}{3}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) \\ \left(1-\frac{4}{3}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) & \left(-\frac{1}{2}+\frac{2}{9}\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2}{9}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{6} \end{pmatrix}.$$

Kiszámolva ennek a mátrixnak a főminorjait $\Delta_1 = -\frac{3\sqrt{3}}{2} < 0$ és $\Delta_2 = \frac{1}{2} > 0$ a Sylvester-tétel alapján kapjuk, hogy a $\nabla^2\left(\frac{1}{3},\frac{2\pi}{3}\right)$ mátrix negatív definit, így a $\left(\frac{1}{3},\frac{2\pi}{3}\right)$ stacionárius pont helyi maximumpont. Mivel ez az egyetlen stacionárius pont, ezért globális maximumpont is.

Tehát a maximális egyenlőszárú trapéz alakú csatorna oldalai és alja $\frac{1}{3}$ egységnyi és az oldalait aljától számítva 120° szögben kifele hajtjuk. □

11. fejezet

Határozatlan integrálok

11.1. Elméleti összefoglaló

Legyen $I \subseteq \mathbb{R}$ egy intervallum. Az $F : I \to \mathbb{R}$ az $f : I \to \mathbb{R}$ függvény *primitívje*, ha F deriválható az I intervallumon és $F'(x) = f(x)$, minden $x \in I$. Mivel I intervallum, ezért az f függvény minden primitívje $F + C$ alakú függvény, ahol $C \in \mathbb{R}$ egy konstans. A f függvény primitívjeinek halmazát $\int f(x)\mathrm{d}x$ szimbólummal jelöljük és az f függvény határozotlan integráljának nevezzük.

11.1. Tulajdonság
Ha az $f, g : I \to \mathbb{R}$ függvényeknek létezik primitívje, akkor minden $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ konstansok esetén az $(\alpha f + \beta g) : I \to \mathbb{R}$ függvénynek is létezik primitívje, továbbá

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\mathrm{d}x = \alpha \int f(x)\mathrm{d}x + \beta \int g(x)\mathrm{d}x.$$

11.1.1. Integrálási képletek

(a) $\displaystyle\int x^n \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, ha $n \neq -1$;

(b) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C$;

(c) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$, ha $a \neq 0$;

(d) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$, ha $a \neq 0$;

(e) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln|x + \sqrt{x^2 + a}| + C$, $a \neq 0$;

(f) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C = -\arccos \frac{x}{a} + C$, ha $a > 0$;

(g) $\displaystyle\int e^x \mathrm{d}x = e^x + C$;

(h) $\displaystyle\int a^x \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C$, ha $a > 0$;

(i) $\displaystyle\int \sin x \mathrm{d}x = -\cos x + C$;

(j) $\displaystyle\int \cos x \mathrm{d}x = \sin x + C$;

(k) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$

(l) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;$

(m) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C;$

(n) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C;$

(o) $\displaystyle\int \operatorname{sh} x\mathrm{d}x = \operatorname{ch} x + C$ és $\displaystyle\int \operatorname{ch} x\mathrm{d}x = \operatorname{sh} x + C$, ahol $\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ (hiperbólikus szinusz) és $\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ (hiperbólikus koszinusz).

11.1.2. Integrálási módszerek

11.1.2.1. A parciális integrálás módszere

Ha $f, g : I \to \mathbb{R}$ deriválható függvények és létezik az $f'g$ függvénynek primitívje, akkor az fg' függvénynek is létezik primitívje és

$$\int f(x)g'(x)\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\mathrm{d}x. \tag{11.1}$$

11.2. Megjegyzés
Ha az f és g függvények folytonosan deriválhatók, akkor az $f'g$ és fg' függvénynek létezik primitívje és fennáll köztük a (11.1) összefüggés. ◇

11.1.2.2. Racionális függvények integrálása, parciális törtekre bontás módszere

Legyen $\frac{P(x)}{Q(x)}$, ahol P és Q olyan polinomok. Polinomok maradékos osztásával kapjuk, hogy

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = A(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

ahol A és R polinomok, ahol R foka kisebb, mint Q foka. Ha

$$Q(x) = (x-r_1)^{n_1}(x-r_2)^{n_2}\dots(x-r_k)^{n_k}(x^2+p_1x+q_1)^{m_1}\dots(x^2+p_\ell x+q_\ell)^{m_\ell}, \tag{11.2}$$

ahol $r_1, \dots, r_{n_k} \in \mathbb{R}$ páronként különböző valós gyökei a $Q(x)$ polinomfüggvénynek, illetve $x^2 + p_1x + q_1, \dots, x^2 + p_\ell x + q_\ell$ polinomoknak nincs valós gyöke (vagyis $q_j > p_j^2/4$, minden $i = 1, \dots, \ell$ esetén), akkor az $\frac{R(x)}{Q(x)}$ felbontható a következő alakban:

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{A_1(x)}{(x-r_1)^{n_1}} + \dots + \frac{A_{n_k}(x)}{(x-r_k)^{n_k}} + + \frac{B_1(x)}{(x^2+p_1x+q_1)^{m_1}} + \dots + \frac{B_{m_\ell}(x)}{(x^2+p_\ell x+q_\ell)^{m_\ell}},$$

ahol az A_1 polinom foka kiseb, mint n_1, …, az A_{n_k} polinom foka kisebb, mint n_k, a B_1 polinom foka kisebb, mint $2m_1$, …, a B_{m_ℓ} polinom foka kisebb, mint $2m_\ell$.

- Polinomok maradékos osztásával az $\frac{A(x)}{(x-r)^n}$ alakú törtek, ahol $A(x)$ polinom foka kisebb, mint n, felírhatóak

$$\frac{A(x)}{(x-r)^{n_i}} = \frac{a_1}{x-r} + \frac{a_2}{(x-r)^2} + \dots + \frac{a_n}{(x-r)^n}$$

alakba, ahol $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, és

$$\begin{aligned}\int \frac{A(x)}{(x-r)^n}\mathrm{d}x &= \int \frac{a_1}{x-r}\mathrm{d}x + \int \frac{a_2}{(x-r)^2}\mathrm{d}x + \dots + \int \frac{a_n\mathrm{d}x}{(x-r)^n}\\ &= a_1 \ln|x-r| + a_2\frac{(x-r)^{-1}}{(-1)} + \dots + a_n\frac{(x-r)^{-n+1}}{-n+1} + C.\end{aligned}$$

- Hasonlóan $\frac{B(x)}{(x^2+px+q)^m}$ alakú törtek, ahol a x^2+px+q polinomnak nincs valós gyöke és a $B(x)$ polinom foka kisebb, mint $2m$, felírhatók

$$\frac{B(x)}{(x^2+px+q)^m} = \frac{b_1x+c_1}{x^2+px+q} + \frac{b_2x+c_2}{(x^2+px+q)^2} + \dots + \frac{b_mx+c_m}{(x^2+px+q)^m}$$

alakba. Minden $\frac{bx+c}{(x^2+px+q)^j}$, $j=1,\dots,m$, tag esetén

$$\frac{bx+c}{(x^2+px+q)^j} = \frac{b}{2}\cdot\frac{(x^2+px+q)'}{(x^2+px+q)^j} + (c-bp)\cdot\frac{1}{(x^2+px+q)^j}.$$

A $j=1$ esetben

$$\begin{aligned}\int \frac{bx+c}{x^2+px+q}\mathrm{d}x &= \int \frac{bx+c}{(x+p)^2+(q-\frac{p^2}{4})}\mathrm{d}x\\ &= \frac{b}{2}\cdot\ln(x^2+px+q) + \frac{2c-bp}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C.\end{aligned} \tag{11.3}$$

A $j>1$ esetben adott $b,c\in\mathbb{R}$ esetén keressük az $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ értékeket úgy, hogy

$$\int \frac{bx+c}{(x^2+px+q)^j}\mathrm{d}x = \frac{\alpha x+\beta}{(x^2+px+q)^{j-1}} + \int \frac{\gamma\mathrm{d}x}{(x^2+px+q)^{j-1}}.$$

Deriválással adódik a következő egyenletrendszer az α,β,γ ismeretlenekre:

$$\begin{cases} 0 = (3-2j)\alpha+\gamma\\ b = (2-j)p\alpha + (2-2j)\beta + p\gamma\\ c = q\alpha + (1-j)p\beta + q\gamma, \end{cases}$$

ahonnan

$$\alpha = \frac{2c-pb}{(j-1)(4q-p^2)} \quad \beta = \frac{pc-2qb}{(j-1)(4q-p^2)} \quad \gamma = \frac{(2j-3)(2c-pb)}{(j-1)(4q-p^2)}.$$

Tehát $j>1$ szerint a következő rekurzió írható fel:

$$\begin{aligned}\int \frac{bx+c}{(x^2+px+q)^j}\mathrm{d}x &= \frac{1}{(j-1)(4q-p^2)}\cdot\frac{(2c-pb)x+(pc-2qb)}{(x^2+px+q)^{j-1}}\\ &\quad + \frac{(2j-3)(2c-pb)}{(j-1)(4q-p^2)}\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+px+q)^{j-1}},\end{aligned} \tag{11.4}$$

$$\int \frac{1}{x^2+px+q}\mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C.$$

Tehát az $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\mathrm{d}x$ integrálok, ahol a nevező (11.2) alakú, kiszámolhatók rekurzívan.

11.1.3. Helyettesítés határozatlan integrálokban

Ha I és J intervallumok, $u\colon I \to \mathbb{R}$ és $f\colon J \to \mathbb{R}$ pedig olyan függvények, amelyekre $\operatorname{Im}(u) \subseteq J$, az u függvény deriválható és az f függvénynek létezik $F : J \to \mathbb{R}$ primitívje (vagyis $F' = f$), akkor

$$\int f(u(x))u'(x)\mathrm{d}x = F(u(x)) + C.$$

A gyakorlatban az $u(x) = t$, $u'(x)\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$ helyettesítéssel az integrál átírható, mint

$$\int f(u(x))u'(x)\mathrm{d}x = \int f(t)\mathrm{d}t = F(t) + C = F(u(x)) + C.$$

11.1.3.1. A $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$ helyettesítés

Ekkor

$$\mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t, \qquad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Olyan integrálok esetén szoktuk használni, amelyek $\sin x$ és $\cos x$ függvények egy racionális kifejezése szerepel.

11.3. Példa

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x+\cos x} = \int \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \ln|t+1| + C = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1\right| + C.$$

◇

11.1.3.2. Az $x = \operatorname{tg} t$ helyettesítés

Az $x = \operatorname{tg} t$ helyettesítés esetén

$$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t}, \qquad \cos t = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \qquad \sin t = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

11.4. Példa

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}} &= \int \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}}\frac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t} = \int \frac{1}{\sqrt{1+\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}}}\frac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t} = \int \frac{\cos t\mathrm{d}t}{\cos^2 t} = \int \frac{\cos t\mathrm{d}t}{1-\sin^2 t} \\
&\overset{(u=\sin t)}{=} \int \frac{\mathrm{d}u}{1-u^2} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{1-u} + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{1+u} = \frac{1}{2}(\ln|1+u| - \ln|1-u|) + C \\
&= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin t}{1-\sin t}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{1-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}\right| + C \\
&= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}-x}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{(\sqrt{1+x^2}+x)^2}{(\sqrt{1+x^2})^2-x^2}\right| + C = \ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right| + C
\end{aligned}$$

◇

11.1.3.3. Hiperbolikus helyettesítés

A $\operatorname{sh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\operatorname{ch} x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ és $\operatorname{sh} x = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$ hiperbolikus függvényekre teljesül a $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$ összefüggés, minden $x \in \mathbb{R}$ esetén, továbbá

$$(\operatorname{sh} t)^2 = \operatorname{sh}^2 t = \frac{\operatorname{ch}(2t)-1}{2} \qquad \text{és} \qquad (\operatorname{ch} t)^2 = \operatorname{ch}^2 t = \frac{\operatorname{ch}(2t)+1}{2}.$$

Az $x = \operatorname{ch} t$ helyettesítés esetén

$$\mathrm{d}x = \operatorname{sh} t\mathrm{d}t, \qquad e^t = x + \sqrt{x^2-1}, \qquad \text{és} \qquad e^{-t} = x - \sqrt{x^2-1}.$$

11.5. Példa

$$\int \sqrt{x^2-1}\mathrm{d}x = \int \sqrt{1-\operatorname{ch}^2 t}\operatorname{sh} t\mathrm{d}t = \int \operatorname{sh}^2 t\mathrm{d}t = \int \left(\frac{1}{2}\operatorname{ch}(2t) - 1\right)\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{4}\operatorname{sh}(2t) - \frac{t}{2} + C = \frac{x\sqrt{x^2-1} - \ln|x+\sqrt{x^2-1}|}{2} + C.$$

◇

Az $x = \operatorname{sh} t$ helyettesítés esetén

$$\mathrm{d}x = \operatorname{ch} t\mathrm{d}t, \qquad e^t = x + \sqrt{x^2+1} \qquad \text{és} \qquad e^{-t} = -x + \sqrt{x^2+1}.$$

11.6. Példa

$$\int \sqrt{x^2+1}\mathrm{d}x = \int \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 t}\operatorname{ch} t\mathrm{d}t = \int \operatorname{ch}^2 t\mathrm{d}t = \int \left(\frac{1}{2}\operatorname{ch}(2t) + 1\right)\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{4}\operatorname{sh}(2t) + \frac{t}{2} + C = \frac{x\sqrt{x^2+1} + \ln|x+\sqrt{x^2+1}|}{2} + C.$$

◇

11.1.4. Irracionális függvények integrálása

11.1.4.1. Első típus

Ha a következő típusú integrált szeretnénk kiszámolni:

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_1}{q_1}}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_r}{q_r}}\right)\mathrm{d}x,$$

ahol R egy racionális függvény (tehát két polinom aránya) és p_i, q_i egész számok, akkor az

$$\frac{ax+b}{cx+d} = z^n$$

helyettesítés visszavezeti a problémát egy racionális függvény integrálására, ahol n a legkisebb közös többszöröse a $q_1, q_2, \ldots q_r$ nevezőknek.

11.1.4.2. Második típus (Csebisev helyettesítés)

Ha az

$$\int x^m(ax^n+b)^p\,\mathrm{d}x$$

integrált szeretnénk kiszámolni, ahol $m, n, p \in \mathbb{Q}$, akkor a következő helyettesítésekkel vissza tudjuk vezetni a feladatot egy racionális függvény integrálására:

- Ha $p \in \mathbb{Z}$, akkor $x = z^r$, ahol r közös többszöröse az m és n nevezőjének.
- Ha $\dfrac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$, akkor $ax^n + b = z^s$, ahol s a p nevezője.
- Ha $\dfrac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$, akkor $a + bx^{-n} = z^s$, ahol s a p nevezője.

11.1.4.3. Harmadik típus

- Ha az
$$\int \frac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\mathrm{d}x$$
integrált szeretnénk kiszámolni (ahol P egy n-edfokú polinom), akkor azt előbb parciális integrálással átírjuk
$$\int \frac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\mathrm{d}x = Q(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$
alakra (Q egy $(n-1)$-edfokú polinom).

- Ha az
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-\alpha)^n\sqrt{ax^2+bx+c}}$$
integrált szeretnénk kiszámolni, akkor azt az $\dfrac{1}{x-\alpha} = t$ helyettesítéssel visszavezetjük az előző típusra.

11.1.5. Algebrai integrálok (Euler helyettesítés)

Ha az
$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,\mathrm{d}x$$
integrált szeretnénk kiszámolni, akkor az alábbi helyettesítések visszavezetik a feladatot egy racionális függvény integrálására:

- Ha az $ax^2+bx+c=0$ egyenlet gyökei az x_1, x_2 valós számok, akkor $\sqrt{ax^2+bx+c} = z(x-x_1)$;
- Ha $a > 0$, akkor $\sqrt{ax^2+bx+c} = x\sqrt{a} + z$;
- Ha $c > 0$, akkor $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{c} + zx$.

11.2. Feladatok

11.1. Feladat. Számítsd ki a következő racionális integrálokat:

(a) $\displaystyle\int \frac{x+3}{x^3-x}\mathrm{d}x;$

(b) $\displaystyle\int \frac{x^2-3x+2}{x^3+2x^2+x}\mathrm{d}x;$

(c) $\displaystyle\int \frac{x+1}{2x^2+3x+2}\mathrm{d}x;$

(d) $\displaystyle\int \frac{4x^2+1}{(2x^2+3x+2)^2}\mathrm{d}x;$

(e) $\displaystyle\int \frac{x+1}{(x^2+4x+5)^3}\mathrm{d}x;$

(f) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^3-1)^2};$

(g) $\displaystyle\int \frac{x^3}{3x^2-4x+1}\mathrm{d}x;$

(h) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+x+1)^2}.$

11.2. Feladat. Számítsd ki a következő integrálokat a parciális integrálás módszerével:

(a) $\displaystyle\int e^x \cos x \,\mathrm{d}x;$

(b) $\displaystyle\int \ln x \mathrm{d}x;$

(c) $\displaystyle\int x e^{ax}\mathrm{d}x;$

(d) $\displaystyle\int x^2 e^{2x}\mathrm{d}x;$

(e) $\displaystyle\int x a^x \mathrm{d}x,\ (a>0)\ ;$

(f) $\displaystyle\int \frac{x e^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x;$

(g) $\displaystyle\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x;$

(h) $\displaystyle\int \frac{\ln^3 x}{x^2}\mathrm{d}x;$

(i) $\displaystyle\int e^{ax}\cos bx \mathrm{d}x;$

(j) $\displaystyle\int x^2 e^x \sin x \mathrm{d}x;$

(k) $\displaystyle\int x e^x \sin^2 x \mathrm{d}x;$

(l) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}e^{\arcsin x}\mathrm{d}x.$

11.3. Feladat. Számítsd ki a következő integrálokat trigonometrikus helyettesítések segítségével:

(a) $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x;$

(b) $\displaystyle\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}};$

(c) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\,\mathrm{d}x;$

(d) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1-x^2}};$

(e) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2};$

(f) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^3};$

(g) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}\mathrm{d}x;$

(h) $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}}\mathrm{d}x;$

(i) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1-x)}};$

(j) $\displaystyle\int \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x.$

11.4. Feladat. Számítsd ki a következő integrálokat hiperbolikus helyettesítések segítségével:

(a) $\displaystyle\int \sqrt{x^2+4}\mathrm{d}x;$

(b) $\displaystyle\int \sqrt{x^2-9}\mathrm{d}x;$

(c) $\displaystyle\int \sqrt{x^2-2x+2}\mathrm{d}x$;

(d) $\displaystyle\int \sqrt{x^2+2x}\mathrm{d}x$;

(e) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(\sqrt{1-x^2})^3}$;

(f) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(\sqrt{1+x^2})^3}$;

11.5. Feladat. Számítsd ki a következő integrálokat:

(a) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x+\cos x}$;

(b) $\displaystyle\int \frac{\sin x\mathrm{d}x}{1+\sin^2 x}$;

(c) $\displaystyle\int \sin 2x\cos 3x\,\mathrm{d}x$;

(d) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(\sin x+\cos x)^2}$;

(e) $\displaystyle\int \cos 2x\cos 4x\cos 5x\mathrm{d}x$;

(f) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x+2\sin x+3}$;

(g) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x(2+\cos x-\sin x)}$.

11.6. Feladat. Számítsd ki a következő irracionális integrálokat:

(a) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$;

(b) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[4]{2x-1}}$;

(c) $\displaystyle\int x^2\sqrt{x^2+4}\mathrm{d}x$;

(d) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^5\sqrt{x^2-1}}$;

(e) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$;

(f) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{1+x^4}}$;

(g) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x$;

(h) $\displaystyle\int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\mathrm{d}x$;

(i) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt[3]{(x^3+2)^5}}$.

11.7. Feladat. Számítsd ki a következő algebrai integrálokat:

(a) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)\sqrt{x^2-3x+2}}$;

(b) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}$;

(c) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$;

(d) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{-x^2+5x-6}}$;

(e) $\displaystyle\int \frac{x\mathrm{d}x}{(x-1)\sqrt{1+x-x^2}}$;

(f) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{1-x^2}+1-x^2}$;

(g) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

11.3. Megoldások

11.1. Feladat. Számítsd ki a következő racionális integrálokat:

(a) $\displaystyle\int \frac{x+3}{x^3-x}\mathrm{d}x$;

Megoldás. Az $\displaystyle\int \frac{x+3}{x(x-1)(x+1)}\mathrm{d}x$ integrál kiszámításához az integrál alatt szereplő törtet egyszerűbb törtekre bontjuk szét. Ezt a módszert parciális törtekre bontásnak nevezik. A törtet a következő alakba írjuk fel

$$\frac{x+3}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1},$$

ahol $A, B, C \in \mathbb{R}$. Fontos, hogy a bal oldali törtben a számláló foka kisebb mint a nevező foka, mert ezért választható A, B, C való számoknak, különben ők is polinomok lennének. A jobboldalon közös nevezőre hozunk

$$\frac{x+3}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1} = \frac{A(x^2-1)+Bx(x+1)+Cx(x-1)}{x(x-1)(x+1)},$$

és azonosítjuk a számlálókat a két oldalon

$$\begin{aligned} x+3 &= A(x^2-1)+Bx(x+1)+Cx(x-1) \quad \Leftrightarrow \\ x+3 &= -A+(B+C)x+(A+B-C)x^2. \end{aligned}$$

A két oldalon álló polinomok egyenlőek pontosan, akkor ha a megfelelő együtthatók egyenlőek:

$$\begin{cases} 3 = -A \\ 1 = B+C \\ 0 = A+B-C \end{cases} \quad \Rightarrow \quad A=-3,\ B=2,\ C=-1.$$

Tehát $\displaystyle\frac{x+3}{x(x-1)(x+1)} = \frac{-3}{x} + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{x+1}$, ezért

$$\begin{aligned} \int \frac{x+3}{x(x-1)(x+3)}\mathrm{d}x &= \int \left(\frac{-3}{x} + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x = \\ &= -3\ln|x| + 2\ln|x-1| + \ln|x+1| + C. \end{aligned}$$

□

(b) $\displaystyle\int \frac{x^2-3x+2}{x^3+2x^2+x}\mathrm{d}x$;

Megoldás. A nevező a következőképpen bontható szorzatra: $x^3+2x^2+x = x(x^2+2x+1) = x(x+1)^2$. Emiatt az intregrál alatt található tört a következőképpen bontható parciális törtekre:

$$\frac{x^2-3x+2}{x^3+2x^2+x} = \frac{x^2-3x+2}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{(x+1)^2} = \frac{A(x+1)^2+Bx^2+Cx}{x(x+1)^2},$$

ahonnan azonosítva a számlálókat kapjuk, hogy

$$x^2-3x+2 = A(x+1)^2+Bx^2+Cx \;\Leftrightarrow\; x^2-3x+2 = A+(2A+C)x+(A+B)x^2.$$

Azonosítva a megfelelő együtthatókat kapjuk a következő egyenletrendszert:

$$\begin{cases} 2 = A \\ -3 = 2A + C \\ 1 = A + B \end{cases} \quad \Rightarrow \quad A = 2,\ B = -1,\ C = -7.$$

Tehát

$$\int \frac{x^2-3x+2}{x^3+2x^2+x}\mathrm{d}x = \int \frac{x^2-3x+2}{x(x+1)^2}\mathrm{d}x = \int \left(\frac{2}{x} + \frac{-x-7}{(x+1)^2}\right)\mathrm{d}x = \int \left(\frac{2}{x} + \frac{-x-1-6}{(x+1)^2}\right)\mathrm{d}x =$$
$$= \int \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{6}{(x+1)^2}\right)\mathrm{d}x = 2\ln|x| - \ln|x+1| + \frac{6}{x+1} + C.$$

□

(c) $\displaystyle\int \frac{x+1}{2x^2+3x+2}\mathrm{d}x;$

Első megoldás. A $2x^2+3x+2$ polinomnak nincs valós gyöke, mivel az $2x^2+3x+2=0$ egyenlet diszkriminánsa $\Delta = -7 < 0$. A tört számlálójában megjelenítjük az nevező $(2x^2+3x+2)' = 4x+3$ deriváltját:

$$\int \frac{x+1}{2x^2+3x+2}\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{1}{4}(4x+3)+\frac{1}{4}}{2x^2+3x+2} = \frac{1}{4}\int \frac{(2x^2+3x+2)'}{2x^2+3x+2}\mathrm{d}x + \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}x}{2x^2+3x+2}$$
$$= \frac{1}{4}\ln(2x^2+3x+2) + \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}x}{2x^2+3x+2}.$$

Az $\int \frac{\mathrm{d}x}{2x^2+3x+2}$ integrál kiszámításához felírjuk, hogy

$$2x^2+3x+2 = 2\left[x^2 + 2\cdot\frac{3}{4}x + \left(\frac{3}{4}\right)^2\right] + 2 - 2\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2 = 2\left[\left(x+\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{7}{16}\right]$$
$$= 2\left[\left(x+\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2\right].$$

Ez alapján

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{2x^2+3x+2} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{\left(x+\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2} \overset{(u=x+\frac{3}{2})}{=} \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2}$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt{7}}{4}}\cdot \operatorname{arctg}\frac{u}{\frac{\sqrt{7}}{4}} + C = \frac{2}{\sqrt{7}}\cdot\operatorname{arctg}\frac{4u}{\sqrt{7}} + C$$
$$= \frac{2}{\sqrt{7}}\cdot\operatorname{arctg}\frac{4(x+\frac{3}{4})}{\sqrt{7}} + C$$
$$= \frac{2}{\sqrt{7}}\cdot\operatorname{arctg}\frac{4x+3}{\sqrt{7}} + C$$

Összegezve,

$$\int \frac{x+1}{2x^2+3x+2}\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\ln(2x^2+3x+2) + \frac{1}{4}\frac{2}{\sqrt{7}}\cdot\operatorname{arctg}\frac{4x+3}{\sqrt{7}} + C$$
$$= \frac{1}{4}\ln(2x^2+3x+2) + \frac{1}{2\sqrt{7}}\cdot\operatorname{arctg}\frac{4x+3}{\sqrt{7}} + C.$$

□

Második megoldás. A (11.3) képlet alapján ($b = c = 1$, $p = \frac{3}{2}$, $q = 1$)

$$\begin{aligned}
\int \frac{x+1}{2x^2+3x+2}\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int \frac{x+1}{x^2+\frac{3}{2}x+1}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\ln(x^2+\frac{3}{2}x+1) + \frac{2\cdot 1 - 1\cdot \frac{3}{2}}{\sqrt{4\cdot 1 - (\frac{3}{2})^2}}\cdot \operatorname{arctg}\frac{2x+\frac{3}{2}}{\sqrt{4\cdot 1-(\frac{3}{2})^2}}\right] + C \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\ln(x^2+\frac{3}{2}x+1) + \frac{2\cdot 1 - 1\cdot \frac{3}{2}}{\sqrt{4\cdot 1 - (\frac{3}{2})^2}}\cdot \operatorname{arctg}\frac{2x+\frac{3}{2}}{\sqrt{4\cdot 1-(\frac{3}{2})^2}}\right] + C \\
&= \frac{1}{4}\ln\left(\frac{1}{2}\cdot(2x^2+3x+2)\right) + \frac{1}{2\sqrt{7}}\cdot\operatorname{arctg}\frac{4x+3}{\sqrt{7}} + C \\
&= \frac{1}{4}\ln(2x^2+3x+2) + \frac{1}{2\sqrt{7}}\cdot\operatorname{arctg}\frac{4x+3}{\sqrt{7}} - \frac{\ln 2}{4} + C \\
&= \frac{1}{4}\ln(2x^2+3x+2) + \frac{1}{2\sqrt{7}}\cdot\operatorname{arctg}\frac{4x+3}{\sqrt{7}} + C'.
\end{aligned}$$

□

(d) $\displaystyle\int \frac{4x^2+1}{(2x^2+3x+2)^2}\mathrm{d}x$;

Megoldás. Az előző alpont alapján a $2x^2+3x+2$ polinomnak nincs valós gyöke. Polinomok maradékos osztásával kapjuk, hogy $4x^2+1 = 2(2x^2+3x+2)+(-6x-3)$, ahonnan

$$\int \frac{4x^2+1}{(2x^2+3x+2)^2}\mathrm{d}x = \int \frac{2}{2x^2+3x+2}\mathrm{d}x - 3\int \frac{2x+1}{(2x^2+3x+2)^2}\mathrm{d}x.$$

A (11.3) képlet alapján ($b = 0$, $c = 1$) kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\int \frac{2}{2x^2+3x+2}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x^2+\frac{3}{2}x+1}\mathrm{d}x &= \frac{2\cdot 1}{\sqrt{4\cdot 1-(\frac{3}{2})^2}}\cdot\operatorname{arctg}\frac{2x+\frac{3}{2}}{\sqrt{4\cdot 1-(\frac{3}{2})^2}} + C \\
&= \frac{4}{\sqrt{7}}\cdot\operatorname{arctg}\frac{4x+3}{\sqrt{7}} + C.
\end{aligned}$$

A (11.4) képlet alapján ($j = 2$, $b = 2$, $c = 1$, $p = \frac{3}{2}$, $q = 1$) kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\int \frac{2x+1}{(2x^2+3x+2)^2}\mathrm{d}x &= \frac{1}{4}\int \frac{2x+1}{(x^2+\frac{3}{2}x+1)^2}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{(2-1)\cdot(4\cdot 1-(\frac{3}{2})^2)}\cdot\frac{(2\cdot 1-\frac{3}{2}\cdot 2)x+(\frac{3}{2}\cdot 1-2\cdot 1\cdot 2)}{x^2+\frac{3}{2}x+1}\right. \\
&\qquad \left. + \frac{2\cdot 2-3}{2-1}\cdot\frac{2\cdot 1-\frac{3}{2}\cdot 2}{4\cdot 1-(\frac{3}{2})^2}\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+\frac{3}{2}x+1}\right] \\
&= \frac{-2x-5}{7(2x^2+3x+2)} - \frac{4}{7\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{4x+3}{\sqrt{7}} + C.
\end{aligned}$$

Összegezve,

$$\int \frac{4x^2+1}{(2x^2+3x+2)^2}\mathrm{d}x = \int \frac{2}{2x^2+3x+2}\mathrm{d}x - 3\int \frac{2x+1}{(2x^2+3x+2)^2}\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{4}{\sqrt{7}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{4x+3}{\sqrt{7}} - 3\left[\frac{-2x-5}{7(2x^2+3x+2)} - \frac{4}{7\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{4x+3}{\sqrt{7}}\right] \\
&= \frac{6x+15}{7(2x^2+3x+2)} + \frac{40}{7\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{4x+3}{\sqrt{7}} + C.
\end{aligned}$$

□

(e) $\displaystyle\int \frac{x+1}{(x^2+4x+5)^3}\mathrm{d}x;$

Megoldás. Az x^2+4x+5 polinomnak nincs valós gyöke, mert a $x^2+4x+5=0$ egyenlet diszkriminánsa $\Delta=-4<0$. A (11.4) képlet alapján ($j=3$, $b=c=1$, $p=4$, $q=5$)

$$\begin{aligned}
\int \frac{x+1}{(x^2+4x+5)^3}\mathrm{d}x &= \frac{1}{(3-1)(4\cdot 5-4^2)} \cdot \frac{(2\cdot 1-4\cdot 1)x+(4\cdot 1-2\cdot 5\cdot 1)}{(x^2+4x+5)^2} \\
&\quad + \frac{2\cdot 3-3}{3-1} \cdot \frac{2\cdot 1-4\cdot 1}{(4\cdot 5-4^2)} \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+4x+5)^2} \\
&= -\frac{1}{4} \cdot \frac{x+3}{(x^2+4x+5)^2} - \frac{3}{4} \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+4x+5)^2}.
\end{aligned}$$

Az $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+4x+5)^2}$ integrálra újra alkalmazva a (11.4) képletet kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+4x+5)^2} &= \frac{1}{(2-1)\cdot(4\cdot 5-4^2)} \cdot \frac{2x+4}{x^2+4x+5} + \frac{(2\cdot 2-3)\cdot 2}{(2-1)(4\cdot 5-4^2)} \cdot \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+5} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{x+2}{x^2+4x+5} + \frac{1}{2} \cdot \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+4x+5)^2} \\
&\overset{(11.4)}{=} \frac{1}{2} \cdot \frac{x+2}{x^2+4x+5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{4\cdot 5-4^2}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{2x+4}{\sqrt{4\cdot 5-4^2}} + C \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{x+2}{x^2+4x+5} + \frac{1}{2} \cdot \operatorname{arctg}(x+2) + C
\end{aligned}$$

