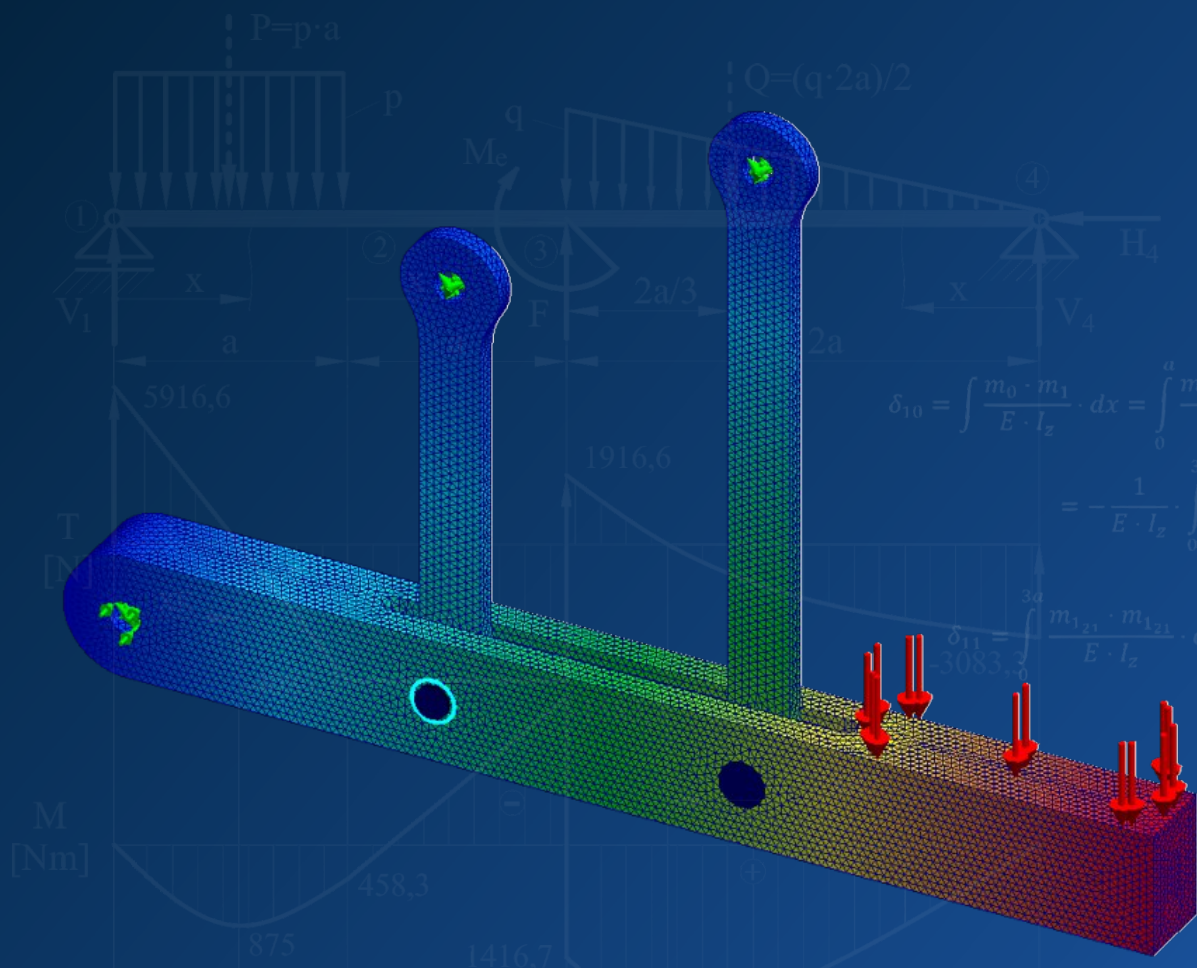


Vasile Cojocaru

Rezistența materialelor

Calcul analitic și analiză FEM



Presă Universitară Clujeană

Vasile Cojocaru

•

REZISTENȚA MATERIALELOR

Calcul analitic și analiză FEM

Vasile Cojocaru

REZISTENȚA MATERIALELOR

Calcul analitic și analiză FEM

PRESA UNIVERSITARĂ CLUJEANĂ

2025

Referenți științifici:

Prof. univ. dr. ing. Liviu Marșavina

Prof. univ. dr. ing. Mircea Cristian Dudescu

Prof. univ. dr. ing. Dorian Nedelcu

Tehnoredactare computerizată și ilustrații grafice:

Vasile COJOCARU

ISBN 978-606-37-2758-0

© 2025 Autorul volumului. Toate drepturile rezervate.
Reproducerea integrală sau parțială a textului, prin orice
mijloace, fără acordul autorului, este interzisă și se pedep-
sește conform legii.

Universitatea Babeș-Bolyai
Presa Universitară Clujeană
Director: Codruța Săcelean
Str. B.P. Hasdeu nr. 51
400371 Cluj-Napoca, România
Tel.: (+40) 744 687 884
E-mail: editura@ubbcluj.ro
editura.ubbcluj.ro | libraria.ubbcluj.ro

Prefață

Calculule de rezistență reprezintă fundamentul proiectării sistemelor mecanice. Metodele de calcul dezvoltate timp de secole, de fizicieni și ingineri, permit proiectarea de componente mecanice sigure și durabile, respectând principul rentabilității economice.

Secolul XXI se caracterizează printr-un ritm foarte accelerat al schimbărilor tehnologice. Perfecționarea proceselor de fabricație aditivă, extinderea capabilităților softurilor de inginerie asistată de calculator și utilizarea inteligenței artificiale pe scară largă tind să schimbe abordările clasice folosite în proiectarea sistemelor mecanice.

Fabricația aditivă permite realizarea de geometrii cu interior celular, distribuind materialul de umplere după diferite strategii și densități, contribuind astfel la obținerea de componente mecanice cu masă mai mică. Utilizând algoritmi de optimizare topologică, geometria proiectată poate fi optimizată în funcție de distribuțiile de tensiuni și deformații. Izotropia materialului nu mai este implicit o cerință, mai ales atunci când se folosesc materiale compozite (ex.: polimeri ranforșați cu fibră de carbon, polimeri ranforșați cu fibră de sticlă). Proiectantul este pus astfel în fața unor cerințe care necesită metode suplimentare de calcul față de procesele clasice de proiectare.

