



Voichița RADU | Ágnes PÁLL-SZABÓ

**MATEMATICI FINANCIARE  
ȘI ACTUARIALE**

*Caiet de Seminar*

PRESA UNIVERSITARĂ CLUJEANĂ

2025

***Referenți științifici:***

**Prof. univ. dr. Paula Curt**

**Lect. univ. dr. Alexandru-Darius Filip**

*Publicarea acestui volum a fost finanțată  
prin fondul de Dezvoltare UBB 2024.*

**ISBN 978-606-37-2540-1**

© 2025 Autoarele volumului. Toate drepturile rezervate. Reproducerea integrală sau parțială a textului, prin orice mijloace, fără acordul autoarelor, este interzisă și se pedepsește conform legii.

Universitatea Babeș-Bolyai  
Presa Universitară Clujeană  
Director: Codruța Săcelean  
Str. B.P. Hasdeu nr. 51  
400371 Cluj-Napoca, România  
Tel.: (+40)-744-687.884  
E-mail: editura@ubbcluj.ro  
<http://www.editura.ubbcluj.ro/>  
<https://biblioteca.ubbcluj.ro/>

# Cuprins

Dobânda simplă	4
Dobânda compusă	8
Dobânda nominală	11
Anuități întregi	14
Anuități fracționate	17
Împrumuturi. Rambursări I	20
Rambursări II	27
Simulare - Parțial	31
Funcții biometrice	32
Plăți viagere	35
Plăți în caz de deces	40
Asigurări de persoane I	43
Asigurări de persoane II	49
Simulare	51
Bibliografie	52

## Dobânda simplă

### A. Aspecte teoretice:

#### Definiție :

- **Dobânda** este o sumă de bani pe care o plătește o persoană (numită **debitor**) unei alte persoane (numită **creditor**) pentru folosirea unei sume de bani împrumutate, pe o perioadă de timp.
- Dobânda simplă se folosește pentru împrumuturi sau depozite pe termen scurt ( $< 1$  an).
- Dobânda simplă se calculează numai la suma inițială și **nu** este reinvestită pentru a produce la rândul ei dobândă.
- Dobânda este plătită în totalitate la scadență.

#### NOTAȚII :

- $s$  - suma inițială (u.m.)
- $t$  - durata de timp ( $n$  - ani,  $z$  - zile,  $l$  - luni) (an financiar=360 zile)
- $D$  - dobânda (u.m.)
- $S$  - suma finală, unde  $S = s + D$
- $i$  - **rata anuală a dobânzii** = dobânda unitară anuală (Dobânda pentru 1 u.m./1 an)
- $p$  - procentul anual (%) (Dobânda pentru 100 u.m./1 an),

$$p = 100 \cdot i \iff i = \frac{p}{100}$$

- $u$  - factor de fructificare  $u = i + 1$
- $v$  - factor de actualizare  $v = \frac{1}{u}$

#### Formule de bază pentru dobânda simplă :

- $D = s \cdot i \cdot t$
- $D_z = \frac{s \cdot i \cdot z}{360}$
- $D_l = \frac{s \cdot i \cdot l}{12}$

**Definiție :** dobânda unitară fracționată  $i_m = \frac{i}{m}$

unde

- $m = 2$  - semestru (jumătate de an)
- $m = 4$  - trimestru (sfert de an)
- $m = 12$  - lună

---

## B. Aplicații practice:

1. Să se calculeze dobânda și suma finală pentru un împrumut de 1 500 lei cu  $i=12\%$  pe 65 de zile respectiv pe 6 luni.
2. Să se determine dobânda și suma finală pentru suma de 3 000 lei cu  $i=4\%$  din 13 martie până în 20 august același an. Cât este dobânda unitară trimestrială echivalentă  $i_4$ ?
3. Ce sumă a fost plasată în 15 ianuarie cu  $i=5\%$  astfel încât în 20 septembrie același an să avem 10 000 lei? Cât este dobânda unitară lunară echivalentă  $i_{12}$ ?
4. Un student reușește să economisească într-un an astfel: la începutul anului depune într-un depozit bancar 1 000 lei, după 3 luni face un nou depozit de 700 lei. De ce sumă dispune la sfârșitul anului, dacă  $i=7\%$ ?
5. Dacă timp de 2 luni în același cont, la fiecare 1 a lunii, o persoană depune câte 1 200 lei, cu  $i=10\%$ , de ce sumă va dispune la sfârșitul celei de a 2 a luni?
6. Se consideră 3 sume proporționale cu 4, 5 și 6. Prima sumă a fost plasată pe 28 zile cu  $i=6\%$ , a doua pe 10 luni cu  $i=5\%$ , a treia pe 9 luni cu  $i=4\%$ . Dobânda totală adusă de cele 3 sume este 1 018 lei. Determinați cele 3 sume inițiale.

---

## TEMA 1 - Dobânda simplă

1. Se depune spre fructificare suma de 6 500 u.m. pe timp de 3 luni, cu o rată anuală a dobânzii de 4.5%. Să se calculeze dobânda și suma finală obținute.

**Răspuns.**  $D = 73\,125$  u.m.,  $S = 6\,573.125$  u.m.

2. Cu ce rată anuală a dobânzii a fost împrumutată suma de 3 000 lei pe 7 luni astfel încât suma finală datorată să fie 3 500 lei? Cât este dobânda semestrială echivalentă?

**Răspuns.**  $i = 28.57\%$ ,  $i_2 = 14.29\%$ .

3. O persoană obține, prin depunerea unei sume de bani la bancă din data de 21 martie 2018 până în data de 13 octombrie 2018, la o rată anuală a dobânzii de 7.5%, suma de 7 509 u.m. Ce sumă a depus persoana respectivă la bancă?

**Răspuns.**  $s = 7\,200$  u.m.

4. Pe ce perioadă de timp trebuie să depună o persoană suma de 5 000 lei astfel încât, dacă banca practică o rată anuală a dobânzii de 9%, suma pe care o poate retrage la sfârșitul perioadei să fie de 5 225 lei.

**Răspuns.**  $t = \frac{1}{2}$  sau 180 zile sau 6 luni.

5. O persoană reușește să economisească bani și să depună într-un cont la bancă. Ea deschide în ianuarie un depozit de economii de 2 000 lei, în aprilie unul de 1 000 lei, iar în mai mai face un depozit de 3 000 lei. Ce sumă poate ridica persoana la sfârșitul anului dacă rata anuală a dobânzii a fost de 12%?

**Răspuns.**  $S = 6\,570$  lei.

- 
6. Dacă timp de patru luni o persoană depune în același cont, în fiecare dată de 5 a lunii, câte 1 000 lei cu o rată anuală a dobânzii de 7%, de ce sumă va dispune la sfârșitul celei de a patra luni?

**Răspuns.**  $S = 4058.67$  lei.

7. Aveți posibilitatea de a alege să primiți suma de 990 u.m. azi, 995 u.m. peste o lună sau 1 000 u.m. peste 3 luni. Ce variantă veți alege, dacă vorbim de o rată anuală a dobânzii de 8%?

**Răspuns.** 990 u.m.

8. O persoană dispune de 2 sume de bani totalizând 24 000 u.m. Persoana plasează prima sumă (mai mică) pe 9 luni cu  $i=4\%$  iar pe a doua sumă pe 8 luni cu  $i=6\%$ . Știind că dobânda adusă de cele două sume este de 880 u.m. determinați cele 2 sume inițiale.

**Răspuns.**  $s_1 = 8000$  u.m.,  $s_2 = 16000$  u.m.

9. O persoană dispune de 3 sume de bani în progresie aritmetică cu rația de 3 000 u.m. Persoana plasează aceste trei sume pe o perioadă de un an, cu rate anuale ale dobânzii aflate în progresie geometrică cu rația  $3/2$ . Știind că dobânda totală realizată este de 1 100 u.m. și că cea mai mare sumă aduce o dobândă de 9 ori mai mare decât cea mai mică sumă, determinați cele 3 sume inițiale precum și ratele anuale ale dobânzii aferente lor.

**Răspuns.**  $s_1 = 2000$  u.m.,  $s_2 = 5000$  u.m.,  $s_3 = 8000$  u.m.,  $i_1 = 4\%$ ,  $i_2 = 6\%$ ,  $i_3 = 9\%$ .

## Dobânda compusă

### A. Aspecte teoretice:

- Se mai numește și **dobânda la dobândă** sau **dobânda capitalizată**.
- Se folosește pentru împrumuturi sau depozite pe termen relativ mare (mai mare de 1 an).
- Suma inițială este depusă pe o perioadă de  $n$  ani,  $n \in \mathbb{N}^*$ .
- După fiecare an, se adaugă dobânda care produce la rândul ei dobândă.

### Formule de bază pentru dobânda compusă :

- Suma finală  $S = s \cdot u^n, \quad u = 1 + i$
- Suma inițială  $s = S \cdot \frac{1}{u^n} = S \cdot v^n, \quad v = \frac{1}{u}$
- Dobânda  $D = S - s = s \cdot (u^n - 1)$

**Definiție :** dobânda unitară fracționată  $i_m = \sqrt[m]{u} - 1$

unde

- $m = 2$  - semestru (jumătate de an)
- $m = 4$  - trimestru (sfert de an)
- $m = 12$  - lună

---

## B. Aplicații practice:

1. O persoană depune la o bancă 700 lei. Știind că  $i=7\%$  calculați suma pe care persoana o va ridica peste 5 ani. Care este valoarea dobânzii acumulate? Cât este dobânda unitară trimestrială echivalentă  $i_4$ ?
2. Cu ce rată a dobânzii  $i$ , trebuie plasați 75 € pe 3 ani pentru a ajunge la 100 €? Dar pe 4 ani?
3. Pe câți ani trebuie să plasăm o sumă de bani cu  $i=20\%$  astfel încât aceasta să se dubleze?
4. Aflați suma finală și dobânda pentru un depozit de 7 000 € pe 5 ani dacă în primii 2 ani  $i=5\%$  iar în următorii 3 ani,  $i=7\%$ .
5. Aflați suma finală pentru un depozit de 5 000 € pe 10 ani dacă în primii 2 ani  $i=5\%$ , în următorii 3 ani 4%, în următorul an 3% iar în ultimii 4 ani,  $i=2\%$ .
6. O persoană primește moștenire o sumă într-un cont deschis în urmă cu 6 ani. În primii 2 ani,  $i=15\%$  iar în ultimii 4 ani,  $i=12\%$ . Suma finală ce poate fi ridicată de la bancă este 2 080.98 lei. Ce sumă inițială a fost depusă?
7. Ce sumă se acumulează într-un cont timp de 3 ani, dacă la începutul fiecărui an se depun câte 100 € cu  $i=5\%$ ?
8. Ce sumă trebuie să depunem cu  $i=3.5\%$  astfel încât după 5 ani să avem 20 000 €?

## TEMA 2 - Dobânda compusă

1. O persoană depune la o bancă 5 300 lei. Știind că rata anuală a dobânzii este de 5.6% calculați suma pe care persoana o va ridica peste 3 ani, respectiv 5 ani. Care este valoarea dobânzii acumulate pe perioadele respective? Cât este dobânda unitară trimestrială echivalentă  $i_4$ ?

**Răspuns.**  $S_3 \text{ ani} = 6241.19 \text{ lei}$ ,  $D_3 \text{ ani} = 941.19 \text{ lei}$ ,  $S_5 \text{ ani} = 6959.78 \text{ lei}$ ,  $D_5 \text{ ani} = 1659.78 \text{ lei}$ ,  $i_4 = 0.0137 = 1.37\%$ .