Összegezve

$$\begin{aligned}
\int \frac{x+1}{(x^2+4x+5)^3}\mathrm{d}x &= -\frac{1}{4} \cdot \frac{x+3}{(x^2+4x+5)^2} - \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{x+2}{x^2+4x+5} + \frac{1}{2} \cdot \operatorname{arctg}(x+2)\right) + C \\
&= -\frac{1}{4} \cdot \frac{x+3}{(x^2+4x+5)^2} - \frac{3}{8} \cdot \frac{x+2}{x^2+4x+5} - \frac{3}{8} \cdot \operatorname{arctg}(x+2) + C
\end{aligned}$$

□

(f) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^3-1)^2};$

Megoldás. A nevező felírható $(x^3-1)^2=(x-1)^2(x^2+x+1)^2$ alakba, ahol az x^2+x+1 polinomnak nincs valós gyöke. Ez alapján a következő alakban keressük a parciális törtekre bontást:

$$\frac{1}{(x^3-1)^2} = \frac{a_1}{x-1} + \frac{a_2}{(x-1)^2} + \frac{b_1x+c_1}{x^2+x+1} + \frac{b_2x+c_2}{(x^2+x+1)^2},$$

ahol $a_1, a_2, b_1, c_1, b_2, c_2 \in \mathbb{R}$. A jobb oldalon lévő törteket közös nevezőre hozzuk és összehasonlítjuk a kapott számlálót a bal oldal számlálójával:

$$\frac{1}{(x^3-1)^2} = \frac{a_1(x-1)(x^2+x+1)^2 + a_2(x^2+x+1)^2}{(x^3-1)^2} +$$

$$+\frac{(b_1x+c_1)(x-1)^2(x^2+x+1)+(b_2x+c_2)(x-1)^2}{(x^3-1)^2}$$

$$\iff \frac{1}{(x^3-1)^2}=\frac{x^5(a_2+b_1)+x^4(a_1+a_2-b_1+c_1)+x^3(2a_1+a_2+b_2-c_1)}{(x^3-1)^2}+$$
$$+\frac{x^2(3a_1-a_2-b_1-2b_2+c_2)}{(x^3-1)^2}+$$
$$+\frac{x(2a_1-a_2+b_1+b_2-c_1-2c_2)+(a_1-a_2+c_1+c_2)}{(x^3-1)^2},$$

ahonnan számlálókban lévő polinomok együtthatóit összehasonlítval kapjuk a következő lineáris egyenletrendszert

$$\begin{cases} 0=a_1+b_1 \\ 0=a_1+a_2-b_1+c_1 \\ 0=a_1+2a_2+b_2-c_1 \\ 0=-a_1+3a_2-b_1-2b_2+c_2 \\ 0=-a_1+2a_2+b_1+b_2-c_1-2c_2 \\ 1=-a_1+a_2+c_1+c_2 \end{cases},$$

amelynek megoldása $a_1=-\frac{2}{9}$, $a_2=\frac{1}{9}$, $b_1=\frac{2}{9}$, $c_1=\frac{1}{3}$, $b_2=\frac{1}{3}$, $c_2=\frac{1}{3}$. Tehát

$$\frac{1}{(x^3-1)^2}=-\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{x-1}+\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{9}\cdot\frac{2x+3}{x^2+x+1}+\frac{1}{3}\cdot\frac{x+1}{(x^2+x+1)^2}.$$

Innen

$$\int\left[-\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{x-1}+\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{(x-1)^2}\right]\mathrm{d}x=-\frac{2}{9}\cdot\ln|x-1|-\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{x-1}+C.$$

A (11.3) képlet alapján ($b=2$, $c=3$, $p=q=1$)

$$\int\frac{1}{9}\cdot\frac{2x+3}{x^2+x+1}\mathrm{d}x=\frac{1}{9}\left[\frac{2}{2}\cdot\ln(x^2+x+1)+\frac{2\cdot3-2\cdot1}{\sqrt{4\cdot1-1^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{4\cdot1-1^2}}\right]+C$$
$$=\frac{1}{9}\cdot\ln(x^2+x+1)+\frac{4}{9\sqrt{3}}\cdot\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

A (11.4) képlet alapján ($b=2$, $c=p=q=1$)

$$\int\frac{1}{3}\cdot\frac{x+1}{(x^2+x+1)^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(2-1)(4\cdot1-1^2)}\cdot\frac{(2\cdot1-1\cdot1)x+(1\cdot1-2\cdot1\cdot1)}{x^2+x+1}$$
$$+\frac{1}{3}\cdot\frac{(2\cdot2-3)(2\cdot1-1\cdot1)}{(2-1)(4\cdot1-1^2)}\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+1}$$
$$=\frac{1}{9}\cdot\frac{x-1}{x^2+x+1}+\frac{1}{9}\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+1}$$
$$\overset{(11.3)}{=}\frac{1}{9}\cdot\frac{x-1}{x^2+x+1}+\frac{2}{9\sqrt{3}}\cdot\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$$

Összegezve

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^3-1)^2}=-\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{x-1}+\frac{1}{9}\cdot\ln(x^2+x+1)+\frac{4}{9\sqrt{3}}\cdot\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$$
$$+\frac{1}{9}\cdot\frac{x-1}{x^2+x+1}+\frac{2}{9\sqrt{3}}\cdot\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$$
$$=\frac{1}{9}\cdot\ln\frac{x^2+x+1}{(x-1)^2}-\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{x-1}+\frac{1}{9}\cdot\frac{x-1}{x^2+x+1}+\frac{2}{3\sqrt{3}}\cdot\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

□

(g) $\displaystyle\int \frac{x^3}{3x^2-4x+1}\mathrm{d}x;$

Megoldás. Polinomok maradékos osztásával kapjuk, hogy $x^3 = \left(\frac{1}{3}x + \frac{4}{9}\right)(3x^2-4x+1) + \left(\frac{13}{9}x - \frac{4}{9}\right)$, ahonnan

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3}{3x^2-4x+1}\mathrm{d}x &= \int \left(\frac{1}{3}x + \frac{4}{9}\right)\mathrm{d}x + \frac{1}{9}\cdot\int \frac{13x-4}{3x^2-4x+1}\mathrm{d}x \\ &= \frac{x^2}{6} + \frac{4x}{9} + \frac{1}{9}\cdot\int \frac{13x-4}{3x^2-4x+1}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

A $3x^2-4x+1$ polinom valós gyökei $x_1 = \frac{1}{3}$ és $x_2 = 1$, így $3x^2-4x+1 = 3(x-\frac{1}{3})(x-1)$. Ez alapján következőképpen bontunk parciális törtekre:

$$\begin{aligned}\frac{13x-4}{3x^2-4x+1} &= \frac{a}{3(x-\frac{1}{3})} + \frac{b}{x-1} \\ \iff \frac{13x-4}{3x^2-4x+1} &= \frac{a}{3x-1} + \frac{b}{x-1}\end{aligned}$$

ahol $a, b \in \mathbb{R}$. Közös nevezőre hozunk és összehasonlítjuk a számlálókat:

$$\begin{aligned}\frac{13x-4}{3x^2-4x+1} &= \frac{a(x-1)+b(3x-1)}{(3x-1)(x-1)} \\ \iff \frac{13x-2}{3x^2-4x+1} &= \frac{a(x-1)+b(3x-1)}{3x^2-4x+1},\end{aligned}$$

ahonnan $13x-4 = a(x-1)+b(3x-1)$. Innen előbb $x = 1$, majd $x = \frac{1}{3}$ helyettesítéssel kapjuk, hogy $a = -\frac{1}{2}$ és $b = \frac{9}{2}$. Tehát

$$\frac{13x-4}{3x^2-4x+1} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3x-1} + \frac{9}{2}\cdot\frac{1}{x-1},$$

ahonnan

$$\begin{aligned}\int \frac{13x-2}{3x^2-4x+1}\mathrm{d}x &= -\frac{1}{2}\cdot\int\frac{\mathrm{d}x}{3x-1} + \frac{9}{2}\cdot\int\frac{\mathrm{d}x}{x-1} \\ &= -\frac{1}{6}\cdot\ln|3x-1| + \frac{9}{2}\cdot\ln|x-1| + C.\end{aligned}$$

Összegezve

$$\int \frac{x^3}{3x^2-4x+1}\mathrm{d}x = \frac{x^2}{6} + \frac{4x}{9} - \frac{1}{54}\cdot\ln|3x-1| + \frac{1}{2}\cdot\ln|x-1| + C.$$

□

(h) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+x+1)^2}.$

Megoldás. A nevezőben lévő x^2+x+1 másodfokú polinomot vizsgáljuk, hogy felbontható-e két elsőfokú polinom szorzatára vagy sem, azaz, hogy a másodfokú polinomnak van-e valós gyöke vagy sem. Ezt teljes négyzet kialakításával vizsgáljuk:

$$x^2+x+1 = x^2 + 2\cdot x\cdot\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.$$

Mivel a teljes négyzeten kívüli szám pozitív, ezért nem alkalmazható az $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ rövidített számítási képlet és így nem bontható fel két elsőfokú polinom szorzatára. Megjegyezzük, hogy ha felbontható lett volna akkor a parciális törtekre bontással a törtet szét lehetett volna bontani egyszerűbb törtekre és azokat integrálni.

Mivel nem bontható fel az x^2+x+1 polinom elsőfokúak szorzatára, ezért visszavezetjük az integrált egy $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}v}{(v^2+1)^2}$ alakú integrálra, amit kiszámítottunk a 11.3(e) feladatban. Ezt a következőképpen tesszük.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+x+1)^2} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]^2} \overset{(1)}{=} \int \frac{\mathrm{d}u}{\left[u^2+\frac{3}{4}\right]^2} \overset{(2)}{=} \int \frac{\mathrm{d}u}{\left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \left[\frac{4}{3}\cdot u^2+1\right]^2} =$$

$$\overset{(3)}{=} \int \frac{\mathrm{d}u}{\left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \left[\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\cdot u\right)^2+1\right]^2} \overset{(4)}{=} \int \frac{\sqrt{\frac{4}{3}}\mathrm{d}v}{\left(\frac{3}{4}\right)^2\cdot(v^2+1)^2} = \left(\frac{4}{3}\right)^2\sqrt{\frac{4}{3}}\int\frac{\mathrm{d}v}{(v^2+1)^2},$$

ahol

(1) először az $u = x+\dfrac{1}{2}$ helyettesítést hajtottuk végre,

(2) majd kiemeltük a szögletes zárójelből a $\dfrac{3}{4}$ szabadtagot,

(3) majd a $\dfrac{4}{3} = \left(\dfrac{3}{4}\right)^{-1}$ törtet bevittük az u mellé a négyzet alá

(4) és végül a $v = \sqrt{\dfrac{4}{3}}u$ helyettesítést végeztük.

Tehát a 11.3(e) alapján és $v = \sqrt{\dfrac{4}{3}}u = \sqrt{\dfrac{4}{3}}\left(x+\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}$ helyettesítéssel

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+x+1)^2} = \left(\frac{4}{3}\right)^2\sqrt{\frac{4}{3}}\int\frac{\mathrm{d}v}{(v^2+1)^2} \overset{11.3(e)}{=} \left(\frac{4}{3}\right)^2\sqrt{\frac{4}{3}}\left[\frac{\operatorname{arctg} v}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{v}{1+v^2}\right]+C =$$

$$= \left(\frac{4}{3}\right)^2\sqrt{\frac{4}{3}}\left[\frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{2x+1}{\sqrt{3}}}{1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2}\right]+C =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\right)^2\sqrt{\frac{4}{3}}\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+\frac{\frac{2x+1}{\sqrt{3}}}{\frac{4}{3}(x^2+x+1)}\right]+C =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\right)^2\sqrt{\frac{4}{3}}\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+\frac{\sqrt{\frac{4}{3}}(x+\frac{1}{2})}{\frac{4}{3}(x^2+x+1)}\right]+C =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\right)^2\left[\sqrt{\frac{4}{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+\frac{x+\frac{1}{2}}{x^2+x+1}\right]+C.$$

□

11.2. Feladat. Számítsd ki a következő integrálokat a parciális integrálás módszerével:

(a) $\displaystyle\int e^x\cos x\,\mathrm{d}x;$

Megoldás. Kétszer alkalmazzuk a parciális integrálás képletét:

$$\begin{aligned}\int e^x \cos x \mathrm{d}x &= \int (e^x)' \cos x \mathrm{d}x \\ &= e^x \cos x - \int e^x (\cos x)' \mathrm{d}x \\ &= e^x \cos x + \int e^x \sin x \mathrm{d}x \\ &= e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x (\sin x)' \mathrm{d}x \\ &= e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x \mathrm{d}x,\end{aligned}$$

ahonnan kapjuk, hogy

$$\int e^x \cos x \mathrm{d}x = e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x \mathrm{d}x.$$

A jobb oldalról az integrált átvive a bal oldalra adódik, hogy

$$\int e^x \cos x \mathrm{d}x = \frac{1}{2} e^x (\cos x + \sin x) + C.$$

Megjegyzés. Hasonló módon kiszámolhatjuk, hogy $\int e^x \sin x \mathrm{d}x = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C$. □

(b) $\int \ln x \mathrm{d}x$;

Megoldás.

$$\begin{aligned}\int \ln x \mathrm{d}x &= \int 1 \cdot \ln x \mathrm{d}x = \int (x)' \cdot \ln x \mathrm{d}x = x \ln x - \int x (\ln x)' \mathrm{d}x \\ &= x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \mathrm{d}x = x \ln x - \int 1 \mathrm{d}x = x \ln x - x + C.\end{aligned}$$

□

(c) $\int x e^{ax} \mathrm{d}x$;

Megoldás.

$$\begin{aligned}\int x e^{ax} \mathrm{d}x &= \int x \left(\frac{e^{ax}}{a} \right)' \mathrm{d}x = x \cdot \frac{e^{ax}}{a} - \int (x)' \cdot \frac{e^{ax}}{a} \mathrm{d}x \\ &= x \cdot \frac{e^{ax}}{a} - \int \frac{e^{ax}}{a} \mathrm{d}x = x \cdot \frac{e^{ax}}{a} - \frac{e^{ax}}{a^2} + C.\end{aligned}$$

Megjegyzés. Az $\int P(x) e^{ax} \mathrm{d}x$ alakú integrálok esetén, ahol $P(x)$ egy n-ed fokú polinom, n-szer alkalmazzuk a parciális intregrálás képletét a fenti példához hasonlóan, amíg n deriválás után a $P(x)$ n-ed fokú polinomból konstans nem lesz. □

(d) $\int x^2 e^{2x} \mathrm{d}x$;

Megoldás. Az $x^2 + x - 4$ egy másodfokú polinom, ezért kétszer alkalmazzuk a parciális integrálás képletét:

$$\begin{aligned}
\int (x^2+3x-4)e^{2x}\mathrm{d}x &= \int (x^2+3x-4)\left(\frac{e^{2x}}{2}\right)'\mathrm{d}x \\
&= (x^2+3x-4)\cdot\frac{e^{2x}}{2} - \int (x^2+3x-4)'\cdot\frac{e^{2x}}{2}\mathrm{d}x \\
&= (x^2+3x-4)\cdot\frac{e^{2x}}{2} - \int (2x+3)\cdot\frac{e^{2x}}{2}\mathrm{d}x \\
&= (x^2+3x-4)\cdot\frac{e^{2x}}{2} - \int (2x+3)\cdot\left(\frac{e^{2x}}{4}\right)'\mathrm{d}x \\
&= (x^2+3x-4)\cdot\frac{e^{2x}}{2} - (2x+3)\cdot\frac{e^{2x}}{4} + \int (2x+3)'\cdot\frac{e^{2x}}{4}\mathrm{d}x \\
&= (x^2+3x-4)\cdot\frac{e^{2x}}{2} - (2x+3)\cdot\frac{e^{2x}}{4} + \int \frac{e^{2x}}{2}\mathrm{d}x \\
&= (x^2+3x-4)\cdot\frac{e^{2x}}{2} - (2x+3)\cdot\frac{e^{2x}}{4} + \frac{e^{2x}}{4} + C \\
&= \frac{e^{2x}}{2}\cdot(x^2+2x-5) + C.
\end{aligned}$$

□

(e) $\int x a^x \mathrm{d}x,\ (a>0)$;

Megoldás. Alkalmazzuk a parciális integrálás képletét:

$$\begin{aligned}
\int x a^x \mathrm{d}x &= \int x\cdot\left(\frac{a^x}{\ln a}\right)'\mathrm{d}x = x\cdot\frac{a^x}{\ln a} - \int \frac{a^x}{\ln a}\mathrm{d}x \\
&= x\cdot\frac{a^x}{\ln a} - \frac{a^x}{(\ln a)^2} + C = \frac{a^x}{\ln^2 a}\cdot(-1 + x\ln a) + C.
\end{aligned}$$

□

(f) $\int \frac{x e^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x;$

Megoldás. Kétszer alkalmazzuk a parciális integrálás képletét:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x e^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x &= \int \frac{x}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int \frac{x}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}\cdot\left(e^{\operatorname{arctg} x}\right)'\mathrm{d}x \\
&= \frac{x}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}\cdot e^{\operatorname{arctg} x} - \int \left(\frac{x}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}\right)'\cdot e^{\operatorname{arctg} x}\mathrm{d}x \\
&= \frac{x}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}\cdot e^{\operatorname{arctg} x} - \int \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot e^{\operatorname{arctg} x}\mathrm{d}x \\
&= \frac{x}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}\cdot e^{\operatorname{arctg} x} - \int \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}\mathrm{d}x \\
&= \frac{x}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}\cdot e^{\operatorname{arctg} x} - \int \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}\cdot\left(e^{\operatorname{arctg} x}\right)'\mathrm{d}x \\
&= \frac{x}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}\cdot e^{\operatorname{arctg} x} - \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}\cdot e^{\operatorname{arctg} x} + \int \left(\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}\right)'\cdot e^{\operatorname{arctg} x}\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

$$= \frac{x-1}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot e^{\operatorname{arctg} x} - \int \frac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot e^{\operatorname{arctg} x} \mathrm{d}x,$$

ahonnan kapjuk, hogy

$$\int \frac{x e^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} \mathrm{d}x = \frac{x-1}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot e^{\operatorname{arctg} x} - \int \frac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot e^{\operatorname{arctg} x} \mathrm{d}x.$$

A jobb oldalról átvive az integrált a bal oldalra adódik, hogy

$$\int \frac{x e^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} \mathrm{d}x = \frac{x-1}{2(1+x^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot e^{\operatorname{arctg} x} + C.$$

□

(g) $\displaystyle\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} \mathrm{d}x;$

Megoldás. Kétszer alkalmazzuk a parciális integrálás képletét:

$$\begin{aligned}
\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} \mathrm{d}x &= \int \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2} \mathrm{d}x = \int \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot \left(e^{\operatorname{arctg} x}\right)' \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot e^{\operatorname{arctg} x} - \int \left(\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}\right)' \cdot e^{\operatorname{arctg} x} \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot e^{\operatorname{arctg} x} + \int \frac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot e^{\operatorname{arctg} x} \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot e^{\operatorname{arctg} x} + \int \frac{x}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2} \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot e^{\operatorname{arctg} x} + \int \frac{x}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot \left(e^{\operatorname{arctg} x}\right)' \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot e^{\operatorname{arctg} x} + \frac{x}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot e^{\operatorname{arctg} x} - \int \left(\frac{x}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}\right)' \cdot e^{\operatorname{arctg} x} \mathrm{d}x \\
&= \frac{x+1}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot e^{\operatorname{arctg} x} - \int \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot e^{\operatorname{arctg} x} \mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

ahonnan kapjuk, hogy

$$\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} \mathrm{d}x = \frac{x+1}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot e^{\operatorname{arctg} x} - \int \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot e^{\operatorname{arctg} x} \mathrm{d}x.$$

A jobb oldalról átvive az integrált a bal oldalra adódik, hogy

$$\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} \mathrm{d}x = \frac{x+1}{2(1+x^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot e^{\operatorname{arctg} x} + C.$$

□

(h) $\displaystyle\int \frac{\ln^3 x}{x^2} \mathrm{d}x;$

Megoldás.

$$\int \frac{\ln^3 x}{x^2} \mathrm{d}x = \int \left(-\frac{1}{x}\right)' \cdot \ln^3 x \mathrm{d}x = -\frac{1}{x} \cdot \ln^3 x + \int \frac{(\ln^3 x)'}{x} \mathrm{d}x$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{\ln^3 x}{x} + \int \frac{3\ln^2 x}{x^2}\mathrm{d}x = -\frac{\ln^3 x}{x} + \int \left(-\frac{1}{x}\right)' \cdot 3\ln^2 x\mathrm{d}x \\
&= -\frac{\ln^3 x}{x} - \frac{3\ln^2 x}{x} + \int \frac{(3\ln^2 x)'}{x}\mathrm{d}x \\
&= -\frac{\ln^3 x}{x} - \frac{3\ln^2 x}{x} + \int \frac{6\ln x}{x^2}\mathrm{d}x \\
&= -\frac{\ln^3 x}{x} - \frac{3\ln^2 x}{x} + \int \left(-\frac{1}{x}\right)' \cdot 6\ln x\mathrm{d}x \\
&= -\frac{\ln^3 x}{x} - \frac{3\ln^2 x}{x} - \frac{6\ln x}{x} - \int \frac{(6\ln x)'}{x}\mathrm{d}x \\
&= -\frac{\ln^3 x}{x} - \frac{3\ln^2 x}{x} - \frac{6\ln x}{x} + \int \frac{6}{x^2}\mathrm{d}x \\
&= -\frac{\ln^3 x}{x} - \frac{3\ln^2 x}{x} - \frac{6\ln x}{x} - \frac{6}{x} + C \\
&= -\frac{\ln^3 x + 3\ln^2 x + 6\ln x + 6}{x} + C.
\end{aligned}
$$

□

(i) $\int e^{ax} \cos bx\mathrm{d}x;$

Megoldás. Kétszer alkalmazzuk a parciális integrálás képletét:

$$
\begin{aligned}
\int e^{ax} \cos bx\mathrm{d}x &= \int \left(\frac{e^{ax}}{a}\right)' \cdot \cos bx\mathrm{d}x \\
&= \frac{e^{ax}}{a} \cdot \cos bx - \int \frac{e^{ax}}{a} \cdot (\cos bx)'\mathrm{d}x \\
&= \frac{e^{ax}}{a} \cdot \cos bx + \int \frac{e^{ax}}{a} \cdot b\sin bx\mathrm{d}x \\
&= \frac{e^{ax}}{a} \cdot \cos bx + \int \left(\frac{e^{ax}}{a^2}\right)' \cdot b\sin bx\mathrm{d}x \\
&= \frac{e^{ax}}{a} \cdot \cos bx + \frac{e^{ax}}{a^2} \cdot b\sin bx - \int \frac{e^{ax}}{a^2} \cdot b(\sin bx)'\mathrm{d}x \\
&= \frac{e^{ax}}{a} \cdot \cos bx + \frac{e^{ax}}{a^2} \cdot b\sin bx - \int \frac{e^{xa}}{a^2} \cdot b^2 \cos bx\mathrm{d}x,
\end{aligned}
$$

ahonnan kapjuk, hogy

$$
\int e^{ax} \cos bx\mathrm{d}x = \frac{e^{ax}}{a}\cos bx + \frac{e^{ax}}{a^2} b\sin bx - \frac{b^2}{a^2}\int e^{x} \cos x\mathrm{d}x.
$$

A jobb oldalról az integrált átvive a bal oldalra adódik, hogy

$$
\begin{aligned}
\int e^{x} \cos x\mathrm{d}x &= \frac{a^2}{a^2+b^2}\left[\frac{e^{ax}}{a}\cos bx + \frac{e^{ax}}{a^2} b\sin bx\right] + C \\
&= \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\left[a\cos bx + b\sin bx\right] + C.
\end{aligned}
$$

□

(j) $\int x^2 e^x \sin x\mathrm{d}x;$

Megoldás. Mivel $[e^x(a\cos x + b\sin x)]' = e^x[(a+b)\cos x + (b-a)\sin x]$, ezért $a+b=0$, $b-a=1$ esetén $a=-\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{2}$, ahonnan $e^x \sin x = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x)]$.

Addig alkalmazzuk a parciális integrálás képletét, amíg az integrál alatt csak e^x, $\cos x$, vagy $\sin x$ marad.

$$\begin{aligned}\int x^2 e^x \sin x \mathrm{d}x &= \int x^2 \left(\frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x)\right)' \mathrm{d}x = \\ &= x^2 \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) - \int x e^x (\sin x - \cos x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

A fenti módszer alapján $[-e^x \cos x]' = e^x(\sin x - \cos x)$, így

$$\begin{aligned}\int x e^x (\sin x - \cos x)\mathrm{d}x &= \int x(-e^x \cos x)'\mathrm{d}x = -xe^x \cos x + \int e^x \cos x \mathrm{d}x \\ &= -xe^x \cos x + \frac{e^x}{2}(\cos x + \sin x) + C\end{aligned}$$

Összegezve

$$\int x^2 e^x \sin x \mathrm{d}x = x^2 \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + xe^x \cos x - \frac{e^x}{2}(\cos x + \sin x) + C.$$

□

(k) $\displaystyle\int x e^x \sin^2 x \mathrm{d}x$;

Megoldás. Az integrál átírható

$$\int x e^x \sin^2 x \mathrm{d}x = \int x e^x \frac{(1 - \cos 2x)}{2} \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int x e^x \mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int x e^x \cos 2x \mathrm{d}x$$

alakba. Az első integrált a parciális integrálás képletével a következőképpen számoljuk ki:

$$\int x e^x \mathrm{d}x = \int x(e^x)'\mathrm{d}x = xe^x - \int (x)' e^x \mathrm{d}x = xe^x - \int e^x \mathrm{d}x = xe^x - e^x + C.$$

A második integrál esetén

$$[e^x(a\cos 2x + b\sin 2x)]' = e^x[(a+2b)\cos 2x + (b-2a)\sin 2x] = e^x(\alpha \cos 2x + \beta \sin 2x),$$

ahonnan az

$$e^x(\alpha\cos 2x + \beta\sin 2x) = \left(\frac{e^x}{5}[(\alpha - 2\beta)\cos 2x + (2\alpha + \beta)\sin 2x]\right)'.$$

A parciális integrálás képletét alkalmazva

$$\begin{aligned}\int x e^x \cos 2x \mathrm{d}x &= \int x \left(\frac{e^x}{5}[\cos 2x + 2\sin 2x]\right)' \mathrm{d}x \\ &= x\frac{e^x}{5}(\cos 2x + 2\sin 2x) - \int \frac{e^x}{5}(\cos 2x + 2\sin 2x)\mathrm{d}x \\ &= x\frac{e^x}{5}(\cos 2x + 2\sin 2x) - \frac{e^x}{25}(-3\cos 2x + 4\sin 2x) + C.\end{aligned}$$

Összegezve

$$\int x e^x \sin^2 x \mathrm{d}x = (x-1)\frac{e^x}{2} - x\frac{e^x}{10}(\cos 2x + 2\sin 2x) - \frac{e^x}{50}(3\cos 2x - 4\sin 2x) + C.$$

□

(l) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} e^{\arcsin x} \mathrm{d}x.$

Megoldás.

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} e^{\arcsin x} \mathrm{d}x = \int x \left(e^{\arcsin x}\right)' \mathrm{d}x = x e^{\arcsin x} - \int e^{\arcsin x} \mathrm{d}x.$$

Az utóbbi integrálban $y = \arcsin x$ helyettesítést végzünk. Ekkor $x = \sin y$, ahonnan $\mathrm{d}x = \cos y \mathrm{d}y$ és

$$\begin{aligned}\int e^{\arcsin x} \mathrm{d}x = \int e^y \cos y \mathrm{d}y &= \frac{e^y}{2}(\cos y + \sin y) + C \\ &= \frac{e^y}{2}(\sqrt{1-\sin^2 y} + \sin y) + C \\ &= \frac{e^{\arcsin x}}{2}(\sqrt{1-x^2} + x) + C.\end{aligned}$$

Összegezve

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} e^{\arcsin x} \mathrm{d}x &= x e^{\arcsin x} - \frac{e^{\arcsin x}}{2}(\sqrt{1-x^2} + x) + C \\ &= \frac{e^{\arcsin x}}{2}(x - \sqrt{1-x^2}) + C.\end{aligned}$$

□

11.3. Feladat. Számítsd ki a következő integrálokat trigonometrikus helyettesítések segítségével:

(a) $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2} \mathrm{d}x;$

Megoldás. A $x = \sin t$ helyettesítést használva

$$\sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = |\cos t| = \cos t, \tag{11.5}$$

ahol az abszolút értéket a következő meggondolások alapján bontottuk fel: az $1 - x^2 \geq 0$ (amiatt, hogy $\sqrt{1-x^2}$ értelmezve legyen), vagyis $x \in [-1, 1]$ és emiatt $x = \sin t$ az $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumon értelmezhető, ahol $\cos t \geq 0$.

A $\mathrm{d}x$ pedig a következőképpen fog megváltozni:

$$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \mathrm{d}t = (\sin t)' \mathrm{d}t = \cos t \mathrm{d}t. \tag{11.6}$$

A (11.5) és (11.6) összefüggések alapján

$$\begin{aligned}&\int \sqrt{1-x^2} \mathrm{d}x = \int \cos t \cdot \cos t \mathrm{d}t = \int \cos^2 t \mathrm{d}t \overset{(1)}{=} \int \frac{1+\cos(2t)}{2} \mathrm{d}t = \\ &= \frac{1}{2} \int 1 \mathrm{d}t + \frac{1}{2} \int \cos(2t) \mathrm{d}t \overset{(2)}{=} \frac{1}{2} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin(2t)}{2} + C = \frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4} + C \\ &\overset{(3)}{=} \frac{t}{2} + \frac{2 \sin t \cos t}{4} + C \overset{(4)}{=} \frac{t}{2} + \frac{\sin t \sqrt{1-\sin^2 t}}{2} + C \overset{(5)}{=} \frac{\arcsin x}{2} + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + C,\end{aligned}$$

ahol a jelzett egyenlőségekben a következő műveleteket/átalakításokat végeztük:

(1) $\cos^2 t = \dfrac{1+\cos(2t)}{2};$

(2) $\int \cos(at)\mathrm{d}t = \dfrac{\sin(at)}{a} + C$, ahol $a \in \mathbb{R}^*$;

(3) $\sin(2t) = 2\sin t\cos t$;

(4) $\cos t = \sqrt{1-\sin^2 t}$;

(5) a $\sin t$ helyébe x-et és t helyébe $\arcsin x$-et helyettesítettük vissza az $x = \sin t$ reláció alapján.