Softurile de inginerie asistată permit realizarea unei largi game de analize specifice domeniului mecanic (determinarea tensiunilor și deformațiilor în regim static sau dinamic de solicitare, estimări de durată de viață la solicitări ciclice, analiză cinematică, analiză dinamică, determinarea stărilor de vibrații, analize de curgere a fluidelor, analiză termică etc.). Integrarea inteligenței artificiale (AI) în procesele de definire a cazurilor de analiză asistată de calculator facilitează obținerea de soluții adaptate cerințelor, fără validarea etapă cu etapă de către un proiectant. Cu alte cuvinte, într-un limbaj care devine din ce în ce mai puțin ermetic (putând fi folosit și de personal nespecializat), poate fi definită o cerință de proiectare și obținut un rezultat (sub formă de proiect) netrecut prin filtre ingineresti clasice.

Pentru a răspunde cerințelor actuale de proiectare, evitând însă capcana de a utiliza rezultate greșite, inginerul mecanic de astăzi trebuie să fie capabil să aplice atât metode clasice de calcul de rezistență, cât și metode moderne (inclusiv cu asistența AI), dar urmărind mereu validarea rezultatelor obținute.

Compararea rezultatelor obținute din simulările numerice cu rezultatele obținute prin încercări experimentale sau prin calcul analitic reprezintă principala metodă de validare a unor modele de analiză numerică. Această comparație nu este tot timpul simplu de realizat, în special la componentele mecanice cu complexitate

geometrică ridicată. În multe situații este necesară validarea în etape de lucru, pornind de la modele simple spre modele complexe. **În tot acest parcurs este nevoie de specialiști care să înțeleagă foarte bine atât fundamentele teoretice pe care se bazează calculul de rezistență, cât și procesele și fenomenele care apar la sistemul real.** În opinia autorului, pentru un inginer la început de drum este obligatoriu să parcurgă o serie de etape de formare pentru a putea conduce un proces de proiectare complex, care să implice calcule paralele: analitic, numeric, experimental.

În acest context, lucrarea dată urmărește să inițieze studenții și proaspeții absolvenți de inginerie mecanică în calcul comparativ de rezistență: calcul analitic folosind metode clasice și simulări numerice folosind metoda elementului finit (abreviată MEF sau FEM – *finite element method*). Sunt prezentate aspecte teoretice și exemple de calcul cu grad redus de complexitate, tocmai pentru a vizualiza ușor și a putea clarifica diferențele, limitările, constrângerile fiecărei metode.

Literatura de specialitate conține numeroase volume fundamentale atât pentru definirea metodei elementelor finite [8, 19, 24], cât mai ales pentru prezentarea metodelor de calcul de rezistență [6, 10, 18, 20, 22, 36, 37]. Lucrarea de față nu poate fi încadrată la nici una din cele două categorii, și nu suplinește în nici un caz parcurgerea acestor volume de referință pentru ingineria mecanică. Lucrarea își propune să concentreze, într-un număr accesibil de pagini, aspecte relevante în procesul de validare a unei analize cu element finit.

Lucrarea este structurată pe capitolele clasice din cursul de Rezistența materialelor (în special partea I), trecând prin calculul diagramelor de variație a forțelor interioare (diagrame de eforturi), calculul caracteristicilor inerțiale ale secțiunilor plane, solicitări simple, determinarea deplasărilor prin metode energetice, sisteme static nedeterminate, solicitări compuse.

Dorința autorului este ca acest volum să fie îmbunătățit continuu. Orice sugestie legată de conținut va fi apreciată.

Ș.I. Dr. Ing. Vasile Cojocaru

CUPRINS

1. NOȚIUNI DE BAZĂ	11
1.1 Calculele de rezistență în ingineria mecanică.....	12
1.2 Forțele care acționează asupra elementelor de rezistență	13
1.2.1 Forțe exterioare.....	14
1.2.2 Reazeme și reacțiuni.....	15
1.2.3 Forțe interioare (eforturi).....	16
1.3 Tensiuni	17
1.4 Deplasări. Deformații	21
1.5 Proprietăți mecanice ale materialelor	22
1.6 Ipoteze de bază în rezistența materialelor.....	24
1.7 Evaluarea comportamentului mecanic prin analiză cu elemente finite	26
1.7.1 Modelarea geometriei.....	27
1.7.2 Importul geometriei în mediul de simulare	27
1.7.3 Lansarea unui nou studiu de analiză.....	28
1.7.4 Asocierea proprietăților de material	29
1.7.5 Aplicarea constrângerilor	32
1.7.6 Aplicarea încărcărilor	38
1.7.7 Discretizarea modelului și rularea studiului	46
1.7.8 Vizualizarea rezultatelor.....	48
2. DIAGrame DE VARIAȚIE A FORȚELOR INTERIOARE	55
2.1 Calculul reacțiunilor	56
2.2 Diagrame de variație a forțelor interioare la grinzi drepte.....	73
2.3 Diagrame de variație a forțelor interioare la bare curbe plane.....	92
2.4 Diagrame de variație a forțelor interioare la cadre plane.....	101
2.5 Diagrame de variație a forțelor interioare la sisteme spațiale.....	111
3. CARACTERISTICI GEOMETRICE ALE SECȚIUNILOR PLANE	123
3.1 Definirea caracteristicilor inerțiale	124
3.2 Variația momentelor de inerție în raport cu sisteme de referință cu axe paralele	126

3.3 Variația momentelor de inerție în raport cu sisteme de referință cu axe concurente	127
3.4 Momente de inerție principale și axe principale	128
3.5 Calculul caracteristicilor geometrice la suprafețe simple	128
3.6 Calculul caracteristicilor geometrice la suprafețe compuse.....	130
4. SOLICITĂRI SIMPLE.....	143
4.1 Tensiuni și deformații la solicitări axiale.....	144
4.2 Sisteme static nedeterminate la solicitări axiale	150
4.3 Torsiunea barelor cu secțiune circulară	162
4.4 Sisteme static nedeterminate la torsiune.....	167
4.5 Calculul tensiunilor la încovoiere	171
4.6 Calculul deformațiilor la încovoiere.....	172
4.7 Sisteme static nedeterminate supuse la încovoiere	184
5. SOLICITĂRI COMPUSE	189
5.1 Solicitări compuse de categoria I.....	190
5.2 Solicitări compuse de categoria II	199
BIBLIOGRAFIE.....	211