2. Se depun spre fructificare 1 000 € pe 4 ani. Cu ce rata anuală a dobânzii trebuie plasați pentru a obține 1 200 €? Dar dacă plasamentul se face pe 5 ani?

**Răspuns.**  $i = 4.66\%$  (4 ani),  $i = 3.71\%$  (5 ani).

3. Pe câți ani trebuie să depunem 150 € astfel încât să putem ridica 190 €? Dar să dublăm o sumă de bani? Știm că rata anuală a dobânzii este 3.75%.

**Răspuns.**  $n = 6.42 \approx 7$  ani respectiv  $n = 18.83 \approx 19$  ani.

4. Ce sumă a fost depusă de către o persoană, dacă după 6 ani are în contul său 125 000 lei? Știm că rata anuală a dobânzii a fost de 8%.

**Răspuns.**  $s = 78771.21 \text{ lei}$ .

5. Aflați suma finală și dobânda pentru un depozit de 4 500 u.m. pe 7 ani dacă în primii 4 ani rata anuală a dobânzii a fost 6.7% iar în următorii 3 ani a fost 4.8%.

**Răspuns.**  $S = 6713.58 \text{ lei}$ ,  $D = 2213.58 \text{ lei}$ .

6. Ce sumă inițială a fost depusă într-un cont, în urmă cu 5 ani, dacă suma finală care se poate ridica de la bancă este acum de 8 288.21 lei. Se știe că în primii 3 ani rata anuală a dobânzii a fost 5.67% iar în ultimii 2 ani, 8.2%.

**Răspuns.**  $s = 6000 \text{ lei}$ .

## Dobânda nominală

### A. Aspecte teoretice:

Se folosește pentru împrumuturi sau depozite pentru care **frecvența de capitalizare** (compunerea dobânzii) **nu coincide** cu perioada pe care este anunțată **rata dobânzii** (de obicei anul).

Considerăm că anul este împărțit în  $m$  subperioade,  $m \geq 2$ .

- $m = 2$  - semestrial
- $m = 4$  - trimestrial
- $m = 12$  - lunar

Capitalizarea se face la sfârșitul fiecărei subperioade.

**Formulele de bază pentru dobânda nominală :**

- Rata nominală a dobânzii:

$$\rho^{(m)} = i_m \cdot m \iff i_m = \frac{\rho^{(m)}}{m}$$

- Suma finală:

$$S = s \cdot u_m^{m \cdot n} = s \cdot (1 + i_m)^{m \cdot n} = s \cdot \left(1 + \frac{\rho^{(m)}}{m}\right)^{m \cdot n}$$

- Legătura cu dobânda efectivă:

$$i = \left(1 + \frac{\rho^{(m)}}{m}\right)^m - 1, \quad S = s \cdot (1 + i)^n = s \cdot u^n$$

- Dobânda instantanee:

$$\delta = \ln(1 + i) \iff i = e^\delta - 1, \quad S_{\max} = s \cdot e^{\rho \cdot n}$$

## B. Aplicații practice:

1. Să se calculeze suma finală după 3 ani pentru un depozit de 4 000 €, cu rata anuală a dobânzii de 8%, cu capitalizare trimestrială. Cât este dobânda unitară anuală efectivă (rata anuală efectivă a dobânzii)? Dar dobânda instantanee echivalentă?
2. Dacă rata anuală a dobânzii (nominala) este 18% și compunerea se face semestrial, găsiți dobânda unitară anuală efectivă.
3. Cu ce rată a dobânzii (nominală) se va dubla o sumă în 8 ani dacă se face capitalizare la 3 luni? Care va fi rata anuală efectivă a dobânzii?
4. 2 000 \$ sunt investiți pe o perioadă de 10 ani cu  $i_2 = 10\%$  pe primii 3 ani, cu  $i_4 = 8\%$  pe următorii 4 ani și cu  $i_{12} = 9\%$  pe ultimii 3 ani. Găsiți suma finală după 10 ani.
5. 2 000 \$ sunt investiți pe o perioadă de 10 ani cu o rata anuală a dobânzii de 10% pe primii 3 ani, cu capitalizare semestrială, cu 8% pe următorii 4 ani, cu capitalizare trimestrială și cu 9% pe ultimii 3 ani, cu capitalizare lunară. Găsiți suma finală după 10 ani.
6. În cât timp 2 000 € vor acumula o dobândă de 800 € cu o rată anuală a dobânzii de 10%, capitalizată trimestrial ?
7. O persoană ce a depus 1000 lei, are în cont după 7 luni, 1150 lei. Determinați rata nominală a dobânzii  $p$  și rata anuală a dobânzii efectivă  $i$ , dacă știm că se face capitalizare lunară.

### TEMA 3 - Dobânda nominală

1. Să se calculeze suma finală după 3 ani pentru un depozit de 4 780 lei la o rată anuală a dobânzii de 4.8% cu capitalizare lunară. Cât este dobânda unitară anuală efectivă?

**Răspuns.**  $S = 5\,518.75$  lei,  $i = 4.91\%$ .

2. Un capital de 7 000 lei a crescut în 10 luni la suma de 7 419.21 lei. Să se determine dobânzile anuale nominală și efectivă, dacă vorbim de un depozit cu capitalizare lunară.

**Răspuns.**  $\rho = 7\%$ ,  $i = 7.23\%$ .

3. Cu ce rata nominală a dobânzii se va tripla o sumă în 3 ani dacă se face capitalizare lunară? Care va fi dobânda unitară efectivă?

**Răspuns.**  $\rho = 37.18\%$ ,  $i = 44.22\%$ .

4. 21 000 \$ sunt investiți pe o perioadă de 10 ani cu  $i_{12} = 9\%$  pe primii 2 ani, cu  $i_2 = 4\%$  pe următorii 3 ani și cu  $i_4 = 12\%$  pe ultimii 5 ani. Găsiți suma finală după 10 ani.

**Răspuns.**  $S = 2\,027\,756.11$  \$.

5. 32 000 \$ sunt investiți pe o perioadă de 10 ani cu o rată anuală a dobânzii de 6% pe primii 2 ani, cu capitalizare lunară, cu 5% pe următorii 3 ani, cu capitalizare semestrială și cu 9% pe ultimii 5 ani, cu capitalizare trimestrială. Găsiți suma finală după 10 ani.

**Răspuns.**  $S = 65\,274.65$  \$.

6. Cu ce rata nominală a dobânzii se va dubla o sumă în 8 ani dacă se face capitalizare la 3 luni? Care va fi dobânda unitară efectivă?

**Răspuns.**  $\rho = 8.76\%$ ,  $i = 9.05\%$ .

7. Dacă rata nominală a dobânzii este 7.75% și compunerea se face semestrial, găsiți dobânda unitară instantanee echivalentă.

**Răspuns.**  $\delta = \ln 1.079002 = 0.076036539 = 7.6\%$ .

8. Să se determine valoarea actuală a unei plăți de 5 000 u.m. care se va face peste 5 ani dacă dobânda unitară instantanee în această perioadă este de  $\delta = 5.5\%$ .

**Răspuns.**  $s = 3\,797.86$  u.m.

## Anuități întregi

### A. Aspecte teoretice:

**Anuitatea = Plata în RATE = Plata eşalonată** este ansamblul format din rate și momentele de timp la care se plătesc acestea  $(r_k, t_k)$ ,  $k = \overline{1, n}$

- Considerăm că se cumpără un bun material, iar plata lui se va face în rate egale (constante)
- Considerăm că se vor plăti  $n$  rate  $r_k$ , la momentele de timp  $t_k$ ,  $k = \overline{1, n}$

#### FORMULE DE BAZĂ : A.C. = anuitate constantă

- **A.C.Î.P.(întreagă posticipată)**= Ansamblul format din rate egale plătite la interval de 1 an, la **sfârșitul** fiecărui an. Valoarea sa este:

$$V(t) = r \cdot \frac{1 - v^n}{i} \cdot u^t$$

- **A.C.Î.A.(întreagă anticipată)**= Ansamblul format din rate egale plătite la interval de 1 an, la **începutul** fiecărui an. Valoarea sa este:

$$V(t) = r \cdot \frac{1 - v^n}{i} \cdot u^{t+1}$$

## B. Aplicații practice:

1. Ce sumă se acumulează într-un cont timp de 3 ani, dacă la începutul fiecărui an se depun câte 100 € cu  $i=5\%$  ?
  
2. Ce rată ar trebui să plătească la sfârșitul fiecărui an, o persoană ce dorește să împrumute 5000 lei, pe 4 ani, cu  $i=5\%$ ? Care este valoarea cumulată a acestor rate la sfârșitul celor 4 ani? Dar după 2 ani?
  
3. Se depun spre fructificare, la sfârșitul fiecărui an, timp de 12 ani, câte 1 000 lei cu  $i=16\%$ . Ce sumă ar trebui depusă la momentul semnării contractului, care să acopere cele 12 plăți? Determinați valoarea sumei acumulate după 6 ani și respectiv acumulată la sfârșitul celor 12 ani.
  
4. În cât timp se poate amortiza un credit de 1 000 lei prin plata anuală a unei rate de 284.31 lei, la sfârșit de an, cu  $i=13\%$ .
  
5. Mihai cumpără o mașină în valoare de 15 000 €, plătind un avans de 25%, restul urmând să fie achitat în rate egale, timp de 7 ani, cu o rată anuală a dobânzii de 15%. Determinați valoarea unei rate și, în funcție de aceasta, valoarea cumulată a tuturor ratelor la sfârșitul celor 7 ani, dacă plata are loc:
  - (a) la sfârșitul respectiv începutul fiecărui an
  - (b) la sfârșitul respectiv începutul fiecărui trimestru
  - (c) la sfârșitul respectiv începutul fiecărei luni

## TEMA 4 - Anuitați întregi

1. Să se calculeze ce rată anuală trebuie plătită la fiecare sfârșit de an pentru un credit de 78 000 lei contractat pe 30 de ani, cu o rată anuală a dobânzii de 4.68%.

**Răspuns.** 4 890.44 lei.

2. Să se calculeze rata anuală care trebuie plătită la fiecare început de an pentru un credit în valoare de 12 500 €, pe o perioadă de 10 ani, cu dobândă unitară anuală de 0.055.

**Răspuns.** 1 571.89 €.

3. În cât timp se poate amortiza un credit de 15 000 lei prin plata anuală a unei rate de 3195.67 lei, la sfârșit de an, cu  $i=7.5\%$ .

**Răspuns.** 6 ani.

4. În cât timp se poate amortiza un credit de 15 000 lei prin plata anuală a unei rate de 2972.72 lei, la început de an, cu  $i=7.5\%$ .

**Răspuns.** 6 ani.

5. Ce sumă se acumulează într-un cont timp de 6 ani, dacă la începutul fiecărui an se depun câte 315 € cu  $i=6.4\%$  ?

**Răspuns.** 2 361.52 €.

6. Ce sumă se acumulează într-un cont timp de 15 ani, dacă la sfârșitul fiecărui an se depun câte 375 € cu  $i=15.5\%$  ?

**Răspuns.** 18 590.80 €.

7. O persoană cumpără un bun în valoare de 5 000 lei, plătind un avans de 20%, restul urmând să fie achitat în rate egale, timp de 3 ani, cu o rată anuală a dobânzii de 12%. Să se determine valoarea unei rate și, în funcție de aceasta, valoarea cumulată a tuturor ratelor la sfârșitul celor trei ani, dacă plata are loc: (a) la sfârșitul respectiv începutul fiecărui trimestru; (b) la sfârșitul respectiv începutul fiecărei luni; (c) la sfârșitul respectiv începutul fiecărui an.