□

(b) $\displaystyle\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$;

Megoldás. Az $x = \sin t$ helyettesítést alkalmazzuk. Ekkor $\mathrm{d}x = (\sin t)'\mathrm{d}t = \cos t\mathrm{d}t$ és

$$\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{\sin^2 t}{\sqrt{1-\sin^2 t}}\cdot\cos t\mathrm{d}t = \int \frac{\sin^2 t\cos t\mathrm{d}t}{\cos t} = \int \sin^2 t\mathrm{d}t = \int \frac{1-\cos(2t)}{2}\mathrm{d}t$$
$$= \frac{t}{2} - \frac{\sin(2t)}{4} + C = \frac{t}{2} - \frac{\sin t\cos t}{2} + C = \frac{\arcsin x}{2} - \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + C.$$

□

(c) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\,\mathrm{d}x$;

Megoldás. A $x = \operatorname{tg} t$ helyettesítést fogjuk alkalmazni, $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Ekkor

$$x^2+1 = \operatorname{tg}^2 t + 1 = \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} + 1 = \frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{\cos^2 t} = \frac{1}{\cos^2 t},$$

ahonnan

$$\sqrt{1+x^2} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}} = \frac{1}{|\cos t|} = \frac{1}{\cos t}, \tag{11.7}$$

mivel $\cos t \geq 0$, ha $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Továbbá

$$\mathrm{d}x = (\operatorname{tg} t)'\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t}. \tag{11.8}$$

A (11.7) és (11.8) összefüggések alapján

$$\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\cos t}\cdot\frac{1}{\operatorname{tg} t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t} = \int \frac{\mathrm{d}t}{\cos t\cdot\frac{\sin t}{\cos t}\cdot\cos^2 t} = \int \frac{1}{\sin t\cos^2 t}\mathrm{d}t =$$
$$= \int \frac{\cos^2 t + \sin^2 t}{\sin t\cos^2 t}\mathrm{d}t = \int \left(\frac{1}{\sin t} + \frac{\sin t}{\cos^2 t}\right)\mathrm{d}t = \int \left(\frac{\sin t}{\sin^2 t} + \frac{\sin t}{\cos^2 t}\right)\mathrm{d}t =$$
$$= \int \left(\frac{1}{1-\cos^2 t} + \frac{1}{\cos^2 t}\right)\sin t\mathrm{d}t.$$

A kapott integrálban az $\cos t = u$ helyettesítést alkalmazzuk. Ekkor $\mathrm{d}u = (\cos t)'\mathrm{d}t = -\sin t\mathrm{d}t$ és ez alapján

$$\int \left(\frac{1}{1-\cos^2 t} + \frac{1}{\cos^2 t}\right)\sin t\mathrm{d}t = \int \left(\frac{1}{1-u^2} + \frac{1}{u^2}\right)(-\mathrm{d}u) = \int \frac{\mathrm{d}u}{u^2-1} - \int \frac{\mathrm{d}u}{u^2} =$$
$$= \int \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{u-1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{u+1}\right) - \int u^{-2}\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\cdot\ln|u-1| - \frac{1}{2}\cdot\ln|u+1| + \frac{1}{u} + C =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \ln \left| \frac{u-1}{u+1} \right| + \frac{1}{u} + C.$$

Végül az u helyett a megfelelő x-től függő kifejezést kell visszahelyettesíteni, amit a következőképpen kapunk meg. Először az $x = \operatorname{tg} t$ helyettesítést végeztünk, ahonnan a (11.7) reláció alapján $\cos t = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. Innen az $u = \cos t$ második helyettesítés alapján $u = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, amit vissza kell helyettesíteni a kapott kifejezésbe. Összegezve a fenti számolásokat

$$\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot \ln \left| \frac{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - 1}{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + 1} \right| + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}} + C = \frac{1}{2} \cdot \ln \left| \frac{\frac{1-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}}{\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}} \right| + \sqrt{1+x^2} + C =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \ln \left| \frac{1-\sqrt{1+x^2}}{1+\sqrt{1+x^2}} \right| + \sqrt{1+x^2} + C = \frac{1}{2} \cdot \ln \left| \frac{(1-\sqrt{1+x^2})^2}{1-\sqrt{1+x^2}^2} \right| + \sqrt{1+x^2} + C =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \ln \left| \frac{(1-\sqrt{1+x^2})^2}{-x^2} \right| + \sqrt{1+x^2} + C = \frac{1}{2} \cdot \ln \left(\frac{1-\sqrt{1+x^2}}{x} \right)^2 + \sqrt{1+x^2} + C =$$

$$= \frac{2}{2} \cdot \ln \left| \frac{1-\sqrt{1+x^2}}{x} \right| + \sqrt{1+x^2} + C = \ln \left| \frac{1-\sqrt{1+x^2}}{x} \right| + \sqrt{1+x^2} + C.$$

□

(d) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1-x^2}}$;

Megoldás. Az integrálban előbb egy $x = \sin t$, $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ helyettesítést alkalmazunk, ezért $\mathrm{d}x = \cos t \mathrm{d}t$ és $\cos t = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{1-x^2}$.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{\cos t \mathrm{d}t}{\sin t \sqrt{1-\sin^2 t}} = \int \frac{\cos t \mathrm{d}t}{\sin t \cos t} = \int \frac{\mathrm{d}t}{\sin t} = \int \frac{\sin t \mathrm{d}t}{\sin^2 t} \int \frac{\sin t \mathrm{d}t}{1-\cos^2 t}.$$

Ezután $u = \cos t$ helyettesítést alkalmazunk ($\mathrm{d}u = -\sin t \mathrm{d}t$):

$$\int \frac{\sin t \mathrm{d}t}{1-\cos^2 t} = \int \frac{-\mathrm{d}u}{1-u^2} = -\frac{1}{2} \int \frac{\mathrm{d}u}{1-u} - \frac{1}{2} \int \frac{\mathrm{d}u}{1+u} = \frac{1}{2} (\ln|1-u| - \ln|1+u|) + C$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1-u}{1+u} \right| + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1-\cos t}{1+\cos t} \right| + C.$$

Összegezve ($x = \sin t$)

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{\sin t \mathrm{d}t}{1-\cos^2 t} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1-\cos t}{1+\cos t} \right| + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}} \right| + C.$$

□

(e) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2}$;

Megoldás. Az $x = \operatorname{tg} t$, $t \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ helyettesítést fogjuk alkalmazni. Ekkor $\mathrm{d}x = (\operatorname{tg} t)' \mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t}$ és

$$1 + x^2 = 1 + \operatorname{tg}^2 t = 1 + \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} = \frac{\cos^2 t + \sin^2 t}{\cos^2 t} = \frac{1}{\cos^2 t}$$

alapján
$$\cos t = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \qquad \sin t = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \qquad \text{és} \qquad t = \operatorname{arctg} x. \tag{11.9}$$
Ezeket felhasználva
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2} = \int \frac{1}{\left(\frac{1}{\cos^2 t}\right)^2} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t} = \int \frac{(\cos^2 t)^2}{\cos^2 t}\mathrm{d}t = \int \cos^2 t\mathrm{d}t \overset{11.3(a)}{=} \frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4} + C =$$
$$= \frac{t}{2} + \frac{\sin t \cos t}{2} + C \overset{(11.9)}{=} \frac{\operatorname{arctg} x}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + C =$$
$$= \frac{\operatorname{arctg} x}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{1+x^2} + C.$$

11.7. Megjegyzés

Általánosan az $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^{n+1}}$ integrál esetén az $x = \operatorname{tg} t$ helyettesítés a következő integrálhoz vezet:
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^{n+1}} = \int \frac{1}{\left(\frac{1}{\cos^2 t}\right)^{n+1}} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t} = \int \cos^{2n} t\mathrm{d}t.$$

Ha az $I_n = \int \cos^{2n} t\mathrm{d}t$, $n \in \mathbb{N}$ jelölést vezetjük be, akkor a parciális integrálás alapján egy rekurziót lehet felírni az I_n-re a következőképpen:
$$I_n = \int \cos^{2n} t\mathrm{d}t = \int \cos t \cos^{2n-1} t\mathrm{d}t = \int (\sin t)' \cos^{2n-1} t\mathrm{d}t =$$
$$= \sin t \cos^{2n-1} t - \int \sin t \cdot (\cos^{2n-1} t)'\mathrm{d}t =$$
$$= \sin t \cos^{2n-1} t - \int \sin t \cdot (2n-1)\cos^{2n-2} t \cdot (-\sin t)\mathrm{d}t =$$
$$= \sin t \cos^{2n-1} t + (2n-1)\int \sin^2 t \cos^{2n-2} t\mathrm{d}t =$$
$$= \sin t \cos^{2n-1} t + (2n-1)\int (1-\cos^2 t)\cos^{2n-2} t\mathrm{d}t =$$
$$= \sin t \cos^{2n-1} t + (2n-1)\int \cos^{2n-2} t\mathrm{d}t - (2n-1)\int \cos^{2n} t\mathrm{d}t =$$
$$= \sin t \cos^{2n-1} t + (2n-1)I_{n-1} - (2n-1)I_n,$$
ahonnan
$$2nI_n = \sin t \cos^{2n-1} t + (2n-1)I_{n-1} \quad \Leftrightarrow \quad I_n = \frac{1}{2n}\left[\sin t \cos^{2n-1} t + (2n-1)I_{n-1}\right].$$

Az $I_0 = \int \cos^0 t\mathrm{d}t = \int 1\mathrm{d}t = t + C$ kezdőtag segítségével rekurzívan kiszámolható az összes többi tag is. Miután kiszámítottuk az $I_n = \int \cos^{2n} t\mathrm{d}t$ integrált a végeredményben a (11.9) visszahelyettesítéseket kell végrehajtani, ahhoz hogy az $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^{n+1}}$ integrál eredményét megkapjuk. ◇

□

(f) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^3}$;

Megoldás. Az integrál kiszámításához $x = \operatorname{tg} t$, $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ helyettesítést alkalmazunk. Ekkor $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t}$, $\sin t = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, $\cos t = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^3} &= \int \frac{1}{(\operatorname{tg}^2 t+1)^3}\frac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t} = \int \frac{\cos^6 t}{(\sin^2 t+\cos^2 t)^3}\frac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t} = \int \cos^4 t\mathrm{d}t \\
&= \int \left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right)^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{4}\int (1+2\cos 2t+\cos^2 2t)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{4}\int \left(1+2\cos 2t+\frac{1+\cos 4t}{2}\right)\mathrm{d}t = \frac{1}{8}\int (3+4\cos 2t+\cos 4t)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{8}\left(3t+2\sin 2t+\frac{\sin 4t}{4}\right)+C.
\end{aligned}$$

A $\sin 2t$, $\sin 4t$ kifejezéseket fel kell írni x függvényben:

$$\begin{aligned}
\sin 2t &= 2\sin t\cos t = \frac{2x}{1+x^2}, \\
\sin 4t &= 2\sin 2t\cos 2t = 2\sin 2t(\cos^2 t-\sin^2 t) \\
&= \frac{4x}{1+x^2}\cdot\left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{x^2}{1+x^2}\right) = \frac{4x(1-x^2)}{(1+x^2)^2}.
\end{aligned}$$

Tehát

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^3} &= \frac{1}{8}\left(3t+2\sin 2t+\frac{\sin 4t}{4}\right)+C \\
&= \frac{3}{8}\cdot\operatorname{arctg} x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{1+x^2}+\frac{1}{8}\cdot\frac{x(1-x^2)}{(1+x^2)^2}+C \\
&= \frac{3}{8}\cdot\operatorname{arctg} x+\frac{1}{8}\cdot\frac{3x^3+5x}{(1+x^2)^2}+C.
\end{aligned}$$

□

(g) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}\mathrm{d}x$;

Megoldás. Az integrál kiszámításához előbb $x = \operatorname{tg} t$ helyettesítést alkalmazunk:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}\mathrm{d}x &\overset{(x=\operatorname{tg} t)}{=} \int \frac{\sqrt{\operatorname{tg}^2 t+1}}{\operatorname{tg}^2 t}\frac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t} = \int \frac{\mathrm{d}t}{\cos t\sin^2 t} = \int \frac{\cos t\mathrm{d}t}{\sin^2 t\cos^2 t} \\
&= \int \frac{\cos t\mathrm{d}t}{(1-\sin^2 t)\sin^2 t} \overset{(u=\sin t)}{=} \int \frac{\mathrm{d}t}{(1-u^2)u^2} = \int \left(\frac{1}{1-u^2}+\frac{1}{u^2}\right)\mathrm{d}u \\
&= \int \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-u}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+u}+\frac{1}{u^2}\right)\mathrm{d}u \\
&= \left(\frac{1}{2}\ln|1+u|-\frac{1}{2}\ln|1-u|-\frac{1}{u}\right) \\
&= \frac{1}{2}\cdot\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right|-\frac{1}{u}+C \\
&\overset{(u=\sin t)}{=} \frac{1}{2}\cdot\ln\left|\frac{1+\sin t}{1-\sin t}\right|-\frac{1}{\sin t}+C \\
&= \frac{1}{2}\cdot\ln\left|\frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{1-\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}\right|+\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}+C
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}-x}\right| - \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} + C$$
$$= \ln\left|\sqrt{x^2+1}+x\right| - \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} + C$$
$$= \ln(x+\sqrt{x^2+1}) - \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} + C.$$

□

(h) $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}}\mathrm{d}x$;

Megoldás.

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}}\mathrm{d}x = \int \frac{x^3}{2\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}}\mathrm{d}x \overset{(y=\frac{x}{2})}{=} \frac{1}{2}\int \frac{8y^3}{\sqrt{1-y^2}}\cdot 2\mathrm{d}y = 8\int \frac{y^3\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^2}}$$
$$\overset{(y=\sin t)}{=} 8\int \frac{\sin^3 \cos t\mathrm{d}t}{\sqrt{1-\sin^2 t}} = 8\int \sin^3 \mathrm{d}t = 8\int (1-\cos^2 t)\sin t\mathrm{d}t$$
$$\overset{(\cos t=u)}{=} -8\int (1-u^2)\mathrm{d}u = \frac{8}{3}u^3 - 8u + C$$
$$= \frac{8}{3}\cos^3 t - 8\cos t + C = \frac{8}{3}(1-\sin^2 t)^{\frac{3}{2}} - 8\sqrt{1-\sin^2 t} + C$$
$$= \frac{8}{3}\left(\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}\right)^3 - 8\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2} + C$$
$$= \frac{1}{3}\left(\sqrt{4-x^2}\right)^3 - 4\sqrt{4-x^2} + C.$$

□

(i) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1-x)}}$;

Megoldás. Az integrálban $x = \sin^2 t$ helyettesítést végzünk: $t = \arcsin\sqrt{x}$, $\mathrm{d}x = 2\sin t\cos t\mathrm{d}t$ és

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1-x)}} \overset{(x=\sin^2 t)}{=} \int \frac{2\sin t\cos t\mathrm{d}t}{\sqrt{\sin^2 t(1-\sin^2 t)}} = \int \frac{2\sin t\cos t\mathrm{d}t}{\sqrt{\sin^2 t\cos^2 t}} = \int \frac{2\sin t\cos t\mathrm{d}t}{\sin t\cos t}$$
$$= \int 2\mathrm{d}t = 2t + C = 2\arcsin\sqrt{x} + C.$$

□

(j) $\displaystyle\int \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$.

Megoldás.

$$\int \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x \overset{(x=\sin t)}{=} \int \frac{1+\sin t}{\sqrt{1-\sin^2 t}}\cos t\mathrm{d}t = \int \frac{1+\sin t}{\cos t}\cos t\mathrm{d}t = \int (1+\sin t)\mathrm{d}t$$
$$= t - \cos t + C = t - \sqrt{1-\sin^2 t} + C = \arcsin x - \sqrt{1-x^2} + C.$$

□

11.4. Feladat. Számítsd ki a következő integrálokat hiperbolikus helyettesítések segítségével:

(a) $\displaystyle\int \sqrt{x^2+4}\mathrm{d}x;$

Megoldás. Előbb az integrált visszavezetjük az $\int \sqrt{y^2+1}\mathrm{d}y$ alakú integrálra azáltal, hogy a szabad tagot kiemeljük a gyökjel alól:

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x^2+4}\mathrm{d}x &= \int \sqrt{4}\sqrt{\frac{x^2}{4}+1}\mathrm{d}x = 2\int \sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}\mathrm{d}x = 2\int \sqrt{y^2+1}\cdot(2\mathrm{d}y)\\ &= 4\int \sqrt{y^2+1}\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

legvégül $y=\frac{x}{2}$ helyettesítést alkalmazva ($\mathrm{d}y=\frac{\mathrm{d}x}{2}$, ahonnan $\mathrm{d}x=2\mathrm{d}y$).

Az $\int \sqrt{y^2+1}\mathrm{d}y$ integrálban $y=\operatorname{sh}t=\frac{e^t-e^{-t}}{2}$ hiperbolikus helyettesítés alkalmazunk, ami alapján

$$\mathrm{d}y=(\operatorname{sh}t)'\mathrm{d}t=\operatorname{ch}t\mathrm{d}t=\frac{e^t+e^{-t}}{2}\mathrm{d}t \quad \text{és} \quad y^2+1=\operatorname{sh}^2t+1=\operatorname{ch}^2t$$

és

$$\begin{aligned}&\int \sqrt{x^2+4}\mathrm{d}x = 4\int \sqrt{y^2+1}\mathrm{d}y = 4\int \sqrt{\operatorname{ch}^2t}\cdot\operatorname{ch}t\mathrm{d}t = 4\int \operatorname{ch}^2t\mathrm{d}t =\\ &= 4\int\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^2\mathrm{d}t = 4\int\frac{e^{2t}+e^{-2t}+2}{4}\mathrm{d}t \overset{(1)}{=} \frac{e^{2t}}{2}-\frac{e^{-2t}}{2}+2t+C=\\ &\overset{(2)}{=} \frac{1}{2}(y+\sqrt{y^2+1})^2-\frac{1}{2}(\sqrt{y^2+1}-y)^2+2\ln|y+\sqrt{y^2+1}|+C=\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}+\sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}-\frac{x}{2}\right)^2+2\ln\left|\frac{x}{2}+\sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}\right|+C=\\ &\overset{(3)}{=} \frac{1}{8}(x+\sqrt{x^2+4})^2-\frac{1}{8}(\sqrt{x^2+4}-x)^2+2\ln|x+\sqrt{x^2+4}|+C',\end{aligned}$$

ahol

(1) $\int e^{at}\mathrm{d}t=\frac{e^{at}}{a}+C$, ha $a\in\mathbb{R}^*$;

(2) az $y=\operatorname{sh}t$ helyettesítés miatt

$$e^t=y+\sqrt{y^2+1},\quad e^{-t}=\sqrt{y^2+1}-y,\quad t=\ln|y+\sqrt{y^2+1}|;$$

(3) $C'=C-2\ln 2.$

Megjegyzés. Az $\int\left(\sqrt{y^2+1}\right)^n\mathrm{d}y$, $n\in\mathbb{N}^*$ integrálok is kiszámíthatók az $y=\operatorname{sh}t\mathrm{d}t$ hiperbolikus helyettesítéssel. □

(b) $\displaystyle\int \sqrt{x^2-9}\mathrm{d}x;$

Megoldás. Előbb az integrált visszavezetjük az $\int \sqrt{y^2-1}\mathrm{d}y$ alakú integrálra azáltal, hogy a szabad tagot kiemeljük a gyökjel alól:

$$\int \sqrt{x^2-9}\mathrm{d}x = \int \sqrt{9}\sqrt{\frac{x^2}{9}-1}\mathrm{d}x = 3\int \sqrt{\left(\frac{x}{3}\right)^2-1}\mathrm{d}x = 3\int \sqrt{y^2-1}\cdot(3\mathrm{d}y)$$

$$= 9\int \sqrt{y^2-1}\mathrm{d}y,$$

legvégül $y = \frac{x}{3}$ helyettesítést alkalmazva ($\mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}x}{3}$, ahonnan $\mathrm{d}x = 3\mathrm{d}y$).

Az $\int \sqrt{y^2-1}\mathrm{d}y$ integrálban $y = \operatorname{ch} t = \frac{e^t+e^{-t}}{2}$ hiperbolikus helyettesítés alkalmazunk, ami alapján

$$\mathrm{d}y = (\operatorname{ch} t)'\mathrm{d}t = \operatorname{sh} t\mathrm{d}t = \frac{e^t-e^{-t}}{2}\mathrm{d}t \quad \text{és} \quad y^2-1 = \operatorname{ch}^2 t - 1 = \operatorname{sh}^2 t$$

és

$$\int \sqrt{x^2-9}\mathrm{d}x = 9\int \sqrt{y^2-1}\mathrm{d}y = 9\int \sqrt{\operatorname{sh}^2 t}\cdot \operatorname{sh} t\mathrm{d}t = 9\int \operatorname{sh}^2 t\mathrm{d}t =$$

$$= 9\int \left(\frac{e^t-e^{-t}}{2}\right)^2\mathrm{d}t = 9\int \frac{e^{2t}-e^{-2t}+2}{4}\mathrm{d}t \overset{(1)}{=} \frac{9}{4}\cdot\frac{e^{2t}}{2} - \frac{9}{4}\cdot\frac{e^{-2t}}{2} + \frac{9}{2}t + C =$$

$$\overset{(2)}{=} \frac{9}{8}(y+\sqrt{y^2-1})^2 - \frac{9}{8}(y-\sqrt{y^2-1})^2 + 2\ln|y+\sqrt{y^2-1}| + C =$$

$$= \frac{9}{8}\left(\frac{x}{3}+\sqrt{\left(\frac{x}{3}\right)^2+1}\right)^2 - \frac{9}{8}\left(\sqrt{\left(\frac{x}{3}\right)^2+1}-\frac{x}{3}\right)^2 + \frac{9}{2}\ln\left|\frac{x}{3}+\sqrt{\left(\frac{x}{3}\right)^2+1}\right| + C =$$

$$\overset{(3)}{=} \frac{1}{8}(x+\sqrt{x^2-9})^2 - \frac{1}{8}(\sqrt{x^2-9}-x)^2 + \frac{9}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-9}| + C',$$

ahol

(1) $\int e^{at}\mathrm{d}t = \frac{e^{at}}{a} + C$, ha $a \in \mathbb{R}^*$;

(2) az $y = \operatorname{sh} t$ helyettesítés miatt

$$e^t = y + \sqrt{y^2-1}, \quad e^{-t} = y - \sqrt{y^2-1}, \quad t = \ln|y+\sqrt{y^2-1}|;$$

(3) $C' = C - \frac{9}{2}\ln 3$.

Megjegyzés. Az $\int \left(\sqrt{y^2+1}\right)^n \mathrm{d}y$, $n \in \mathbb{N}^*$ integrálok is kiszámíthatók az $y = \operatorname{sh} t\mathrm{d}t$ hiperbolikus helyettesítéssel. □

(c) $\displaystyle\int \sqrt{x^2-2x+2}\mathrm{d}x$;

Megoldás. Visszavezethető $\int \sqrt{y^2+1}\mathrm{d}y$ vagy $\int \sqrt{y^2-1}\mathrm{d}y$ alakú integrálra:

$$x^2-2x+2 = (x^2-2x+1)+1 = (x-1)^2+1,$$

ahonnan

$$\int \sqrt{x^2-2x+2}\mathrm{d}x = \int \sqrt{(x-1)^2+1}\mathrm{d}x = \int \sqrt{y^2+1}\mathrm{d}y,$$

ahol $y = x-1$, $\mathrm{d}y = \mathrm{d}x$ és ami kiszámolható $y = \operatorname{sh} t$ helyettesítéssel. □

(d) $\displaystyle\int \sqrt{x^2+2x}\mathrm{d}x$;

Megoldás. Visszavezethető $\int \sqrt{y^2+1}\mathrm{d}y$ vagy $\int \sqrt{y^2-1}\mathrm{d}y$ alakú integrálra:

$$x^2+2x=(x^2+2x+1)-1=(x+1)^2-1,$$

ahonnan

$$\int \sqrt{x^2+2x}\mathrm{d}x=\int \sqrt{(x+1)^2-1}\mathrm{d}x=\int \sqrt{y^2-1}\mathrm{d}y,$$

ahol $y=x+1$, $\mathrm{d}y=\mathrm{d}x$ és ami kiszámolható $y=\operatorname{ch} t$ helyettesítéssel. □

(e) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(\sqrt{1-x^2})^3}$;

Megoldás. Az $x=t=\frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t}$ helyettesítést fogjuk alkalmazni:

$$\mathrm{d}x=(t)'\mathrm{d}t=\left(\frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t}\right)'\mathrm{d}t=\frac{\operatorname{ch} t\cdot\operatorname{ch} t-\operatorname{sh} t\cdot\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch}^2 t}\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}t}{\operatorname{ch}^2 t},$$

$$1-x^2=1-{}^2t=1-\frac{\operatorname{sh}^2 t}{\operatorname{ch}^2 t}=\frac{\operatorname{ch}^2 t-\operatorname{sh}^2 t}{\operatorname{ch}^2 t}=\frac{1}{\operatorname{ch}^2 t}\ \Rightarrow\ \operatorname{ch} t=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ \operatorname{sh} t=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}},$$

ahonnan a 11.4. Feladat (a) alpontjában tekintett képletek alapján

$$t=\ln\left|\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+\sqrt{\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2+1}\right|=\ln\left|\frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}}\right|,$$

$$e^t=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+\sqrt{\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2+1}=\frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$e^{-t}=\sqrt{\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2+1}-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Ezeket a képleteket fogjuk használni a visszahelyettesítések során.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(\sqrt{1-x^2})^3}=\int (\operatorname{ch} t)^3\frac{\mathrm{d}t}{\operatorname{ch}^2 t}=\int \operatorname{ch} t\mathrm{d}t=\int \frac{e^t+e^{-t}}{2}\mathrm{d}t=\frac{e^t}{2}-\frac{e^{-t}}{2}+C=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}+C=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+C.$$

Megjegyzés. Ezzel a helyettesítéssel számolhatók az $\int \frac{\mathrm{d}x}{(\sqrt{1-x^2})^n}$, $n\in\mathbb{N}^*$, $n\geq 2$ alakú integrálok is. □

(f) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(\sqrt{1+x^2})^3}$;

Megoldás. Az $x=\operatorname{sh} t$ helyettesítést használva:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(\sqrt{1+x^2})^3}=\int \frac{\operatorname{ch} t\mathrm{d}t}{(\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 t})^3}=\int \frac{\operatorname{ch} t\mathrm{d}t}{(\operatorname{ch} t)^3}=\int \frac{\mathrm{d}t}{\operatorname{ch}^2 t}=\int \frac{\mathrm{d}t}{\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)^2}=$$
$$=\int \frac{2^2\mathrm{d}t}{(e^t+e^{-t})^2}=\int \frac{2^2\mathrm{d}t}{(e^{-t})^2(e^{2t}+1)^2}=2^2\int \frac{e^{2t}\mathrm{d}t}{(e^{2t}+1)^2}.$$

Ennek az integrálnak a kiszámítására az $e^{2t}+1 = u$ helyettesítést fogjuk használni: $2e^{2t}\mathrm{d}t = \mathrm{d}u$ és

$$2^2 \int \frac{e^{2t}\mathrm{d}t}{(e^{2t}+1)^2} = 2\int \frac{2e^{2t}\mathrm{d}t}{(e^{2t}+1)^2} = 2\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2} =$$
$$= \frac{-2}{u} + C = \frac{-2}{e^{2t}+1} + C = \frac{-2}{e^t(e^t+e^{-t})} + C = \frac{-e^{-t}}{\left(\frac{e^t+e^{-t}}{2}\right)} + C = \frac{-e^{-t}}{\operatorname{ch} t} + C =$$
$$= \frac{-e^{-t}}{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 t}} + C = \frac{-(\sqrt{1+x^2}-x)}{\sqrt{1+x^2}} + C = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - 1 + C = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C'.$$

□

Második megoldás. Az $x = \operatorname{tg} t$ helyettesítéssel $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \cos t$, $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t}$, így

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(\sqrt{1+x^2})^3} = \int \cos^3 t \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t} = \int \cos t\mathrm{d}t = \sin t + C = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C.$$

Megjegyzés. Hasonlóan az $x = \operatorname{tg} t$ helyettesítéssel kiszámolható a következő általánosabb integrál is:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(\sqrt{1+x^2})^{2n+1}} = \int \frac{(\cos t)^{2n+1}\mathrm{d}t}{\cos^2 t} = \int (\cos t)^{2n-1}\mathrm{d}t = \int (\cos t)^{2(n-1)} \cos t\mathrm{d}t =$$
$$= \int \left(\cos^2 t\right)^{n-1} \cos t\mathrm{d}t = \int \left(1-\sin^2 t\right)^{n-1} \cos t\mathrm{d}t.$$

Ennek kiszámításához az $u = \sin t$ helyettesítést alkalmazzuk: $\mathrm{d}u = \cos t\mathrm{d}t$

$$\int \left(1-\sin^2 t\right)^{n-1} \cos t\mathrm{d}t = \int (1-u^2)^{n-1}\mathrm{d}u = \int \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k (-1)^n u^{2k}\mathrm{d}u =$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k (-1)^k \frac{u^{2k+1}}{2k+1} + C = \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k (-1)^n \frac{1}{2k+1} \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^{2k+1} + C,$$

mivel az $x = \operatorname{tg} t$ alapján $\sin t = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, így $u = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. □

11.5. Feladat. Számítsd ki a következő integrálokat:

(a) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x+\cos x}$;

Megoldás. A $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$ helyettesítést használjuk. Ekkor

$$\mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t, \qquad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

ami alapján

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x+\cos x} = \int \frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2} = \int \frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2+2t+1-t^2} =$$
$$= \int \frac{2\mathrm{d}t}{2+2t} = \int \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \ln|1+t| + C = \ln|1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}| + C.$$

□

(b) $\displaystyle\int \frac{\sin x \mathrm{d}x}{1+\sin^2 x}$;

Első megoldás. Az integrálban $y = \cos x$ helyettesítést alkalmazunk ($\mathrm{d}y = -\sin x\mathrm{d}x$):

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sin x\mathrm{d}x}{1+\sin^2 x} &= \int \frac{\sin x\mathrm{d}x}{1+(1-\cos^2 x)} = \int \frac{\sin x\mathrm{d}x}{2-\cos^2 x}\mathrm{d}x \\
&\overset{(y=\cos x)}{=} \int \frac{-\mathrm{d}y}{2-y^2} = \int \frac{\mathrm{d}y}{y^2-(\sqrt{2})^2} \\
&= \int \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{y-\sqrt{2}} - \frac{1}{y+\sqrt{2}}\right)\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\ln|y-\sqrt{2}| - \ln|y+\sqrt{2}|\right) + C \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{y-\sqrt{2}}{y+\sqrt{2}}\right| + C = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\cos x-\sqrt{2}}{\cos x+\sqrt{2}}\right| + C.
\end{aligned}$$

□

Második megoldás. Ha az integrálban $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$ helyettesítést alkalmazunk először, akkor

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sin x}{1+\sin^2 x}\mathrm{d}x &\overset{(t=\operatorname{tg}\frac{x}{2})}{=} \int \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{1+(\frac{2t}{1+t^2})^2}\cdot\frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2} = \int \frac{4t\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2+(2t)^2} = \int \frac{4t\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2+4t^2} \\
&\overset{(t^2=u)}{=} \int \frac{2\mathrm{d}u}{(1+u)^2+4u} = \int \frac{2\mathrm{d}u}{u^2+6u+1} \\
&= \int \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{u+3-2\sqrt{2}} - \frac{1}{u+3+2\sqrt{2}}\right)\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\ln|u+3-2\sqrt{2}| - \ln|u+3+2\sqrt{2}|\right) + C \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{u+3-2\sqrt{2}}{u+3+2\sqrt{2}}\right| + C = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t^2+3-2\sqrt{2}}{t^2+3+2\sqrt{2}}\right| + C \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{3-2\sqrt{2}+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{3+2\sqrt{2}+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}\right| + C.
\end{aligned}$$

□

(c) $\displaystyle\int \sin 2x\cos 3x\,\mathrm{d}x$;

Első megoldás. Kétszer alkalmazzuk a parciális integrálás képletét:

$$\begin{aligned}
\int \sin 2x\cos 3x\mathrm{d}x &= \int \sin 2x\left(\frac{\sin 3x}{3}\right)'\mathrm{d}x \\
&= \sin 2x\frac{\sin 3x}{3} - \int(\sin 2x)'\frac{\sin 3x}{3}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{3}\sin 2x\sin 3x - \frac{2}{3}\int\cos 2x\sin 3x\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{3}\sin 2x\sin 3x - \frac{2}{3}\int\cos 2x\left(-\frac{\cos 3x}{3}\right)'\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{3}\sin 2x\sin 3x + \frac{2}{3}\cos 2x\frac{\cos 3x}{3} - \frac{2}{3}\int(\cos 2x)'\frac{\cos 3x}{3}\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{3}\sin 2x\sin 3x + \frac{2}{9}\cos 2x\cos 3x + \frac{4}{9}\int \sin 2x \sin 3x\mathrm{d}x,$$

ahonnan

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{4}{9}\right)\int \sin 2x\cos 3x\mathrm{d}x &= \frac{1}{3}\sin 2x\sin 3x + \frac{2}{9}\cos 2x\cos 3x + C\\ \Longleftrightarrow \int \sin 2x\cos 3x\mathrm{d}x &= \frac{3}{5}\sin 2x\sin 3x + \frac{2}{5}\cos 2x\cos 3x + C'\end{aligned}$$

□

Második megoldás. Felhasznájuk, hogy $\sin a\cdot\cos b = \frac{\sin(a+b)+\sin(a-b)}{2}$, így

$$\sin 2x\cos 3x = \frac{\sin 5x - \sin x}{2}.$$

Tehát

$$\int \sin 2x\cos 3x\mathrm{d}x = \int \frac{\sin 5x - \sin x}{2}\mathrm{d}x = -\frac{\cos 5x}{10} + \frac{\cos x}{2} + C.$$

□

(d) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(\sin x + \cos x)^2}$;

Megoldás. Felhasználjuk, hogy $\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, így

$$\begin{aligned}\sin x + \cos x &= \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\cos x\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\cdot\sin x + \sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos x\right)\\ &= \sqrt{2}\cdot\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right).\end{aligned}$$

Ezek alapján

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{(\sin x+\cos x)^2} &= \int \frac{\mathrm{d}x}{2\sin^2(x+\frac{\pi}{4})} = -\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right) + C\\ &= -\frac{1}{2}\cdot\frac{\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)} + C\\ &= -\frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\cos x - \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sin x}{\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\cos x} + C\\ &= -\frac{1}{2}\cdot\frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} + C.\end{aligned}$$

□

(e) $\displaystyle\int \cos 2x\cos 4x\cos 5x\mathrm{d}x$;

Megoldás. Felhasználva, hogy $\cos a\cdot\cos b = \frac{\cos(a+b)+\cos(a-b)}{2}$, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\cos 2x\cos 4x\cos 5x &= \frac{1}{2}\left(\cos(2+4)x + \cos(4-2)x\right)\cdot\cos 5x\\ &= \frac{1}{2}\left(\cos 6x\cos 5x + \cos 2x\cos 5x\right)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{4}\left(\cos(6+5)x + \cos(6-5)x + \cos(2+5)x + \cos(5-2)x\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(\cos 11x + \cos x + \cos 7x + \cos 3x\right).
\end{aligned}
$$

Tehát

$$
\begin{aligned}
\int \cos 2x \cos 4x \cos 5x \mathrm{d}x &= \int \frac{1}{4}\left(\cos 11x + \cos x + \cos 7x + \cos 3x\right)\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{\sin 11x}{11} + \sin x + \frac{\sin 7x}{7} + \frac{\sin 3x}{3}\right) + C\\
&= \frac{\sin x}{4} + \frac{\sin 3x}{12} + \frac{\sin 7x}{28} + \frac{\sin 11x}{44} + C.
\end{aligned}
$$

□

(f) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x + 2\sin x + 3}$;

Megoldás.