Lista simbolurilor uzuale folosite în acest volum

Simbol	Mărimе	U.M.
A	Aria secțiunii transversale a unei bare	mm^2
a, a_i	Distanțe, lungimi ale tronsoanelor barelor / grinzilor	mm
b, b_i	Lățimi ale secțiunilor transversale	mm
c_i	Distanța de la axa z asociată centrului de greutate al unei figuri compuse, la axa z_i asociată centrului de greutate al unei figuri simple i (relațiile lui Steiner)	mm
d_i	Distanța de la axa y asociată centrului de greutate al unei figuri compuse, la axa y_i asociată centrului de greutate al unei figuri simple i (relațiile lui Steiner)	mm
D, d	Diametre ale secțiunilor circulare	mm
E	Modulul de elasticitate longitudinal (modulul lui Young)	N/mm^2
F	Forță exterioară concentrată	N
FEM (MEF)	<i>Finite Element Method</i> (Metoda elementului finit)	
G	Modulul de elasticitate transversal	N/mm^2
H_i	Reacțiunea pe direcție orizontală în punctul i	N
h, h_i	Înălțimi ale secțiunilor transversale i	mm
I_y, I_z	Momente de inerție axiale în raport cu axele y și z	mm^4
I_p	Moment de inerție polar	mm^4
I_{zy}	Moment de inerție centrifugal	mm^4
I_1, I_2	Momente de inerție principale	mm^4
i_y, i_z	Raze de inerție (raze de girație)	mm
l, l_i	Lungimi de bară/grindă	mm
M_e	Moment de încovoiere exterior	$N \cdot mm$

M_i, M_{iz}, M_{iy}	Momente de încovoiere orientate după axa z sau y	$N \cdot mm$
M_t	Moment de torsiune (în jurul axei x)	$N \cdot mm$
N	Forță interioară axială	N
n	Turație	rot/min
P	Putere	kW
p, q	Forțe exterioare distribuite	N/mm
R, r	Raze ale arcelor de cerc sau razele punctelor în raport cu un centru de greutate	mm
S_y, S_z	Momente statice în raport cu axele y sau z	mm^2
T	Forță interioară tăietoare	N
V_i	Reacțiune verticală în punctul i	N
W_y, W_z	Modulele de rezistență axiale	mm^3
W_p	Modulul de rezistență polar	mm^3
x, y, z	Axele sistemului de referință sau coordonate pe aceste axe	
α_1, α_2	Unghiuri care definesc direcțiile principale de inerție	$grade$
Δl	Alungire (la sollicitări axiale)	mm
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	Deformații specifice liniare	-
$\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$	Deformații specifice unghiulare	rad
θ	Deformație specifică la torsiune	rad/m
ν	Coeficient de contracție transversală (coeficientul lui Poisson)	-
$\sigma, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	Tensiune axială, componente ale tensiunii axiale	N/mm^2
$\tau, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$	Tensiune tangențială, componente ale tensiunii tangențiale	N/mm^2
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	Tensiuni principale	N/mm^2
$\sigma_{ech III}, \sigma_{ech V}$	Tensiuni echivalente conform teoriei a III-a de rezistență, respectiv teoria a V-a de rezistență	N/mm^2

1. Noțiuni de bază

Capitolul 1 al prezentului volum prezintă noțiunile și principiile de bază necesare pentru realizarea calculelor de rezistență la sisteme mecanice, prin metode analitice și simulări numerice.

În prima parte a capitolului sunt introduse mărimile care definesc calculele de rezistență: forțe exterioare, reacțiuni, forțe interioare, tensiuni, deplasări și deformații. Sunt evidențiate principalele proprietăți mecanice ale materialelor și curba caracteristică de la încercarea de tracțiune. Totodată, se prezintă ipotezele de bază folosite în calculele analitice.

În partea a doua a capitolului sunt definite etapele care trebuie parcurse pentru analiza comportamentului mecanic prin simulări numerice bazate pe metoda elementului finit. Sunt detaliate comenzile aplicate în Solid Works Simulation pentru lansarea unui nou studiu de analiză, asocierea proprietăților de material, aplicarea constrângerilor, aplicarea încărcărilor, discretizarea modelului, rularea studiului și vizualizarea rezultatelor, cu evidențierea diferențelor între simulările realizate pe geometrii de tip solid și simulările realizate pe geometrii de tip grindă.

Structura capitolului este următoarea:

- 1.1 Calculele de rezistență în ingineria mecanică*
- 1.2 Forțele care acționează asupra elementelor de rezistență*
- 1.3 Tensiuni*
- 1.4 Deplasări. Deformații*
- 1.5 Proprietăți mecanice ale materialelor*
- 1.6 Ipoteze de bază în rezistența materialelor*
- 1.7 Simulări numerice*

1.1 CALCULELE DE REZISTENȚĂ ÎN INGINERIA MECANICĂ

Componentele sistemelor mecanice sunt supuse în exploatare unor solicitări complexe, generate de forțele care acționează asupra lor, dar și de factori externi (ex.: variațiile de temperatură). Pentru ca un sistem mecanic să fie sigur, durabil și rentabil din punct de vedere economic, este necesar ca proiectarea componentelor acestuia să se realizeze prin calcule de rezistență.

Calcululele de rezistență se bazează pe principiile mecanicii mediilor continue și ale rezistenței materialelor. Următoarele tipuri de date intervin în aceste calcule:

- date privind structura sistemului mecanic: tipul elementelor componente (grinzi, coloane, arbori, plăci, carcase etc.), dimensiunile acestora, legăturile dintre componente;
- caracteristicile materialelor: rezistența la rupere, modulul de elasticitate, limita de curgere, rezistența la oboseală, reziliența etc.;
- tipurile de solicitări (solicitări simple: întindere/compresie, forfecare, torsiune, încovoiere sau solicitări compuse) și valorile forțelor care generează aceste solicitări;
- condițiile de funcționare: sarcini statice sau dinamice, șocuri, vibrații, temperatură, mediu coroziv etc;

În funcție de tipul aplicației, calculele de rezistență pot fi:

- calcule de dimensionare, realizate atunci când se cunosc forțele aplicate și proprietățile de material și se urmărește determinarea unor dimensiuni minime necesare ale componentelor sistemului mecanic pentru a satisface criteriile de rezistență, rigiditate, stabilitate elastică etc.;
- calcule de verificare, aplicate atunci când se cunosc dimensiunile elementelor de rezistență, proprietățile de material și forțele aplicate, urmărindu-se compararea valorilor maxime ale tensiunilor / deformațiilor / deplasărilor în raport cu valori considerate admisibile;
- calcule ale capacității portante, aplicate atunci când se urmărește determinarea valorilor maxime ale încărcărilor care pot fi preluate de un element de rezistență, respectând criteriile de rezistență, rigiditate etc.

Pentru efectuarea calculelor de rezistență se utilizează metode analitice și/sau simulări numerice realizate în soft-uri specializate.

Pentru a asigura un proces riguros de proiectare și pentru a obține siguranță în exploatare, inginerii mecanici trebuie să stăpânească ambele metode de lucru, simulările numerice reprezentând o unealtă recomandabilă a fi folosită în special

pentru geometriilor complexe și doar după validarea modelelor de analiză prin calcule analitice sau încercări experimentale.