**Răspuns.** (a) 401.84 lei; 5 703.04 lei; 390.14 lei; 5 703.4 lei; (b) 132.85 lei; 5 723.07 lei; 131.54 lei; 5 723.07 lei; (c) 1 665.40 lei; 5 619.73 lei; 1 486.96 lei; 5 619.73 lei.

8. Dl. Q. vrea să compare mai multe variante de plăți în rate pentru un credit de 15 000 € pe care dorește să-l ramburseze în 7 ani. Banca îi oferă o rată anuală a dobânzii de 14%. Care ar fi valoarea unei rate dacă ar face plățile la sfârșitul fiecărui an? Dar dacă ar plăti lunar, la sfârșit de lună? Dar la fiecare sfârșit de trimestru? Comparând valorile acumulate ale ratelor, care variantă este mai avantajoasă pentru bancă? Dar pentru domnul Q.

**Răspuns.** 3 497.89 €, 281.10 €, 849.04 €; 37 534.03 €, 39 740.77 €, 39 302.58 €.

## Anuități fracționate

### A. Aspecte teoretice:

**Anuitatea = Plata în RATE = Plata eşalonată** este ansamblul format din rate și momentele de timp la care se plătesc acestea  $(r_k, t_k)$ ,  $k = \overline{1, n}$

- Considerăm că se cumpără un bun material, iar plata lui se va face în rate egale (constante)
- Considerăm că se vor plăti  $n$  rate  $r_k$ , la momentele de timp  $t_k$ ,  $k = \overline{1, n}$

#### FORMULE DE BAZĂ : A.C. = anuitate constantă

- **A.C.F.P.(fracționată posticipată)**= Ansamblul format din rate egale plătite la **sfârșitul** fiecărei subperioade. Avem  $m \geq 2$  subperioade,  $n$  ani și  $i_m = \frac{i}{m}$  rata dobânzii corespunzătoare.  
Valoarea sa este:

$$V_m(t) = r_m \cdot \frac{1 - v_m^{n \cdot m}}{i_m} \cdot u_m^{t \cdot m}$$

- **A.C.F.A.(fracționată anticipată)**= Ansamblul format din rate egale plătite la **începutul** fiecărei subperioade. Avem  $m \geq 2$  subperioade,  $n$  ani și  $i_m = \frac{i}{m}$  rata dobânzii corespunzătoare.  
Valoarea sa este:

$$V_m(t) = r_m \cdot \frac{1 - v_m^{n \cdot m}}{i_m} \cdot u_m^{t \cdot m + 1}$$

## B. Aplicații practice:

1. O persoană ia un credit în următoarele condiții : suma împrumutată este de 3 000 €, pe 3 ani, iar dobânda unitară trimestrială este 0.0315. Ce rată trebuie să plătească persoana, dacă alege să facă plățile la început de trimestru?
2. Doamna Viorica a luat acum 5 ani un credit de 70 000 lei, pe o perioadă de 7 ani cu o rată anuală a dobânzii de 12%, plătind pentru el rate lunare, la fiecare sfârșit de lună. Care este valoarea ratei pe care o plătește? Care este valoarea cumulată a ratelor în prezent? Dar valoarea totală acumulată?
3. Un magazin de mobilă vinde o canapea în valoare de 950 €. Poate fi cumpărată cu un avans de 50 € și nici o rată timp de 3 luni. La sfârșitul celor 3 luni, poți face prima plată posticipată din cele 21 care trebuie făcute. Dacă  $i_{12} = 12\%$  cât este valoarea unei rate? Dar dacă rata ar fi anticipată? Care ar fi fost valoarea ratei dacă ratele s-ar fi plătit posticipat fără amânarea de 3 luni?
4. Cât este valoarea finală a unei anuități dacă se depun rate de 100 € în primii 4 ani, trimestrial (la fiecare sfârșit de trimestru) cu o rată anuală a dobânzii de 4% și câte 200 € în următorii 2 ani, anual (sfârșit de an), cu o rată anuală a dobânzii de 6%. Dar valoarea inițială?

## TEMA 5 - Anuități fracționate

1. Să se calculeze rata lunară de plătit la fiecare sfârșit de lună pe o perioadă de 15 ani pentru un credit de 40 000 €, cu o dobândă unitară anuală de 0.13.

**Răspuns.** 506.09 €.

2. Să se calculeze rata semestrială care trebuie plătită pentru un împrumut de 43 000 lei timp de 25 de ani cu  $i_2 = 0.055$ , dacă plățile se fac la fiecare început de semestru.

**Răspuns.** 2407.24 lei.

3. Dna E. a luat acum 2 ani un credit de 1 2000 lei, pe o perioada de 4 ani cu  $i = 17\%$ , plătind pentru el rate lunare la fiecare sfârșit de lună. Care este valoarea ratei pe care o plătește? Care este valoarea acumulată a ratelor în prezent ( $t=2$ )?

**Răspuns.** 346.26 lei; 16 819.19 lei.

4. Se consideră un credit în valoare de 50 000 lei, rambursat prin rate semestriale. În care din variantele următoare valoarea ratei este mai mică: cu o rată anuală a dobânzii de 8% pe o perioadă de 10 ani sau cu o rată anuală a dobânzii de 4% pe 20 de ani? Dar valoarea totală cumulată a ratelor dacă plățile se fac posticipat?

**Răspuns.** 3 679.08 lei; 109 556.06 lei; 1 827.78 lei; 110 401.98 lei.

5. Ce sumă se acumulează într-un cont în care se depun la sfârșitul fiecărei luni, 300 €, timp de 2 ani cu  $i = 2.15\%$ .

**Răspuns.** 7 350.31 €.

6. În cât timp își poate amortiza Gabi creditul de 9267 lei, prin plata anuală a unei rate de 3399 lei, la început de an, cu  $i=11.55\%$  ?

**Răspuns.** 3.03 ani

## Împrumuturi. Rambursări I

### A. Aspecte teoretice:

#### MODELUL 3D - cote constante

În fiecare an Debitorul rambursează rate descrescătoare (cote egale din împrumut + dobânzile aferente pentru datoriile nerambursate).

Valoarea cotelor egale este:

$$Q = \frac{s}{n}$$

Un model de Tabelul de rambursare prin cote egale anuale (modelul 3D) este :

An	Datorie	Dobândă	Cota	Rata
1	$R_1 = s$	$D_1 = R_1 \cdot i$	$Q = \frac{s}{n}$	$r_1 = Q + D_1$
2	$R_2 = R_1 - Q$	$D_2 = R_2 \cdot i$	$Q = \frac{s}{n}$	$r_2 = Q + D_2$
3	$R_3 = R_2 - Q$	$D_3 = R_3 \cdot i$	$Q = \frac{s}{n}$	$r_3 = Q + D_3$
4	$R_4 = R_3 - Q$	$D_4 = R_4 \cdot i$	$Q = \frac{s}{n}$	$r_4 = Q + D_4$

#### MODELUL 4D - rate constante

În fiecare an, Debitorul restituie rate egale (atât o parte din împrumut cât și dobânda pentru suma nerambursată).

Valoarea ratelor egale este obținută astfel:

$$s = r \cdot \frac{1 - v^n}{i} \Rightarrow r = \frac{s \cdot i}{1 - v^n}$$

Un model de Tabelul de rambursare prin rate egale anuale (modelul 4D) este :

An	Datorie	Dobândă	Cota	Rata
1	$R_1 = s$	$D_1 = R_1 \cdot i$	$Q_1 = r - D_1$	$r_1 = r$
2	$R_2 = R_1 - Q_1$	$D_2 = R_2 \cdot i$	$Q_2 = r - D_2$	$r_2 = r$
3	$R_3 = R_2 - Q_2$	$D_3 = R_3 \cdot i$	$Q_3 = r - D_3$	$r_3 = r$
4	$R_4 = R_3 - Q_3$	$D_4 = R_4 \cdot i$	$Q_4 = r - D_4$	$r_4 = r$

**Observație:** Se accepta o eroare de aproximare de pana la 1 u.m între valorile obținute pentru **ultima datorie**  $R_4$  și **ultima cotă** (tranză)  $Q_4$ .

### MODELUL 3D - cote constante fracționate

Pe fiecare subperioadă Debitorul rambursează rate descrescătoare (cote egale din împrumut împreună cu dobânzile aferente pentru datoriile nerambursate).

Valoarea cotelor egale este:

$$Q = \frac{s}{m \cdot n} \quad \text{iar} \quad i_m = \frac{i}{m}$$

Un model de Tabelul de rambursare prin cote egale fracționate (modelul 3D) este :

Fracțiune	Datorie	Dobândă	Cota	Rata
1	$R_1 = s$	$D_1 = R_1 \cdot i_m$	$Q = \frac{s}{n \cdot m}$	$r_1 = Q + D_1$
2	$R_2 = R_1 - Q$	$D_2 = R_2 \cdot i_m$	$Q = \frac{s}{n \cdot m}$	$r_2 = Q + D_2$
3	$R_3 = R_2 - Q$	$D_3 = R_3 \cdot i_m$	$Q = \frac{s}{n \cdot m}$	$r_3 = Q + D_3$
4	$R_4 = R_3 - Q$	$D_4 = R_4 \cdot i_m$	$Q = \frac{s}{n \cdot m}$	$r_4 = Q + D_4$
5	$R_5 = R_4 - Q$	$D_5 = R_5 \cdot i_m$	$Q = \frac{s}{n \cdot m}$	$r_5 = Q + D_5$
6	$R_6 = R_5 - Q$	$D_6 = R_6 \cdot i_m$	$Q = \frac{s}{n \cdot m}$	$r_6 = Q + D_6$
...	...	...	...	...
$n' = m \cdot n$	$R_{n'} = R_{n'-1} - Q$	$D_{n'} = R_{n'} \cdot i_m$	$Q = \frac{s}{n \cdot m}$	$r_{n'} = Q + D_{n'}$

### MODELUL 4D - rate constante fracționate

În fiecare subperioadă, Debitorul restituie rate egale (atât o parte din împrumut cât și dobânda pentru suma nerambursată).

Valoarea ratelor egale este obținută astfel:

$$s = r \cdot \frac{1 - v_m^{m \cdot n}}{i_m} \Rightarrow r = \frac{s \cdot i_m}{1 - v_m^{m \cdot n}}, \quad \text{unde} \quad i_m = \frac{i}{m}$$

Un model de Tabelul de rambursare prin rate egale fracționate (modelul 4D - fracționat) este :

Fracțiune	Datorie	Dobândă	Cota	Rata
1	$R_1 = s$	$D_1 = R_1 \cdot i_m$	$Q_1 = r - D_1$	$r_1 = r$
2	$R_2 = R_1 - Q_1$	$D_2 = R_2 \cdot i_m$	$Q_2 = r - D_2$	$r_2 = r$
3	$R_3 = R_2 - Q_2$	$D_3 = R_3 \cdot i_m$	$Q_3 = r - D_3$	$r_3 = r$
4	$R_4 = R_3 - Q_3$	$D_4 = R_4 \cdot i_m$	$Q_4 = r - D_4$	$r_4 = r$
...	...	...	...	...
$n' = m \cdot n$	$R_{n'} = R_{n'-1} - Q_{n'-1}$	$D_{n'} = R_{n'} \cdot i_m$	$Q_{n'} = r - D_{n'}$	$r_{n'} = r$

**MODELUL - 1FA**

Debitorul împrumută o sumă de bani de la creditor  $s$ , urmând a plăti periodic (anual sau pe subperioade) dobânzile  $D = s \cdot i$  și să restituie suma împrumutată la scadență.

De asemenea, într-un Fond de acumulare ( $i'$ ), Debitorul își acumulează **suma împrumutată**  $s$ , efectuând depuneri periodice (rate) constante (anuale sau pe subperioade).