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x + 2\sin x + 3} &\overset{(\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t)}{=} \int \frac{\frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2} + 2\cdot\frac{2t}{1+t^2} + 3}\\
&= \int \frac{2\mathrm{d}t}{1-t^2+4t+3(1+t^2)}\\
&= \int \frac{2\mathrm{d}t}{2t^2+4t+4} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+2t+2}\\
&= \int \frac{\mathrm{d}t}{(t+1)^2+1} = \operatorname{arctg}(1+t) + C\\
&= \operatorname{arctg}\left(1 + \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + C.
\end{aligned}
$$

□

(g) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x(2+\cos x - \sin x)}$.

Megoldás.

$$
\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x(2+\cos x-\sin x)} \overset{(\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t)}{=} \int \frac{\frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t}{\frac{2t}{1+t^2}\left(2 + \frac{1-t^2}{1+t^2} - \frac{2t}{1+t^2}\right)} =
$$

$$
= \int \frac{(1+t^2)\mathrm{d}t}{t[2(1+t^2)+(1-t^2)-2t]} = \int \frac{(1+t^2)\mathrm{d}t}{t(t^2-2t+3)} = \int \frac{1}{3}\left(\frac{1}{t} + \frac{2t+2}{t^2-2t+3}\right)\mathrm{d}t =
$$

$$
\overset{(11.3)}{=} \frac{1}{3}\ln|t| + \frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\ln(t^2-2t+3) + \sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{t-1}{\sqrt{2}}\right) + C =
$$

$$
= \frac{1}{3}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + \frac{1}{3}\ln\left(\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} - 2\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 3\right) + \frac{2\sqrt{2}}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}{\sqrt{2}}\right) + C.
$$

□

11.6. Feladat. Számítsd ki a következő irracionális integrálokat:

(a) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$;

Megoldás.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{(\sqrt[6]{x})^3+(\sqrt[6]{x})^2} = \int \frac{6y^5\mathrm{d}y}{y^3+y^2} = 6\int \frac{y^3\mathrm{d}y}{y+1} = 6\int \frac{(y^3+1)-1}{y+1}\mathrm{d}y =$$
$$= 6\int \frac{(y+1)(y^2-y+1)-1}{y+1}\mathrm{d}y = 6\int \left(y^2-y+1-\frac{1}{y+1}\right)\mathrm{d}y =$$
$$= 6\left(\frac{y^3}{3}-\frac{y^2}{2}-\ln|y+1|\right)+C = 2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}-6\ln|\sqrt[6]{x}+1|+C,$$

ahol $y=\sqrt[6]{x}$ és $\mathrm{d}y=(\sqrt[6]{x})'\mathrm{d}x=\dfrac{\mathrm{d}x}{6(\sqrt[6]{x})^5}$, ezért $\mathrm{d}x=6y^5\mathrm{d}y$. □

(b) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[4]{2x-1}}$;

Megoldás. Az $y=\sqrt[4]{2x-1}$ helyettesítést végezzük. Ekkor $\sqrt{2x-1}=y^2$ és

$$\mathrm{d}y=(\sqrt[4]{2x-1})'\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(2x-1)^{-\frac{3}{4}}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}y^{-3}\mathrm{d}x,$$

ahonnan $\mathrm{d}x=2y^3\mathrm{d}y$.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[4]{2x-1}} \overset{(y=\sqrt[4]{2x-1})}{=} \int \frac{2y^3\mathrm{d}y}{y^2-y} = \int \frac{2y^2\mathrm{d}y}{y-1} = 2\int\left(y+1+\frac{1}{y-1}\right)\mathrm{d}y$$
$$= 2\left(\frac{y^2}{2}+y+\ln|y-1|\right)+C = y^2+2y+2\ln|y-1|+C$$
$$= \sqrt{2x-1}+2\sqrt[4]{2x-1}+2\ln|\sqrt[4]{2x-1}-1|+C.$$

□

(c) $\displaystyle\int x^2\sqrt{x^2+4}\mathrm{d}x$;

Első megoldás. Az integrál átírható

$$\int x^2\sqrt{x^2+4}\mathrm{d}x = \int \frac{x^2(x^2+4)}{\sqrt{x^2+4}}\mathrm{d}x = \int \frac{x^4+4x^2}{\sqrt{x^2+4}}\mathrm{d}x$$

alakba, melynek a megoldását

$$\int \frac{x^4+4x^2}{\sqrt{x^2+4}}\mathrm{d}x = (q_0+q_1x+q_2x^2+q_3x^3)\sqrt{x^2+4}+\lambda\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+4}}$$

alakban keressük. Deriválva mindkét oldalt kapjuk, hogy

$$\frac{x^4+4x^2}{\sqrt{x^2+4}} = (q_1+2q_2x+3q_3x^2)\sqrt{x^2+4}+(q_0+q_1x+q_2x^2+q_3x^3)\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}+\frac{\lambda}{\sqrt{x^2+4}}$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\frac{x^4+4x^2}{\sqrt{x^2+4}} = (q_1+2q_2x+3q_3x^2)\frac{x^2+4}{\sqrt{x^2+4}}+(q_0+q_1x+q_2x^2+q_3x^3)\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}+\frac{\lambda}{\sqrt{x^2+4}}$$
$$\Longleftrightarrow\ x^4+4x^2=(q_1+2q_2x+3q_3x^2)x^2+4+(q_0+q_1x+q_2x^2+q_3x^3)x+\lambda$$
$$\Longleftrightarrow\ x^4+4x^2=4q_3x^4+3q^2x^3+(2q_1+12q_3)x^2+(8q_2+q_0)x+(\lambda+4q_1)$$

$$\iff \begin{cases} 1 = 4q_3x^4 \\ 0 - 3q^2x^3 \\ 4 = 2q_1 + 12q_3 \\ 0 = 8q_2 + q_0 0 = \lambda + 4q_1 \end{cases} \iff q_3 = \frac{1}{4},\ q_2 = 0,\ q_1 = \frac{1}{2},\ q_0 = 0, \lambda = -2.$$

Tehát

$$\begin{aligned} \int x^2\sqrt{x^2+4}\mathrm{d}x &= \int \frac{x^4+4x^2}{\sqrt{x^2+4}}\mathrm{d}x = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^3\right)\sqrt{x^2+4} - 2\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+4}} \\ &= \frac{1}{4}(x^2+2)x\sqrt{x^2+4} - 2\ln(x+\sqrt{x^2+4}) + C. \end{aligned}$$

□

Második megoldás. A integrálban $x = 2\operatorname{sh} t$ helyettesítést fogunk alkalmazni. Ekkor

$$\mathrm{d}x = 2\operatorname{ch} t\mathrm{d}t, \quad x^2 = 4\operatorname{sh}^2 t = 2[\operatorname{ch}(2t) - 1], \quad x^2 + 4 = 4(\operatorname{sh}^2 t + 1) = 4\operatorname{ch}^2 t,$$

$$e^t = \frac{x}{2} + \sqrt{(\frac{x}{2})^2 + 1} = \frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}, \qquad e^{-t} = -\frac{x}{2} + \sqrt{(\frac{x}{2})^2+1} = \frac{-x+\sqrt{x^2+4}}{2},$$

$$t = \ln\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}.$$

Az integrált pedig a következőképpen számítjuk ki:

$$\begin{aligned} \int x^2\sqrt{x^2+4}\mathrm{d}x &= \int 2(\operatorname{ch}(2t)-1)\cdot 2\operatorname{ch} t\cdot 2\operatorname{ch} t\mathrm{d}t = \int 8\cdot(\operatorname{ch}(2t)-1)\cdot\operatorname{ch}^2 t\mathrm{d}t \\ &= \int 4\cdot(\operatorname{ch}(2t)-1)\cdot(\operatorname{ch}(2t)+1)\mathrm{d}t \\ &= \int 4\cdot(\operatorname{ch}^2(2t)-1)\mathrm{d}t = \int 4\cdot(\frac{\operatorname{ch}(4t)+1}{2} - 1)\mathrm{d}t \\ &= 2\int(\operatorname{ch}(4t-1)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\operatorname{sh}(4t) - 2t + C = \frac{e^{4t}-e^{-4t}}{4} - 2t + C \\ &= \frac{1}{4}\left[\left(\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}\right)^4 - \left(\frac{-x+\sqrt{x^2+4}}{2}\right)^4\right] - 2\ln\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2} + C \\ &= \frac{1}{2^6}\left[\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)^4 - \left(-x+\sqrt{x^2+4}\right)^4\right] - 2\ln(x+\sqrt{x^2+4}) + C' \\ &= \frac{1}{2^4}\left[\left(x^2+2+x\sqrt{x^2+4}\right)^2 - \left(x^2+2-x\sqrt{x^2+4}\right)^2\right] \\ &\quad - 2\ln(x+\sqrt{x^2+4}) + C' \\ &= \frac{1}{4}(x^2+2)\cdot x\sqrt{x^2+4} - 2\ln(x+\sqrt{x^2+4}) + C'. \end{aligned}$$

□

(d) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^5\sqrt{x^2-1}}$;

Megoldás. Előbb egy $x = \frac{1}{t}$ helyettesítést végzünk:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^5\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{t^6}{\sqrt{1-t^2}}\cdot\left(-\frac{\mathrm{d}t}{t^2}\right) = \int \frac{-t^4}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t,$$

majd a következő alakban keressük a megoldást:

$$\int \frac{-t^4}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t = (q_0 + q_1 t + q_2 t^2 + q_3 t^3)\sqrt{1-t^2} + \lambda \int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}},$$

ahol $q_0, q_1, q_2, q_3, \lambda \in \mathbb{R}$. Ezt az összefüggést deriválva kapjuk, hogy

$$\frac{-t^4}{\sqrt{1-t^2}} = (q_1 + 2q_2 t + 3q_3 t^2)\sqrt{1-t^2} + (q_0 + q_1 t + q_2 t^2 + q_3 t^3)\frac{-t}{\sqrt{1-t^2}} + \frac{\lambda}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$\iff \frac{-t^4}{\sqrt{1-t^2}} = (q_1 + 2q_2 t + 3q_3 t^2)\frac{1-t^2}{\sqrt{1-t^2}} + (q_0 + q_1 t + q_2 t^2 + q_3 t^3)\frac{-t}{\sqrt{1-t^2}} + \frac{\lambda}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$\iff -t^4 = (\lambda + q_1) + (2q_2 - q_0)t + (3q_3 - 2q_1)t^2 - 3q_2 t^3 - 4q_3 t^4$$

$$\iff \begin{cases} 0 = \lambda + q_1 \\ 0 = 2q_2 - q_0 \\ 0 = 3q_3 - 2q_1 \\ 0 = -3q_2 \\ -1 = -4q_3 \end{cases} \iff q_0 = 0,\ q_1 = \frac{3}{8},\ q_2 = 0,\ q_3 = \frac{1}{4},\ \lambda = -\frac{3}{8}.$$

Tehát

$$\begin{aligned} \int \frac{\mathrm{d}x}{x^5\sqrt{x^2-1}} &\overset{(x=\frac{1}{t})}{=} \int \frac{-t^4}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t \\ &= \left(\frac{3}{8}t + \frac{1}{4}t^3\right)\sqrt{1-t^2} - \frac{3}{8}\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} \\ &= \frac{1}{8}(3t + 2t^3)\sqrt{1-t^2} - \frac{3}{8}\arcsin t + C \\ &= \frac{1}{8}\left(\frac{3}{x} + \frac{2}{x^3}\right)\frac{\sqrt{x^2-1}}{x} - \frac{3}{8}\arcsin\frac{1}{x} + C \\ &= \frac{3x^2+2}{8x^4}\sqrt{x^2-1} - \frac{3}{8}\arcsin\frac{1}{x} + C. \end{aligned}$$

□

(e) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x;$

Megoldás. Az integrál átírható a következő alakba

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \int x^{-\frac{1}{2}}(1 + x^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}}\mathrm{d}x.$$

Mivel $\frac{m+1}{n} = \frac{-\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{4}} = 2 \in \mathbb{Z}$, ezért a következő Csebisev típusú helyettesítést alkalmazzuk: $1 + x^{\frac{1}{4}} = z^3$. Ekkor $x = (z^3-1)^4$, ahonnan $\mathrm{d}x = 12z^2(z^3-1)^3\mathrm{d}z$ és $x^{\frac{1}{2}} = (z^3-1)^2$. Azt integrált pedig a következőképpen számoljuk ki:

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x &= \int x^{-\frac{1}{2}}(1 + x^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}}\mathrm{d}x = \int (z^3-1)^{-2}\cdot z \cdot 12z^2(z^3-1)^3\mathrm{d}z \\ &= \int 12z^3(z^3-1)\mathrm{d}z = 12\int (z^6 - z^3)\mathrm{d}z = 12\left(\frac{z^7}{7} - \frac{z^4}{4}\right) + C \\ &= \frac{12}{7}z^7 - 3z^4 + C = \frac{12}{7}(1+\sqrt[4]{x})^{\frac{7}{3}} - 3(1+\sqrt[4]{x})^{\frac{4}{3}} + C. \end{aligned}$$

□

(f) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{1+x^4}}$;

Megoldás. Az integrál átírható $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{1+x^4}} = \int (1+x^4)^{-\frac{1}{4}}\mathrm{d}x$. Mivel $\frac{m+1}{n}+p = \frac{0+1}{4}-\frac{1}{4} = 0 \in \mathbb{Z}$, ezért az $1+x^{-4} = z^4$ Csebisev helyettesítést alkalmazzuk, ahonnan $z = \sqrt[4]{1+x^{-4}}$ és

$$4z^3\mathrm{d}z = -4x^{-5}\mathrm{d}x \iff z^3\mathrm{d}z = -x^{-4}\frac{\mathrm{d}x}{x} \iff \frac{z^3\mathrm{d}z}{1-z^4} = \frac{\mathrm{d}x}{x} \iff$$
$$\iff \frac{z^2\mathrm{d}z}{1-z^4} = \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt[4]{1+x^{-4}}} \iff \frac{z^2\mathrm{d}z}{1-z^4} = \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{1+x^4}}.$$

Az integrált a következőképpen számoljuk ki:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{1+x^4}} &= \int \frac{z^2\mathrm{d}z}{1-z^4}\mathrm{d}z = \int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-z^2} - \frac{1}{1+z^2}\right)\mathrm{d}z \\
&= \int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-z} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+z} - \frac{1}{1+z^2}\right)\mathrm{d}z \\
&\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{1-z} + \frac{1}{1+z} - \frac{2}{1+z^2}\right)\mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{4}\cdot\ln|1+z| - \frac{1}{4}\cdot\ln|1-z| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} z + C \\
&= \frac{1}{4}\cdot\ln\left|\frac{1+z}{1-z}\right| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} z + C \\
&= \frac{1}{4}\cdot\ln\left|\frac{1+\sqrt[4]{1+x^{-4}}}{-1+\sqrt[4]{1+x^{-4}}}\right| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\sqrt[4]{1+x^{-4}} + C \\
&= \frac{1}{4}\cdot\ln\left|\frac{x+\sqrt[4]{1+x^4}}{-x+\sqrt[4]{1+x^4}}\right| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x} + C.
\end{aligned}$$

□

(g) $\displaystyle\int \frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x$;

Megoldás. Az integrálban $y = \sqrt[6]{x}$ helyettesítést végzünk, így $x = y^6$, $\mathrm{d}x = 6y^5\mathrm{d}y$ és

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x &= \int \frac{y}{y^3+y^2}\cdot 6y^5\mathrm{d}y = \int \frac{6y^4}{y+1}\mathrm{d}y = 6\int \frac{y^4-1+1}{y+1}\mathrm{d}y \\
&= 6\int\left((y^2+1)(y-1) + \frac{1}{y+1}\right)\mathrm{d}y \\
&= 6\int\left(y^3 - y^2 + y - 1 + \frac{1}{y+1}\right)\mathrm{d}y \\
&= 6\left(\frac{y^4}{4} - \frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{2} - y + \ln|y+1|\right) + C \\
&= \frac{3}{2}\sqrt[6]{x^4} - 2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} - 6\sqrt[6]{x} + 6\ln|\sqrt[6]{x}+1| + C.
\end{aligned}$$

□

(h) $\displaystyle\int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\mathrm{d}x$;

Megoldás. Az integrál átírható az

$$\int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\mathrm{d}x = \int \frac{x(x-1)}{\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x = \int \frac{x^2-x}{\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x$$

alakba, így a megoldását a következő formában keressük:

$$\int \frac{x^2-x}{\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x = (q_0+q_1x)\sqrt{x^2-1} + \lambda\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}},$$

ahol $q_0, q_1, \lambda \in \mathbb{R}$. A reláció mindkét oldalát deriválva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\frac{x^2-x}{\sqrt{x^2-1}} &= q_1\sqrt{x^2-1} + (q_0+q_1x)\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} + \frac{\lambda}{\sqrt{x^2-1}},\\
\iff\ & x^2-x = q_1(x^2-1)+(q_0+q_1x)x+\lambda\\
\iff\ & x^2-x = 2q_1x^2+q_0x+(\lambda-q_1)
\end{aligned}$$

$$\iff \begin{cases} 1 = 2q_1 \\ -1 = q_0 \\ 0 = \lambda - q_1 \end{cases} \iff q_0=-1,\quad q_1=\frac{1}{2},\quad \lambda=\frac{1}{2}.$$

Tehát

$$\begin{aligned}
\int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\mathrm{d}x &= \int \frac{x^2-x}{\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x = \left(-1+\frac{1}{2}x\right)\sqrt{x^2-1} + \frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}}\\
&= \frac{1}{2}(x-2)\sqrt{x^2-1} + \frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right| + C.
\end{aligned}$$

□

(i) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt[3]{(x^3+2)^5}}$.

Megoldás. Az integrál átírható a következőképpen:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt[3]{(x^3+2)^5}} = \int x^{-2}(x^3+2)^{-\frac{5}{3}}\mathrm{d}x.$$

Mivel $\frac{m+1}{n}+p = \frac{-2+1}{3} - \frac{5}{3} = -2 \in \mathbb{Z}$, ezért $1+2x^{-3} = z^3$ Csebisev helyettesítést alkalmazunk. Innen kapjuk, hogy $z=\sqrt[3]{1+2x^{-3}}$, $x^{-3}=\frac{z^3-1}{2}$,

$$-6x^{-4}\mathrm{d}x = 3z^2\mathrm{d}z \iff -2x^{-3}\frac{\mathrm{d}x}{x} = z^2\mathrm{d}z \iff \frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{z^2\mathrm{d}z}{1-z^3}.$$

Ezek alapján az integrált a következőképpen számoljuk ki:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt[3]{(x^3+2)^5}} &= \int x^{-2}(x^3+2)^{-\frac{5}{3}}\mathrm{d}x = \int x^{-6}(1+2x^{-3})^{-\frac{5}{3}}\frac{\mathrm{d}x}{x}\\
&= \int\left(\frac{z^3-1}{2}\right)^2 z^{-5}\frac{z^2\mathrm{d}z}{1-z^3} = \int\frac{1}{2}(1-z^3)z^{-3}\mathrm{d}z\\
&= \frac{1}{2}\int(z^{-3}-1)\mathrm{d}z = \frac{1}{-4}z^{-2} - \frac{1}{2}z + C\\
&= \frac{1}{-4}(1+2x^{-3})^{-\frac{2}{3}} - \frac{1}{2}(1+2x^{-3})^{\frac{1}{3}} + C\\
&= \frac{x^2}{-4(\sqrt[3]{x^3+1})^2} - \frac{\sqrt[3]{x^3+2}}{2x} + C.
\end{aligned}$$

□

11.7. Feladat. Számítsd ki a következő algebrai integrálokat:

(a) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)\sqrt{x^2-3x+2}};$

Megoldás. Az integrálban $t = \frac{1}{x-1}$ helyettesítést végzünk: $x = \frac{t+1}{t}$, $\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}t}{t^2}$. Az integrált a következőképpen számoljuk ki:

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)\sqrt{x^2-3x+2}} &= \int \frac{t}{\sqrt{\left(\frac{t+1}{t}\right)^2 - 3\frac{t+1}{t} + 2}} \cdot \left(-\frac{\mathrm{d}t}{t^2}\right) \\ &= \int \frac{-\mathrm{d}t}{\sqrt{(t+1)^2 - 3(t+1)t + 2t^2}} \\ &= \int \frac{-\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t}} = 2\sqrt{1-t} + C \\ &= 2\sqrt{1 - \frac{1}{x-1}} + C = 2\sqrt{\frac{x-2}{x-1}} + C.\end{aligned}$$

□

(b) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x^2+2x+2}};$

Megoldás. Mivel a gyök alatt az x^2 együtthatója pozitív, ezért $\sqrt{x^2+2x+2} = x + z$ helyettesítést végzünk. A reláció mindkét oldalát négyzetre emelve

$$x^2 + 2x + 2 = x^2 + 2xz + z^2 \iff x(2-2z) = z^2 - 2 \iff x = \frac{z^2-2}{2(1-z)},$$

ahonnan $1 + \sqrt{x^2+2x+2} = 1 + z + \frac{z^2-2}{2-2z} = -\frac{z^2}{2(1-z)}$ és

$$\mathrm{d}x = \left(\frac{z^2-2}{2-2z}\right)' \mathrm{d}z = \frac{-z^2+2z-2}{2(1-z)^2}\mathrm{d}z.$$

Ez után az integrált a következőképpen számoljuk ki:

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x^2+2x+2}} &= \int \frac{-2(1-z)}{z^2} \cdot \frac{-z^2+2z-2}{2(1-z)^2}\mathrm{d}z \\ &= \int \frac{z^2-2z+2}{z^2(1-z)}\mathrm{d}z \overset{(*)}{=} \int \left(\frac{2}{z^2} + \frac{1}{1-z}\right)\mathrm{d}z \\ &= -\frac{2}{z} - \ln|z-1| + C \\ &= \frac{-2}{-x+\sqrt{x^2+2x+2}} - \ln(-1-x+\sqrt{x^2+2x+2}) + C \\ &= -\frac{x+\sqrt{x^2+2x+2}}{x+1} - \ln(-1-x+\sqrt{x^2+2x+2}) + C.\end{aligned}$$

□

(c) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}};$

Megoldás. Az integrálban $t = \frac{1}{x+1}$ helyettesítést fogunk végezni: $x = \frac{1-t}{t}$, $\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}t}{t^2}$, ahonnan

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}} &= \int \frac{t}{\sqrt{\left(\frac{1-t}{t}\right)^2 + \frac{1-t}{t} + 1}} \cdot \left(-\frac{\mathrm{d}t}{t^2}\right) \\
&= \int \frac{-\mathrm{d}t}{\sqrt{(1-t)^2 + (1-t)t + t^2}} \\
&= \int \frac{-\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2 - t + 1}} = \int \frac{-\mathrm{d}t}{\sqrt{(t-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}} \\
&= -\ln\left|t - \frac{1}{2} + \sqrt{t^2 - t + 1}\right| + C \\
&= -\ln\left|\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2} + \sqrt{\left(\frac{1}{x+1}\right)^2 - \left(\frac{1}{x+1}\right) + 1}\right| + C \\
&= \ln\left|\frac{1 - x + 2\sqrt{x^2+x+1}}{2(x+1)}\right| + C.
\end{aligned}$$

□

(d) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{-x^2+5x-6}}$;

Megoldás. Az integrálban $x = \frac{1}{t}$ helyettesítést alkalmazunk: $\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ és

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{-x^2+5x-6}} &= \int \frac{t}{\sqrt{-\frac{1}{t^2} + \frac{5}{t} - 6}} \cdot \left(-\frac{\mathrm{d}t}{t^2}\right) = \int \frac{-\mathrm{d}t}{\sqrt{-6t^2+5t-1}} \\
&= \int -\frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\frac{1}{12^2} - \left(t - \frac{5}{12}\right)^2}} = -\frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \arcsin\frac{t - \frac{5}{12}}{\frac{1}{12}} + C \\
&= -\frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \arcsin(12t-5) + C = -\frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \arcsin\frac{12-5x}{x} + C.
\end{aligned}$$

□

(e) $\displaystyle\int \frac{x\mathrm{d}x}{(x-1)\sqrt{1+x-x^2}}$;

Megoldás. Mivel a gyök alatt a szabadtag pozitív, ezért $\sqrt{1+x-x^2} = 1+xz$ helyettesítést alkalmazunk. A reláció mindkét oldalát négyzetre emelve kapjuk, hogy

$$1 + x - x^2 = 1 + 2xz + x^2z^2 \iff 1 - 2z = x(1+z^2) \iff x = \frac{1-2z}{1+z^2},$$

ahonnan $\mathrm{d}x = 2\frac{z^2-z-1}{(1+z^2)^2}\mathrm{d}z$, $\sqrt{1+x-x^2} = \frac{1+z-z^2}{1+z^2}$. Az integrált pedig a következőképpen számoljuk ki:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x\mathrm{d}x}{(x-1)\sqrt{1+x-x^2}} &= \int \frac{\frac{1-2z}{1+z^2} \cdot \frac{2(z^2-z-1)}{(1+z^2)^2}\mathrm{d}z}{-\frac{z(2+z)}{1+z^2} \cdot \frac{1+z-z^2}{1+z^2}} = \int \frac{2(1-2z)}{(1+z^2)z(2+z)}\mathrm{d}z \\
&= \int \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z+2} - \frac{2}{1+z^2}\right)\mathrm{d}z
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \ln|z| - \ln|z+2| - 2\operatorname{arctg} z + C \\
&= \ln\left|\frac{\sqrt{1+x-x^2}-1}{x}\right| - \ln\left|\frac{\sqrt{1+x-x^2}-1+2x}{x}\right| \\
&\quad - 2\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{1+x-x^2}-1}{x}\right) + C \\
&= \ln\left|\frac{-1+\sqrt{1+x-x^2}}{2x-1+\sqrt{1+x+x^2}}\right| - 2\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{1+x-x^2}-1}{x}\right) + C.
\end{aligned}
$$

□

(f) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{1-x^2}+1-x^2}$;

Megoldás. Az gyök alatti másodfokú polinom két gyöke $x_1 = 1$ és $x_2 = -1$, ezért a $\sqrt{1-x^2} = z(x-1)$ helyettesítést végezzük, ahonnan négyzetre emeléssel kapjuk, hogy

$$(1-x^2) = z^2(1-x)^2 \iff 1+x = z^2(1-x) \iff x(1+z^2) = z^2-1 \iff x = \frac{z^2-1}{z^2+1},$$

ahonnan

$$\mathrm{d}x = \left(\frac{z^2-1}{z^2+1}\right)'\mathrm{d}z = \frac{4z}{(z^2+1)^2}\mathrm{d}z, \quad \sqrt{1-x^2} = \frac{-2z}{z^2+1}.$$

Az integrált a következőképpen számoljuk ki:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{1-x^2}+(1-x^2)} &= \int \frac{1}{2\cdot\frac{-2z}{z^2+1}+\frac{4z^2}{(z^2+1)^2}} \cdot \frac{4z}{(z^2+1)^2}\mathrm{d}z \\
&= \int \frac{4z\mathrm{d}z}{-4z(z^2+1)+4z^2} = \int \frac{-\mathrm{d}z}{z^2-z+1} \\
&= \int \frac{-\mathrm{d}z}{(z-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} = -\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \operatorname{arctg}\frac{z-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + C \\
&= -\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \operatorname{arctg}\frac{2z-1}{\sqrt{3}} + C \\
&= -\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}-1}{\sqrt{3}} + C \\
&= -\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{1-x^2}-1+x}{\sqrt{3}(1-x)} + C.
\end{aligned}
$$

□

(g) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

Megoldás. Az $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}}$ integrálra alkalmazzuk a parciális integrálás képletét:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}} &= \int (x)'\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - \int x\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)'\mathrm{d}x \\
&= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - \int x\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)'\mathrm{d}x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - \int x\frac{x}{(\sqrt{1+x^2})^3}\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

$$= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - \int \frac{x^2+1-1}{(\sqrt{1+x^2})^3}\mathrm{d}x$$
$$= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x + \int \frac{1}{(\sqrt{1+x^2})^3}\mathrm{d}x,$$

ahonnan

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x = 2\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = 2\ln|x+\sqrt{x^2+1}| - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C.$$

□

12. fejezet

Riemann-Stieltjes-integrálok

12.1. Elméleti összefoglaló

12.1.1. Riemann-Stieltjes integrálok

Jelölések:

$f \in R[a,b]$	:	f Riemann-integrálható az $[a,b]$ intervallumon.
$f \in RS_g[a,b]$	:	f függvény Riemann-Stieljes-integrálható a g függvényre vonatkozóan.
$f \in B[a,b]$	:	f korlátos az $[a,b]$ intervallumon.

12.1.1.1. Tulajdonságok, számítási szabályok

A következő paragrafusban $f, g, f_1, f_2 \colon [a,b] \to \mathbb{R}$.

(1) Ha f folytonos és g növekvő, akkor f függvény Riemann-Stieljes-integrálható a g függvényre vonatkozóan ($f \in RS_g[a,b]$).

(2) Ha f folytonos és g korlátos változású (ami egyenértékű azzal, hogy g felírható két monoton függvény különbségeként), akkor f függvény Riemann-Stieljes-integrálható a g függvényre vonatkozóan ($f \in RS_g[a,b]$).

(3) (*Riemann-Stieltjes-integrál visszavezetése Riemann-integrálra*) Ha az f függvény Riemann-Stieljes-integrálható a g függvényre vonatkozóan ($f \in RS_g[a,b]$) és g deriválható úgy, hogy g' derivált függvény Riemann-Stieljes-integrálható a f függvényre vonatkozóan ($g' \in R[a,b]$), akkor fg' Riemann-integrálható ($fg' \in R[a,b]$) és

$$\int_a^b f \mathrm{d}g = \int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x.$$

Megjegyzés: ha g folytonosan deriválható, akkor g' Riemann-integrálható ($g' \in R[a,b]$) és így ebben az esetben teljesül a fenti állítás.