Elementele de rezistență pot fi clasificate în funcție de raportul dintre dimensiunile principale (lungime, lățime/înălțime) în: *bare* (o dimensiune mult mai mare decât celelalte două), *plăci* (două dimensiuni mult mai mari decât a treia) și *corpuri masive* (toate cele trei dimensiuni cu același ordin de mărime). În calcule de rezistență se folosesc metode diferite pentru cele trei tipuri de elemente. În acest volum sunt prezentate metode valabile pentru elemente de tip bară, categorie care cuprinde o diversitate largă de componente (grinzi, tije, arbori, tiranți, coloane etc).

Un element de rezistență de tip bară este caracterizat prin forma și dimensiunile secțiunii transversale și prin lungime. Dacă secțiunea transversală este constantă pe toată lungimea, atunci reprezentarea barelor se poate face simplificat printr-o linie groasă corespunzătoare axei principale (notată cu x în acest volum) și prin forma secțiunii în care sunt dispuse axele y și z ale unui sistem de referință ortogonal (figura 1.1).

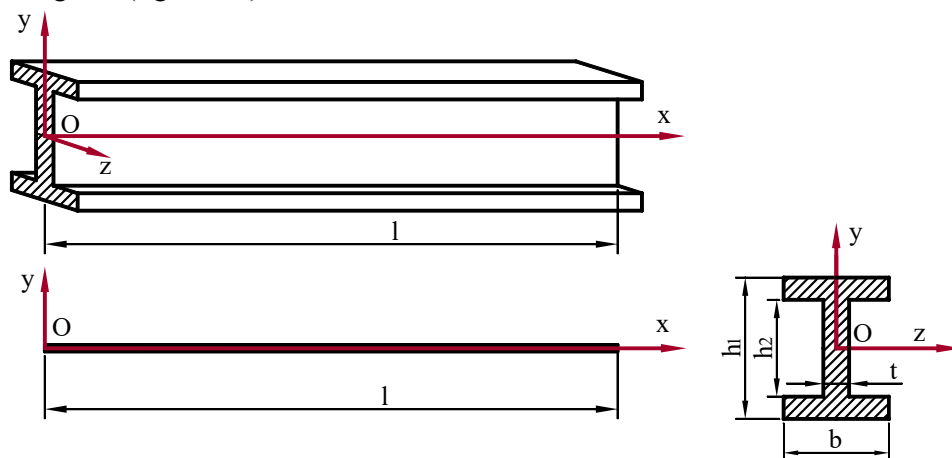


Fig. 1.1 Reprezentarea simplificată a unui element de tip bară sau grindă [12]

1.2 FORȚELE CARE ACȚIONEAZĂ ASUPRA ELEMENTELOR DE REZISTENȚĂ

Asupra elementelor de rezistență acționează forțe exterioare (denumire generică în care sunt incluse și momentele forțelor). În conexiunile dintre elemente apar forțe de legătură (numite și reacțiuni). Reacțiunile și încărcările aplicate pot fi incluse în aceeași categorie mare a forțelor exterioare.

Acțiunea forțelor exterioare determină apariția în volumul elementului de rezistență a unor forțe interioare (numite și *eforturi*). Forțele interioare variază de-a lungul axei principale x , la realizarea calculelor de rezistență fiind necesară stabilirea valorilor acestora pentru toată lungimea barei.

1.2.1 Forțe exterioare

Forțele exterioare care acționează asupra unui element de rezistență pot fi clasificate după diverse criterii:

- după natura lor: forțe active (încărcări) și forțe de legătură (reacțiuni);
- după locul de acționare: forțe de suprafață sau de contur (aplicate din exteriorul elementului de rezistență) și forțe masice sau de volum (generate de masa corpului: greutatea, forțele inerțiale etc.);
- după modul de acțiune în timp: forțe statice (aplicate lent și menținute la valoare constantă) și forțe dinamice (variabile în timp sau aplicate prin șoc);
- după modul de variație a locului de aplicare a forței: forțe *fixe* (se mențin în aceeași poziție pe elementul de rezistență) și forțe *mobile* (își schimbă locul de aplicare);
- după modul de aplicare: forțe concentrate și forțe distribuite.

Forțele concentrate acționează pe o suprafață mică în raport cu dimensiunile elementului de rezistență. În calcule analitice considerăm că aceste forțe sunt aplicate într-un punct. Această ipoteză simplificatoare poate fi aplicată și în simulările bazate pe metoda elementului finit, dar cu anumite limitări care vor fi prezentate în capitolele următoare. Trebuie reținut că, în realitate, forțele și momentele nu sunt aplicate într-un punct sau o muchie, deoarece în acest caz ar avea efecte distructive (prin străpungere sau tăiere).

Forțele distribuite acționează pe o zonă cu dimensiuni de același ordin de mărime cu tronsoanele barei. Distribuția poate fi uniformă (intensitate constantă) sau caracterizată de diverse legi de variație.

Momentele forțelor pot fi aplicate concentrat sau distribuit.

În figura 1.2 sunt reprezentate: o forță concentrată F , un moment concentrat M , o forță distribuită uniform p (intensitatea forței pe unitate de lungime este constantă) și forța distribuită neuniform q (intensitatea forței pe unitate de lungime variază neuniform, după o ecuație dată). Forțele distribuite pe un contur se exprimă în $[N/m]$, iar forțele distribuite pe o suprafață se exprimă în $[Pa] = [N/m^2]$.

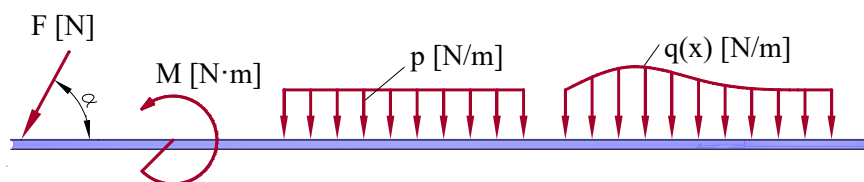


Fig. 1.2 Moduri de aplicare a forțelor [12]

1.2.2 Reazeme și reacțiuni

Un element de rezistență este legat de celelalte elemente ale sistemului din care face parte prin conexiuni. În Rezistența Materialelor numim aceste conexiuni *reazeme*. Reazemele constrâng mișcările relative dintre elementele conectate. Pentru cazul general al unui element dispus într-un spațiu 3D, sunt posibile șase mișcări relative între elemente, trei translații și trei rotații. La o dispunere într-un spațiu 2D sunt posibile trei mișcări relative, două translații (după axele cuprinse în planul de solicitare) și o rotație (după axa perpendiculară pe planul de solicitare).