Privim suma  $s$  ca valoarea finală a unei **A.C.Î.P.** adică  $s = V_{FIN} = r \cdot \frac{u'^n - 1}{i'}$

**Rata** pe care o depune Debitorul în FA este

$$r = \frac{s \cdot i'}{(1 - v'^n) \cdot u'^n} \quad \text{sau} \quad r = \frac{s \cdot i'}{u'^n - 1}$$

$k$	$S_{in}^k$	$D_k$ $\cdot i'$	$r_k$	$S_{fin}^k$
1	$S_{in}^1 = 0$	$D_1 = 0$	$r_1 = r$	$S_{fin}^1 = S_{in}^1 + D_1 + r_1$
2	$S_{in}^2 = S_{fin}^1$	$D_2 = S_{in}^2 \cdot i'$	$r_2 = r$	$S_{fin}^2 = S_{in}^2 + D_2 + r_2$
3	$S_{in}^3 = S_{fin}^2$	$D_3 = S_{in}^3 \cdot i'$	$r_3 = r$	$S_{fin}^3 = S_{in}^3 + D_3 + r_3$
4	$S_{in}^4 = S_{fin}^3$	$D_4 = S_{in}^4 \cdot i'$	$r_4 = r$	$S_{fin}^4 = S_{in}^4 + D_4 + r_4$

**MODELUL - 2FA**

Debitorul împrumută o sumă de bani de la creditor  $s$ , urmând să restituie toată suma datorată  $S = s \cdot u'^n$  (suma împrumutată + dobânda) la scadență.

De asemenea, într-un Fond de acumulare ( $i'$ ), Debitorul își acumulează **suma datorată**  $S$ , efectuând depuneri periodice (rate) constante (anuale sau pe subperioade).

Privim suma  $S$  ca valoarea finală a unei **A.C.Î.P.** adică  $S = V_{FIN} = r \cdot \frac{u'^n - 1}{i'}$

**Rata** pe care o depune Debitorul în FA este

$$r = \frac{S \cdot i'}{(1 - v'^n) \cdot u'^n} \quad \text{sau} \quad r = \frac{S \cdot i'}{u'^n - 1}$$

$k$	$S_{in}^k$	$D_k$ $\cdot i'$	$r_k$	$S_{fin}^k$
1	$S_{in}^1 = 0$	$D_1 = 0$	$r_1 = r$	$S_{fin}^1 = S_{in}^1 + D_1 + r_1$
2	$S_{in}^2 = S_{fin}^1$	$D_2 = S_{in}^2 \cdot i'$	$r_2 = r$	$S_{fin}^2 = S_{in}^2 + D_2 + r_2$
3	$S_{in}^3 = S_{fin}^2$	$D_3 = S_{in}^3 \cdot i'$	$r_3 = r$	$S_{fin}^3 = S_{in}^3 + D_3 + r_3$
4	$S_{in}^4 = S_{fin}^3$	$D_4 = S_{in}^4 \cdot i'$	$r_4 = r$	$S_{fin}^4 = S_{in}^4 + D_4 + r_4$

## B. Aplicații practice:

1. O persoană împrumută 9 000 € de la o bancă, cu  $i=11\%$ , pe 3 ani. Amortizați acest împrumut, dacă persoana plătește aceeași parte din împrumut anual (aceiași cotă).

**Rezolvare:**

An	Datorie	Dobândă	Cota	Rata
1				
2				
3				

2. O persoană împrumută 9 000 € de la o bancă, cu  $i=11\%$ , pe 3 ani. Amortizați acest împrumut, dacă persoana plătește aceeași parte din împrumut semestrial (cotă / tranșă).

**Rezolvare:**

Semestru	Datorie	Dobândă	Cota	Rata
1				
2				
3				
4				
5				
6				

3. O persoană împrumută 9 000 € de la o bancă, cu  $i=11\%$ , pe 5 ani. Amortizați acest împrumut, dacă persoana plătește aceeași rată anual.

**Rezolvare:**

An	Datorie	Dobândă	Cota	Rata
1				
2				
3				
4				
5				

4. Ce rată trebuie să plătească o persoană în cazul unui împrumut de 9 550 €,  $i=9\%$ , rambursarea făcându-se prin rate egale la sfârșitul fiecărei luni, timp de 4 luni. Alcătuiți planul de rambursare.

**Rezolvare:**

Lună	Datorie	Dobândă	Cota	Rata
1				
2				
3				
4				

5. O persoană împrumută de la o bancă 5 500 € pe 4 ani, cu  $i = 11\%$ . Persoana plătește periodic dobânzile către Creditor. Pentru a putea returna suma împrumutată, își constituie un fond de acumulare, făcând plăți anuale egale, timp de 4 ani cu  $i' = 13\%$ . Alcătuiți planul de rambursare.

**Rezolvare:**

$k$	$S_{in}^k$	$D_k$	$r_k$	$S_{fin}^k$
1				
2				
3				
4				

6. Întocmiți planul de amortizare pentru un împrumut de 27 000 €, rambursabil pe 4 ani, cu  $i = 9\%$  prin achitarea la scadență a întregii datorii către Creditor și constituirea sumei datorate la o Terță Parte, cu  $i' = 10\%$  prin rate anuale pe timp de 4 ani.

**Rezolvare:**

$k$	$S_{in}^k$	$D_k$	$r_k$	$S_{fin}^k$
1				
2				
3				
4				

---

## TEMA 6 - Rambursări directe întregi și fracționate

1. Să se întocmească tabelul de amortizare pentru împrumutul de 2 005 u.m., prin cote constante, pe timp de 5 ani, cu dobânda anuală de 12%.

**Răspuns.** Modelul 3D, cu  $Q=401$  u.m.

2. Să se întocmească tabelul de amortizare a unui împrumut de 49 000 lei pe timp de 7 ani, cu  $i=16\%$ , dacă la sfârșitul fiecărui an se rambursează aceeași cotă din împrumut, la care se adaugă dobânda aferentă acelei perioade.

**Răspuns.** Modelul 3D, cu  $Q=7\ 000$  lei.

3. O persoană împrumută de la o bancă suma de 10 000 lei pe timp de 5 ani cu  $i=15\%$ . Să se întocmească planul de amortizare corespunzător acestui împrumut știind că la sfârșitul fiecărui an se va rambursa aceeași parte din suma împrumutată la care se adaugă dobânda aferentă acelei perioade.

**Răspuns.** Modelul 3D, cu  $Q=2\ 000$  lei.

4. O persoană împrumută de la o bancă suma de 10 000 lei pe timp de 5 ani cu  $i=15\%$ . Să se întocmească planul de amortizare corespunzător acestui împrumut, știind că întreaga datorie este returnată prin plata unei sume constante la sfârșitul fiecărui an.

**Răspuns.** Modelul 4D, cu  $r=2\ 983.16$  lei.

5. O persoană cumpără un bun în valoare de 14 000 lei, urmând ca valoarea acestui bun să o ramburseze prin rate constante posticipate pe timp de 6 ani, cu  $i=13\%$ . Să se întocmească tabelul de amortizare corespunzător acestui împrumut.

**Răspuns.** Modelul 4D, cu  $r=3\ 502.15$  lei.

6. În vederea achiziționării unei locuințe, o persoană împrumută de la o bancă suma de 45 000 u.m., pe timp de 6 ani, cu dobânda unitară anuală de 10%, urmând ca rambursarea să aibă loc prin rate constante, plătibile la sfârșitul fiecărui an. Să se întocmească planul de amortizare corespunzător acestui împrumut.

**Răspuns.** Modelul 4D, cu  $r=10\ 332.33$  u.m.

7. Ce rată ar trebui să plătească la sfârșitul fiecărui an, o persoană ce dorește să împrumute 7 000 lei, pe 3 ani, cu  $i=4\%$ ? Care este valoarea cumulată a acestor rate la sfârșitul celor 3 ani? Faceți tabelul de rambursare pe cei 3 ani.

**Răspuns.** Modelul 4D, cu  $r=2\,522.44$  lei. Valoarea cumulată a ratelor este de 7 874.05 lei.

8. O persoană împrumută de la o bancă suma de 1 000 lei, cu  $i=10\%$  pe timp de 2 ani. Să se scrie tabelul de amortizare corespunzător acestui împrumut, știind că persoana respectivă plătește la sfârșitul fiecărui trimestru aceeași cotă din suma împrumutată împreună cu dobânda aferentă subperioadei.

**Răspuns.** Modelul 3D fracționat, cu  $Q=125$  lei pentru  $k = \overline{1,8}$ .

9. Să se scrie tabelul de amortizare corespunzător unui împrumut în valoare de 2 574 u.m., cu  $i=12\%$ , pe timp de 6 luni, știind că la sfârșitul fiecărei luni se returnează aceeași cotă din suma împrumutată plus dobânda aferentă.

**Răspuns.** Modelul 3D fracționat, cu  $Q=429$  u.m. pentru  $k = \overline{1,6}$ .

10. O persoană împrumută de la o bancă suma de 1 000 lei, cu rata anuală a dobânzii de 10%, pe timp de 2 ani. Să se scrie tabelul de amortizare corespunzător acestui împrumut, știind că persoana respectivă achită creditorului aceeași rată la sfârșitul fiecărui trimestru.

**Răspuns.** Modelul 4D fracționat, cu  $r=139.47$  lei pentru  $k = \overline{1,8}$ .

11. O persoană împrumută de la o bancă suma de 12 000 u.m. pe timp de 3 ani cu  $i=10\%$ . Să se întocmească planul de amortizare corespunzător acestui împrumut știind că persoana în cauză plătește o rată constantă la sfârșitul fiecărui semestru (pe durata celor 3 ani).

**Răspuns.** Modelul 4D fracționat cu  $r=2\,364.21$  u.m. pentru  $k = \overline{1,6}$ .

12. Să se întocmească planul de rambursare al unui împrumut în valoare de 45 678 u.m., pe timp de 2 ani, cu  $i=12\%$ , știind că la sfârșitul fiecărui trimestru se plătește o rată constantă.

**Răspuns.** Modelul 4D fracționat, cu  $r=6\,507.12$  u.m. pentru  $k = \overline{1,8}$ .

## Rambursări II

### B. Aplicații practice:

1. Întocmiți planul de rambursare pentru un împrumut de 4375 €, pe 4 ani, cu  $i = 3\%$ , dacă se plătesc cote egale anual.

**Rezolvare:**

An	Datorie	Dobândă	Cota	Rata
1				
2				
3				
4				

2. Să se întocmească planul de amortizare pentru un împrumut de 49 000 €,  $i=8\%$ , rambursarea făcându-se prin cote constante plătite trimestrial, timp de 5 trimestre.

**Rezolvare:**

Trimestru	Datorie	Dobândă	Cota	Rata
1				
2				
3				
4				
5				

3. Ce rată ar trebui să plătească la sfârșitul fiecărui an, o persoană ce dorește să împrumute 6 000 lei, pe 5 ani, cu  $i=14\%$ ? Faceți tabelul de rambursare.

**Rezolvare:**

An	Datorie	Dobândă	Cota	Rata
1				
2				
3				
4				
5				

4. Să se întocmească planul de amortizare pentru un împrumut de 27 000 €,  $i=7.5\%$ , rambursarea făcându-se prin rate egale la sfârșitul fiecărui semestru, timp de 2 ani.

**Rezolvare:**

Semestru	Datorie	Dobândă	Cota	Rata
1				
2				
3				
4				

5. Întocmiți planul de amortizare pentru un împrumut de 11 000 lei, rambursabil pe 4 ani prin plata anuală a dobânzilor cu  $i = 7\%$  către Creditor și constituirea sumei necesare restituirii împrumutului la o Terță Parte, prin rate anuale cu  $i' = 9\%$ .