(4) (*Parciális integrálás*) Ha f függvény Riemann-Stieljes-integrálható a g függvényre vonatkozóan ($f \in RS_g[a,b]$), akkor a g függvény Riemann-Stieljes-integrálható a f függvényre vonatkozóan ($g \in RS_f[a,b]$) és

$$\int_a^b g \mathrm{d}f = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f \mathrm{d}g.$$

(5) Ha f korlátos és Riemann-Stieltjes-integrálható az $[a,b]$ intervallumon g-re vonatkozóan ($f \in RS_g[a,b]$), g növekvő függvény és $c \in (a,b)$ az intervallum egy belső pontja, akkor

f Riemann-Stieltjes-integrálható az $[a, c]$ és $[c, b]$ intervallumokon is a g-re vonatkozóan ($f \in RS_g[a, c] \cap RS_g[c, b]$) és teljesül, hogy

$$\int_a^b f \mathrm{d}g = \int_a^c f \mathrm{d}g + \int_c^b f \mathrm{d}g.$$

(6) Ha $c \in (a, b)$ és az f korlátos függvény Riemann-Stieltjes-integrálható az $[a, c]$ és $[c, b]$ intervallumokon a g-re vonatkozóan ($f \in B[a, b] \cap RS_g[a, c] \cap RS_g[c, b]$) és a g függvény folytonos a c pontban, akkor f Riemann-Stieltjes-integrálható a teljes $[a, b]$ intervallumon a g-re vonatkozóan ($f \in RS_g[a, b]$), valamint teljesül az alábbi összefüggés

$$\int_a^b f \mathrm{d}g = \int_a^c f \mathrm{d}g + \int_c^b f \mathrm{d}g.$$

(7) Ha f_1 és f_2 függvények Riemann-Stieljes-integrálhatók a g függvényre vonatkozóan ($f_1, f_2 \in RS_g[a, b]$) és $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, akkor az $\alpha f_1 + \beta f_2$ függvény Riemann-Stieljes-integrálható a g függvényre vonatkozóan ($\alpha f_1 + \beta f_2 \in RS_g[a, b]$), valamint

$$\int_a^b (\alpha f_1 + \beta f_2) \mathrm{d}g = \alpha \int_a^b f_1 \mathrm{d}g + \beta \int_a^b f_2 \mathrm{d}g.$$

(8) Ha $g_1, g_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ függvények, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ valós számok és az f Riemann-Stieltjes integrálható az $[a, b]$-n a g_1 és g_2 függvényekre vonatkozóan ($f \in RS_{g_1}[a, b] \cap RS_{g_2}[a, b]$), akkor az f Riemann-Stieltjes-integrálható az $[a, b]$-n az $\alpha g_1 + \beta g_2$ függvényre vonatkozóan is ($f \in RS_{\alpha g_1 + \beta g_2}[a, b]$), valamint teljesül az alábbi összefüggés

$$\int_a^b f \mathrm{d}(\alpha g_1 + \beta g_2) = \alpha \int_a^b f \mathrm{d}g_1 + \beta \int_a^b f \mathrm{d}g_2.$$

(9) Ha $g \equiv \alpha$ állandó függvény, akkor tetszőleges f függvény Riemann-Stieljes-integrálható a g függvényre vonatkozóan ($f \in RS_g[a, b]$) és $\int_a^b f \mathrm{d}g = 0$.

(10) Ha $f \equiv \alpha$ állandó függvény, akkor tetszőleges g függvény esetén f függvény Riemann-Stieljes-integrálható a g függvényre vonatkozóan ($f \in RS_g[a, b]$) és $\int_a^b \alpha[g(b) - g(a)]$.

12.1.2. Görbe menti integrálok (vonalintegrálok)

12.1.2.1. Elsőfajú vonalintegrál

Legyen $\gamma \colon [a, b] \to \mathbb{R}^3$ egy térgörbe, vagyis $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Ha $f \colon D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ egy háromváltozós függvény, akkor *az f függvény γ görbe menti elsőfajú vonalintegrálja*

$$\int_\gamma f(x, y, z) \mathrm{d}s = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} \mathrm{d}t.$$

12.1. Megjegyzés

Az elsőfajú vonalintegrál fizikai jelentése: egy, a γ görbe mentén elhelyezkedő, f sűrűségű inhomogén anyagi drót tömegét számolja:

$$M = \int_\gamma f \mathrm{d}s.$$

Az anyagi drót $G = G(x_G, y_G, z_G)$ súlypontjának a koordinátái:

$$x_G = \frac{1}{M} \int_\gamma x f(x, y, z) \mathrm{d}s, \quad y_G = \frac{1}{M} \int_\gamma y f(x, y, z) \mathrm{d}s, \quad z_G = \frac{1}{M} \int_\gamma z f(x, y, z) \mathrm{d}s.$$

Ha $f(x, y, z) = 1$ minden $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ esetén, akkor $\displaystyle\int_\gamma f \mathrm{d}s = \int_\gamma \mathrm{d}s$ a c görbe (ív)hosszát számolja. ◇

12.2. Megjegyzés
Ha $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ egy síkgörbe, akkor az elsőfajú vonalintegrál az

$$\int_\gamma f(x,y)\mathrm{d}s = \int_a^b f(x(t), y(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\mathrm{d}t$$

alakba írható. ◇

12.3. Megjegyzés
Sajátos esetben, ha a $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ síkgörbe képe egy $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény grafikonja (vagyis $\gamma(t) = (t, \varphi(t))$, akkor az előbbi képlet az

$$\int_\gamma f(x,y)\mathrm{d}s = \int_a^b f(x, \varphi(x))\sqrt{1 + (\varphi'(x))^2}\mathrm{d}x$$

alakba írható. ◇

12.1.2.2. Másodfajú vonalintegrál

Adottak a $P, Q, R\colon D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ háromváltozós függvények és a $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^3$ (irányított) térgörbe $((\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$. A

$$\int_\gamma P(x,y,z)\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\mathrm{d}y + R(x,y,z)\mathrm{d}z =$$
$$\int_a^b P(x(t),y(t),z(t))\cdot x'(t) + Q(x(t),y(t),z(t))\cdot y'(t) + R(x(t),y(t),z(t))\cdot z'(t)\mathrm{d}t \quad (12.1)$$

mennyiséget a γ *irányított görbe menti másodfajú vonalintegrálnak* nevezzük.

12.4. Megjegyzés
A másodfajú vonalintegrál a P, Q, R függvények által leírt erőtérben egy anyagi pont által végzett munkát számolja, miközben az halad a γ görbe $\gamma(a)$ kezdőpontjából a $\gamma(b)$ végpontjába. ◇

12.5. Megjegyzés
Ha $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ egy síkgörbe, akkor a másodfajú vonalintegrál az

$$\int_\gamma P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \int_a^b P(x(t),y(t))\cdot x'(t) + Q(x(t),y(t))\cdot y'(t)\mathrm{d}t$$

alakot ölti. ◇

12.6. Megjegyzés
Sajátos esetben, ha a $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ síkgörbe képe egy $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ függvény grafikonja (vagyis $\gamma(t) = (t, \varphi(t))$, akkor az előbbi képlet az

$$\int_\gamma P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \int_a^b P(x,\varphi(x))\cdot 1 + Q(x,\varphi(x))\cdot \varphi'(x)\mathrm{d}x$$

alakot ölti. ◇

12.1.3. A másodfajú vonalintegrál úttól való függetlenségének a kapcsolata a teljes differenciállal

Tegyük fel, hogy $D \subseteq \mathbb{R}^3$ egyszeresen összefüggő tartomány és a $P, Q, R\colon D \to \mathbb{R}$ függvények folytonosak. Ekkor annak szükséges és elégséges feltétele, hogy az (12.1) másodfajú vonalintegrál független legyen az úttól (a rögzített kezdő- és végpont között) az, hogy létezzen egy $V\colon D \to \mathbb{R}$ differenciálható függvény, amelynek a teljes differenciálja

$$\mathrm{d}V = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z.$$

(1) Ha azt is tudjuk, hogy P, Q, R parciálisan deriválhatók a D-n és a parciális deriváltjaik folytonosak, akkor annak szükséges és elégséges feltétele, hogy létezzen ilyen V az, hogy

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$
$$\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y},$$
$$\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}.$$

(2) Ha létezik ilyen V, akkor minden $(x, y, z) \in D$ esetén

$$V(x, y, z) = \int_{x_0}^{x} P(t, y_0, z_0)\mathrm{d}t + \int_{y_0}^{y} Q(x, t, z_0)\mathrm{d}t + \int_{z_0}^{z} R(x, y, t)\mathrm{d}t.$$

(3) Ebben az esetben azt mondjuk, hogy a $V : D \to \mathbb{R}$ függvény az

$$F : D \to \mathbb{R}^3, \quad F(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$$

vektormezőnek egy primitívje.

12.7. Megjegyzés
Fizikában egy olyan erőteret, amelyben az erőtér hatására végzett munka egy-egy tetszőlegesen választott kezdő- és végpont között független az úttól, *konzervatív erőtérnek* nevezünk. A V függvényt az $F = (P, Q, R)$ konzervatív erőtér *potenciáljának* nevezzük. ◇

12.8. Megjegyzés
A fenti képletek kétdimenziós esetben a következő alakba írhatók:

$$\mathrm{d}V = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y;$$
$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x};$$
$$V(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(t, y_0)\mathrm{d}t + \int_{y_0}^{y} Q(x, t)\mathrm{d}t.$$

◇

12.2. Feladatok

12.2.1. Riemann-Stieltjes-integrálok

12.1. Feladat. Számítsd ki a következő Riemann-Stieltjes-integrálokat:

(a) $\displaystyle\int_0^1 x\mathrm{d}(e^x)$;

(b) $\displaystyle\int_0^\pi \sin x\mathrm{d}(\sin x)$;

(c) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos x\mathrm{d}(\operatorname{tg} x)$;

(d) $\displaystyle\int_1^2 x\mathrm{d}(\ln x)$;

(e) $\displaystyle\int_3^8 1\mathrm{d}(\sqrt{x})$;

(f) $\displaystyle\int_{-2}^6 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}|x|$.

12.2. Feladat. Legyen $f, g\colon [0,2] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in [0,1], \\ x, & \text{ha } x \in (1,2] \end{cases} \quad \text{és} \quad g(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } x \in [0,1), \\ 2, & \text{ha } x \in [1,2]. \end{cases}$$

Bizonyítsd be, hogy $f \in RS_g[0,2]$ és számítsd ki az $\int_0^2 f\mathrm{d}g$ Riemann-Stieltjes-integrált.

12.3. Feladat. Bizonyítsd be, hogy f függvény Riemann-Stieltjes-integrálható és számítsd ki az $\int_a^b f\mathrm{d}g$ Riemann-Stieltjes-integrált, ha:

(a) $f(x) = x^2, \quad g(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{ha } x < 0 \\ 0 & \text{ha } x = 0 \\ 1 & \text{ha } x > 0 \end{cases}, \quad a = -1,\ b = 1.$

(b) $f(x) = \max\{1, x^2\}, \quad g(x) = x^2, \quad a = 0,\ b = 2.$

(c) $f(x) = x, \quad g(x) = [e^x]$ (az e^x egészrésze), $\quad a = 0,\ b = 2.$

12.2.2. Elsőfajú vonalintegrálok

12.4. Feladat. Számítsd ki a következő elsőfajú vonalintegrálokat:

(a) $\displaystyle\int_\gamma xy\mathrm{d}s$, ahol $\gamma(t) = (t, t^2)$, $t \in [0,1]$;

(b) $\displaystyle\int_\gamma y^5\mathrm{d}s$, ahol a γ görbe képét az $x = \dfrac{y^4}{4}$, $y \in [0,2]$ összefüggések adják meg;

(c) $\displaystyle\int_\gamma \sqrt{y(2-y)}\mathrm{d}s$, ahol $\gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$;

(d) $\displaystyle\int_\gamma z(x^2+y^2)\mathrm{d}s$, ahol $\gamma(t) = (t\cos t, t\sin t, t)$, $t \in [0,1]$;

12.5. Feladat. Határozd meg a következő anyagi drótok hosszát, tömegét (a γ görbe jelenti a drót helyzetét, az f függvény pedig a drót különböző pontjaiban a sűrűségét):

12.9. Megjegyzés
Az anyagi drótok tömegét az $\int_\gamma f(x,y)\mathrm{d}s$, illetve az $\int_\gamma f(x,y,z)\mathrm{d}s$ integrálok adják meg. ◇

(a) $\gamma\colon y = \dfrac{x^2}{2}$, $x \in [0,1]$, $f(x,y) = 1 + x$;

(b) $\gamma\colon \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $f(x,y) = |y|$;

(c) $\gamma\colon x = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}$, $y = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$, $z = t$, $t \in [0, \ln 2]$, $f(x,y,z) = x$;

12.6. Feladat. Határozd meg a tömegközéppontját a következő anyagi drótoknak:

(a) $\gamma\colon x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $t \in [0,\pi]$, $f(x,y) = 1$;

(b) $\gamma\colon x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $f(x,y) = 1$.

12.2.3. Másodfajú vonalintegrálok

12.7. Feladat. Számítsd ki a következő másodfajú vonalintegrálokat:

(a) $\int_\gamma xy\mathrm{d}x - y^2\mathrm{d}y$, ahol $\gamma(t) = (t^2, t^3)$, $t \in [0,1]$;

(b) $\int_\gamma \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y$, ahol a γ görbe képét az $x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1$ és $x \geq 0$ összefüggések adják meg és tudjuk, hogy a görbe irányítása trigonometriai;

(c) $\int_\gamma x\mathrm{d}x + xy\mathrm{d}y + xyz\mathrm{d}z$, ahol $\gamma(t) = (e^t, e^{-t}, \sqrt{2}t)$, $t \in [0,1]$;

(d) $\int_\gamma \dfrac{\mathrm{d}x}{2a+y} - \dfrac{\mathrm{d}y}{a+x}$, ahol a γ görbe képét az $x^2 + y^2 + 2ay = 0$ és $x + y \geq 0$ összefüggések határozzák meg, és tudjuk, hogy a görbe az $A(a,-a)$ pontból indul ($a > 0$);

(e) $\int_\gamma (x+y)\mathrm{d}x - (x-y)\mathrm{d}y$, ahol a γ görbe képe az OAB háromszög kerülete (ahol $O(0,0)$, $A(1,1)$, $B(0,2)$) és a görbe az O pontból indul, valamint az irányítása trigonometriai.

(f) $\int_\gamma (1+y)\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y$, ahol $\gamma\colon x = \sqrt{y+1}$, $y \in [0,1]$;

(g) $\int_\gamma x\mathrm{d}y$, ahol $\gamma\colon y = \ln(1+x)$, $x \in [1,2]$;

(h) $\int xy\mathrm{d}x + \mathrm{d}y$, ahol $\gamma\colon x = 9\cos t$, $y = 9\sin t$, $t \in [0, 2\pi]$;

(i) $\int_\gamma (y-z)\mathrm{d}x + (z-x)\mathrm{d}y + (x-y)\mathrm{d}z$, ahol $\gamma\colon x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$, $t \in [0,2\pi]$;

(j) $\int_\gamma x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y + z\mathrm{d}z$, ahol $\gamma\colon x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $z = pt$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$;

(k) $\int y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y + (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}z$, ahol $\gamma\colon x = -t\cos t + \sin t$, $y = t\sin t + \cos t$, $z = t+1$, $t \in [0,\pi]$.

12.8. Feladat. Bizonyítsd be, hogy az alábbi másodfajú görbe-menti integrálok függetlenek az úttól, majd határozd meg őket (alább A jelöli a kezdőpontot és B a végpontot):

(a) $\displaystyle\int_{\widetilde{AB}} y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y, \quad A(2,1),\ B(1,3);$

(b) $\displaystyle\int_{\widetilde{AB}} yz\mathrm{d}x + xz\mathrm{d}y + xy\mathrm{d}z, \quad A(1,1,0),\ B(2,3,1);$

(c) $\displaystyle\int_{\widetilde{AB}} x(1+x)\mathrm{d}x - y(1+y)\mathrm{d}y, \quad A(-1,1),\ B(2,-1);$

(d) $\displaystyle\int_{\widetilde{AB}} y^2e^x\mathrm{d}x + 2ye^x\mathrm{d}y, \quad A(0,2),\ B(2,0);$

(e) $\displaystyle\int_{\widetilde{AB}} \frac{1}{y}\mathrm{d}x - \frac{x}{y^2}\mathrm{d}y, \quad A(1,2),\ B(2,1)$ (egy olyan görbén, amely nem metszi az Ox tengelyt);

(f) $\displaystyle\int_{\widetilde{AB}} \frac{y^2}{(x-y)^2}\mathrm{d}x - \frac{x^2}{(x-y)^2}\mathrm{d}y, \quad A(1,2),\ B(-3,-2)$ (egy olyan görbén, amely nem metszi az első szögfelezőt);

(g) $\displaystyle\int_{\widetilde{AB}} \frac{y}{z}\mathrm{d}x + \frac{x}{z}\mathrm{d}y - \frac{xy}{z^2}\mathrm{d}z, \quad A(-1,-3,1),\ B(2,6,3)$ (egy olyan görbén, amely nem metszi az xOy síkot);

(h) $\displaystyle\int_{\widetilde{AB}} \frac{\mathrm{d}x}{x} + \frac{\mathrm{d}y}{y} + \frac{\mathrm{d}z}{z}, \quad A(1,1,1),\ M\left(a,b,\frac{1}{ab}\right),\ a,b>0$ (egy olyan görbén, amely az első nyolcadban található).

12.9. Feladat. Az előző feladat összes alpontjához határozz meg egy, az alpontban szereplő erőtérhez rendelt V potenciált a megfelelő D tartományon.

12.10. Megjegyzés

Az előző feladat megfelelő alpontjában ellenőriztük, hogy az integrál független az út megválasztásától, ami egyentértékű a V potenciál létezésével. Megjegyezzük, hogy a potenciál egy konstans erejéig van jól értelmezve (az (x_0, y_0) vagy (x_0, y_0, z_0) megválasztásától függően.) $\diamond$

(a) $\displaystyle\int_{\widetilde{AB}} y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y, \quad A(2,1),\ B(1,3);$

(b) $\displaystyle\int_{\widetilde{AB}} yz\mathrm{d}x + xz\mathrm{d}y + xy\mathrm{d}z, \quad A(1,1,0),\ B(2,3,1);$

12.3. Megoldások

12.3.1. Riemann-Stieltjes-integrálok

12.1. Feladat. Számítsd ki a következő Riemann-Stieltjes-integrálokat:

(a) $\int\limits_0^1 x\mathrm{d}(e^x)$;

Első megoldás. Az $\int\limits_0^1 x\mathrm{d}(e^x)$ Riemann-Stieltjes-integrál létezik, mivel az $f(x) = x$ függvény folytonos és a $g(x) = e^x$ függvény növekvő.

Visszavezetjük a Riemann-Stieltjes-integrált Riemann-integrálra az $\int\limits_a^b f\mathrm{d}g = \int\limits_a^b f(x)(g(x))'\mathrm{d}x$ összefüggés alapján, mivel $g(x) = e^x$ függvény folytonosan deriválható:

$$\int\limits_0^1 x\mathrm{d}(e^x) = \int\limits_0^1 x(e^x)'\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 xe^x\mathrm{d}x.$$

Ez utóbbi integrált a Riemann-integrálok parciális integrálás képlete ($\int\limits_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x = f(x)g(x)\big|_a^b - \int\limits_a^b f'(x)g(x)\mathrm{d}x$) alapján számoljuk ki:

$$\int\limits_0^1 xe^x\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 x(e^x)'\mathrm{d}x = (xe^x)\big|_0^1 - \int\limits_0^1 x'e^x\mathrm{d}x = e - \int\limits_0^1 e^x\mathrm{d}x = e - e^x\big|_0^1 = e - (e-1) = 1.$$

□

Második megoldás. Az $\int\limits_0^1 x\mathrm{d}(e^x)$ Riemann-Stieltjes-integrál létezik, mivel az $f(x) = x$ függvény folytonos és a $g(x) = e^x$ függvény növekvő.

A Riemann-Stieltjes-integrálok parciális integrálás képlete ($\int\limits_a^b f\mathrm{d}g = f(x)g(x)\big|_a^b - \int\limits_a^b g\mathrm{d}f$) alapján is kiszámolhatjuk:

$$\int\limits_0^1 x\mathrm{d}(e^x) = xe^x\big|_0^1 - \int\limits_0^1 e^x\mathrm{d}x = e - e^x\big|_0^1 = e - (e-1) = 1.$$

□

(b) $\int\limits_0^\pi \sin x\mathrm{d}(\sin x)$;

Első megoldás. Az $\int\limits_0^\pi \sin x\mathrm{d}(\sin x)$ Riemann-Stieltjes-integrál létezik, mert a $f(x) = \sin x$ függvény folytonos és a $g(x) = \sin x$ függvény korlátos változású (mivel folytonosan deriválható).

A Riemann-Stieltjes-integrálok parciális integrálás képletét használva:

$$\int_0^\pi \sin x \mathrm{d}(\sin x) = \sin^2 x\big|_0^\pi - \int_0^\pi \sin x \mathrm{d}(\sin x),$$

ahonnan

$$2\int_0^\pi \sin x \mathrm{d} \sin x = \sin^2 x\big|_0^\pi = \sin^2 \pi - \sin^2 0 = 0 - 0 = 0,$$

innen $\int\limits_0^\pi \sin x \mathrm{d}(\sin x) = 0.$ □

Második megoldás. Az $\int\limits_0^\pi \sin x \mathrm{d}(\sin x)$ Riemann-Stieltjes-integrál létezik, mert a $f(x) = \sin x$ függvény folytonos és a $g(x) = \sin x$ függvény korlátos változású (mivel folytonosan deriválható).

A Riemann-Stieltjes-integrált visszavezetjük Riemann-integrálra, mivel a $g(x) = \sin x$ függvény folytonosan deriválható:

$$\int_0^\pi \sin x \mathrm{d}(\sin x) = \int_0^\pi \sin x (\sin x)' \mathrm{d}x. \tag{12.2}$$

Először kiszámítjuk az $\int \sin x (\sin x)' \mathrm{d}x$ határozatlan integrált. Ehhez $u = \sin x$ helyettesítést alkalmazva, $\mathrm{d}u = (\sin x)' \mathrm{d}x$, ezért

$$\int \sin x (\sin x)' \mathrm{d}x = \int u \mathrm{d}u = \frac{u^2}{2} + C = \frac{\sin^2 x}{2} + C,$$

(C konstans). Innen

$$\int_0^\pi \sin x \mathrm{d}(\sin x) = \frac{\sin^2 x}{2}\bigg|_0^\pi = \frac{\sin^2 \pi}{2} - \frac{\sin^2 0}{2} = 0 - 0 = 0. \tag{12.3}$$

A (12.2) és (12.3) összefüggések alapján $\int\limits_0^\pi \sin x \mathrm{d}(\sin x) = 0.$ □

(c) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos x \mathrm{d}(\operatorname{tg} x);$

Megoldás. Az $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos x \mathrm{d}(\operatorname{tg} x)$ Riemann-Stieltjes-integrál létezik, mert $f(x) = \cos x$ folytonos és $g(x) = \operatorname{tg} x$ növekvő a $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ intervallumon. Ezt az integrált visszavezetjük Riemann-integrálra, mivel $\operatorname{tg} x$ függvény folytonosan deriválható az $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ intervallumon.

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos x \mathrm{d}(\operatorname{tg} x) = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos x (\operatorname{tg} x)' \mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos x \frac{1}{\cos^2 x} \mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x} \mathrm{d}x. \tag{12.4}$$

Előbb kiszámoljuk az $\int \frac{1}{\cos x}\mathrm{d}x$ határozatlan integrált. Ehhez átírjuk az integrált

$$\int \frac{1}{\cos x}\mathrm{d}x = \int \frac{\cos x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x = \int \frac{\cos x}{1-\sin^2 x}\mathrm{d}x$$

alakra, majd $u = \sin x$ helyettesítést alkalmazunk: $\mathrm{d}u = \cos x\mathrm{d}x$. Így

$$\int \frac{\cos x}{1-\sin^2 x}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}u}{1-u^2} = \int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u}\right)\mathrm{d}u =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln|1-u| + \frac{1}{2}\ln|1+u| + C = \ln\sqrt{\left|\frac{1+u}{1-u}\right|} + C = \ln\sqrt{\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|} + C. \qquad (12.5)$$

A (12.4) és (12.5) alapján

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos x\mathrm{d}(\operatorname{tg} x) = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x}\mathrm{d}x = \ln\left(\sqrt{\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|}\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \ln\sqrt{\left|\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}\right|} - \ln\sqrt{\left|\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}\right|} = \ln\left|\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}\right| = \ln\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}.$$

□

(d) $\displaystyle\int_1^2 x\mathrm{d}(\ln x)$;

Megoldás. Az $\int_1^2 x\mathrm{d}(\ln x)$ Riemann-Stieltjes-integrál létezik, mert az $f(x) = x$ függvény folytonos és a $g(x) = \ln x$ növekvő az $[1, 2]$ intervallumon.

Mivel a $g(x) = \ln x$ függvény folytonosan deriválható az $[1, 2]$ intervallumon, ezért a Riemann-Stieltjes-integrál visszavezethető Riemann-integrálra:

$$\int_1^2 x\mathrm{d}(\ln x) = \int_1^2 x(\ln x)'\mathrm{d}x = \int_1^2 x\frac{1}{x}\mathrm{d}x = \int_1^2 1\mathrm{d}x = 2 - 1 = 1.$$

□

(e) $\displaystyle\int_3^8 1\mathrm{d}(\sqrt{x})$;

Első megoldás. Az $\int_3^8 1\mathrm{d}(\sqrt{x})$ integrál létezik, mert az $f(x) = 1$ függvény folytonos és $g(x) = \sqrt{x}$ növekvő az $[3, 8]$ intervallumon.

A Riemann-Stieltjes-integrál visszavezethető Riemann-integrálra, mivel a $g(x) = \sqrt{x}$ függvény folytonosan deriválható a $[3, 8]$ intervallumon:

$$\int_3^8 1\mathrm{d}(\sqrt{x}) = \int_3^8 (\sqrt{x})'\mathrm{d}x = \sqrt{x}\Big|_3^8 = \sqrt{8} - \sqrt{3}.$$

□

Második megoldás. Az $\int\limits_3^8 1\mathrm{d}(\sqrt{x})$ integrál létezik, mert az $f(x) = 1$ függvény folytonos és $g(x) = \sqrt{x}$ növekvő az $[3, 8]$ intervallumon.

Mivel az integrálandó függvény $f(x) = 1$ állandó, ezért a Riemann-Stieltjes-integrál értelmezése alapján

$$\int\limits_3^8 1\mathrm{d}(\sqrt{x}) = 1 \cdot \sqrt{x}|_3^8 = \sqrt{8} - \sqrt{3}.$$

(Általában $\int\limits_a^b \alpha\,\mathrm{d}g = \alpha(g(b) - g(a))$ minden g függvényre, ha $\alpha \in \mathbb{R}$ konstans.) $\square$

Harmadik megoldás. Az $\int\limits_3^8 1\mathrm{d}(\sqrt{x})$ integrál létezik, mert az $f(x) = 1$ függvény folytonos és $g(x) = \sqrt{x}$ növekvő az $[3, 8]$ intervallumon.

A Riemann-Stieltjes-integrálok parciális integrálás képletét használva

$$\int\limits_3^8 1\mathrm{d}(\sqrt{x}) = \sqrt{x}\Big|_3^8 - \int\limits_3^8 \sqrt{x}\,\mathrm{d}1 = \sqrt{x}\Big|_3^8 - 0 = \sqrt{8} - \sqrt{3},$$

mivel a Riemann-Stieltjes-integrál értelmezése alapján, ha a $g(x) = \alpha$ függvény állandó, amire vonatkozóan integrálunk, akkor az integrál 0. Képlettel: $\int\limits_a^b f\mathrm{d}\alpha = 0$ minden f függvényre, ha $\alpha \in \mathbb{R}$ konstans. (Ez úgy is belátható, hogy visszavezetjük Riemann-integrálra, mivel $g(x) = \alpha$ állandó függvény folytonosan deriválható, ezért $\int\limits_a^b f\mathrm{d}\alpha = \int\limits_a^b f(x)\alpha'\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x) \cdot 0\,\mathrm{d}x = 0.$) $\square$

(f) $\displaystyle\int\limits_{-2}^6 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}|x|.$

Megoldás. Az $\int\limits_{-2}^6 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}|x|$ Riemann-Stieltjes-integrál létezik, mert az $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ függvény folytonos és az $g(x) = |x|$ függvény korlátos változású. Mivel a $g(x) = |x|$ függvény nem deriválható a $[-2, 6]$ intervallumon (nem deriválható az $x = 0$ pontban), ezért nem vezethetjük vissza a szokásos módon Riemann-integrálra simán csak deriválva a g-t. Először az integrált felbontjuk két integrál összegére. Mivel $g(x) = |x|$ folytonos az $x = 0$-ban, ezért

$$\int\limits_{-2}^6 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}|x| = \int\limits_{-2}^0 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}|x| + \int\limits_0^6 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}|x| =$$

$$= \int\limits_{-2}^0 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}(-x) + \int\limits_0^6 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x = -\int\limits_{-2}^0 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x + \int\limits_0^6 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x.$$

Ezeknek a kiszámításához előbb kiszámoljuk az $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$ határozatlan integrált. Ehhez $x = \operatorname{sh} t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$ (sinus hiperbolicus vagy hiperbolikus szinusz) helyettesítést fogunk alkalmazni. Az $\operatorname{sh} t$ függvény társa a $\operatorname{ch} t = \frac{e^t+e^{-t}}{2}$ (cosinus hiperbolicus) hiperbolikus koszinusz függvény. Direkt számolással ellenőrizhetőek, hogy

$$\operatorname{sh}' t = \operatorname{ch} t, \qquad \operatorname{ch}' t = \operatorname{sh} t \qquad \text{és} \qquad \operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

relációk. Ezek alapján

$$\sqrt{1+x^2} = \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 t} = \sqrt{\operatorname{ch}^2 t} = |\operatorname{ch} t| = \operatorname{ch} t$$

(mivel $\operatorname{ch} t > 0$) és

$$\mathrm{d}x = (\operatorname{sh} t)'\mathrm{d}t = \operatorname{ch} t \mathrm{d}t.$$

Az integrál kiszámítása előtt még kifejezzük a t-t x függvényében. Az $x = \frac{e^t-e^{-t}}{2}$ összefüggésből kiindulva, ha $y = e^t$ helyettesítéssel egy másodfokú egyenlethez jutunk y-ban:

$$\begin{aligned} x &= \frac{e^t - e^{-t}}{2}, \\ x &= \frac{y - y^{-1}}{2}, \quad / \cdot 2y \\ 2xy &= y^2 - 1, \\ y^2 - 2xy - 1 &= 0, \end{aligned}$$

amit ha megoldunk, akkor $y_{1,2} = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2+4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2+1}$-hez jutunk. Mivel $y = e^t > 0$, ezért $y = x + \sqrt{x^2+1}$ kell legyen. Innen

$$t = \ln(x + \sqrt{x^2+1}).$$

Rátérhetünk a határozatlan integrál kiszámításához az $x = \operatorname{sh} t$ változócserével:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x = \int \frac{\operatorname{ch} t}{\operatorname{ch} t}\mathrm{d}t = \int \mathrm{d}t = t + C = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + C.$$

Végül a Newton-Leibniz-tétel alapján írhatjuk, hogy

$$\int_{-2}^{6} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}|x| = -\int_{-2}^{0} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x + \int_{0}^{6} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x =$$

$$= -\ln(x+\sqrt{x^2+1})\Big|_{-2}^{0} + \ln(x+\sqrt{x^2+1})\Big|_{0}^{6} =$$

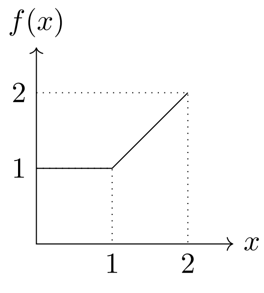
$$= -\Big(\ln 1 - \ln(-2+\sqrt{5})\Big) + \Big(\ln(6+\sqrt{37}) - \ln 1\Big) = \ln(6+\sqrt{37}) + \ln(-2+\sqrt{5}).$$

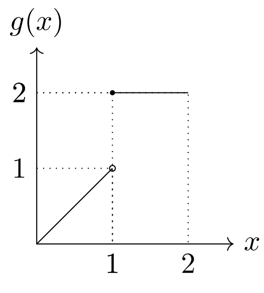
□

12.2. Feladat. Legyen $f, g\colon [0,2] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in [0,1], \\ x, & \text{ha } x \in (1,2] \end{cases} \qquad \text{és} \qquad g(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } x \in [0,1), \\ 2, & \text{ha } x \in [1,2]. \end{cases}$$

Bizonyítsd be, hogy $f \in RS_g[0,2]$ és számítsd ki az $\int\limits_0^2 f\mathrm{d}g$ Riemann-Stieltjes-integrált.