Limitarea mișcărilor relative dintre elementele legate de un reazem (incluzând aici și elementele fixe) determină apariția unor forțe de legătură (*reacțiuni*), incluse în categoria forțelor exterioare.

Pentru un element de rezistență solicitat într-un spațiu 2D se definesc următoarele tipuri de reazeme:

- încadrarea;
- reazemul fix (articulația fixă);
- reazemul mobil (articulația mobilă sau reazem alunecător).

Încadrarea (figura 1.3 a) reprezintă o conexiune fixă între două elemente (ex. îmbinări nedemontabile, îmbinările cu șurub etc), care nu permite nici o mișcare relativă. La un element dispus și solicitat într-un singur plan, încadrarea introduce 3 reacțiuni, două de tip forță și una de tip moment.

Reazemul fix sau *articulația fixă* (figura 1.3 b) permite rotirea relativă a elementelor conectate și împiedică deplasările liniare relative (cuplă cinematică de rotație de clasa a V-a). La un element dispus și solicitat într-un singur plan, reazemul fix introduce 2 reacțiuni de tip forță.

Reazemul mobil (articulația mobilă sau reazem alunecător – figura 1.3 c) permite atât rotirea relativă a elementelor conectate, cât și deplasarea liniară pe o direcție din plan. Reazemul mobil introduce o reacțiune de tip forță, orientată perpendicular pe baza reazemului.

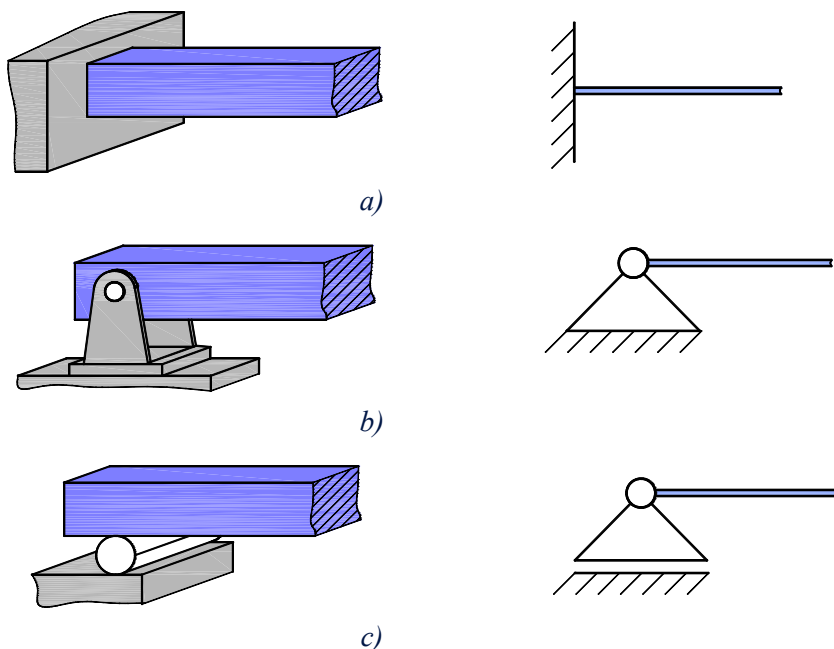


Fig. 1.3 Reazeme. Modele și simbolizări [12]

1.2.3 Forțe interioare (eforturi)

Forțele interioare apar în volumul unui element de rezistență, între particulele sale și sunt generate de forțele exterioare.

Pentru evidențierea și calculul forțelor interioare se folosește metoda Cauchy, care presupune secționarea virtuală a elementului de rezistență cu un plan transversal, izolarea celor două părți rezultate și scrierea ecuațiilor de echilibru pentru una din părți. Forțele interioare care acționează pe suprafața de secționare pot fi reduse la o forță interioară rezultantă $\vec{F}$ și un moment interior rezultat $\vec{M}$, aplicate în centrul de greutate al secțiunii (figura 1.4). Descompunerea acestora după direcțiile unui sistem de referință ortogonal, determină cele șase componente ale forței interioare utilizate în calculele de rezistență [12]:

- forța axială N , orientată după axa Ox (normală la secțiunea transversală);
- forțele tăietoare, T_y și T_z , orientate după axele Oy și Oz , axe cuprinse în planul secțiunii;
- momentele încovoietoare, M_{iy} și M_{iz} , orientate în jurul axelor Oy și Oz ;
- momentul de torsiune, M_t , orientat în jurul axei Ox .

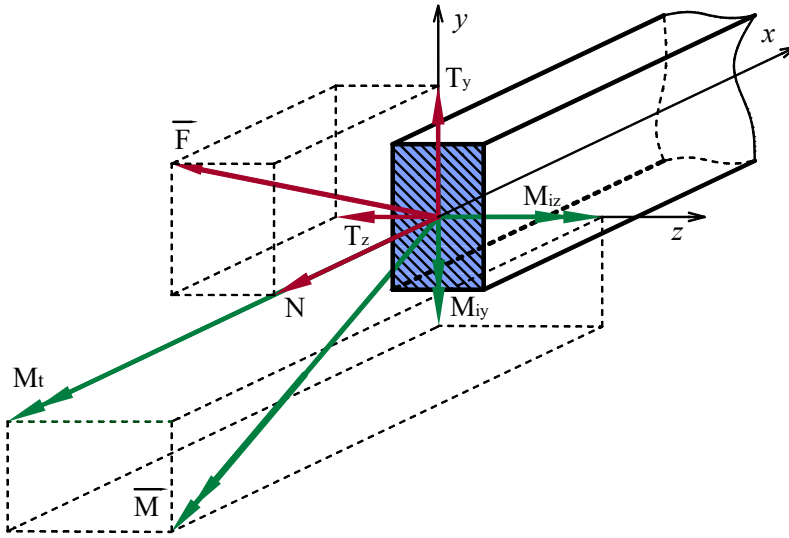


Fig. 1.4 Forțe interioare [12]

Pentru realizarea calculului de rezistență este necesară determinarea valorilor forțelor interioare și identificarea secțiunilor periculoase (pentru o bară cu secțiune transversală constantă, secțiunile periculoase sunt cele în care forțele interioare au valori maxime, pozitive sau negative).

Forțele interioare determină tipul solicitării la care este supus elementul de rezistență. Dacă într-o secțiune acționează un singur tip de forță interioară, atunci ea este supusă unei solicitări simple [12]:

- *solicitare axială* (întindere sau compresiune) generată de forța axială N ;
- *forfecare* generată de forțele tăietoare T_y și/sau T_z ;
- *încovoiere* generată de momentele încovoietoare M_y și/sau M_z ;
- *torsiunea* generată de momentul de torsiune M_t .