**Rezolvare:**

$k$	$S_{in}^k$	$D_k$	$r_k$	$S_{fin}^k$
1				
2				
3				
4				

6. O persoană dorește să adune suma de 11 000 € în 4 ani, pentru a-și putea achiziționa un bun material. Dorește să economisească această sumă într-un fond de acumulare la o bancă, depunând rate anuale, cu  $i' = 8\%$ . Cât este quantumul unei rate? Alcătuiți planul de amortizare corespunzător pentru cei 4 ani.

**Rezolvare:**

$k$	$S_{in}^k$	$D_k$	$r_k$	$S_{fin}^k$
1				
2				
3				
4				

---

## TEMA 7 - Rambursări prin Fond de Acumulare

1. O persoană împrumută de la o bancă suma de 15 000 \$ pe 4 ani cu un  $i=10\%$ . Persoana plătește creditorului dobânzile aferente la sfârșitul fiecărui an, iar suma împrumutată o constituie la o altă bancă prin rate egale posticipate pe timp de 4 ani cu  $i'=11\%$ . Să se întocmească planul de amortizare corespunzător.

**Răspuns.** Modelul 1FA, cu  $r'=3\ 184.89$  \$

2. O persoană împrumută de la o bancă 20 000 €, pe timp de 4 ani cu o rată anuală a dobânzii de 9%. Persoana în cauză plătește creditorului dobânzile la sfârșitul fiecărui an, iar suma împrumutată o constituie la o altă bancă, într-un fond de acumulare, pe timp de 4 ani, cu rata anuală a dobânzii de 11%, plătind la sfârșitul fiecărui an o aceeași rată. Să se întocmească planul de amortizare corespunzător fondului de acumulare.

**Răspuns.** Modelul 1FA, cu  $r'=4\ 246.53$  €

3. O persoană împrumută de la o instituție financiară suma de 12 500 u.m., pe timp de 3 ani, cu  $i=10\%$ . Debitorul urmează să restituie creditorului întreaga datorie la scadență, iar această sumă o va constitui la o altă instituție financiară, prin plăți periodice constante posticipate, pe timp de 3 ani, cu dobânda anuală de 12%. Să se întocmească planul de amortizare corespunzător.

**Răspuns.** Modelul 2FA, cu  $r'=4\ 930.50$  u.m.

4. O persoană împrumută de la o bancă suma de 7500 €, pe timp de 5 ani cu  $i=10\%$ . Persoana respectivă plătește creditorului întreaga datorie la scadență, iar suma datorată o constituie la o altă bancă, într-un fond de acumulare, prin rate egale posticipate, cu  $i'=9\%$ , pe timp de 5 ani. Să se întocmească planul de amortizare corespunzător fondului de acumulare.

**Răspuns.** Modelul 2FA, cu  $r'=2\ 018.28$  €

5. O persoană împrumută de la bancă suma de 10 000 lei pe 5 ani cu  $i=12\%$ . Persoana în cauză urmează să restituie creditorului dobânzile la sfârșitul fiecărui an, iar suma necesară restituirii sumei împrumutate o va constitui la o altă bancă doi ani mai târziu datei semnării contractului, prin rate egale plătibile la sfârșitul fiecărui an, cu  $i'=14\%$ . Să se întocmească planul de amortizare corespunzător.

**Răspuns.** Modelul 1FA, cu  $r'=2\,907.32$  lei

6. O persoană împrumută de la o bancă suma de 7 500 €, la începutul anului 2015, pe timp de 6 ani cu  $i=10\%$ . Persoana respectivă plătește creditorului întreaga datorie la scadență, iar suma datorată o constituie la o altă bancă prin plăți periodice constante posticipate, cu  $i'=9\%$ , pe timp de 4 ani, începând cu anul 2017. Să se întocmească planul de amortizare corespunzător.

**Răspuns.** Modelul 2FA, cu  $r'=2\,905.39$  €.

7. \* O persoană împrumută de la bancă suma de 21 000 u.m., pe timp de 4 ani cu  $i=12\%$ . Persoana plătește creditorului dobânzile aferente la sfârșitul fiecărui an, iar suma împrumutată o constituie la o altă bancă prin cote constante plătibile la sfârșitul fiecărui an cu  $i'=10\%$ . Să se determine planul de amortizare pentru acest împrumut.

**Răspuns.** Modelul FA(\*) Persoana platește anual dobânzile către creditor, dar înainte să ajungeți la tabelul FA trebuie să găsiți ratele descrescătoare de această dată, pentru că avem cote constante  $Q'=3\,585.82$  u.m.

---

## Simulare - Parțial

Timp de lucru 50 minute

1 punct din oficiu

---

1. (1p) Andrei a depus într-un cont 3291 lei. Banca acordă o rată anuală a dobânzii  $i=3.4\%$ . Ce sumă va avea el în cont după 197 zile?

---

2. (2p) Ce sumă va ridica Horia de la bancă peste 4 ani, dacă el depune acum 7070 lei, iar banca acordă o rată anuală a dobânzii de  $7.1\%$  ? Cât este dobanda câștigată în total de Horia?

---

3. (1p) Știind că o studentă depune la o bancă 2650 lei, cu o rata anuală a dobânzii de  $3.9\%$ , capitalizată trimestrial, calculați suma pe care ea o va ridica peste 7 ani.

---

4. (1p) Ce rată trebuie să plătească Mihai, știind că ia un credit de 36600 euro, pe 15 ani, cu o rată anuală a dobânzii de  $8.4\%$  și că alege să facă plățile la sfârșit de an?

---

5. (2p) Ce sumă se acumulează într-un cont timp de 6 ani, dacă la început de trimestru se depun câte 650 euro, cu o rată anuală a dobânzii de  $15.2\%$ ? Dar dacă ar plăti la sfârșit de trimestru cât ar fi suma totală?

---

6. (2p) Amortizați un împrumut de 16451 lei cu  $i = 5\%$  pe 4 ani, prin plata anuală a dobânzilor către Creditor și constituirea sumei necesare restituirii împrumutului într-un fond de acumulare prin rate anuale pe 4 ani cu  $i'=10.56\%$ . Care este dobanda câștigată în cel de al 4-lea an din fondul de acumulare?

Răspuns:

1. 3352.23 lei
2. 9302.02 lei și 2232.02 lei
3. 3477.23 lei
4. 4380.96 euro
5. 25702.12 euro și 24761.19 euro
6. 1235.50 lei

## Funcții biometrice

### A. Aspecte teoretice:

Introducem funcțiile biometrice care sunt baza conceptului de asigurare:

**Probabilitățile de viață și de deces** se determină pe cale experimentală studiind o mare colectivitate de persoane ce trăiesc în aceleași condiții iar valorile acestora se trec în **tabele**.

Considerăm o colectivitate de persoane în care toți indivizii au aceeași vârstă și anume de  $x$  ani.

#### Notații

- $p(x, y)$  = prob. ca o persoană în vârstă de  $x$  ani să fie în viață la vârsta de  $y$  ani,  $y \geq x$ .
- $q(x, y)$  = prob. ca persoana în vârstă de  $x$  ani să *nu* fie în viață la vârsta de  $y$  ani (evenimentului contrar)

$$p(x, y) + q(x, y) = 1.$$

#### Cazuri particulare

- $p_x$  = prob. ca persoana în vârstă de  $x$  ani să fie în viață în anul următor
- $q_x$  = prob. ca persoana în vârstă de  $x$  ani să *nu* fie în viață în anul următor

$$p_x + q_x = 1$$

- ${}_n p_x$  = prob. ca persoana în vârstă de  $x$  ani să fie în viață peste  $n$  ani
- ${}_n q_x$  = prob. ca persoana în vârstă de  $x$  ani să *nu* fie în viață peste  $n$  ani

$${}_n p_x + {}_n q_x = 1$$

**Funcția de supraviețuire și viața medie (speranța de viață)** sunt două dintre cele mai importante caracteristici din teoria asigurărilor.

Considerăm o colectivitate de persoane având aceeași vârstă de  $a$  ani.

Notăm cu  $L_a$  ( $l_a$ ) volumul colectivității (nr de persoane din colectivitate)

**Definiție :** **Funcția de supraviețuire**  $L_x$  este numărul mediu de persoane dintre cele  $L_a$  care vor fi în viață la vârsta de  $x$  ani ( $a \leq x$ ).

Avem relația :  $p(a, x) = \frac{L_x}{L_a}$

**Definiție :** **Viața medie (speranța de viață)**  $e_x$  este valoarea medie a numărului de ani câți mai are de trăit o persoană în vârstă de  $x$  ani.

$$e_x = \frac{1}{2} + \frac{1}{L_x} \cdot (L_{x+1} + L_{x+2} + \dots + L_{100})$$

#### Tabele de mortalitate (vezi tabelul anexat)

De regulă, tabelele conțin următoarele valori și sunt fundamentate pe date statistice (și pe ajustarea acestora):

- $x$  - numărul de ani (vârsta)
- $L_x$  - funcția de supraviețuire
- $d_x$  - numărul persoanelor decedate între vârsta de  $x$  și  $x + 1$  ani
- $q_x$  - probabilitatea de deces (implicit e cunoscută și  $p_x$ )
- $e_x$  - viața medie

Tabelele de mortalitate mai conțin de asemenea și o serie de **numere de comutație** care sunt utilizate în domeniul asigurărilor :  $D_x, N_x, M_x$ .

Toate aceste numerele utilizate în teoria asigurărilor de persoane se pot deduce prin calcul pornind, de exemplu, de la numerele de comutație  $L_x$ .

- $D_x = v^x \cdot L_x$
- $N_x = D_x + D_{x+1} + \dots$
- $M_x = \sqrt{u}(v \cdot N_x - N_{x+1})$

Observați că sunt folosiți factorii de fructificare și de actualizare  $u = 1 + i$  și  $v = \frac{1}{u}$ . Aceștia sunt calculați, pornind de la o rată a dobânzii  $i$  (sau procentul  $p\%$ ) care apare specificată în tabelul de mortalitate respectiv.

Pentru aplicațiile noastre practice vom utiliza un tabel orientativ intitulat "Numere de comutație cu 5%", în care  $i = 5\%$  și care conține următoarele elemente:

- $x$  - numărul de ani (vârsta).
- $L_x$  - funcția de supraviețuire. Inițial comunitatea studiată are 100.000 de nou născuți ajungând până la 15 supraviețuitori la 100 de ani. Diferența de la un an la altul reprezintă de fapt numărul deceselor din anul respectiv.
- $D_x, N_x, M_x$  - numere de comutație calculate conform formulelor de mai sus și necesare în calcularea anuităților viagere și de deces.

## B. Aplicații practice:

1. Să se calculeze:

- Probabilitatea ca o persoană de 56 ani să fie în viață în anul următor.
- Probabilitatea ca o persoană de 63 ani să fie în viață în anul următor.

- Probabilitatea ca o persoană de 63 ani să nu fie în viață în anul următor.
- Probabilitatea ca o persoană de 46 ani să fie în viață la 57 ani.
- Probabilitatea ca o persoană de 15 ani să decedeze între 45 și 60 ani.
- Viața medie a unei persoane de 95 ani.