Első megoldás. Az $\int\limits_0^2 f\mathrm{d}g$ Riemann-Stieltjes-integrál létezik, mert az f függvény folytonos és a g növekvő.

Mivel g nem folytonos az $x = 1$ pontban, ezért nem $x = 1$ pontban bontjuk szét az $\int\limits_0^2 f\mathrm{d}g$ integrált két integrál összegére, hanem $x = 1 - \delta$ és $x = 1 + \delta$ pontokban (majd δ-val 0-hoz fogunk tartani):

$$\int\limits_0^2 f\mathrm{d}g = \int\limits_0^{1-\delta} f\mathrm{d}g + \int\limits_{1-\delta}^{1+\delta} f\mathrm{d}g + \int\limits_{1+\delta}^{2} f\mathrm{d}g. \tag{12.6}$$

Innen

$$\int\limits_0^{1-\delta} f\mathrm{d}g = \int\limits_0^{1-\delta} 1\mathrm{d}x = 1-\delta \qquad \text{és} \qquad \int\limits_{1+\delta}^{2} f\mathrm{d}g = \int\limits_{1+\delta}^{2} x\mathrm{d}2 = 0.$$

A középső integrálra alsó és felső becslést adunk. A $[1-\delta, 1+\delta]$ intervallumon a f függvény minimuma $\min f = 1$ és maximuma $\max f = 1 + \delta$. Mivel a g függvény növekvő, ezért

$$\int\limits_{1-\delta}^{1+\delta} \min f\mathrm{d}g \le \int\limits_{1-\delta}^{1+\delta} f\mathrm{d}g \le \int\limits_{1-\delta}^{1+\delta} \max f\mathrm{d}g,$$

$$\min f \int\limits_{1-\delta}^{1+\delta} \mathrm{d}g \le \int\limits_{1-\delta}^{1+\delta} f\mathrm{d}g \le \max f \int\limits_{1-\delta}^{1+\delta} \mathrm{d}g,$$

$$\min f \cdot (g(1+\delta) - g(1-\delta)) \le \int\limits_{1-\delta}^{1+\delta} f\mathrm{d}g \le \max f \cdot (g(1+\delta) - g(1-\delta)),$$

$$1(2-(1-\delta)) \le \int\limits_{1-\delta}^{1+\delta} f\mathrm{d}g \le (1+\delta)(2-(1-\delta)), \quad \Big/ \lim_{\delta\to 0}$$

$$\lim_{\delta\to 0} 1(2-(1-\delta)) \le \lim_{\delta\to 0} \int\limits_{1-\delta}^{1+\delta} f\mathrm{d}g \le \lim_{\delta\to 0}(1+\delta)(2-(1-\delta)),$$

$$1 \le \lim_{\delta\to 0} \int\limits_{1-\delta}^{1+\delta} f\mathrm{d}g \le 1.$$

Tehát a fogó-tétel alapján $\lim\limits_{\delta\to 0} \int\limits_{1-\delta}^{1+\delta} f\mathrm{d}g = 1$. Így, ha a (12.6) egyenlőség mindkét oldalának vesszük a határértékét, mikor δ tart 0-hoz, akkor

$$\lim_{\delta\to 0} \int\limits_0^2 f\mathrm{d}g = \lim_{\delta\to 0} \int\limits_0^{1-\delta} f\mathrm{d}g + \lim_{\delta\to 0} \int\limits_{1-\delta}^{1+\delta} f\mathrm{d}g + \lim_{\delta\to 0} \int\limits_{1+\delta}^{2} f\mathrm{d}g,$$

$$\int\limits_0^2 f\mathrm{d}g = \lim_{\delta\to 0}(1-\delta) + \lim_{\delta\to 0} \int\limits_{1-\delta}^{1+\delta} f\mathrm{d}g + \lim_{\delta\to 0} 0,$$

$$\int\limits_0^2 f\mathrm{d}g = 1 + 1 + 0 = 2.$$

□

Második megoldás. Az $\int\limits_0^2 f\mathrm{d}g$ Riemann-Stieltjes-integrál létezik, mert az f függvény folytonos és a g növekvő.

Szeretnénk felbontani az $\int\limits_0^2 f\mathrm{d}g$ integrált az $x = 1$ pontban két integrál összegére, de sajnos a g függvény nem folytonos ebben a pontban, ezért először a Riemann-Stieltjes-integrálok parciális integrálás képletét alkalmazzuk, hogy a f és g szerepe felcserélődjön:

$$\int\limits_0^2 f\mathrm{d}g = f(x)g(x)\Big|_0^2 - \int\limits_0^2 g\mathrm{d}f = f(2)g(2) - f(0)g(0) - \int\limits_0^2 g\mathrm{d}f = 4 - \int\limits_0^2 g\mathrm{d}f.$$

Az f függvény már folytonos az $x = 1$ pontban, ezért

$$\int\limits_0^2 g\mathrm{d}f = \int\limits_0^1 g\mathrm{d}f + \int\limits_1^2 g\mathrm{d}f = \int\limits_0^1 g\mathrm{d}1 + \int\limits_1^2 2\mathrm{d}x = 0 + 2x\Big|_1^2 = 2.$$

Ezt behelyettesítve az előző számolásba kapjuk, hogy

$$\int\limits_0^2 f\mathrm{d}g = 4 - \int\limits_0^2 g\mathrm{d}f = 4 - 2 = 2.$$

□

12.3. Feladat. Bizonyítsd be, hogy f függvény Riemann-Stieltjes-integrálható és számítsd ki az $\int\limits_a^b f\mathrm{d}g$ Riemann-Stieltjes-integrált, ha:

(a) $f(x) = x^2, \quad g(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{ha } x < 0 \\ 0 & \text{ha } x = 0, \\ 1 & \text{ha } x > 0 \end{cases} \quad a = -1,\, b = 1.$

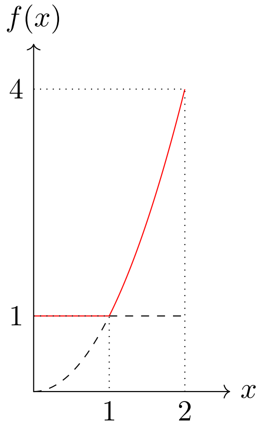
Megoldás. Az f függvény folytonos és a g függvény növekvő, ezért az $\int\limits_{-1}^1 f\mathrm{d}g$ Riemann-Stieltjes-integrál létezik. A kiszámításhoz a Riemann-Stieltjes-integrálok parciális integrálás képletét alkalmazzuk először, majd visszavezetjük Riemann-integrálra.

$$\begin{aligned}\int\limits_{-1}^1 f\mathrm{d}g &= f(x)g(x)\Big|_{-1}^1 - \int\limits_{-1}^1 g\mathrm{d}f = f(1)g(1) - g(-1)g(-1) - \int\limits_{-1}^1 g(x)\left(x^2\right)'\mathrm{d}x \\ &= 1 - (-1) - \int\limits_{-1}^0 g(x)2x\mathrm{d}x - \int\limits_0^1 g(x)2x\mathrm{d}x = 2 - \int\limits_{-1}^0 -2x\mathrm{d}x - \int\limits_0^1 2x\mathrm{d}x \\ &= 2 + \left[x^2\right]_{-1}^0 - [2x]_0^1 = 2 + (0-1) - (0-1) = 2,\end{aligned}$$

ahol az $\int\limits_{-1}^0 g(x)2x\mathrm{d}x$ (illetve az $\int\limits_0^1 g(x)2x\mathrm{d}x$) integrálban a $g(x)2x$ függvényt kicseréltük a $-2x$ (illetve a $2x$) függvényre, mert csak az $x = 0$ pontban térnek el és ez nem befolyásolja a Riemann-integrál értékét. □

(b) $f(x) = \max\{1, x^2\}, \quad g(x) = x^2, \quad a = 0,\, b = 2.$

Megoldás. Az $\int\limits_0^2 f\mathrm{d}g$ integrál létezik, mert az f függvény folytonos és a g függvény növekvő a $[0,2]$ intervallumon.



Az integrált felbontjuk két integrál összegére, majd az elsőre alkalmazuk a konstans függvény integráljára vonatkozó képletet és a másodikat visszavezetjük Riemann-integrálra:

$$\int\limits_0^2 f\mathrm{d}g = \int\limits_0^1 f\mathrm{d}g + \int\limits_1^2 f\mathrm{d}g = \int\limits_0^1 1\mathrm{d}(x^2) + \int\limits_1^2 x^2\mathrm{d}(x^2) = \left[x^2\right]_0^1 + \int\limits_1^2 x^2 \cdot 2x\mathrm{d}x =$$
$$= 1 + \int\limits_1^2 2x^3\mathrm{d}x = 1 + \left[\frac{x^4}{2}\right]_1^2 = 1 + \frac{16}{2} - \frac{1}{2} = \frac{17}{2}.$$

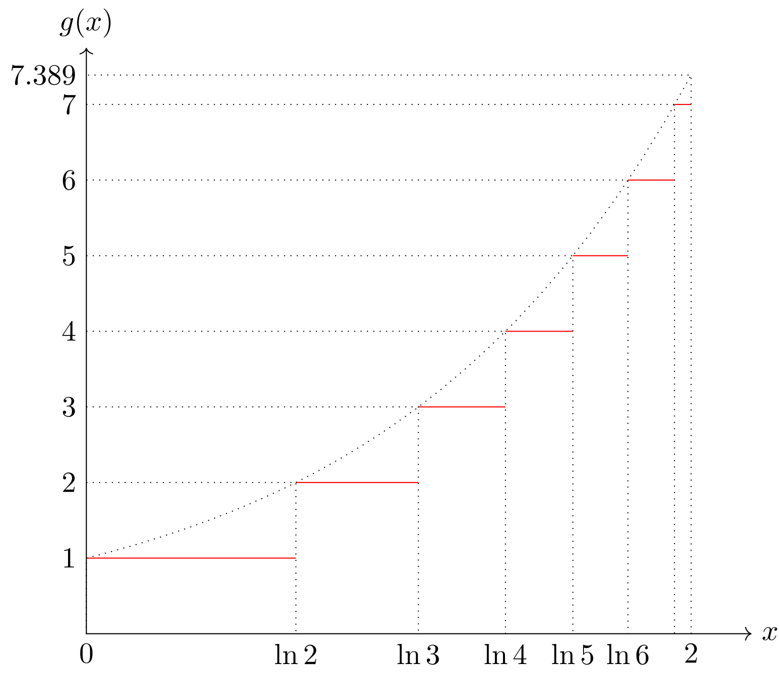
□

(c) $f(x) = x, \quad g(x) = [e^x]$ (az e^x egészrésze), $\quad a = 0,\ b = 2.$

Megoldás. A Riemann-Stieltjes-integrálok parciális integrálás képlete alapján

$$\int\limits_0^2 x\mathrm{d}[e^x] = (x[e^x])\big|_0^2 - \int\limits_0^2 [e^x]\mathrm{d}x,$$

és az $\int\limits_0^2 x\mathrm{d}[e^x]$ integrál pontosan akkor létezik, ha az $\int\limits_0^2 [e^x]\mathrm{d}x$ integrál létezik. Az utóbbi egy Riemann-integrál, ami létezik, mert a $[0,2]$ intervallumon az $[e^x]$ függvény folytonos, kivéve véges sok szakadási pontot. Ezt az integrált a következőképpen számolhatjuk ki. Megnézzük, hogy milyen egész értékeket vesz fel az e^x függvény a $[0,2]$ intervallumon: mivel e^x folytonos, növekvő, ezért $1 = e^0 \le e^x \le e^2 < 8$, tehát e^x az $1, 2, 3, \ldots, 7$ egész értékeket veszi fel az $x = 0, \ln 2, \ln 3, \ldots, \ln 7$ pontokban.



$$\int_0^2 [e^x]\mathrm{d}x = \int_0^{\ln 2} [e^x]\mathrm{d}x + \int_{\ln 2}^{\ln 3} [e^x]\mathrm{d}x + \ldots + \int_{\ln 6}^{\ln 7} [e^x]\mathrm{d}x + \int_{\ln 7}^{2} [e^x]\mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^{\ln 2} 1\mathrm{d}x + \int_{\ln 2}^{\ln 3} 2\mathrm{d}x + \ldots + \int_{\ln 6}^{\ln 7} 6\mathrm{d}x + \int_{\ln 7}^{2} 7\mathrm{d}x$$

$$= x\Big|_0^{\ln 2} + (2x)\Big|_{\ln 2}^{\ln 3} + (3x)\Big|_{\ln 3}^{\ln 4} + (4x)\Big|_{\ln 4}^{\ln 5} + (5x)\Big|_{\ln 5}^{\ln 6} + (6x)\Big|_{\ln 6}^{\ln 7} + (7x)\Big|_{\ln 7}^{2} =$$

$$\ln 2 + 2(\ln 3 - \ln 2) + 3(\ln 4 - \ln 3) + 4(\ln 5 - \ln 4) + 5(\ln 6 - \ln 5) + 6(\ln 7 - \ln 6) + 7(2 - \ln 7)$$

$$= -\ln 2 - \ln 3 - \ln 4 - \ln 5 - \ln 6 - \ln 7 + 14 = 14 - \ln(7!).$$

Végül

$$\int_0^2 x\mathrm{d}[e^x] = (x[e^x])\Big|_0^2 - \int_0^2 [e^x]\mathrm{d}x = 14 - (14 - \ln(7!)) = \ln(7!).$$

□

12.3.2. Elsőfajú vonalintegrálok

12.4. Feladat. Számítsd ki a következő elsőfajú vonalintegrálokat:

(a) $\int_\gamma xy\mathrm{d}s$, ahol $\gamma(t) = (t, t^2)$, $t \in [0, 1]$;

Megoldás. A $\gamma(t) = (t, t^2)$ paraméterezett görbe első koordinátája $x(t) = t$, illetve második koordinátája $y(t) = t^2$. Továbbá a görbe t paramétere a $[0, 1]$ intervallumon változik, ezért az integrál alsó határa $a = 0$, míg felső határa $b = 1$ lesz.

$$\int_\gamma xy\mathrm{d}s = \int_a^b x(t)y(t)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^1 t \cdot t^2 \sqrt{(1)^2 + (2t)^2} \mathrm{d}t = \int_0^1 t^3 \sqrt{1 + 4t^2} \mathrm{d}t.$$

Előbb kiszámoljuk az $\int t^3\sqrt{1+4t^2}\mathrm{d}t$ határozatlan integrált. Ezt $u = 1+4t^2$ változócserével számoljuk ki. Innen $t^2 = \dfrac{u-1}{4}$ és $\mathrm{d}u = 8t\mathrm{d}t$, így

$$\int t^3\sqrt{1+4t^2}\mathrm{d}t = \int t^2\sqrt{1+4t^2}t\mathrm{d}t = \int \frac{u-1}{4}\sqrt{u}\frac{\mathrm{d}u}{8} = \frac{1}{32}\int (u\sqrt{u} - \sqrt{u})\mathrm{d}u =$$
$$= \frac{1}{32}\left(\frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right) + C = \frac{1}{16}\left(\frac{1}{5}(1+4t^2)^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{3}(1+4t^2)^{\frac{3}{2}}\right) + C.$$

Tehát

$$\int_\gamma xy\mathrm{d}s = \int_0^1 t^3\sqrt{1+4t^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{16}\left(\frac{(1+4t^2)^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{(1+4t^2)^{\frac{3}{2}}}{3}\right)\Bigg|_0^1$$
$$= \frac{1}{16}\left(\frac{5^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{5^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{3}\right).$$

□

(b) $\int_\gamma y^5\mathrm{d}s$, ahol a γ görbe képét az $x = \dfrac{y^4}{4}$, $y \in [0,2]$ összefüggések adják meg;

Megoldás. Először paraméterezzük a görbét: $y(t) = t$ és $x(t) = \frac{y(t)^4}{4} = \frac{t^4}{4}$, tehát $\gamma(t) = \left(\frac{t^4}{4}, t\right)$, $t \in [0,2]$.

$$\int_\gamma y^5\mathrm{d}s = \int_0^2 y(t)^5\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\mathrm{d}t = \int_0^2 t^5\sqrt{t^6+1}\mathrm{d}t.$$

Előbb a $\int t^5\sqrt{t^6+1}\mathrm{d}t$ határozatlan integrált számoljuk ki az $u = t^6+1$ változócserével, ahonnan $\mathrm{d}u = 6t^5\mathrm{d}t$, azaz $t^5\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}u}{6}$ és

$$\int t^5\sqrt{t^6+1}\mathrm{d}t = \int \sqrt{u}\frac{\mathrm{d}u}{6} = \frac{1}{6}\int u^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}u = \frac{1}{6}\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{9}(t^6+1)^{\frac{3}{2}} + C.$$

Tehát

$$\int_\gamma y^5\mathrm{d}s = \int_0^2 t^5\sqrt{t^6+1}\mathrm{d}t = \frac{1}{9}(t^6+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2 = \frac{1}{9}(65^{\frac{3}{2}} - 1).$$

□

(c) $\int_\gamma \sqrt{y(2-y)}\mathrm{d}s$, ahol $\gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$;

Megoldás.

$$\int_\gamma \sqrt{y(2-y)}\mathrm{d}s = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(1-\cos t)(1+\cos t)}\sqrt{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t}\mathrm{d}t =$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\cos^2 t}\sqrt{2-2\cos t}\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin t|\sqrt{2-2\cos t}\mathrm{d}t$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\sqrt{2-2\cos t}\mathrm{d}t,$$

mivel $\sin t \geq 0$ a $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ intervallumon. Újra a határozatlan integrált számoljuk ki előbb. Ebben az esetben az $u = 2 - 2\cos t$ változócserét végezzük: $\mathrm{d}u = 2\sin t\mathrm{d}t$ és

$$\int \sin t\sqrt{2-2\cos t}\mathrm{d}t = \int \sqrt{u}\frac{\mathrm{d}u}{2} = \frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}u = \frac{1}{3}u^{\frac{3}{2}} + C = \frac{(2-2\cos t)^{\frac{3}{2}}}{3} + C.$$

Tehát

$$\int_\gamma \sqrt{y(2-y)}\mathrm{d}s = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\sqrt{2-2\cos t}\mathrm{d}t = \left.\frac{(2-2\cos t)^{\frac{3}{2}}}{3}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sqrt{8}}{3}.$$

□

(d) $\displaystyle\int_\gamma z(x^2+y^2)\mathrm{d}s$, ahol $\gamma(t) = (t\cos t, t\sin t, t)$, $t \in [0,1]$;

Megoldás.

$$\int_\gamma z(x^2+y^2)\mathrm{d}s = \int_0^1 z(t)\left(x(t)^2+y(t)^2\right)\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\mathrm{d}t =$$
$$= \int_0^1 t(t^2\sin^2 t + t^2\cos^2 t)\sqrt{(\sin t + t\cos t)^2 + (\cos t - t\sin t)^2 + 1}\mathrm{d}t$$
$$= \int_0^1 t^3\sqrt{2+t^2}\mathrm{d}t.$$

Előbb kiszámoljuk a $\int t^3\sqrt{2+t^2}\mathrm{d}t$ határozatlan integrált $u = 2+t^2$ változócserével: $t^2 = u-2$ és $\mathrm{d}u = 2t\mathrm{d}t$, így

$$\int t^3\sqrt{2+t^2}\mathrm{d}t = \int (u-2)\sqrt{u}\frac{\mathrm{d}u}{2} = \frac{1}{2}\int\left(u^{\frac{3}{2}} - 2u^{\frac{1}{2}}\right)\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\left(\frac{2u^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{4u^{\frac{3}{2}}}{3}\right) + C$$
$$= \frac{(2+t^2)^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{2(2+t^2)^{\frac{3}{2}}}{3} + C.$$

Tehát

$$\int_\gamma z(x^2+y^2)\mathrm{d}s = \int_0^1 t^3\sqrt{2+t^2}\mathrm{d}t = \left.\left(\frac{(2+t^2)^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{2(2+t^2)^{\frac{3}{2}}}{3}\right)\right|_0^1$$
$$= \frac{(3)^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{2(3)^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{(2)^{\frac{5}{2}}}{5} + \frac{2(2)^{\frac{3}{2}}}{3}.$$

□

12.5. Feladat. Határozd meg a következő anyagi drótok hosszát, tömegét (a γ görbe jelenti a drót helyzetét, az f függvény pedig a drót különböző pontjaiban a sűrűségét):

12.11. Megjegyzés

Az anyagi drótok tömegét az $\displaystyle\int_\gamma f(x,y)\mathrm{d}s$, illetve az $\displaystyle\int_\gamma f(x,y,z)\mathrm{d}s$ integrálok adják meg. ◇

(a) $\gamma\colon y = \dfrac{x^2}{2}$, $x \in [0,1]$, $f(x,y) = 1+x$;

Megoldás. A görbét a következőképpen parametrizálhatjuk: $x(t) = t$, $y(t) = \frac{x(t)^2}{2} = \frac{t^2}{2}$, tehát $\gamma(t) = \left(t, \frac{t^2}{2}\right)$, $t \in [0,1]$. Tehát

$$\int_\gamma f(x,y)\mathrm{d}s = \int_0^1 f(x(t),y(t))\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\mathrm{d}t =$$
$$= \int_0^1 (1+t)\sqrt{1+t^2}\mathrm{d}t = \int_0^1 \sqrt{1+t^2}\mathrm{d}t + \int_0^1 t\sqrt{1+t^2}\mathrm{d}t.$$

A második integrál $\int_0^1 t\sqrt{1+t^2}\mathrm{d}t = \frac{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}{3}\Big|_0^1 = \frac{\sqrt{8}}{3} - \frac{1}{3}$.

Az első integrálhoz előbb az $\int \sqrt{1+t^2}\mathrm{d}t$ határozatlan integrált számoljuk ki $t = \operatorname{sh} u$ változó cserével: innen $u = \ln(t+\sqrt{1+t^2})$, $\mathrm{d}t = \operatorname{ch} u\mathrm{d}u$ és

$$\int \sqrt{1+t^2}\mathrm{d}t = \int \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 u}\operatorname{ch} u\mathrm{d}u = \int \operatorname{ch}^2 u\mathrm{d}u = \int \frac{1+\operatorname{ch} 2u}{2}\mathrm{d}u$$
$$= \frac{u}{2} + \frac{\operatorname{sh} 2u}{4} + C = \frac{\ln(t+\sqrt{1+t^2})}{2} + \frac{\operatorname{sh} 2\ln(t+\sqrt{1+t^2})}{4} + C$$
$$= \frac{1}{8}\left[4\ln(t+\sqrt{1+t^2}) + \left(t+\sqrt{1+t^2}\right)^2 - \left(t+\sqrt{1+t^2}\right)^{-2}\right] + C.$$

Ez alapján a határozott integrál

$$\int_0^1 \sqrt{1+t^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{8}\left[4\ln(t+\sqrt{1+t^2}) + \left(t+\sqrt{1+t^2}\right)^2 - \left(t+\sqrt{1+t^2}\right)^{-2}\right]_0^1 =$$
$$= \frac{1}{8}\left[4\ln(1+\sqrt{2}) + (1+\sqrt{2})^2 - (1+\sqrt{2})^{-2}\right].$$

Végül

$$\int_\gamma f(x,y)\mathrm{d}s = \int_0^1 \sqrt{1+t^2}\mathrm{d}t + \int_0^1 t\sqrt{1+t^2}\mathrm{d}t =$$
$$= \frac{1}{8}\left(4\ln(1+\sqrt{2}) + (1+\sqrt{2})^2 - (1+\sqrt{2})^{-2}\right) + \frac{\sqrt{8}}{3} - \frac{1}{3}.$$

□

(b) $\gamma\colon \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $f(x,y) = |y|$;

Megoldás. Feltehetjük, hogy $a, b > 0$. A γ görbét (ellipszis) a következőképpen paraméterezzük: $x(t) = a\cos t$, $y(t) = b\sin t$, tehát $\gamma(t) = (a\cos t, b\sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

$$\int_\gamma f(x,y)\mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} f(x(t),y(t))\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} |b\sin t|\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\mathrm{d}t$$
$$= \int_0^{\pi} b\sin t\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\mathrm{d}t - \int_\pi^{2\pi} b\sin t\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\mathrm{d}t$$
$$= 2\int_0^{\pi} b\sin t\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\mathrm{d}t.$$

Először kiszámítjuk az $\int b\sin t\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\mathrm{d}t = \int b\sin t\sqrt{a^2 + (b^2-a^2)\cos^2 t}\mathrm{d}t$ határozatlan integrált. Három esetet különböztetünk meg.

1. eset: Ha $b^2 - a^2 = 0$, akkor $\int b\sin t\sqrt{a^2+(b^2-a^2)\cos^2 t}\mathrm{d}t = \int ab\sin t\mathrm{d}t = -ab\cos t + C$ és

$$\int_\gamma f(x,y)\mathrm{d}s = 2\int_0^\pi b\sin t\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\mathrm{d}t = -2ab\cos t\Big|_0^\pi = 4ab.$$

2. eset: Ha $b^2-a^2<0$, akkor legyen $c>0$ úgy, hogy $-c^2 = b^2-a^2$. Ekkor $a>c$ és alkalmazuk a $\cos u = \frac{c\cos t}{a}$ helyettesítést: $-\sin u\mathrm{d}u = -\frac{c\sin t}{a}\mathrm{d}t$ és

$$\int b\sin t\sqrt{a^2+(b^2-a^2)\cos^2 t}\mathrm{d}t = \int b\sin t\sqrt{a^2-c^2\cos^2 t}\mathrm{d}t = \int \frac{ab}{c}\sin u\sqrt{a^2-a^2\cos u}\mathrm{d}u$$
$$= \int \frac{a^2b}{c}\sin u\sqrt{1-\cos^2 u}\mathrm{d}u = \int \frac{a^2b}{c}\sin u|\sin u|\mathrm{d}u = \int \frac{a^2b}{c}\sin^2 u\mathrm{d}u,$$

mivel $u = \arccos\left(\frac{c\cos t}{a}\right) \in [0,\pi]$, így $\sin u \geq 0$. Továbbá

$$\int \frac{a^2b}{c}\sin^2 u\mathrm{d}u = \frac{a^2b}{c}\int \frac{1-\cos 2u}{2}\mathrm{d}u = \frac{a^2b}{c}\left(\frac{u}{2} - \frac{\sin 2u}{4}\right) + C$$
$$= \frac{a^2b}{c}\left[\frac{1}{2}\arccos\left(\frac{c\cos t}{a}\right) - \frac{1}{4}\sin\left(2\arccos\left(\frac{c\cos t}{a}\right)\right)\right] + C$$
$$= \frac{a^2b}{c}\left[\frac{1}{2}\arccos\left(\frac{c\cos t}{a}\right) - \frac{1}{2}\sin\left(\arccos\left(\frac{c\cos t}{a}\right)\right)\frac{c\cos t}{a}\right] + C$$
$$\stackrel{(\dagger)}{=} \frac{a^2b}{c}\left[\frac{1}{2}\arccos\left(\frac{c\cos t}{a}\right) - \frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{c^2}{a^2}\cos^2 t}\,\frac{c\cos t}{a}\right] + C$$
$$= \frac{a^2b}{c}\left[\frac{1}{2}\arccos\left(\frac{c\cos t}{a}\right) - \frac{c}{2a^2}\cos t\sqrt{a^2-c^2\cos^2 t}\right] + C,$$

ahol a (†) egyenlőségben használtuk a $\sin\left(\arccos\left(\frac{c\cos t}{a}\right)\right) = \sqrt{1-\frac{c^2}{a^2}\cos^2 t}$ összefüggést, amit a következőképpen ellenőrizhetünk le:

$$\sin\left(\arccos\left(\frac{c\cos t}{a}\right)\right) = \sqrt{1-\frac{c^2}{a^2}\cos^2 t} \quad \Big/ ()^2,$$
$$\sin^2\left(\arccos\left(\frac{c\cos t}{a}\right)\right) = 1-\frac{c^2}{a^2}\cos^2 t,$$
$$\frac{c^2}{a^2}\cos^2 t = 1-\sin^2\left(\arccos\left(\frac{c\cos t}{a}\right)\right),$$
$$\frac{c^2}{a^2}\cos^2 t = \cos^2\left(\arccos\left(\frac{c\cos t}{a}\right)\right).$$

Tehát

$$\int_\gamma f(x,y)\mathrm{d}s = 2\int_0^\pi b\sin t\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\mathrm{d}t = 2\int_0^\pi b\sin t\sqrt{a^2-c^2\cos^2 t}\mathrm{d}t$$
$$= \frac{a^2b}{c}\left[\arccos\left(\frac{c\cos t}{a}\right) - \frac{c}{a^2}\cos t\sqrt{a^2-c^2\cos^2 t}\right]_0^\pi$$
$$= \frac{a^2b}{c}\left[\arccos\left(-\frac{c}{a}\right) - \frac{c}{a^2}(-1)\sqrt{a^2-c^2} - \arccos\left(\frac{c}{a}\right) + \frac{c}{a^2}\sqrt{a^2-c^2}\right]$$
$$\stackrel{(\ddagger)}{=} \frac{a^2b}{c}\left(\pi - 2\arccos\left(\frac{c}{a}\right) + \frac{2c}{a^2}\sqrt{a^2-c^2}\right)$$
$$= \frac{a^2b}{c}\left[\pi - 2\arccos\left(\frac{c}{a}\right)\right] + 2b^2,$$

ahol a (‡) egyenlőségben használtuk, hogy $\arccos\left(-\frac{c}{a}\right) = \pi - \arccos\left(\frac{c}{a}\right)$.