Dacă într-o secțiune acționează simultan mai multe tipuri de forțe interioare, atunci secțiunea respectivă este supusă unei solicitări compuse. Spre exemplu, arborii poziționați orizontal sunt supuși uzual la torsiune și încovoiere.

1.3 TENSIUNI

Atunci când se aplică metoda secțiunilor, forțele interioare sunt reduse convențional la rezultante aplicate în centrul de greutate al secțiunii transversale. În realitate, forțele interioare sunt distribuite în toată secțiunea, fiind necesară determinarea intensității lor în orice punct al acesteia.

Se introduce mărimea mecanică tensorială numită tensiune, definită de relația:

$$\bar{p} = \frac{d\bar{F}}{dA} \quad (1.1)$$

unde $d\bar{F}$ este rezultanta forțelor interioare care acționează pe aria infinit mică dA , cuprinsă în secțiunea transversală.

Pentru orice punct al secțiunii transversale de la un element de rezistență solicitat în plan, tensiunea $\bar{p}$ poate avea trei componente (figura 1.5): o componentă orientată perpendicular la secțiune (după axa x), notată cu σ_x și denumită *tensiune axială sau normală* și două componente orientate după axele y și z din secțiune notate cu τ_{xy} și τ_{xz} , denumite tensiuni tangențiale.

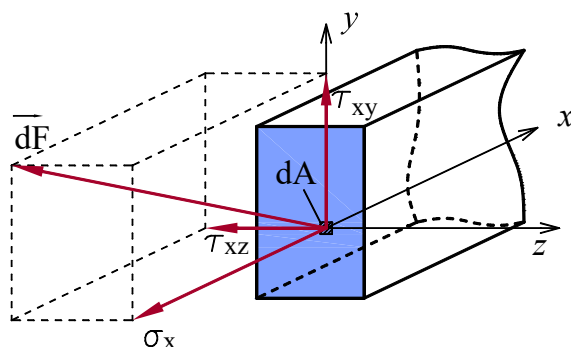


Fig. 1.5 Tensiuni [12]

Se consideră un element unitar de volum, cu dimensiuni infinit mici, extras dintr-un element de rezistență solicitat spațial. Tensiunile care acționează pe fețele sale pot fi descompuse după un sistem de referință $Oxyz$. Pe fiecare față va acționa o tensiune normală și două tensiuni tangențiale (figura 1.6). Tensiunile normale vor fi notate cu σ și un indice care indică axa după care sunt orientate. Tensiunile tangențiale vor fi notate cu τ și doi indici, primul reprezentând axa perpendiculară pe fața în care acționează τ , iar al doilea axa paralelă cu direcția lui τ .

Pentru a caracteriza starea de tensiuni pe cele șase fețe ale elementului unitar de volum (starea de tensiune din jurul unui punct al elementului de rezistență), este nevoie să se cunoască toate cele trei tensiuni axiale și cele șase tensiuni tangențiale. Aceste nouă componente de tensiune definesc tensorul tensiunilor (relația 1.2):

$$T_{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{Bmatrix} \quad (1.2)$$

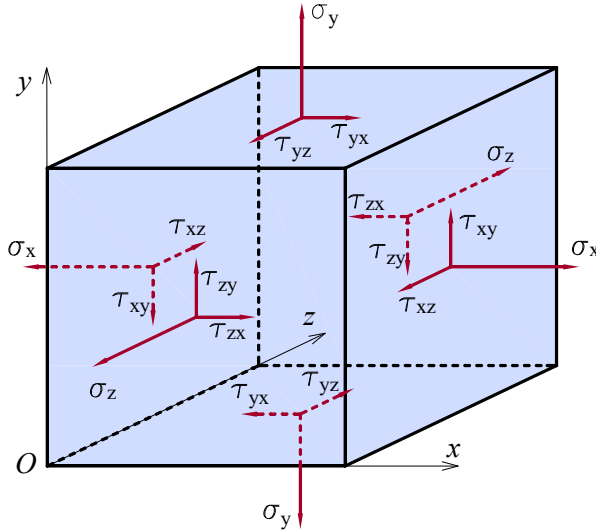


Fig. 1.6 Starea spațială de tensiuni

Principiul dualității tensiunilor tangențiale arată că dacă într-o secțiune (plan) oarecare a unui element de rezistență acționează tensiuni tangențiale τ_{xy} , atunci într-un plan perpendicular pe această secțiune (cu muchia de intersecție paralelă cu axa z) vor acționa tensiuni egale τ_{yx} . Tensiunile τ_{xy} și τ_{yx} vor avea orientare simetrică în raport cu muchia de intersecție a celor două plane.

Se pot scrie relațiile:

$$\begin{aligned}\tau_{xy} &= \tau_{yx} \\ \tau_{yz} &= \tau_{zy} \\ \tau_{zx} &= \tau_{xz}\end{aligned}\tag{1.3}$$

Având în vedere principiul dualității tensiunilor tangențiale, rezultă că starea de tensiune din jurul unui punct este cunoscută atunci când sunt determinate cele șase componente distincte de tensiune: $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}, \tau_{zx} = \tau_{xz}$.

Starea plană de tensiune este definită de două tensiuni axiale și o tensiune tangențială $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy} = \tau_{yx}$, restul componentelor de tensiune fiind nule.

Valorile celor șase componente de tensiune depind de orientarea sistemului de referință $Oxyz$. Proiectantul alege arbitrar această orientare, dar în calculul de rezistență se impune determinarea valorilor limită ale tensiunilor. Direcțiile după care tensiunile axiale au valori maxime se numesc *direcții principale*, iar aceste tensiuni se numesc *tensiuni principale* (notate uzual cu σ_1, σ_2 și σ_3).

La starea spațială de tensiune, tensiunile principale vor fi rădăcinile ecuației de gradul III [10]:

$$\sigma^3 - I_1 \cdot \sigma^2 + I_2 \cdot \sigma - I_3 = 0 \quad (1.4)$$

unde I_1, I_2 și I_3 sunt invarianți (valorile I_1, I_2 și I_3 nu depind de orientarea sistemului de referință $Oxyz$), definiți de relațiile:

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \quad (1.5)$$

$$I_2 = \sigma_x \cdot \sigma_y + \sigma_y \cdot \sigma_z + \sigma_z \cdot \sigma_x - (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \quad (1.6)$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} \quad (1.7)$$

Tensiunile tangențiale sunt maxime în plane dispuse la 45° față de direcțiile tensiunilor principale σ_1, σ_2 și σ_3 și au valorile:

$$\tau_1 = \pm \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \quad (1.8)$$

$$\tau_2 = \pm \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} \quad (1.9)$$

$$\tau_3 = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \quad (1.10)$$

Tensiunile principale σ_1 și σ_2 la starea plană de tensiune se calculează cu relațiile [10]:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (1.11)$$

iar expresia tensiuni tangențiale maxime τ_{max} este [10]:

$$\tau_{max} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (1.12)$$

1.4 DEPLASĂRI. DEFORMAȚII

Forțele interioare determină apariția tensiunilor și deformarea elementelor de rezistență. Deformațiile care apar pot fi liniare (modificarea lungimilor inițiale) și unghiulare (modificarea unghiurilor dintre muchiile elementului).