## TEMA 9 - Funcții biometrice

1. Să se determine și să se scrie semnificația pentru  $p_{67}$ ,  $q_{69}$ ,  ${}_2p_{69}$  și  ${}_3/4q_{67}$ .

**Raspuns** 0,963955; 0,04348; 0,90895; 0,044039.

2. Calculați:

- a) probabilitatea ca persoana de 49 de ani să fie în viață în următorul an;
- b) Calculați  ${}_2p_{49}$  și precizați semnificația acestuia;
- c) Aceiași cerință ca la punctul anterior pentru  ${}_3q_{49}$ ;
- d) Calculați probabilitatea ca o persoană de 49 de ani să decedeze între 53 și 54 de ani;
- e) Calculați probabilitatea ca o persoană de 51 de ani să nu fie în viață anul următor;
- f) Calculați viața medie a unei persoane de 79 de ani;

**Raspuns** a) 0.993554; b) 0.986495; c) 0.021273; d) 0.009239; e) 0.00788; f) 5.58 ani.

3. \* Se consideră o populație de 10000 de exemplare din specia peștelui clown, specie cu limita de viață la 9 ani. Știind că  $p_0 = 0.6$ ,  $p_1 = 0.8$ ,  $p_2 = 0.75$ ,  $p_3 = 0.5$ ,  $p_4 = 0.43$ ,  $p_5 = 0.34$ ,  $p_6 = 0.2$  și  $p_7 = 0.1$ .

Calculați  ${}_3p_2$ ,  ${}_4q_2$  și  ${}_4/5q_2$ .

**Raspuns**  ${}_3p_2 = 0.16125$ ;  ${}_4q_2 = 0.945208$ ;  ${}_4/5q_2 = 0.04375$ .

## Plăți viagere

### A. Aspecte teoretice:

Se lucrează cu tabelele cu numere de comutație cu  $i = 5\%$ .

**Observație 1:** În cazul **plății unice viagere** se folosește **factorul de actualizare viager** iar în cazul mai multor plăți (**rate**) se folosesc **anuitățile viagere**.

**Factorul de actualizare viager**  ${}_nE_x$

$${}_nE_x = \frac{D_{x+n}}{D_x}.$$

**Observație 2:** Dacă o persoană efectuează o singură plată de 1 u.m., acum, la momentul semnării unui contract de asigurare, atunci această plată este dată de

$${}_0E_x = \frac{D_{x+0}}{D_x} = \frac{D_x}{D_x} = 1$$

### Anuități viagere POSTICIPATE

- **Anuitate viageră întreagă posticipată imediată și nelimitată** = plată ce se efectuează (către sau de către o persoană), începând din momentul semnării contractului, la sfârșitul fiecărui an, atât timp cât persoana este în viață

$$a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x}$$

- **Anuitate viageră întreagă posticipată imediată și limitată la "n" ani** = plată ce se efectuează (către sau de către o persoană), începând din momentul semnării contractului, la sfârșitul fiecărui an, timp de  $n$  ani

$$a_{x:n} = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x}$$

- **Anuitate viageră întreagă posticipată amânată cu "n" ani (nelimitată)** = plată ce se efectuează (către sau de către o persoană), începând cu vârsta  $x + n$  ani, deci cu o întârziere a plății de  $n$  ani, la sfârșitul fiecărui an, atât timp cât persoana este în viață

$${}_na_x = \frac{N_{x+n+1}}{D_x}$$

### Anuități viagere ANTICIPATE

- **Anuitate viageră întreagă anticipată imediată și nelimitată** = plată ce se efectuează (către sau de către o persoană), începând din momentul semnării contractului, la începutul fiecărui an, atât timp cât persoana este în viață

$$\ddot{a}_x = \frac{N_x}{D_x}$$

- **Anuitate viageră întreagă anticipată imediată și limitată la "n" ani** = plată ce se efectuează (către sau de către o persoană), începând din momentul semnării contractului, la începutul fiecărui an, timp de  $n$  ani

$$\ddot{a}_{x:n} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$$

- **Anuitate viageră întreagă anticipată amânată cu "n" ani (nelimitată)** = plată ce se efectuează (către sau de către o persoană), începând cu vârsta  $x+n$  ani, deci cu o întârziere a plății de  $n$  ani, la începutul fiecărui an, atât timp cât persoana este în viață

$${}_n\ddot{a}_x = \frac{N_{x+n}}{D_x}$$

### Anuități viagere fracționate

**Observație 3:** Există evident posibilitatea, ca toate aceste plăți viagere să poată fi efectuate fracționat (de exemplu lunar  $m = 12$ , trimestrial  $m = 4$  sau semestrial  $m = 2$ ).

Evident, avem atât anuități viagere fracționate posticipate

$$a_x^{(m)} = a_x + \frac{m-1}{2m}$$

$$a_{x:n}^{(m)} = a_{x:n} + \frac{m-1}{2m} \cdot (1 - {}_nE_x)$$

$${}_na_x^{(m)} = {}_na_x + \frac{m-1}{2m} \cdot {}_nE_x$$

cât și anticipate

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m}$$

$$\ddot{a}_{x:n}^{(m)} = \ddot{a}_{x:n} - \frac{m-1}{2m} \cdot (1 - {}_nE_x)$$

$${}_n\ddot{a}_x^{(m)} = {}_n\ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m} \cdot {}_nE_x$$

---

## B. Aplicații practice:

### Plăți viagere

1. Calculați valoarea medie actuală a unei plăți de 1 u.m. către o persoană de 50 ani în cazul în care împlinește 72 ani. Dar dacă s-ar plăti 5 000 u.m.?
2. Care este valoarea medie actuală cumulată a tuturor ratelor de 50 lei pe care urmează să le plătească o persoană de 43 ani, la sfârșitul respectiv începutul fiecărui an, în următorii 7 ani?
3. Un bunic dorește ca nepotul său, care acum are 10 ani, să primească de la o companie de asigurări, la sfârșitul fiecărei luni, din momentul când va împlini 18 ani și până la deces, câte 1 000 lei. Ce sumă trebuie să plătească în prezent bunicul, companiei de asigurări, pentru a putea face posibilă plata de mai sus? Dar dacă nepotul ar primi aceeași sumă la începutul fiecărei luni?
4. Care este valoarea medie actuală a unei plăți pe care o face o persoană de 28 ani pentru a primi suma de 10 000 € în ziua în care împlinește 70 ani?
5. Ce suma poate primi o persoana de 28 ani în ziua în care implinește 70 ani, dacă alege să plăteasca acum o prima de 650 lei?
6. Care este valoarea medie actuală cumulată a tuturor ratelor de 10 € pe care o persoană, actualmente de 38 ani, urmează să le plătească la sfârșitul respectiv începutul fiecărui trimestru, până la decesul său?

## TEMA 10 - Plăți viagere

Folosiți tabelele cu numere de comutație cu  $i = 5\%$

1. Calculați valoarea actuală a unei plăți de 1 u.m. către o persoană cu vârsta de 51 de ani în cazul în care acesta împlinește 58 de ani. Calculați de asemenea  ${}_{20}E_{45}$  și  ${}_{12}E_{37}$

**Răspuns.**  ${}_7E_{51} = 0.6604$ ;  ${}_{20}E_{45} = 0.2942$ ;  ${}_{12}E_{37} = 0.5305$

2. Precizați semnificația și calculați valoarea medie actuală pentru anuitățile:  $a_{39}$ ,  ${}_{10}a_{40}$ ,  $a_{47:15}$ ,  $\ddot{a}_{53}$ ,  ${}_7\ddot{a}_{51}$ ,  $\ddot{a}_{29:20}$ ,  $a_{47}^{(12)}$ ,  $\ddot{a}_{38}^{(4)}$ ,  ${}_8a_{41}^{(4)}$ ,  ${}_5\ddot{a}_{46}^{(12)}$ ,  $a_{59:9}^{(2)}$ ,  $\ddot{a}_{55:11}^{(12)}$ .

**Răspuns.** 15.268712; 7.516937; 9.781632; 13.011514; 7.630772; 12.823636; 14.025167; 16.070567; 8.782175; 9.956126; 6.570078; 7.927740

3. Calculați valoarea primei unice ce trebuie plătită de o persoană în vârstă de 31 de ani pentru a primi suma de 10 000 lei în cazul în care împlinește vârsta de 65 de ani.

**Răspuns.** 1 425.97 lei

4. Calculați valoarea sumei pe care ar primi-o o persoană actualmente în vârstă de 30 de ani în cazul în care aceasta împlinește vârsta de 65 de ani, dacă persoana plătește o primă unică de 1 000 lei.

**Răspuns.** 7 378.33 lei

5. Calculați valoarea actuală medie cumulată a ratelor în valoare de 1 700 lei pe care urmează să le plătească o persoană în vârstă de 25 ani, la începutul fiecărui an, în următorii 20 ani?

**Răspuns.** 21 870.44 lei

6. Determinați prima pe care o persoană de 73 ani trebuie să o plătească în momentul semnării unui contract de asigurare pentru a primi 12 000 lei la sfârșitul fiecărui an.

**Răspuns.** 70 549.19 lei

7. O persoană dorește ca fiica de 13 ani să primească peste 5 ani, la sfârșitul fiecărei luni, suma de 2 000 lei. Calculați suma ce trebuie depusă acum.

**Răspuns.** 342 741.43 lei

8. Calculați valoarea medie actuală a anuității viagere constante întregi posticipate imediate și limitată în cazul unei persoane de 32 de ani care plătește ratele viagere anuale posticipate de 700 lei timp de 17 ani. Considerând valoarea medie actuală a anuității viagere calculate anterior, determinați cum se modifică valoarea ratei dacă ratele sunt plătite 21 ani?

**Răspuns.** 7 715.43 lei; 619.55 lei

9. Calculați valoarea medie actuală cumulată a ratelor în valoare de 300 lei, pe care urmează să le plătească o persoană în vârstă de 41 ani la sfârșitul fiecărui trimestru în următorii 19 ani. Dacă valoarea medie actuală ar fi de 15 000 lei, calculați cât va plăti la sfârșitul fiecărui trimestru în următorii 19 ani.

**Răspuns.** 14 121.90 lei; 318.65 lei

10. Care este valoarea medie actuală a unei plăți de 2 400 lei efectuate la începutul, respectiv sfârșitul fiecărui an, timp de 18 ani, în cazul unei persoane actualmente în vârstă de 37 ani? Dar dacă plata s-ar face la sfârșitul, respectiv începutul fiecărei luni?

**Răspuns.** 28 631.87 lei; 27 135.46 lei; 333 855.79 lei; 335 352.19 lei

11. Un părinte dorește ca copilul său în vârstă de 14 ani să primească anual, la începutul anului, suma de 12 000 lei după împlinirea vârstei de 18 ani. Ce sumă trebuie să depună acum părintele?

**Răspuns.** 185 424.53 lei

12. Calculați valoarea actuală medie cumulată a tuturor ratelor în valoare de 75 lei, pe care urmează să le primească o persoană în vârstă de 46 ani la începutul fiecărei luni, în următorii 19 ani. Calculați valoarea ratelor dacă persoana depune 30 000 lei.

**Răspuns.** 10 435.95 lei; 215.60 lei

## Plăți în caz de deces

### A. Aspecte teoretice:

Se lucrează cu tabelele cu numere de comutație cu  $i = 5\%$ .

**Observație 1:** În cazul decesului între doi ani consecutivi se folosește **factorul de actualizare de deces**

$${}_nD_x = \frac{\sqrt{u} \cdot (vD_{x+n} - D_{x+n+1})}{D_x}$$

iar în rest, se folosesc **anuitățile de deces**.