3. eset: Ha $b^2 - a^2 > 0$, akkor legyen $c > 0$ úgy, hogy $c^2 = b^2 - a^2$. Ekkor $\cos t = \frac{a \operatorname{sh} u}{c}$ helyettesítést alkalmazunk: $-\sin t \mathrm{d}t = \frac{a \operatorname{ch} u}{c} \mathrm{d}u$ és

$$\int b \sin t \sqrt{a^2 + (b^2 - a^2)\cos^2 t} \mathrm{d}t = \int b \sin t \sqrt{a^2 + c^2 \cos^2 t} \mathrm{d}t =$$

$$= -\int \frac{ab}{c} \operatorname{ch} u \sqrt{a^2 + a^2 \operatorname{sh}^2 u} \mathrm{d}u =$$

$$= -\frac{a^2 b}{c} \int \operatorname{ch}^2 u \mathrm{d}u = -\frac{a^2 b}{c} \int \frac{1 + \operatorname{ch}(2u)}{2} \mathrm{d}u = -\frac{a^2 b}{c} \left(\frac{u}{2} + \frac{\operatorname{sh}(2u)}{4} \right) + C$$

$$= -\frac{a^2 b}{2c} \left\{ \ln \left(\frac{c}{a} \cos t + \sqrt{\frac{c^2}{a^2} \cos^2 t + 1} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4} \left[\left(\frac{c}{a} \cos t + \sqrt{\frac{c^2}{a^2} \cos^2 t + 1} \right)^2 - \left(\frac{c}{a} \cos t + \sqrt{\frac{c^2}{a^2} \cos^2 t + 1} \right)^{-2} \right] \right\} + C.$$

Végül

$$\int_\gamma f(x, y) \mathrm{d}s =$$

$$= -2 \left[\frac{a^2 b}{2c} \ln \left(\frac{c}{a} \cos t + \sqrt{\frac{c^2}{a^2} \cos^2 t + 1} \right) + \frac{a^2 b}{8c} \left(\frac{c}{a} \cos t + \sqrt{\frac{c^2}{a^2} \cos^2 t + 1} \right)^2 \right.$$

$$\left. - \frac{a^2 b}{8c} \left(\frac{c}{a} \cos t + \sqrt{\frac{c^2}{a^2} \cos^2 t + 1} \right)^{-2} \right]_0^\pi =$$

$$= -\left[\frac{a^2 b}{c} \ln \left(\sqrt{\frac{c^2}{a^2} + 1} - \frac{c}{a} \right) + \frac{a^2 b}{4c} \left(\sqrt{\frac{c^2}{a^2} + 1} - \frac{c}{a} \right)^2 - \frac{a^2 b}{4c} \left(-\frac{c}{a} + \sqrt{\frac{c^2}{a^2} + 1} \right)^{-2} \right]$$

$$+ \left[\frac{a^2 b}{c} \ln \left(\frac{c}{a} + \sqrt{\frac{c^2}{a^2} + 1} \right) + \frac{a^2 b}{4c} \left(\frac{c}{a} + \sqrt{\frac{c^2}{a^2} + 1} \right)^2 - \frac{a^2 b}{4c} \left(\frac{c}{a} + \sqrt{\frac{c^2}{a^2} + 1} \right)^{-2} \right] =$$

$$= -\left[\frac{a^2 b}{c} \ln \left(\frac{b - c}{a} \right) + \frac{a^2 b}{4c} \left(\frac{b - c}{a} \right)^2 - \frac{a^2 b}{4c} \left(\frac{b - c}{a} \right)^{-2} \right]$$

$$+ \left[\frac{a^2 b}{4c} \ln \left(\frac{b + c}{a} \right) + \frac{a^2 b}{4c} \left(\frac{b + c}{a} \right)^2 - \frac{a^2 b}{4c} \left(\frac{b + c}{a} \right)^{-2} \right] = -\frac{a^2 b}{c} \ln \left(\frac{b - c}{b + c} \right) + 2b^2.$$

□

(c) $\gamma \colon x = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}$, $y = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$, $z = t$, $t \in [0, \ln 2]$, $f(x, y, z) = x$;

Megoldás. Használjuk a $x = \frac{e^t + e^{-t}}{2} = \operatorname{ch} t$ és $y = \frac{e^t - e^{-t}}{2} = \operatorname{sh} t$ rövidebb jelöléseket, illetve $\operatorname{sh}' t = \operatorname{ch} t$, $\operatorname{ch}' t = \operatorname{sh} t$, $\operatorname{ch}^2 - \operatorname{sh}^2 t = 1$ és $2 \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t = \operatorname{sh} 2t$ összefüggéseket, amelyek direkt számolással ellenőrizhetőek.

$$\int_\gamma f(x, y, z) \mathrm{d}s = \int_0^{\ln 2} x(t) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} \mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^{\ln 2} \operatorname{sh} t \sqrt{\operatorname{sh}^2 t + \operatorname{ch}^2 t + 1} \mathrm{d}t = \int_0^{\ln 2} \operatorname{sh} t \sqrt{2 \operatorname{ch}^2 t} \mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^{\ln 2} \sqrt{2} \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t \mathrm{d}t = \sqrt{2} \int_0^{\ln 2} \frac{\operatorname{sh} 2t}{2} \mathrm{d}t = \sqrt{2} \frac{\operatorname{ch} 2t}{4} \Big|_0^{\ln 2} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{e^{2\ln 2}+e^{-2\ln 2}}{2} - \frac{e^{0}+e^{-0}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{2^2+2^{-2}}{2} - 1\right) =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{9}{8}\right) = \frac{9\sqrt{2}}{32}.$$

□

12.6. Feladat. Határozd meg a tömegközéppontját a következő anyagi drótoknak:

12.12. Megjegyzés
Először a γ (sík)görbe mentén elhelyezkedő, f sűrűségű inhomogén anyagi drót tömegét számoljuk ki az

$$M = \int_\gamma f \mathrm{d}s$$

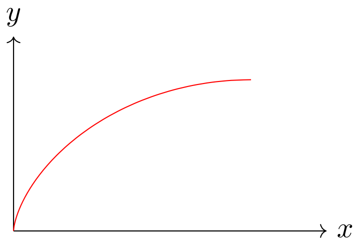
képlettel. Ezután az anyagi drót $G = G(x_G, y_G)$ súlypontjának a koordinátáit a következőképpen számolhatjuk ki:

$$x_G = \frac{1}{M}\int_\gamma x f(x,y)\mathrm{d}s, \qquad y_G = \frac{1}{M}\int_\gamma y f(x,y)\mathrm{d}s.$$

◇

(a) γ: $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1-\cos t)$, $t \in [0,\pi]$, $f(x,y) = 1$;

Megoldás.



Feltesszük, hogy $a \neq 0$. Először kiszámoljuk az M tömeget:

$$M = \int_\gamma f \mathrm{d}s = \int_0^\pi \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t}\mathrm{d}t = |a|\int_0^\pi \sqrt{2-2\cos t}\mathrm{d}t =$$
$$\overset{(\dagger)}{=} |a|\int_0^\pi \sqrt{4\sin^2\frac{t}{2}}\mathrm{d}t \overset{(\ddagger)}{=} |a|\int_0^\pi 2\sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t = -4|a|\cos\frac{t}{2}\Big|_0^\pi = -4|a|\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right) = 4|a|,$$

ahol $(\dagger)$ egyenlőségben használtuk a $\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi = 1 - 2\sin^2\varphi$ képletet és a $(\ddagger)$ egyenlőségben $|\sin\frac{t}{2}| = \sin\frac{t}{2}$, mert $t \in [0,\pi]$. A súlypont x koordinátája:

$$x_G = \frac{1}{M}\int_\gamma x f(x,y)\mathrm{d}s = \frac{1}{4|a|}\int_0^\pi a(t-\sin t)\sqrt{2a^2 - 2a^2\cos t}\mathrm{d}t$$
$$= \frac{a}{4}\int_0^\pi (t - \sin t)\sqrt{2-2\cos t}\mathrm{d}t = \frac{a}{4}\int_0^\pi (t-\sin t)2\sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t.$$

Előbb kiszámoljuk az $\int t\sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t$ és $\int \sin t \sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t$ határozatlan integrálokat:

$$\int t\sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t = \int t\left(-2\cos\frac{t}{2}\right)'\mathrm{d}t = -2t\cos\frac{t}{2} - \int t'\left(-2\cos\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t$$

$$= -2t\cos\frac{t}{2} + \int 2\cos\frac{t}{2}\mathrm{d}t = -2t\cos\frac{t}{2} + 4\sin\frac{t}{2} + C,$$

$$\int \sin t\sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t = \int 2\cos\frac{t}{2}\sin^2\frac{t}{2}\mathrm{d}t = \frac{4}{3}\sin^3\frac{t}{2} + C.$$

Innen

$$x_G = \frac{a}{4}\int_0^\pi (t-\sin t)2\sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t = \frac{a}{2}\left[-2t\cos\frac{t}{2} + 4\sin\frac{t}{2} - \frac{4}{3}\sin^3\frac{t}{2}\right]_0^\pi = a\left[2-\frac{2}{3}\right] = \frac{4a}{3}.$$

Hasonlóan

$$y_G = \frac{1}{M}\int_\gamma yf(x,y)\mathrm{d}s = \frac{1}{4|a|}\int_0^\pi a(1-\cos t)\sqrt{2a^2-2a^2\cos t}\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{4|a|}\int_0^\pi a|a|(1-\cos t)2\sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t = \frac{a}{4}\int_0^\pi \left(2-2\cos^2\frac{t}{2}\right)2\sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t$$
$$= \frac{a}{4}\left[-8a\cos\frac{t}{2} + \frac{8a}{3}\cos^3\frac{t}{2}\right]_0^\pi = 2a - \frac{2a}{3} = \frac{4a}{3}.$$

Összegezve $G = \left(\frac{4a}{3}, \frac{4a}{3}\right)$ a görbe súlypontja. □

12.3.3. Másodfajú vonalintegrálok

12.7. Feladat. Számítsd ki a következő másodfajú vonalintegrálokat:

(a) $\displaystyle\int_\gamma xy\mathrm{d}x - y^2\mathrm{d}y$, ahol $\gamma(t) = (t^2, t^3)$, $t \in [0,1]$;

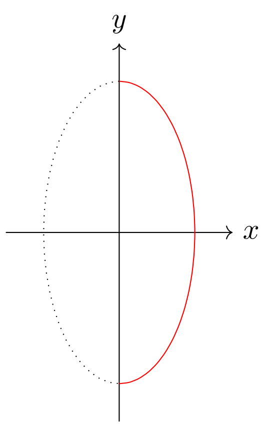
Megoldás. A görbe megadása alapján $x(t) = t^2$, $y(t) = t^3$ és

$$\int_\gamma xy\mathrm{d}x - y^2\mathrm{d}y = \int_0^1 x(t)y(t)\mathrm{d}x(t) - y^2(t)\mathrm{d}y(t) = \int_0^1 t^2\cdot t^3\mathrm{d}(t^2) - (t^3)^2\mathrm{d}(t^3)$$
$$= \int_0^1 t^5(t^2)'\mathrm{d}t - t^6(t^3)'\mathrm{d}t = \int_0^1 2t^6 - 3t^8\mathrm{d}t = \left[\frac{2t^7}{7} - \frac{3t^9}{9}\right]_0^1 = \frac{2}{7} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{21}.$$

□

(b) $\displaystyle\int_\gamma \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y$, ahol a γ görbe képét az $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ és $x \geq 0$ összefüggések adják meg és tudjuk, hogy a görbe irányítása trigonometriai;

Megoldás. A γ görbe képe (fél ellipszis) az $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ és $x \geq 0$ módon van megadva, amit a következőképpen paraméterezhetünk trigonometriai irányítással: $x(t) = \cos t$, $y(t) = 2\sin t$, $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.



$$\int_\gamma \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\cos^2 t}\mathrm{d}(\cos t) + \cos t\mathrm{d}(2\sin t)$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin t|(\cos t)'\mathrm{d}t + \cos t(2\sin t)'\mathrm{d}t$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} -\sin t(-\sin t)\mathrm{d}t + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t(-\sin t)\mathrm{d}t + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^2 t\mathrm{d}t$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^2 t\mathrm{d}t + \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\sin^2 t\mathrm{d}t + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^2 t\mathrm{d}t = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1+\cos 2t\mathrm{d}t = \left[t + \frac{\sin 2t}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \pi.$$

□

(c) $\displaystyle\int_\gamma x\mathrm{d}x + xy\mathrm{d}y + xyz\mathrm{d}z$, ahol $\gamma(t) = (e^t, e^{-t}, \sqrt{2}t)$, $t \in [0,1]$;

Megoldás.

$$\int_\gamma x\mathrm{d}x + xy\mathrm{d}y + xyz\mathrm{d}z = \int_0^1 e^t\mathrm{d}(e^t) + e^t e^{-t}\mathrm{d}(e^{-t}) + e^t e^{-t}\sqrt{2}t\mathrm{d}(\sqrt{2}t) =$$

$$= \int_0^1 e^{2t}\mathrm{d}t - e^{-t}\mathrm{d}t + 2t\mathrm{d}t = \left[\frac{e^{2t}}{2} + e^{-t} + t^2\right]_0^1 = \frac{e^2}{2} + e^{-1} - \frac{1}{2}.$$

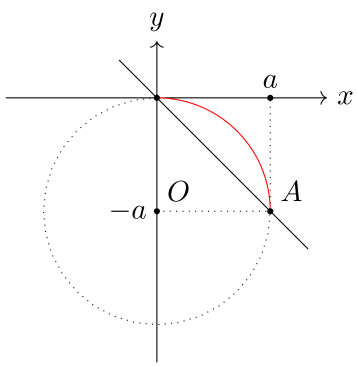
□

(d) $\displaystyle\int_\gamma \frac{\mathrm{d}x}{2a+y} - \frac{\mathrm{d}y}{a+x}$, ahol a γ görbe képét az $x^2+y^2+2ay=0$ és $x+y \geq 0$ összefüggések határozzák meg, és tudjuk, hogy a görbe az $A(a,-a)$ pontból indul ($a>0$);

Megoldás. Az $x^2+y^2+2ay=0$ egyenlet az $x^2+(y+a)^2=a^2$ egyenlettel egyenértékű, aminek megoldásai az $(0,-a)$ középpontú $|a|$ sugarú kör pontjai. Így γ ennek a körnek az $x+y\geq 0$ zárt félsíkba eső köríve. A félsíkot határoló $x+y=0$ egyenes a kört $(u,-u)$ pontokban metszi, ahol $u^2+(-u+a)^2=a^2$. Innen kapjuk, hogy $u=a$ vagy $u=0$, tehát a $(0,0)$ és $(a,-a)$ pontokban metszi. Ennek a körnek a pontjait a következőképpen paraméterezzük:

$$x(t) = a\cos t \qquad \text{és} \qquad y(t) = a\sin t - a.$$

Mivel t a kör pontjának O középponton átmenő vízszintes egyenessel bezárt szöge, ezért $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ (lásd az alábbi ábrát).



Felírva az integrált kapjuk, hogy

$$\int_\gamma \frac{\mathrm{d}x}{2a+y} - \frac{\mathrm{d}y}{a+x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}(a\cos t)}{2a+a\sin t - a} - \frac{\mathrm{d}(a\sin t - a)}{a+a\cos t} =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-a\sin t\mathrm{d}t}{a+a\sin t} - \frac{a\cos t\mathrm{d}t}{a+a\cos t} = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t\mathrm{d}t}{1+\sin t} + \frac{\cos t\mathrm{d}t}{1+\cos t}.$$

Először a határozatlan integrálokat számoljuk ki az $u = \operatorname{tg}\frac{t}{2}$ változócserével: $\sin t = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{t}{2}} = \dfrac{2u}{1+u^2}$, $\cos t = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{t}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{t}{2}} = \dfrac{1-u^2}{1+u^2}$ és $\mathrm{d}t = \dfrac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u$. Ekkor

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin t}{1+\sin t}\mathrm{d}t &= \int \frac{\frac{2u}{1+u^2}}{1+\frac{2u}{1+u^2}}\frac{2\mathrm{d}u}{1+u^2} = \int \frac{4u\mathrm{d}u}{(1+u)^2(1+u^2)}\\ &= \int \frac{-2}{(1+u)^2} + \frac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u = \frac{2}{1+u} + 2\operatorname{arctg} u + C = \frac{2}{1+\operatorname{tg}\frac{t}{2}} + t + C,\end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos t\mathrm{d}t}{1+\cos t} &= \int \frac{\frac{1-u^2}{1+u^2}}{1+\frac{1-u^2}{1+u^2}}\frac{2\mathrm{d}u}{1+u^2} = \int \frac{2u(1-u^2)}{2(1+u^2)}\mathrm{d}u = \int \frac{1-u^2}{2(1+u^2)}2u\mathrm{d}u\\ &\overset{(\dagger)}{=} \int \frac{1-v}{2(1+v)}\mathrm{d}v = \int \frac{1}{1+v} - \frac{1}{2}\mathrm{d}v = \ln(1+v) - \frac{v}{2} + C\\ &= \ln(1+u^2) - \frac{u^2}{2} + C = \ln\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{t}{2}\right) - \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2\frac{t}{2} + C,\end{aligned}$$

ahol a $(\dagger)$ egyenlőségben a $v = u^2$ helyettesítést végeztük. Végül

$$\begin{aligned}\int_\gamma \frac{\mathrm{d}x}{2a+y} - \frac{\mathrm{d}y}{a+x} &= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t\mathrm{d}t}{1+\sin t} + \frac{\cos t\mathrm{d}t}{1+\cos t}\\ &= -\left[\frac{2}{1+\operatorname{tg}\frac{t}{2}} + t + \ln\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{t}{2}\right) - \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2\frac{t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\ &= -\left(1+\frac{\pi}{2}+\ln 2 - \frac{1}{2}\right) + 2 = -\frac{3}{2} - \frac{\pi}{2} - \ln 2.\end{aligned}$$

□

12.8. Feladat. Bizonyítsd be, hogy az alábbi másodfajú görbe-menti integrálok függetlenek az úttól, majd határozd meg őket (alább A jelöli a kezdőpontot és B a végpontot):

(a) $\displaystyle\int_{\widetilde{AB}} y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y$, $\quad A(2,1)$, $B(1,3)$;

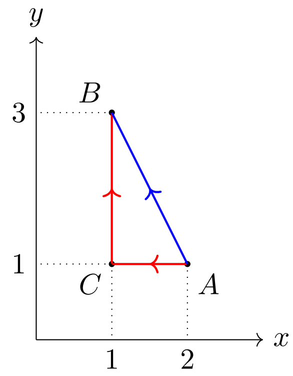
Megoldás. Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy a görbe-menti integrál független legyen az úttól:

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x},$$

ahol $P(x,y)$ a dx, illetve $Q(x,y)$ a dy előtti függvények. Ebben a feladatban $P(x,y) = y$ és $Q(x,y) = x$, tehát

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = 1 = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}.$$

Ez azt jelenti, hogy az integrál független az úttól, ami $A(2,1)$-ből indul és $B(1,3)$-ba érkezik.



Először kiszámítjuk az integrált az Ox és Oy koordinátatengelyekkel párhuzamos (a fenti ábrán pirossal jelölt) út mentén. Ez az út két szakaszból tevődik össze: az Ox tengellyel párhuzamos AC és az Oy tengellyel párhuzamos CB szakaszból. Az AC szakasz paraméterezése: $\gamma_1(t) = (t, 1)$, $t \in [2, 1]$ (az irányítás miatt írjuk fordítva az intervallumot); illetve a CB szakasz paraméterezése: $\gamma_2(t) = (1, t)$, $t \in [1, 3]$.

$$\int_{\widetilde{AB}} y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y = \int_{AC} y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y + \int_{CB} y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y = \int_2^1 1\mathrm{d}t + t\mathrm{d}1 +$$
$$+ \int_1^3 1\mathrm{d}1 + 1\mathrm{d}t = \int_2^1 1\mathrm{d}t + \int_1^3 1\mathrm{d}t = t\Big|_2^1 + t\Big|_1^3 = (1-2) + (3-1) = 1.$$

12.13. Megjegyzés

Ezt az integrált direktbe is felírhatuk volna az elméleti összefoglaló végén megadott $V(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(t, y_0)\mathrm{d}t + \int_{y_0}^{y} Q(x,t)\mathrm{d}t$ képlet segítségével, ha az (x_0, y_0) helyébe az $A(2,1)$ kezdőpont, illetve (x,y) helyébe a $B(1,3)$ végpont koordinátáit helyettesítjük: $\int_{\widetilde{AB}} y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y = V(1,3) = \int_2^1 P(t,1)\mathrm{d}t + \int_1^3 Q(1,t)\mathrm{d}t$. ◇

Végül kiszámítjuk az integrált az AB szakasz mentén is (a fenti ábrán a kékkel jelölt út). Ennek a paraméterezése

$$\gamma(t) = (2,1)\cdot(1-t) + (1,3)\cdot t = (2-t, 1+2t), \qquad t \in [0,1].$$

(Ezt általában úgy írhatjuk fel, hogy az A kezdőpont koordinátáinak $(1-t)$-szereséhez hozzáadjuk a B végpont koordinátáinak t-szeresét; a t paraméter mindig 0 és 1 között változik. Látható, hogy $t = 0$-ra a kezdőpontot, míg $t = 1$-re a végpontot kapjuk vissza.) Tehát

$$\int_{\widetilde{AB}} y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y = \int_0^1 (1+2t)\mathrm{d}(2-t) + (2-t)\mathrm{d}(1+2t)$$
$$= \int_0^1 -(1+2t)\mathrm{d}t + (2-t)2\mathrm{d}t = \int_0^1 (3-4t)\mathrm{d}t = \left[3t - 2t^2\right]_0^1 = 3 - 2 = 1.$$

□

(b) $\displaystyle\int_{\widetilde{AB}} yz\mathrm{d}x + xz\mathrm{d}y + xy\mathrm{d}z, \quad A(1,1,0),\ B(2,3,1);$

Megoldás. Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy a görbe-menti integrál független legyen az úttól:

$$\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y,z)}{\partial x}, \qquad \frac{\partial Q(x,y,z)}{\partial z} = \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial y}, \qquad \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial x} = \frac{\partial P(x,y,z)}{\partial z},$$

ahol $P(x,y,z)$ a dx, $Q(x,y,z)$ a dy, illetve $R(x,y,z)$ a dz előtti függvények. Ebben az alpontban $P(x,y,z) = yz$, $Q(x,y,z) = xz$ és $R(x,y,z) = xy$, tehát

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(yz) = z = \frac{\partial Q(x,y,z)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(xz)\,, \\
\frac{\partial Q(x,y,z)}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z}(xz) = x = \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(xy)\,, \\
\frac{\partial R(x,y,z)}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(xy) = y = \frac{\partial P(x,y,z)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y}(yz)\,.
\end{aligned}$$

Először az Ox, Oy, illetve Oz tengelyekkel párhuzamos út mentén számoljuk ki a görbementi integrált. Ekkor az $\widetilde{AB}$ út $A(1,1,0)C(2,1,0)$ Ox-tengellyel, $C(2,1,0)D(2,3,0)$ Oy-tengellyel és $D(2,3,0)B(2,3,1)$ Oz-tengellyel párhuzamos szakaszokból áll (C és D töréspontok koordinátáit úgy kapjuk, hogy az A kezdőpontnak az x, illetve az x és y koordinátáit kicseréljük a B végpont ugyanazon koordinátáira). Az AC szakasz paraméterezése $\gamma_1(t) = (t,1,0)$, $t \in [1,2]$, a CD szakasz paraméterezése $\gamma_2(t) = (2,t,0)$, $t \in [1,3]$, illetve a DB szakasz paraméterezése $\gamma_3(t) = (2,3,t)$, $t \in [0,1]$. Tehát

$$\begin{aligned}
\int_{\widetilde{AB}} yz\mathrm{d}x + xz\mathrm{d}y + xy\mathrm{d}z &= \int_{AC} yz\mathrm{d}x + xz\mathrm{d}y + xy\mathrm{d}z + \int_{CD} yz\mathrm{d}x + xz\mathrm{d}y + xy\mathrm{d}z \\
&+ \int_{DB} yz\mathrm{d}x + xz\mathrm{d}y + xy\mathrm{d}z = \int_1^2 1\cdot 0\mathrm{d}t + t\cdot 0\mathrm{d}1 + t\cdot 1\mathrm{d}0 \\
&+ \int_1^3 t\cdot 0\mathrm{d}2 + 2\cdot 0\mathrm{d}t + 2\cdot t\mathrm{d}0 + \int_0^1 3\cdot t\mathrm{d}2 + 2\cdot t\mathrm{d}3 + 2\cdot 3\mathrm{d}t = \int_0^1 6\mathrm{d}t = 6.
\end{aligned}$$

12.14. Megjegyzés

Ebben az esetben az integrál egyenesen kiszámítható az

$$\int_{\widetilde{AB}} P(x,y,z)\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\mathrm{d}y + R(x,y,z)\mathrm{d}z = \int_{x_0}^{x_1} P(t,y_0,z_0)\mathrm{d}t + \int_{y_0}^{y_1} Q(x_1,t,z_0)\mathrm{d}t + \int_{z_0}^{z_1} R(x_1,y_1,t)\mathrm{d}t$$

általános képlettel is, ahol (x_0,y_0,z_0) az A kezdőpont és (x_1,y_1,z_1) a B végpont koordinátái. ◇

Másféleképpen, az AB szakasz mentén is kiszámítjuk az integrált. Az AB szakasz paraméterezése: $\gamma(t) = (1,1,0)\cdot(1-t) + (2,3,1)\cdot t = (1+t, 1+2t, t)$, $t \in [0,1]$. Ekkor

$$\begin{aligned}
\int_{\widetilde{AB}} yz\mathrm{d}x + xz\mathrm{d}y + xy\mathrm{d}z &= \int_0^1 (1+2t)t\mathrm{d}(1+t) + (1+t)t\mathrm{d}(1+2t) + (1+t)(1+2t)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \left[(1+2t)t + (1+t)t\cdot 2 + (1+t)(1+2t)\right]\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \left(1+6t+6t^2\right)\mathrm{d}t = \left[t+3t^2+2t^3\right]_0^1 = 6.
\end{aligned}$$

□

12.9. Feladat. Az előző feladat összes alpontjához határozz meg egy, az alpontban szereplő erőtérhez rendelt V potenciált a megfelelő D tartományon.

12.15. Megjegyzés

Az előző feladat megfelelő alpontjában ellenőriztük, hogy az integrál független az út megválasztásától, ami egyenértékű a V potenciál létezésével. Megjegyezzük, hogy a potenciál egy konstans erejéig van jól értelmezve (az (x_0,y_0) vagy (x_0,y_0,z_0) megválasztásától függően.) ◇

(a) $\int_{\widetilde{AB}} y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y, \quad A(2,1),\ B(1,3);$

Első megoldás. Ebben az alpontban $P(x,y) = y$ és $Q(x,y) = x$, mely függvények mindenhol értelmezve vannak, ezért a $V(x,y)$ potenciál a $D = \mathbb{R}^2$ síkon van értelmezve és a $V(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(t,y_0)\mathrm{d}t + \int_{y_0}^{y} Q(x,t)\mathrm{d}t$ képlettel számolhatjuk ki. Ha (x_0,y_0)-nak az $A(2,1)$ koordinátáit választjuk, akkor egy potenciál a

$$\begin{aligned} V(x,y) &= \int_2^x P(t,1)\mathrm{d}t + \int_1^y Q(x,t)\mathrm{d}t = \int_2^x 1\mathrm{d}t + \int_1^y x\mathrm{d}t \\ &= t\big|_2^x + xt\big|_1^y = (x-2) + x(y-1) = xy - 2. \end{aligned}$$

12.16. Megjegyzés
Értelmezés szerint V értéke a kezdőpontban mindig 0 (valóban $V(2,1) = 0$) és ebben az esetben az $\int_{\widetilde{AB}} y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y$ görbementi integrál megegyezik a V potenciál $B(1,3)$ végpontbeli értékével: $\int_{\widetilde{AB}} y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y = V(1,3) = (1-2) + 1\cdot(3-1) = 1.$ ◇

□

Második megoldás. Egy másik potenciált kapunk (ami egy konstansban tér el az előzőtől), ha az (x_0,y_0)-nak például $(0,0)$-t választunk. Ekkor

$$V(x,y) = \int_0^x P(t,0)\mathrm{d}t + \int_0^y Q(x,t)\mathrm{d}t = \int_0^x 0\mathrm{d}t + \int_0^y x\mathrm{d}t = xt\big|_0^y = xy.$$

Ebben az esetben az $A(2,1)$ pontban a potenciál értéke már nem lesz 0. Továbbá a $\int_{\widetilde{AB}} y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y$ görbementi integrál megegyezik a V potenciál $B(1,3)$ végpontbeli és $A(1,2)$ kezdőpontbeli értékeinek különbségével: $\int_{\widetilde{AB}} y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y = V(1,3) - V(2,1) = 3 - 2 = 1.$ □

(b) $\int_{\widetilde{AB}} yz\mathrm{d}x + xz\mathrm{d}y + xy\mathrm{d}z, \quad A(1,1,0),\ B(2,3,1);$

Első megoldás. Ebben az alpontban $P(x,y,z) = yz$, $Q(x,y,z) = xz$ és $R(x,y,z) = xy$, amely függvények mindenhol értelmezve vannak, ezért a $V(x,y,z)$ potenciál a $D = \mathbb{R}^3$-n van értelmezve és a $V(x,y,z) = \int_{x_0}^{x} P(t,y_0,z_0)\mathrm{d}t + \int_{y_0}^{y} Q(x,t,z_0)\mathrm{d}t + \int_{z_0}^{z} R(x,y,t)\mathrm{d}t$ képlettel számolhatjuk ki. Ha (x_0,y_0,z_0)-nak az $A(1,1,0)$ koordinátáit választjuk, akkor egy potenciál a

$$\begin{aligned} V(x,y,z) &= \int_1^x P(t,1,0)\mathrm{d}t + \int_1^y Q(x,t,0)\mathrm{d}t + \int_0^z R(x,y,t)\mathrm{d}t \\ &= \int_1^x 1\cdot 0\mathrm{d}t + \int_1^y x\cdot 0\mathrm{d}t + \int_0^z xy\mathrm{d}t = xyt\big|_0^z = xyz. \end{aligned}$$

Megjegyzés. Az $\int_{\widetilde{AB}} yz\mathrm{d}x + xz\mathrm{d}y + xy\mathrm{d}z$ görbementi integrál megegyezik a V potenciál $B(2,3,1)$ végpontbeli értékével:

$$\int_{\widetilde{AB}} yz\mathrm{d}x + xz\mathrm{d}y + xy\mathrm{d}z = V(2,3,1) = 2\cdot 3\cdot 1 = 6.$$

□

Második megoldás. Egy másik potenciált kaphatunk (ami egy konstansban tér el az előző-től), ha az (x_0, y_0, z_0)-nak például $(0,0,0)$-t választunk. Ekkor

$$V(x,y,z) = \int_0^x P(t,0,0)\mathrm{d}t + \int_0^y Q(x,t,0)\mathrm{d}t + \int_0^z R(x,y,t)\mathrm{d}t =$$
$$= \int_0^x 0\mathrm{d}t + \int_0^y x\cdot 0\mathrm{d}t + \int_0^z xyt\mathrm{d}t = xyt\Big|_0^z = xyz.$$

Megjegyzés. Ebben az esetben az $\int_{\widetilde{AB}} yz\mathrm{d}x + xz\mathrm{d}y + xy\mathrm{d}z$ görbementi integrál megegyezik a V potenciál $B(2,3,1)$ végpontbeli és $A(1,1,0)$ kezdőpontbeli értékeinek különbségével:

$$\int_{\widetilde{AB}} yz\mathrm{d}x + xz\mathrm{d}y + xy\mathrm{d}z = V(2,3,1) - V(1,1,0) = 6 - 0 = 6.$$

□

13. fejezet

Kettős integrálok

13.1. Elméleti összefoglaló

13.1.1. Kettős integrál téglalapon

Ha $D = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b \text{ és } c \le y \le d\}$ téglalap és $f\colon D \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, akkor

$$\iint\limits_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x \int_c^d f(x, y)\mathrm{d}y = \int_c^d \mathrm{d}y \int_a^b f(x, y)\mathrm{d}x.$$

13.1. Példa

Ha $D = [2, 4] \times [3, 7]$ téglalap és $f(x, y) = x^3y^4 + e^x$, akkor

$$\iint_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_2^4 \mathrm{d}x \int_3^7 x^3y^4 + e^x\mathrm{d}y = \int_2^4 \left(\left[x^3 \cdot \frac{y^5}{5} + e^x y\right]_3^7\right) \mathrm{d}x =$$

$$= \int_2^4 \left(x^3 \cdot \frac{7^5 - 3^5}{5} + e^x(7 - 3)\right) \mathrm{d}x = \left[\frac{x^4}{4} \cdot \frac{7^5 - 3^5}{5} + 4e^x\right]_2^4 =$$

$$= \frac{4^4 - 2^4}{4} \cdot \frac{7^5 - 3^5}{5} + 4e^4 - 4e^2.$$

Fordított sorrendben integrálva

$$\iint_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_3^7 \mathrm{d}y \int_2^4 x^3y^4 + e^x\mathrm{d}x = \int_3^7 \left(\left[\frac{x^4}{4} \cdot y^4 + e^x\right]_2^4\right) \mathrm{d}y =$$

$$= \int_3^7 \left(\frac{4^4 - 2^4}{4} \cdot y^4 + e^4 - e^2\right) \mathrm{d}y = \left[\frac{4^4 - 2^4}{4} \cdot \frac{y^5}{5} + (e^4 - e^2)y\right]_3^7 =$$

$$= \frac{4^4 - 2^4}{4} \cdot \frac{7^5 - 3^5}{5} + 4e^4 - 4e^2.$$

◇

13.2. Tulajdonság

Ha $f, g : D \to \mathbb{R}$ integrálható függvények a D-n, akkor bármely $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ konstansok esetén

$$\iint_D (\alpha f(x, y) + \beta g(x, y))\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \alpha \iint_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \beta \iint_D g(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

13.1.2. Kettős integrál normáltartományon

Ha $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b \text{ és } \alpha(x) \le y \le \beta(x)\}$ és $f\colon D \to \mathbb{R}$ folytonos, akkor

$$\iint\limits_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y)\mathrm{d}y.$$

Ha $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \gamma(y) \le x \le \delta(y) \text{ és } c \le y \le d\}$ és $f\colon D \to \mathbb{R}$ folytonos, akkor

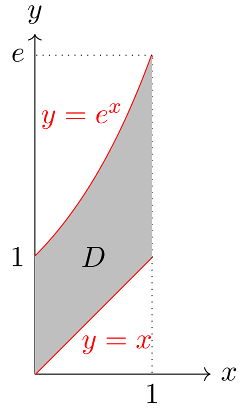
$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_c^d \mathrm{d}y \int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x,y)\mathrm{d}x.$$

13.3. Példa

Ha $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \le x \le 1,\ x \le y \le e^x\}$ és $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = 2xy$, akkor

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_x^{e^x} 2xy\mathrm{d}y = \int_0^1 \left(xy^2\Big|_x^{e^x}\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(xe^{2x} - x^3\right)\mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^1 xe^{2x}\mathrm{d}x - \int_0^1 x^3\mathrm{d}x = \left[x\frac{e^{2x}}{2}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{e^{2x}}{2}\mathrm{d}x - \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{e^2}{2} - \left[\frac{e^{2x}}{4}\right]_0^1 - \frac{1}{4} = \frac{e^2}{4}.$$



◇

13.1.3. Változócsere kettős integrálban

Ha az $x = \varphi(u,v)$ és $y = \psi(u,v)$ változócsere a D tartományt bijektíven a D' tartományba transzformálja a síkban, a φ és ψ függvények folytonosan deriválhatók, és a változócsere Jacobi determinánsa:

$$\frac{d(x,y)}{d(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial u} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial v} \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial u} & \dfrac{\partial\psi}{\partial v} \end{vmatrix}$$

sehol nem 0 a D tartományon, akkor

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{D'} f(\varphi(u,v),\psi(u,v)) \cdot \left|\frac{d(x,y)}{d(u,v)}\right| \mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

Sajátos esetben, ha $x = r\cos\theta$ és $y = r\sin\theta$, ahol $r > 0$ és $\theta \in [0, 2\pi)$, vagyis polár-koordinátákra térünk át, akkor

$$\frac{d(x,y)}{d(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r.$$

13.4. Példa

Ha $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = 9\}$ és $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, akkor az $x = r\cos\theta$ és $y = r\sin\theta$ változó cseréjével a $D^* = D \setminus \{(0,0)\}$ halmaz a $D' = \{(r,\theta) \,|\, 0 < r \le 3,\ 0 \le \theta < 2\pi\}$ halmazra transzformálódik és az $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ függvényből $f(r\cos\theta, r\cos\theta) = r$ lesz. Így

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D^*} \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D'} r \cdot r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta =$$

$$= \int_0^3 \int_0^{2\pi} r^2\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \int_0^3 \mathrm{d}r \int_0^{2\pi} r^2\mathrm{d}\theta = \int_0^3 2\pi r^2\mathrm{d}r = \left[2\pi\frac{r^3}{3}\right]_0^3 = 18\pi.$$

◇

13.1.4. Alkalmazások

13.1.4.1. Területszámítás

Egy $D \subset \mathbb{R}^2$ tartomány területe egyenlő az $\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ kettős integrállal.