Deplasarea reprezintă distanța dintre poziția unui punct al elementului de rezistență în stare nedeformată și poziția aceluiasi punct după deformare.

Deformațiile liniare (lungiri sau scurtări) se calculează ca diferențe între lungimile după deformare și lungimile inițiale (figura 1.7, exemplificare pentru un element unitar de volum):

$$\begin{aligned}\Delta l_x &= l_1 - l_0 \\ \Delta l_y &= l_2 - l_0 \\ \Delta l_z &= l_3 - l_0\end{aligned}\quad (1.13)$$

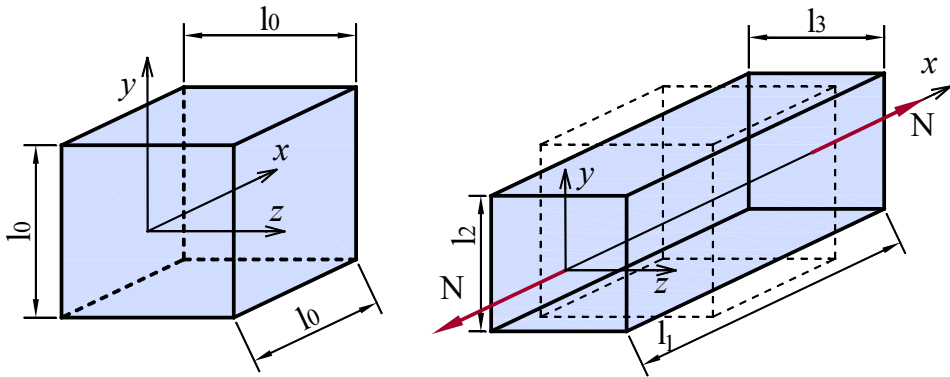


Fig. 1.7 Deformații liniare [12]

Pentru a caracteriza starea de deformare a unui element de volum, independent de dimensiunile sale inițiale, se calculează *deformațiile specifice liniare*:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{l_1 - l_0}{l_0} \\ \varepsilon_y &= \frac{l_2 - l_0}{l_0} \\ \varepsilon_z &= \frac{l_3 - l_0}{l_0}\end{aligned}\quad (1.14)$$

Deformațiile specifice liniare se pot exprima și procentual, utilizând relațiile:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{x\%} &= \frac{l_1 - l_0}{l_0} \cdot 100 \\ \varepsilon_{y\%} &= \frac{l_2 - l_0}{l_0} \cdot 100 \\ \varepsilon_{z\%} &= \frac{l_3 - l_0}{l_0} \cdot 100\end{aligned}\tag{1.15}$$

Deformațiile specifice unghiulare γ_{xy} , γ_{yz} , γ_{zx} [rad] caracterizează modificarea, sub acțiunea forțelor interioare a unghiurilor de 90° dintre muchiile elementului cubic de volum.

Starea spațială de deformație (sau starea generală de deformație) este caracterizată de tensorul deformațiilor specifice T_ε [10]:

$$T_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix}\tag{1.16}$$

1.5 PROPRIETĂȚI MECANICE ALE MATERIALELOR

Comportamentul mecanic al unui element de rezistență este definit de caracteristicile sale geometrice, de solicitările la care este supus și de proprietățile materialului din care este realizat.

Proprietățile mecanice ale materialelor sunt determinate prin încercări experimentale. Încercarea la tracțiune reprezintă cea mai folosită încercare experimentală, condițiile de testare, forma epruvetei și parametrii evaluați fiind definiți de standarde specifice diferitelor clase de materiale (metale, polimeri, elastomeri, materiale compozite etc.). Încercarea presupune aplicarea graduală a unei forțe axiale pe o epruvetă, până la rupere. Prin încercarea la tracțiune se determină curba caracteristică a materialului testat (figura 1.8), care indică variația tensiunii axiale în raport cu deformația specifică. Pornind de la această curbă se identifică principalele caracteristici mecanice folosite în procesul de proiectare:

- *limita de curgere* R_e [N/mm^2] reprezintă valoarea tensiunii axiale la care începe fenomenul de curgere a materialului (creșterea accentuată a deformațiilor la o forță care se menține relativ constantă). În apropierea punctului care definește limita de curgere se află punctul de trecere între domeniul deformațiilor elastice (deformații reversibile) și domeniul deformațiilor plastice (deformații ireversibile, remanente). În procesul de proiectare trebuie urmărit ca elementele de rezistență să nu ajungă în zona deformațiilor plastice. Anumite materiale nu prezintă o limită de curgere identificabilă pe curba caracteristică, în acest caz calculându-se o limită de curgere convențională;
- *rezistența mecanică*, notată cu R_m , reprezintă valoarea maximă a tensiunii de pe curba caracteristică.

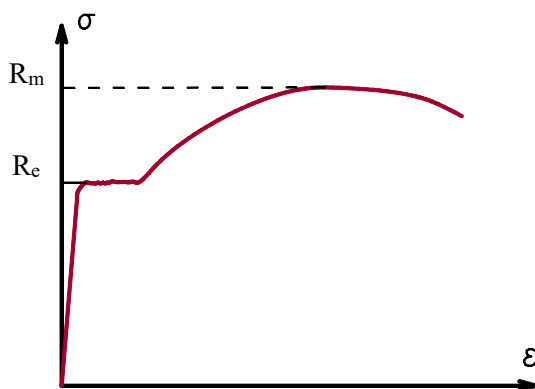


Fig. 1.8 Curba tensiune – deformație

După cum se observă în figura 1.8, prima parte a curbei caracteristice prezintă o variație liniară, ceea ce indică că în acest domeniu tensiunile sunt direct proporționale cu deformațiile:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad (1.17)$$

Factorul de proporționalitate, numit *modul de elasticitate* E [MPa] (modulul lui Young), reprezintă o caracteristică importantă de material, iar relația (1.17) definește *legea lui Hooke* pentru tensiuni axiale.