**Observație 2:** **Factorul de actualizare de deces** poate fi văzut ca o anuitate de deces dublu limitată, la 2 ani consecutivi:

$${}_nD_x = {}_{n|n+1}A_x.$$

- Anuitate de deces **imediată și nelimitată** = plată ce se efectuează în cazul decesului persoanei, deces survenit oricând după semnarea contractului de asigurare

$$A_x = \frac{M_x}{D_x}$$

- Anuitate de deces **dublu limitată** = plată ce se efectuează doar dacă decesul persoanei survine într-un interval de timp specificat (între vârsta de  $x + n$  ani, inclusiv și  $x + m$  ani, exclusiv).

$${}_{m|n}A_x = \frac{M_{x+m} - M_{x+n}}{D_x}$$

- Anuitate de deces **imediată și limitată la "n" ani** = plată ce se efectuează în cazul decesului persoanei, deces survenit în următorii  $n$  ani după semnarea contractului de asigurare

$$A_{x:n} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}$$

- Anuitate de deces **amânată cu "n" ani (nelimitată)** = plată ce se efectuează în cazul decesului persoanei, deces survenit începând cu vârsta de  $x + n$  ani

$${}_nA_x = \frac{M_{x+n}}{D_x}$$

---

## B. Aplicații practice:

### Plăți în caz de deces.

1. Calculați valoarea medie actuală a unei plăți de 1 u.m. în cazul în care o persoană actualmente de 52 de ani, va deceda peste 18 ani (între 70 și 71 de ani). Dar dacă s-ar plăti 150 000 u.m.?
2. Care este valoarea medie actuală a unei plăți de 3 500 € ce se va face dacă o persoană actualmente de 56 ani decedează între 75 și 96 ani? Dar dacă plata se face în cazul decesului de până la 75 ani? Dar a decesului survenit oricând după vârsta de 70 ani?
3. Care este valoarea medie actuală a unei plăți pe care o face o persoană de 30 ani astfel încât în cazul decesului său între 70 și 71 ani, familia sa să primescă 15 000 lei? Dar dacă decesul survine oricând după 70 de ani?
4. Care este valoarea medie actuală a sumei de 20 000 lei pe care o va primi moștenitorul unei persoane în vârstă de 57 de ani, dacă decesul persoanei respective survine oricând din momentul semnării contractului de asigurare? Dar dacă ar vrea să plătească acum 10 000 lei, ce sumă va primi moștenitorul?
5. Viviana care are 30 de ani plătește acum o primă de 8500 lei, astfel încât dacă survine decesul între 70 și 90 de ani, fiul ei să fie asigurat cu o sumă de bani. Cât este aceasta sumă?

## TEMA 11 - Plăți în caz de deces

Folosiți tabelele cu numere de comutație cu  $i = 5\%$

1. Calculați factorii de actualizare de deces  ${}_{12}D_{63}$  și  ${}_9D_{51}$ . Interpretați.

**Răspuns.**  ${}_{12}D_{63} = 0.022923$  și  ${}_9D_{51} = 0.009854$

2. Calculați valoarea actuală a 1 u.m. plătibile peste 16 ani și jumătate unei persoane în vârstă de 55 de ani dacă aceasta decedează între 71 și 72 ani.

**Răspuns.**  ${}_{16}D_{55} = 0.015876$

3. Precizați semnificația și calculați valoarea medie actuală pentru anuitățile de deces:  $A_{67}$ ;  ${}_{4|13}A_{58}$ ;  ${}_5A_{48}$ ;  $A_{59:7}$ .

**Răspuns.**  $A_{67} = 0.600675$ ;  ${}_{4|13}A_{58} = 0.161545$ ;  ${}_5A_{48} = 0.294568$ ;  $A_{59:7} = 0.120085$ .

4. Care este valoarea medie actuală a unei plăți de 7 400 €, ce se va face dacă o persoană de 61 ani, decedează între 85 și 86 ani? Dar dacă decesul are loc până la 85 de ani?

**Răspuns.** 68.54 €, respectiv 3 444.14 €

5. Calculați valoarea medie actuală cumulată a unei plăți de 12 300 \$ pe care familia unei persoane în vârstă de 74 de ani o va primi în cazul în care decesul persoanei survine (a) începând cu vârsta de 91 de ani respectiv (b) până la vârsta de 90 de ani.

**Răspuns.** 243.13 \$; 8 294.12 \$

6. Care este valoarea medie actuală a unei plăți de 5 412 €, ce se va face dacă o persoană de 53 ani, decedează între 75 și 80 ani? Dar dacă decesul are loc până la 75 de ani?

**Răspuns.** 309.12 € și respectiv 1 438.19 €

7. Morana (actualmente de 29 ani) plătește acum o primă de 700 €, astfel încât dacă decesul său survine oricând din acest moment, fiul ei să fie asigurat cu o sumă de bani. Cât este această sumă? Dar dacă decesul său ar surveni peste 29 ani, oricând de atunci încolo?

**Răspuns.** 4464.33 €, respectiv 7285.93 €

8. Calculați valoarea actuală a sumei de 15500 €, pe care o va primi familia unei persoane actualmente în vârstă de 86 de ani în momentul în care aceasta decedează. Dar dacă vrea să plătească acum 55 000 €, ce sumă va primi familia?

**Răspuns.** 13 265.63 €, respectiv 64 263.80 €

9. O persoană de 37 de ani depune la o firmă de asigurări suma de 4 500 lei. Calculați suma pe care o va primi familia acestei persoane în momentul decesului acestuia.

**Răspuns.** 21 041.39 lei

## Asigurări de persoane I

### A. Aspecte teoretice:

#### Principiul echilibrului financiar

Exprimă egalitatea valorilor medii actuale ale plăților efectuate de asigurat și de către asigurator, conform contractului încheiat.

Pentru fiecare tip de asigurare vom evidenția obligațiile celor două părți conform contractului de asigurare, care stipulează:

- pentru asigurat: vârsta, prima de asigurare și modalitatea de plată a acesteia
- pentru asigurator: beneficiarii, modalitatea și condițiile de plată a sumei asigurate.

Fără a restrânge generalitatea, presupunem pentru modelare, ca plățile se fac anticipat. Evident, analog se pot face și posticipat.

#### Asigurare de viață

Obligațiile asiguratului	Obligațiile asiguratorului
Asiguratul în vârstă de $x$ ani plătește prima de asigurare $P$ , anticipat, timp de $k$ ani	Asiguratorul plătește asiguratului suma $S$ la împlinirea vârstei de $x + n$ ani. Dacă asiguratul nu este în viață la $x + n$ ani, asiguratorul NU are nici o obligație financiară.
$P \cdot \ddot{a}_{x:k}$	$S \cdot {}_nE_x$

Conform **Principiului echilibrului financiar** avem egalitatea obligațiilor celor 2 părți:

$$P \cdot \ddot{a}_{x:k} = S \cdot {}_nE_x$$

#### Observație :

- Dacă plata primelor se face posticipat avem :

$$P \cdot a_{x:k} = S \cdot {}_nE_x$$

- Dacă plata primelor se face fracționat anticipat avem :

$$m \cdot P \cdot \ddot{a}_{x:k}^{(m)} = S \cdot {}_nE_x$$

sau fracționat posticipat

$$m \cdot P \cdot a_{x:k}^{(m)} = S \cdot {}_nE_x$$

**Observație:**  $\ddot{a}_{x:1} = {}_0E_x = 1$  dar  $a_{x:1} \neq 1$ ,  $\ddot{a}_{x:1}^{(m)} \neq 1$  și  $a_{x:1}^{(m)} \neq 1$ .

## Asigurare de pensie

Obligațiile asiguratului	Obligațiile asiguratorului
Asiguratul în vârstă de $x$ ani plătește prima de asigurare $P$ , anticipat, timp de $k$ ani	Asiguratorul plătește periodic, anticipat asiguratului o suma $S$ (pensie) din momentul în care acesta împlinește vârsta de $x + n$ ani și până la deces. Dacă asiguratul decedează înaintea împlinirii vârstei de $x + n$ ani, asiguratorul NU are nici o obligație financiară.
$P \cdot \ddot{a}_{x:k}$	$S \cdot {}_n\ddot{a}_x$

### Principiul echilibrului financiar :

$$P \cdot \ddot{a}_{x:k} = S \cdot {}_n\ddot{a}_x$$

### Observație :

- Dacă plata primelor se face posticipat avem :

$$P \cdot a_{x:k} = S \cdot {}_n\ddot{a}_x$$

- Dacă plata pensiei se face posticipat avem :

$$P \cdot \ddot{a}_{x:k} = S \cdot {}_n a_x$$

- Dacă plata primelor și a pensiilor se face fracționat anticipat:

$$m \cdot P \cdot \ddot{a}_{x:k}^{(m)} = m' \cdot S \cdot {}_n\ddot{a}_x^{(m')}$$

- Iar fracționat posticipat amandouă:

$$m \cdot P \cdot a_{x:k}^{(m)} = m' \cdot S \cdot {}_n a_x^{(m')}$$

### Asigurare de deces

Obligațiile asiguratului	Obligațiile asiguratorului
Asiguratul în vârstă de $x$ ani plătește prima de asigurare $P$ , anticipat, timp de $k$ ani	Asiguratorul va plăti unei persoane desemnată de asigurat o suma $S$ , în cazul decesului asiguratului între vârsta de $x + m$ ani (inclusiv) și $x + n$ ani (exclusiv).
$P \cdot \ddot{a}_{x:k}$	$S \cdot {}_m nA_x$

#### Principiul echilibrului financiar :

$$P \cdot \ddot{a}_{x:k} = S \cdot {}_m|nA_x$$

#### Observație :

- Dacă plata primelor se face posticipat avem :

$$P \cdot a_{x:k} = S \cdot {}_m|nA_x$$

- Dacă plata primelor se face fracționat :

$$m \cdot P \cdot \ddot{a}_{x:k}^{(m)} = S \cdot {}_m|nA_x$$

- Evident, în partea dreaptă (la obligațiile asiguratorului), în funcție de contractul semnat, putem avea una din situațiile:  $A_x, A_{x:n}, {}_nA_x$ .

### Asigurare mixtă

Obligațiile asiguratului	Obligațiile asiguratorului
Asiguratul în vârstă de $x$ ani plătește prima de asigurare $P$ , anticipat, timp de $k$ ani	Asiguratorul plătește suma $S$ asiguratului, dacă acesta este în viață la vârsta de $x + n$ ani sau suma $S'$ , unei persoane desemnate, în cazul decesului său până la acea vârstă
$P \cdot \ddot{a}_{x:k}$	$S \cdot {}_nE_x + S' \cdot A_{x:n}$

#### Principiul echilibrului financiar :

$$P \cdot \ddot{a}_{x:k} = S \cdot {}_nE_x + S' \cdot A_{x:n}$$

#### Observație :

- Dacă plata primelor se face posticipat avem :

$$P \cdot a_{x:k} = S \cdot {}_n E_x + S' \cdot A_{x:n}$$

- Dacă plata primelor se face fracționat :

$$m \cdot P \cdot \ddot{a}_{x:k}^{(m)} = S \cdot {}_n E_x + S' \cdot A_{x:n}$$

- Evident, în partea dreaptă (la obligațiile asiguratorului), în funcție de contractul semnat, putem avea una din situațiile:  $A_x, A_{x:n}, {}_n A_x$ .

Se lucrează cu tabelele cu numere de comutație cu  $i = 5\%$ .