13.5. Példa

Legyen D az origó középpontú és r sugarú kör. A D tartomány az $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ és $y = -\sqrt{r^2 - x^2}$, $x \in [-r, r]$ félkörívek közötti tartomány, így a területe

$$T_D = \iint_D 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-r}^{r} \mathrm{d}x \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} 1\mathrm{d}y = \int_{-r}^{r} \left(y\Big|_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} \right) \mathrm{d}x = \int_{-r}^{r} 2\sqrt{r^2 - x^2}\mathrm{d}x$$
$$\overset{(x=r\sin t)}{=} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\sqrt{r^2 - r\sin^2 t}r\cos t\mathrm{d}t = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2(r\cos t)r\cos t\mathrm{d}t = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2r^2\cos^2 t\mathrm{d}t$$
$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^2(1 + \cos 2t)\mathrm{d}t = r^2(t + \frac{\sin 2t}{2})\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = r^2\pi.$$

◇

13.1.4.2. Tömegszámítás

Legyen $D \subset \mathbb{R}^2$ egy síktartomány. Ha a $\rho\colon D \to \mathbb{R}$ pozitív függvény a D inhomogén lemez sűrűségét írja, akkor az $\iint\limits_D \rho(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ kettős integrál a D lemez tömegét számolja ki.

13.1.4.3. Súlypontszámítás

Ha a D síkbeli tartomány tetszőleges $(x, y) \in D$ pontjában a sűrűség az $\rho\colon D \to \mathbb{R}$ függvénnyel írható le, akkor a test $G(x_G, y_G)$ súlypontjának koordinátái

$$x_G = \frac{1}{M}\iint\limits_D xf(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad \text{és} \quad y_G = \frac{1}{M}\iint\limits_D yf(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

13.2. Feladatok

13.1. Feladat. Számítsuk ki a következő kettős integrálokat:

(a) $\displaystyle\iint_D xy(x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, ahol $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x\le a,\ 0\le y\le b\}$.

(b) $\displaystyle\iint_D \ln(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, ahol $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x\le 1,\ 1\le y\le 2\}$;

(c) $\displaystyle\iint_D (1-x)(1-xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, ahol $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2\}$;

(d) $\displaystyle\iint_D xe^{xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, ahol $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2\}$;

13.2. Feladat. Számítsuk ki a következő iterált integrálokat:

(a) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\mathrm{d}y\int_{y^2-1}^{y+1}(x+y)\mathrm{d}x$;

(b) $\displaystyle\int_{0}^{1}\mathrm{d}x\int_{e^{-x}}^{e^{x}}ye^{x}\mathrm{d}y$;

(c) $\displaystyle\int_{0}^{\pi}\mathrm{d}y\int_{\sin y}^{2}xy\mathrm{d}x$;

(d) $\displaystyle\int_{0}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}\mathrm{d}x\int_{-x}^{2x}x^2\sin(xy)\mathrm{d}y$.

13.3. Feladat. Írjuk fel az $I=\displaystyle\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ integrált iterált integrálként (lehetőleg kétféleképpen), ha a D tartományt a következő összefüggések adják meg:

(a) $x^2+y^2\le -2x$;

(b) $x^2+y^2\le 4$, $x^2+\frac{1}{4}y^2\ge 1$ és $x\ge 0$;

(c) $x^2+y^2\le 2$, $x\le y^2$, $x\ge -y^2$ és $y\le 0$;

(d) az ABC háromszöglap, ahol $A(-1,0)$, $B(1,0)$, $C(0,1)$;

(e) $x^2+y^2+2x+2y+1\le 0$;

(f) $x^2+y^2\le 4$ és $x^2+y^2\ge 2x$;

13.4. Feladat. Számítsd ki a következő kettős integrálokat:

(a) $\displaystyle\iint_D e^{\frac{x}{y}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, ahol D az $y^2=x$, $x=0$ és $y=1$ görbék által határolt tartomány;

(b) $\displaystyle\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, ahol $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x\le 1 \text{ és } 0\le y\le\sqrt{1-x^2}\}$.

(c) $\displaystyle\iint_D xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, ahol D az $y=x^2$ és $y=2x+3$ görbék által határolt tartomány;

(d) $\displaystyle\iint_D \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, ahol D az $x=0$, $y=1$, $y=\sqrt[3]{2}$ és $y=x$ görbék által határolt tartomány;

(e) $\displaystyle\iint_D \arcsin\sqrt{x+y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, ahol D az $x+y=0$, $x+y=1$, $y=1$ és $y=-1$ görbék által határolt tartomány;

(f) $\displaystyle\iint\limits_D (xy)^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, ahol $D\colon y \geq x^3,\ y \leq x^2,\ x \geq 0$;

(g) $\displaystyle\iint\limits_D \cos(x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, ahol a D határai: $x = 0,\ y = \pi,\ y = x$;

(h) $\displaystyle\iint\limits_D \frac{1}{(1+y)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\ D\colon y \leq x,\ xy \geq 1,\ 1 \leq x \leq 2$;

(i) $\displaystyle\iint\limits_D (x^2+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, ahol a D határai: $y = x^2,\ x = y^2$;

(j) $\displaystyle\iint\limits_D \frac{xy}{\sqrt{(1-y^2)}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\ D\colon x^2+y^2 \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0$;

13.5. Feladat. Cseréljük fel az integrálás sorrendjét a következő iterált integrálokban:

(a) $\displaystyle\int_{-1}^{3}\mathrm{d}x\int_{\frac{x^2+2x-3}{4}}^{x} f(x,y)\mathrm{d}y$;

(b) $\displaystyle\int_{0}^{1}\mathrm{d}x\int_{x^2}^{\sqrt{x}} f(x,y)\mathrm{d}y$;

(c) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\mathrm{d}x\int_{-1}^{\sin x} f(x,y)\mathrm{d}y$;

(d) $\displaystyle\int_{0}^{1}\mathrm{d}y\int_{y^2}^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x$.

13.6. Feladat. Számítsuk ki a következő iterált integrálokat*:

(a) $\displaystyle\int_{0}^{1}\mathrm{d}y\int_{y^2}^{y^{\frac{2}{3}}} ye^{x^2}\mathrm{d}x$;

(b) $\displaystyle\int_{0}^{1}\mathrm{d}y\int_{y^2}^{\sqrt{y}} y\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$.

13.7. Feladat. Számítsd ki polár-koordináták segítségével az alábbi kettős integrálokat:

(a) $\displaystyle\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\ D\colon x^2+y^2 \leq a^2$;

(b) $\displaystyle\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\ D\colon x^2+y^2 \leq ax,\ y \geq -x$, ahol $a > 0$;

(c) $\displaystyle\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\ D\colon ax \leq x^2+y^2 \leq 2ax,\ y \geq 0$, ahol $a > 0$;

(d) $\displaystyle\iint\limits_D \arcsin\frac{1}{2\pi}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\ D\colon \pi^2 \leq x^2+y^2 \leq (2\pi)^2$.

13.8. Feladat. Határozd meg annak a síkban elhelyezkedő anyagdarabnak a tömegét és súlypontjának a koordinátáit, amelynek

(a) minden pontjában a sűrűsége $\rho(x,y) = |x|$, illetve helyzetét a $D\colon\ x^2+y^2 \leq 4,\ x^2+y^2 \geq 2x$, $y \geq 0$ tartomány írja le;

(b) sűrűségét az $f(x,y) = xy$ függvény írja le, helyzetét pedig az a D tartomány, amelynek határai $x+y = 3,\ xy = 2$.

13.9. Feladat. Határozd meg annak a testnek a térfogatát kettős integrálok segítségével, melynek határai

---

*Cseréljük fel az integrálás sorrendjét.

(a) az xOy sík és a $z = x^2 + y^2$, valamint $x^2 + y^2 = 1$ egyenletű felületek;

(b) $x + y + z = a, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0;$

(c) $x + y + z = 4a, \quad x^2 + y^2 = a^2, \quad z = 0.$

13.3. Megoldások

13.1. Feladat. Számítsuk ki a következő kettős integrálokat:

(a) $\displaystyle\iint_D xy(x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, ahol $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le x\le a,\ 0\le y\le b\}$.

Megoldás. A tartomány ismét egy téglalap és

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^a \mathrm{d}x \int_0^b xy(x^2-y^2)\mathrm{d}y = \int_0^a \mathrm{d}x \left(\int_0^b x^3y\mathrm{d}y - \int_0^b xy^3\mathrm{d}y\right) \\
&= \int_0^a \mathrm{d}x \left(\frac{x^3y^2}{2}\bigg|_{y=0}^{y=b} - \frac{xy^4}{4}\bigg|_{y=0}^{y=b}\right) = \int_0^a \left(\frac{x^3b^2}{2}-\frac{xb^4}{4}\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{a^4b^2}{8} - \frac{a^2b^4}{8}.
\end{aligned}$$

□

(b) $\displaystyle\iint_D \ln(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, ahol $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,|\, 0\le x\le 1,\ 1\le y\le 2\}$;

Megoldás. Mivel a tartomány, ami felett integrálunk a $[0,1]\times[1,2]$ téglalap, ezért

$$I=\int_0^1 \mathrm{d}x \int_1^2 \ln(x+y)\mathrm{d}y.$$

Viszont a parciális integrálás szabálya alapján $\displaystyle\int_a^b f'g = fg\bigg|_a^b - \int_a^b fg'$, vagyis

$$\begin{aligned}
\int_1^2 \ln(x+y)\mathrm{d}y &= (x+y)\ln(x+y)\bigg|_{y=1}^{y=2} - \int_1^2 (x+y)\cdot\frac{1}{x+y}\mathrm{d}y \\
&= (x+2)\ln(x+2)-(x+1)\ln(x+1)-(2-1).
\end{aligned}$$

Tehát

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \big((x+2)\ln(x+2)-(x+1)\ln(x+1)-1\big)\mathrm{d}x \\
&= -x\bigg|_0^1 + \left(\frac{(x+2)^2}{2}\ln(x+2)\bigg|_0^1 - \int_0^1 \frac{(x+2)^2}{2}\cdot\frac{1}{x+2}\mathrm{d}x\right) \\
&\quad - \left(\frac{(x+1)^2}{2}\ln(x+1)\bigg|_0^1 - \int_0^1 \frac{(x+1)^2}{2}\cdot\frac{1}{x+1}\mathrm{d}x\right) \\
&= -1 + \left(\frac{9}{2}\ln 3 - 2\ln 2 - \left(\frac{x^2}{4}+x\right)\bigg|_0^1\right) - \left(2\ln 2 - 0 - \left(\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}\right)\bigg|_0^1\right) \\
&= \frac{9}{2}\ln 3 - 4\ln 2 - \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

□

13.2. Feladat. Számítsuk ki a következő iterált integrálokat:

(a) $\displaystyle\int_{-1}^1 \mathrm{d}y \int_{y^2-1}^{y+1} (x+y)\mathrm{d}x$;

Megoldás.

$$\int_{-1}^{1} \mathrm{d}y \int_{y^2-1}^{y+1} (x+y)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}y \left(\left[\frac{x^2}{2} + yx \right]_{x=y^2-1}^{x=y+1} \right)$$
$$= \int_{-1}^{1} \mathrm{d}y \left(\frac{1}{2} \left((y+1)^2 - (y^2-1)^2 \right) + y \left(y+1-(y^2-1) \right) \right)$$
$$= \int_{-1}^{1} \frac{1}{2} \left(-y^4 - 2y^3 + 5y^2 + 6y \right) \mathrm{d}y$$
$$= \frac{1}{2} \left[-\frac{y^5}{5} - 2\frac{y^4}{4} + 5\frac{y^3}{3} + 6\frac{y^2}{2} \right]_{y=-1}^{y=1} = \frac{22}{15}.$$

□

(b) $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}x \int_{e^{-x}}^{e^x} ye^x \mathrm{d}y;$

Megoldás.

$$\int_0^1 \mathrm{d}x \int_{e^{-x}}^{e^x} ye^x \mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}x \left[\frac{y^2}{2} e^x \right]_{y=e^{-x}}^{y=e^x} = \int_0^1 \left(\frac{e^{2x}}{2} e^x - \frac{e^{-2x}}{2} e^x \right) \mathrm{d}x$$
$$= \int_0^1 \frac{1}{2} \left(e^{3x} - e^{-x} \right) \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \left[\frac{e^{3x}}{3} + e^{-x} \right]_0^1$$
$$= \frac{1}{2} \left[\frac{e^3}{3} - \frac{e^0}{3} + e^{-1} - e^0 \right] = \frac{e^3}{6} + \frac{e^{-1}}{2} - \frac{2}{3}.$$

□

13.3. Feladat. Írjuk fel az $I = \iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ integrált iterált integrálként (lehetőleg kétféleképpen), ha a D tartományt a következő összefüggések adják meg:

(a) $x^2 + y^2 \leq -2x;$

Megoldás. A D tartományt megadó egyenlőtlenség átírható a következő alakba:

$$x^2 + y^2 \leq -2x \iff x^2 + 2x + 1 + y^2 \leq 1 \iff (x+1)^2 + y^2 \leq 1,$$

amely alapján a D tartomány egy $O(-1,0)$ középpontú, egységnyi sugarú zárt körlap. Innen felírható a D tartomány, mint az $y = -\sqrt{1-(1+x)^2}$, $x \in [-2,0]$ és $y = \sqrt{1-(1+x)^2}$, $x \in [-2,0]$ félkörívek közötti síkrész. Tehát

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \leq x \leq 0,\ -\sqrt{1-(1+x)^2} \leq y \leq \sqrt{1-(1+x)^2}\},$$

ahonnan

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{-2} \mathrm{d}x \int_{-\sqrt{1-(1+x)^2}}^{\sqrt{1-(1+x)^2}} f(x,y)\mathrm{d}y.$$

Felcserélve az x és y szerepét a következőképpen is felírható a tartomány:

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq y \leq 1,\ -1-\sqrt{1-y^2} \leq x \leq -1+\sqrt{1-y^2}\},$$

illetve az integrál

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}y \int_{-1-\sqrt{1-y^2}}^{-1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x.$$

□

(b) $x^2 + y^2 \leq 4$, $x^2 + \frac{1}{4}y^2 \geq 1$ és $x \geq 0$;

Megoldás. Kifejezzük az $x^2 + y^2 \leq 4$, illetve $x^2 + \frac{1}{4}y^2 \geq 1$ egyenlőtlenségekből az x-et, az $x \geq 0$ feltétel mellett:

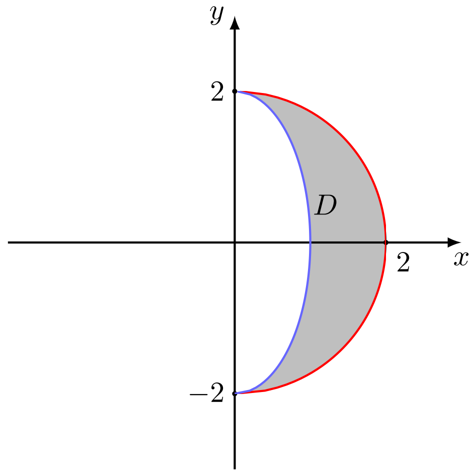
$$x^2 + y^2 \leq 4,\ x \geq 0 \iff x \leq \sqrt{4 - y^2},$$
$$x^2 + \frac{1}{4}y^2 \geq 1,\ x \geq 0 \iff x \geq \sqrt{1 - \frac{1}{4}y^2},$$

ahonnan

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid -2 \leq y \leq 2,\ \sqrt{1 - \frac{1}{4}y^2} \leq x \leq \sqrt{4 - y^2}\}.$$

Az integrál felírható, mint

$$\iint_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-2}^{2} \mathrm{d}y \int_{\sqrt{1-\frac{1}{4}y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y)\mathrm{d}x.$$

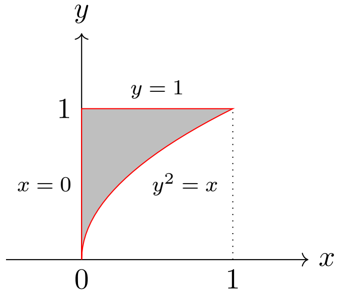


□

13.4. Feladat. Számítsd ki a következő kettős integrálokat:

(a) $\iint\limits_D e^{\frac{x}{y}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, ahol D az $y^2 = x$, $x = 0$ és $y = 1$ görbék által határolt tartomány;

Megoldás.



Az ábra alapján az integrált kétféleképpen számolhatjuk:

$$\iint\limits_D e^{\frac{x}{y}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_{\sqrt{x}}^1 e^{\frac{x}{y}}\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^{y^2} e^{\frac{x}{y}}\,\mathrm{d}x.$$

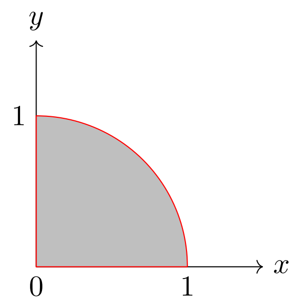
Az első integrált nem tudjuk kiszámolni elemi módszerekkel: az $\int e^{\frac{1}{y}}\,dy$ típusú integrálnak nincs elemi függvényekkel felírható, zárt alakja, viszont a másodikat igen! Tehát

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \mathrm{d}x \cdot ye^{\frac{x}{y}}\Big|_{x=0}^{x=y^2} = \int_0^1 (y - ye^y)\mathrm{d}y \\ &= -\frac{1}{2} - \int_0^1 ((y-1)e^y)'\mathrm{d}y = -\frac{1}{2} - (y-1)e^y\Big|_0^1 \\ &= -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

□

(b) $\iint\limits_D \sqrt{1-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, ahol $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1 \text{ és } 0 \le y \le \sqrt{1-x^2}\}$.

Megoldás.



A feltételek alapján az

$$I = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2}\mathrm{d}y$$

kettős integrált kell kiszámolnunk. Vezessük be az $a = \sqrt{1-x^2}$ jelölést. Így a belső integrál a $J = \int_0^a \sqrt{a^2-y^2}\,dy$ integrállá alakul. Ennek az integrálnak a kiszámításához az

$$\begin{aligned} y &= a\sin t, & t_0 &= \arcsin\frac{0}{a} = 0, \\ dy &= a\cos t\,dt, & t_1 &= \arcsin\frac{a}{a} = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

helyettesítést alkalmazzuk:

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - a^2\sin t} \cdot a\cos t\,dt = a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos t| \cdot \cos t\,dt \\ &= a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}\mathrm{d}t = \frac{a^2\pi}{4}. \end{aligned}$$

Tehát

$$I = \int_0^1 \frac{(1-x^2)\pi}{4}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{6}.$$

Megjegyzés. A megoldásban alkalmazott helyettesítés azt sugallja, hogy a feladatot megoldhattuk volna polár-koordinátákra való áttéréssel is. Valóban, a D halmaz pontosan az első negyedbe eső egységnyi sugarú körcikk, így a koordinátacsere után

$$D' = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le r \le 1 \text{ és } 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\}.$$

Az integrál a következő módon alakul:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta} \cdot r\, d\theta \\ &= \int_0^1 dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} r\sqrt{1-r^2}\, d\theta \\ &= \int_0^1 \frac{\pi}{2} r\sqrt{1-r^2}\, dr. \end{aligned}$$

Ha az utolsó integrálban változót cserélünk:

$$\begin{aligned} 1 - r^2 &= t, \qquad & t_0 &= 1, \\ -2r\, dr &= dt, \qquad & t_1 &= 0, \end{aligned}$$

akkor

$$I = \frac{\pi}{2} \int_1^0 -\frac{1}{2}\sqrt{t}\, dt = -\frac{\pi}{4} \cdot \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \Big|_1^0 = \frac{\pi}{6}.$$

□

13.5. Feladat. Cseréljük fel az integrálás sorrendjét a következő iterált integrálokban:

(a) $\displaystyle\int_{-1}^{3} \mathrm{d}x \int_{\frac{x^2+2x-3}{4}}^{x} f(x, y)\mathrm{d}y;$

Megoldás. Az integrálás D tartománya az $y(x) = \frac{x^2+2x-3}{4}$, $x \in [-1, 3]$ feletti és az $y_2 = x$, $x \in [-1, 3]$ görbe alatti rész, vagyis

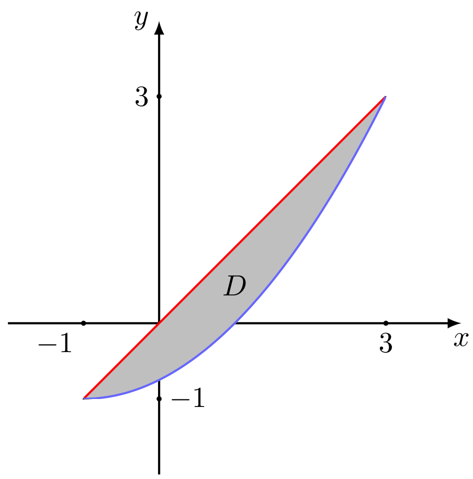
$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \le x \le 3,\ \frac{x^2 + 2x - 3}{4} \le y \le x\right\}.$$

A két görbe egyenletéből kifejezzük x-et y függvényben. Az $y = x$-ből adódik, hogy $x = y$, illetve

$$y = \frac{x^2 + 2x - 3}{4} \iff 4y = (x+1)^2 + 4 \iff 4(y-1) = (x+1)^2 \iff x = 2\sqrt{y-1} - 1,$$

ha $y \in [-1, 3]$. Tehát

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \le y \le 3,\ y \le x \le 2\sqrt{y-1} - 1\right\}.$$



□

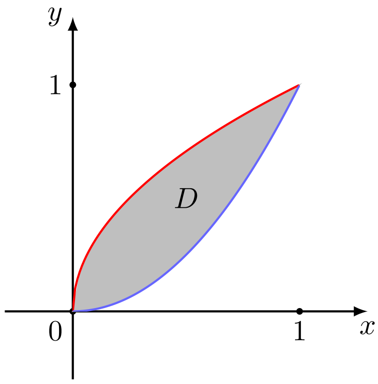
(b) $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}x \int_{x^2}^{\sqrt{x}} f(x,y)\mathrm{d}y$;

Megoldás. Az integrálás D tartománya az $y(x) = x^2$, $x \in [0,1]$ feletti és az $y_2 = \sqrt{x}$, $x \in [0,1]$ görbe alatti rész, vagyis

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1,\ x^2 \le y \le \sqrt{x}\right\}.$$

A két görbe egyenletéből kifejezzük x-et y függvényben. Az $y = x^2$, $x \in [0,1]$ átírható, mint $x = \sqrt{y}$, ha $y = [0,1]$ illetve $y = \sqrt{x}$, $x \in [0,1]$ átírható, mint $x = y^2$, ha $y = [0,1]$. Tehát

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le y \le 1,\ y^2 \le x \le \sqrt{y}\right\}.$$



□

13.6. Feladat. Számítsuk ki a következő iterált integrálokat[†]:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}y \int_{y^2}^{y^{\frac{2}{3}}} y e^{x^2} \mathrm{d}x$;

Megoldás. Az integrálás tartománya

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1,\ y^2 \le x \le y^{\frac{2}{3}}\right\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le y \le 1,\ x^{\frac{3}{2}} \le y \le \sqrt{x}\right\},$$

ezért felcserélhetjük az integrálás sorrendjét a következőképpen:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \mathrm{d}y \int_{y^2}^{y^{\frac{2}{3}}} y e^{x^2} \mathrm{d}x &= \iint_D y e^{x^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_{x^{\frac{3}{2}}}^{\sqrt{x}} y e^{x^2} \mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}x \left[\frac{y^2}{2} e^{x^2}\right]_{y=x^{\frac{3}{2}}}^{y=\sqrt{x}} \\ &= \int_0^1 \left(\frac{x}{2} e^{x^2} - \frac{x^3}{2} e^{x^2}\right) \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{4}\left(e^{x^2} - x^2 e^{x^2}\right) 2x\mathrm{d}x \\ &\overset{(u=x^2)}{=} \int_0^1 \frac{1}{4}\left(e^u - ue^u\right) \mathrm{d}u = \left[(2-u)e^u\right]_0^1 = e - 2.\end{aligned}$$

□

13.7. Feladat. Számítsd ki polár-koordináták segítségével az alábbi kettős integrálokat:

[†]Cseréljük fel az integrálás sorrendjét.

(a) $\displaystyle\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\ D\colon x^2+y^2 \le a^2;$

Megoldás. Az integrálás tartománya $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le a^2\}$ egy origó középpontú, a sugarú körlap. Az $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ változócserével a

$$D' = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < r \le a,\ 0 \le \theta < 2\pi\} = (0,a] \times [0,2\pi)$$

tartományt bijektíven képezzük a $D' = D \setminus \{(0,0)\}$ tartományba. Ezzel a változócserével $\sqrt{x^2+y^2} = r$, így

$$\begin{aligned}\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint_{D^*} \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D'} r\left|\frac{d(x,y)}{d(r,\theta)}\right|\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\\ &= \iint_{D'} r^2\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \int_0^a \mathrm{d}r\int_0^{2\pi} r^2\mathrm{d}\theta = \int_0^a \mathrm{d}r\,\left[r^2\theta\right]_0^{2\pi}\\ &= \int_0^a 2\pi r^2\mathrm{d}r = \int_0^a 2\pi\frac{r^3}{3}\mathrm{d}r = 2\pi\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^a\mathrm{d}r = \frac{a^3}{3}2\pi = \frac{2\pi a^3}{3}.\end{aligned}$$

□

13.8. Feladat. Határozd meg annak a síkban elhelyezkedő anyagdarabnak a tömegét és súlypontjának a koordinátáit, amelynek

(a) minden pontjában a sűrűsége $\rho(x,y) = |x|$, illetve helyzetét a $D\colon\ x^2+y^2 \le 4$, $x^2+y^2 \ge 2x$, $y \ge 0$ tartomány írja le;

Megoldás. A D tartományt leíró egyenlőtlenségek átírhatók a következő alakba:

$$\begin{aligned}x^2+y^2 \le 4,\ x^2+y^2 \ge x,\ y \ge 0 &\iff x^2+y^2 \le 4,\ (x-1)^2+y^2 \ge 1,\ y \ge 0,\\ &\iff y \le \sqrt{4-x^2},\ y \ge \sqrt{1-(x-1)^2},\ y \ge 0.\end{aligned}$$

A D tartomány felbontható két tartomány diszjunkt egyesítésére: $D = D_1 \cup D_2$, ahol

$$\begin{aligned}D_1 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \le x < 0,\ 0 \le y \le \sqrt{4-x^2}\} \text{ és}\\ D_2 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1,\ \sqrt{1-(x-1)^2} \le y \le \sqrt{4-x^2}\}.\end{aligned}$$

Így az anyagdarab tömege

$$\begin{aligned}\iint_D \rho(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint_D |x|\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D_1} |x|\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{D_2} |x|\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= \iint_{D_1} (-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{D_2} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

Az első integrált a következőképpen számoljuk ki:

$$\begin{aligned}\iint_{D_1} (-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_{-1}^0 (-x)\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{4-x^2}} \mathrm{d}y = \int_{-1}^0 (-x)\mathrm{d}x\left(y\Big|_0^{\sqrt{4-x^2}}\mathrm{d}y\right)\\ &= \int_{-1}^0 -x\sqrt{4-x^2}\mathrm{d}x = \frac{(\sqrt{4-x^2})^3}{3}\Big|_{-1}^0 = \frac{8}{3} - \sqrt{3}.\end{aligned}$$

Az második integrált a következőképpen számoljuk ki:

$$\iint_{D_1} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 x\mathrm{d}x\int_{\sqrt{1-(x-1)^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \mathrm{d}y = \int_0^1 x\mathrm{d}x\left(y\Big|_{\sqrt{1-(x-1)^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 \left(x\sqrt{4-x^2} - x\sqrt{1-(x-1)^2} \right) \mathrm{d}x \\
&= -\frac{(\sqrt{4-x^2})^3}{3}\Big|_0^1 + \frac{(\sqrt{1-(x-1)^2})^3}{3}\Big|_0^1 \\
&\quad - \left(\frac{1}{2}\arcsin(x-1) + \frac{1}{2}(x-1)\sqrt{1-(x-1)^2} \right)\Big|_0^1 \\
&= 3 - \sqrt{3} - \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

Összegezve

$$\iint_D |x| \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \left(\frac{8}{3} - \sqrt{3} \right) + (3 - \sqrt{3} - \frac{\pi}{4}) = \frac{17}{3} - 2\sqrt{3} - \frac{\pi}{4}.$$

$\square$

Irodalomjegyzék

[1] András Sz., Balázs V. Csapó H., Lukács A., *Matematika. Kísérleti tankönyv a XI. osztály számára.* Státus Kiadó, Csíkszereda, 2002.

[2] András Sz., Csapó H., Lukács A., *Matematika. Kísérleti tankönyv a XII. osztály számára.* Státus Kiadó, Csíkszereda, 2002.

[3] Chiriţă, S. *Probleme de Matematici Superiorare.* Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1989.

[4] Demidovici, B. P. *Culegere de probleme şi exerciţii de analiză matematică.* Editura Tehnică, Bucureşti, 1956.

[5] Finta Z., *Matematikai Analízis.* Státus Kiadó, Csíkszereda, 2017.

ISBN: 978-606-37-1836-6