## B. Aplicații practice:

1. Avem următoarea asigurare: asiguratul în vârstă de 40 ani, plătește la începutul fiecărui an, timp de 5 ani, prime de 276 lei astfel încât la vârsta de 55 ani, dacă este în viață să primească suma asigurată  $S$ . Calculați această sumă.
2. O persoană de 36 ani plătește la sfârșitul fiecărui an, timp de 10 ani, prime de asigurare, pentru ca după 20 ani să primească la începutul fiecărui an o pensie de 15 000 lei. Care este valoarea primei de asigurare? Dar dacă persoana ar plăti primele anticipat și ar încasa pensia posticipat?
3. O persoană de 35 ani își asigură familia cu suma de 10 000 €, ce urmează a fi plătită de asigurator, dacă decesul persoanei are loc între 65 și 80 ani. Care este valoarea primei anuale plătită anticipat timp de 15 ani? Dar dacă persoana ar deceda înaintea împlinirii vârstei de 60 ani?
4. O persoană de 52 ani dorește să primească dacă va fi în viață la 67 ani suma de 3 200 €, iar dacă decedează înaintea împlinirii acestei vârste, suma o va primi familia sa.
  - a) Care este valoarea primei anuale plătită anticipat timp de 7 ani?
  - b) Dar a primei unice de asigurare plătită la momentul semnării contractului?
  - c) Dar valoarea sumei asigurate dacă prima unică este de 5 000 € dar familia încasează doar 2/3 din sumă?

## TEMA 12 - Asigurări I

Se lucrează cu tabelele cu numere de comutație cu  $i = 5\%$ .

1. O persoană de 36 ani plătește la sfârșitul fiecărui an, timp de 10 ani, prime de asigurare, pentru ca după 20 ani să primească la sfârșitul fiecărui an o pensie de 15 000 lei. Care este valoarea primei de asigurare? Dar dacă persoana ar plăti primele anticipat și ar încasa pensia tot anticipat?

**Răspuns.**  $P=7\,418.46$  lei,  $P=7\,672.32$  lei.

2. Să se calculeze valoarea primei pe care trebuie să o plătească o persoană de 42 ani, timp de 10 ani, anual anticipat, pentru ca familia sa să primească o sumă de 120 u.m. dacă decesul persoanei intervine înainte ca aceasta să împlinească vârsta de 90 ani.

**Răspuns.**  $P=3.86$  u.m.

3. D-nul Trandafir, în vârstă de 30 ani, încheie un contract de asigurare: se obligă să plătească o primă timp de 20 ani, anual anticipat. Asigurătorul se obligă să plătească domnului Trandafir suma de 5 000 u.m. dacă dânsul va fi în viață la vârsta de 50 ani. Cât este prima de asigurare?

**Răspuns.**  $P=137$  u.m.

4. S-a încheiat următorul contract: persoana asigurată, în vârstă de 40 ani, plătește anual anticipat câte o primă timp de 20 ani; iar instituția de asigurare se obligă să plătească asiguratului suma de 3 000 u.m. dacă acesta va fi în viață la împlinirea vârstei de 70 ani, în caz contrar familia sa va primi suma de 2 800 u.m. Să se determine prima plătită anual anticipat.

**Răspuns.**  $P=67.43$  u.m.

5. O persoană în vârstă de 32 ani se asigură să i se plătească peste 18 ani, dacă va fi în viață, o sumă de 15 000 \$. Care este valoarea primei unice plătite de acea persoană? Care este valoarea primei anuale plătibile până la expirarea termenului de asigurare?

**Răspuns.** 5 830.06 \$; 484.95 \$

6. Un om bogat în vârstă de 45 ani dorește ca în cazul decesului său, fiul să primească o sumă de 1 000 000 lei, dacă decesul survine în următorii 20 ani. Care este prima unică pe care o va plăti persoana respectivă? Care este prima anuală plătită pe tot timpul asigurării?

**Răspuns.** 123 312.20 lei; 10 031.34 lei

7. Doamna Rus primește 10 000 € la împlinirea vârstei de 40 ani. Ea folosește acești bani pentru a cumpăra o asigurare de viață plătită la vârsta de 70 de ani, dacă va fi în viață. Ce sumă primește la 70 ani dacă supraviețuiește? Comparați suma primită cu suma pe care ar primi-o dacă ar investi banii într-un cont de economii cu  $i=5\%$ , capitalizarea făcându-se trimestrial, pe aceeași perioadă de timp.

**Răspuns.** 67 850.43 €; 44 402.13 €

8. O persoană în vârstă de 52 ani dorește să primească, dacă va fi în viață la vârsta de 67 ani, suma de 4 000 lei, iar dacă decesul are loc înaintea împlinirii acestei vârste familia sa va primi dublul aceste sume.

a) Care este prima unică pe care o va plăti persoana respectivă?

b) Care este prima anuală plătită pe tot timpul asigurării?

**Răspuns.** 2 715.91 lei; 269.18 lei

9. Doamna Margareta, în vârstă de 45 ani, dorește ca la împlinirea vârstei de 70 ani să primească anual o pensie de 1 000 u.m. Pentru aceasta, ea apelează la o agenție de asigurări unde încheie un contract de asigurare. Agenția se obligă să plătească pensia dorită de doamna Margareta, doar dacă dânsa ajunge să împlinească vârsta de 70 ani. Ce fel de asigurare a încheiat doamna Margareta? Ce primă trebuie să plătească anual anticipat, timp de 15 ani în vederea satisfacerii acestei obligații pe care dânsa o are menționată în contractul de asigurare?

**Răspuns.**  $P=142.04$  u.m.

## Asigurări de persoane II

1. O persoană de 32 ani se asigură să i se plătească peste 18 ani, dacă este în viață, suma de 20 000 lei. Care este valoarea:
  - a) primei unice de asigurare plătită anticipat și respectiv posticipat
  - b) primei anuale plătită timp de 6 ani, atât la început cât și la sfârșit de an
  - c) primei semestriale plătită timp de 6 ani, atât la început cât și la sfârșit de semestru.
  
2. Să se calculeze valoarea primei anuale anticipate pe care trebuie să o plătească o persoană de 36 ani, timp de 26 ani, pentru ca după aceea să primească o pensie anuală anticipată de 10 000 lei. Ce pensie lunară anticipată ar putea primi dacă ar urma să plătească prime trimestriale anticipate de 5 000 lei numai un an?
  
3. O persoană de 48 ani își asigură familia cu suma de 200 000 €, ce urmează a fi plătită de către asigurator, dacă decesul persoanei are loc în decurs de 20 ani de la semnarea contractului de asigurare. Care este valoarea primei lunare plătită tot timpul asigurării (anticipat și respectiv posticipat)?
  
4. O persoană de 40 ani dorește să primească dacă va fi în viață la 70 ani suma asigurată  $S$ , iar dacă decedează înaintea împlinirii acestei vârste, jumătate din sumă o va primi familia sa.
  - a) Care este valoarea primei semestriale plătită anticipat timp de 10 ani, dacă suma asigurată este de 50 000 €?
  - b) Cât va fi valoarea sumei asigurate dacă persoana va plăti o primă unică de 8 000 € la momentul semnării contractului iar familia încasează doar 75% din sumă?

## TEMA 13 - Asigurări II

Se lucrează cu tabelele cu numere de comutație cu  $i = 5\%$ .

1. Se consideră cazul unei persoane, în vârstă de 50 de ani, care încheie un contract de asigurare în vederea obținerii unei pensii suplimentare. Persoana plătește lunar anticipat câte o primă de 150 u.m. pe tot timpul asigurării, urmând ca instituția de asigurare să plătească trimestrial anticipat pensia. Care este pensia plătită trimestrial de instituția de asigurare dacă asiguratul plătește prima pe toată durata asigurării, timp de 10 ani?

**Răspuns.**  $S=590.05$  u.m.

2. O persoană în vârstă de 65 de ani încheie următoarea asigurare. Asiguratul plătește semestrial, anticipat, câte o primă de 1 000 u.m. urmând ca instituția de asigurare să plătească familiei asiguratului suma  $S$  dacă decesul asiguratului intervine la o vârstă cuprinsă între 85 și 100 de ani. Primele sunt plătite timp de 15 ani. Găsiți suma asigurată.

**Răspuns.**  $S=295\ 925.08$  u.m.

3. Să se determine valoarea primei lunare pe care trebuie să o plătească doamna Marinescu, acum în vârstă de 35 de ani, pentru următorii 25 de ani, astfel încât, după această perioadă, să primească o pensie lunară de 1 000 lei.

**Răspuns.** 187.76 lei

4. Domnul Rus având vârsta de 30 de ani, semnează o asigurare astfel încât, începând cu vârsta de 60 de ani să primească o pensie lunară de 800 lei.

- a) Care este valoarea primei trimestriale plătibile pe tot timpul asigurării?
- b) Care este valoarea primei semestriale plătibile în următorii 10 ani?

**Răspuns.** 317.89 lei; 1 222.16 lei

5. Domnul Ionescu, în vârstă de 40 de ani dorește să primească de la o companie de asigurări o sumă  $S$  dacă va fi în viață la 60 de ani, iar dacă nu familia sa va primi jumătate din suma  $S$ . Să se determine suma de bani asigurată  $S$ , dacă domnul Ionescu plătește începând de acum o primă de 150 lei, la începutul fiecărui trimestru, pentru o perioadă de 10 ani.

**Răspuns.** 12 932.93 lei

6. O persoană de 33 ani se asigură să i se plătească peste 21 ani, dacă este în viață, suma de 40 000 lei. Care este valoarea:

- a) primei unice de asigurare plătită anticipat și respectiv posticipat
- b) primei anuale plătibilă timp de 9 ani, atât la început cât și la sfârșit de an
- c) primei trimestriale plătibilă timp de 9 ani, atât la început cât și la sfârșit de trimestru.

**Răspuns.** 15 100.56 lei, 15 891.04 lei, 2 042.59 lei, 2 150.78 lei, 520.47 lei, 527.22 lei.

---

## Simulare

Timp de lucru 30 minute

1 punct din oficiu

---

1. (1p) Probabilitatea ca o persoană în vârstă de 81 să nu fie în viață peste 5 ani este?

---
2. (3p) O persoană alege să plătească acum o primă unică de 1800 lei. Ce sumă ar putea încasa Elena (32 ani) din momentul în care împlinește 41 ani și până la deces la început de an și respectiv de semestru?
  - Care este valoarea anuității viagere întregi asociate?
  - Care este valoarea sumei încasate de Elena la fiecare început de an?
  - Care este valoarea anuității viagere fracționate asociate?
  - Care este valoarea sumei încasate de Elena la fiecare început de semestru?

---
3. (2p) Ce sumă va primi nepotul d-nei X. cu vârsta de 47 ani, în cazul decesului acesteia până la 83 ani, dacă se plătește acum o primă unică de 605 euro?
  - Care este valoarea anuitatii de deces corespunzatoare?
  - Care este valoarea sumei primite de nepot?

---
4. (3p) Asiguratul are vârsta de 25 ani, plata primelor se va face la fiecare început de semestru, timp de 4 ani, astfel încât începând cu vârsta de 47 ani, să primească la fiecare sfârșit de lună, o pensie de 1830 lei, pe toată durata vieții.
  - Valoarea primei plătite este?
  - Care ar fi valoarea primei platită o singură dată, la momentul semnării contractului?
  - Indicați tipul de asigurare

Răspuns:

1. 0.58569
2. 9.99503704; 180.0893775 lei; 9.8378021; 91.4838481 lei
3. 0.2856393589; 2118.055447 euro
4. 13485.77554448 lei; 98925.171854292 lei; Asigurare de pensie

## Bibliografie

- **Matematici financiare și actuariale**, A.S. Mureșan, D.A. Filip, P. Curt, R.I. Lung, G.E. Olteanu, V.A. Radu, et al, Ed. Mega, Cluj-N, 2013, p.315
- **Introduction to financial and actuarial mathematics**, P. Curt, Ed. Alma Mater, 2022
- **Aritmetica financiară**, D.A. Filip, Ed. Todesco, 2008



ISBN: 978-606-37-2540-1