În mod similar se poate scrie legea lui Hooke pentru tensiuni tangențiale, în care intervine *modulul de elasticitate transversal* G [MPa].

$$\tau = G \cdot \gamma \quad (1.18)$$

Coeficientul de contracție transversală sau *coeficientul lui Poisson* ν [–] este caracteristica de material care definește proporționalitatea deformațiilor specifice liniare:

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu \cdot \varepsilon_x \quad (1.19)$$

Coeficientul de dilatare termică α , măsurat în $[1/^\circ\text{C}]$ sau în $[1/\text{K}]$, descrie variația relativă a dimensiunilor în funcție de variația de temperatură. Un element de rezistență cu lungimea inițială l_0 , supus unei variații de temperatură ΔT va suferi o deformație definită de relația:

$$\Delta l_T = \varepsilon_T \cdot l_0 = \alpha \cdot l_0 \cdot \Delta T \quad (1.20)$$

În calculele de rezistență se folosesc uzual valori admisibile ale tensiunilor, calculate în funcție de limita de curgere (pentru materialele cu comportament ductil) sau limita de rupere (pentru materialele cu comportament fragil), introducând *coeficienți de siguranță*:

$$\sigma_a = \frac{R_e}{c} \quad \sigma_a = \frac{R_m}{c_r} \quad (1.21)$$

Coeficienții de siguranță sunt aleși de proiectanți în funcție de tipul aplicației, natura și valoarea încărcărilor, tipul materialului și factorii externi care pot influența comportamentul elementului de rezistență.

1.6 IPOTEZE DE BAZĂ ÎN REZISTENȚA MATERIALELOR

În calcule analitice de rezistență se folosesc o serie de ipoteze care simplifică algoritmi de lucru, considerându-se că gradul de aproximare introdus de aceste ipoteze este suficient de mic pentru a nu influența siguranța sistemelor proiectate.

Principiul suprapunerii efectelor indică că deformațiile rezultate la un sistem supus la n forțe exterioare sunt egale cu suma vectorială a deformațiilor generate de acțiunea individuală a acestor forțe. Totodată, tensiunile și deformațiile totale nu depind de succesiunea de aplicare forțelor.

Prin *principiul lui Saint-Venant* se asumă că tensiunile și deformațiile generate de două sisteme de forțe echivalente aplicate diferit (exemplu: o forță concentrată F și o forță distribuită p , aplicate în aceeași secțiune – figura 1.9) vor fi identice la o distanță mare în raport cu zona de aplicare. Diferențele dintre valorile care apar în

zona de aplicare sunt evidențiate în special în simulările numerice, unde este necesară o redare cât mai fidelă a zonei reale pe care se aplică încărcările.

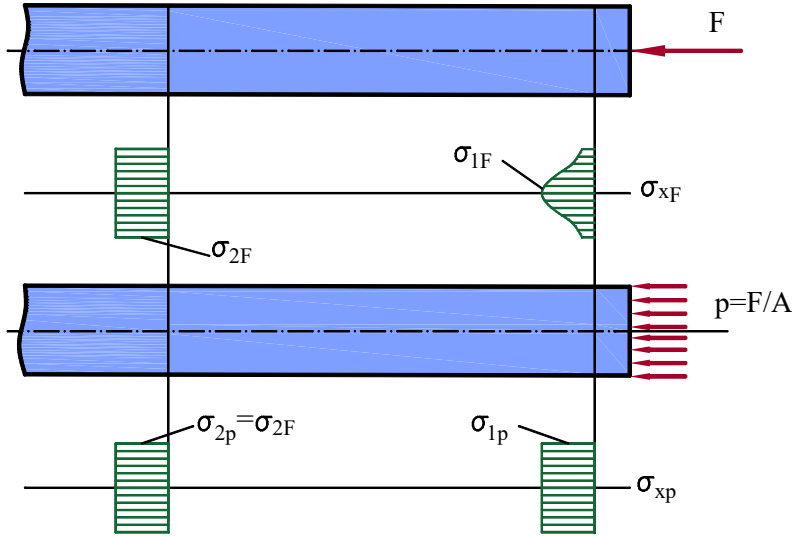


Fig. 1.9 Ilustrarea principiului lui Saint-Venant [12]

Volumul interior al unui element de rezistență se consideră omogen și continuu (*ipoteza mediului continuu*), neluându-se în calcul structura cristalină a materialului.

La materialele metalice și materialele polimerice se folosește *ipoteza izotropiei*, prin care se asumă că materialul are aceleași proprietăți elastice în raport cu orice direcție a unui sistem de referință oarecare. Materialele compozite și componentele realizate prin fabricație aditivă, folosite astăzi din ce în ce mai mult, prezintă caracter anizotrop, fiind necesară analiza lor prin încercări mecanice efectuate după mai multe orientări ale epruvetelor.

Deformațiile elastice survenite la un element de rezistență sunt considerate total reversibile și mult mai mici decât dimensiunile sale principale (*ipoteza deformațiilor mici*). Din acest motiv se consideră că poziția și orientarea unei forțe statice nu este influențată semnificativ de apariția deformației.

La solicitările de încovoiere și întindere, o secțiune plană perpendiculară pe axa barei înainte de deformare se menține plană și perpendiculară pe axa barei și după deformare (*ipoteza lui Bernoulli*).

1.7 EVALUAREA COMPORTAMENTULUI MECANIC PRIN ANALIZĂ CU ELEMENTE FINITE

Analiza comportamentului mecanic al elementelor de rezistență prin simulări numerice se bazează pe metoda elementului finit (abreviată MEF sau FEM – *finite element method*).

Metoda elementului finit este o metodă numerică, care presupune divizarea unui sistem complex în părți mai mici și mai simple, numite elemente finite. Aceste elemente sunt interconectate în noduri, formând o rețea care redă geometria structurii. Ecuațiile care descriu fenomenul analizat sunt exprimate la nivel de element finit, ulterior rezolvându-se sistemul de ecuații rezultat pentru toată structura analizată. Metoda este aplicată în probleme de rezistența materialelor, termotehnică, mecanica fluidelor, electrotehnică etc.

În domeniul rezistenței materialelor simulările numerice bazate pe metoda elementului finit permit rezolvarea unor probleme de calcul la solicitări statice, solicitări dinamice, flambaj, analiză a comportamentului mecanic la componente supuse la variații de temperatură, calcule la oboseală etc.

Pentru aplicațiile de calcul static, care constituie subiectul acestui volum, se pot defini câteva etape ale procesului de simulare, valabile indiferent de softul folosit:

- a) modelarea geometriei elementului de rezistență (în funcție de aplicație, poate fi necesară și modelarea sistemului din care această componentă face parte);
- b) exportul geometriei către un soft dedicat analizelor FEM sau accesarea unui modul dedicat acestor analize, din softul în care s-a realizat modelarea;
- c) stabilirea tipului de analiză (analiză statică, analiză dinamică, simularea comportamentului la oboseală, flambaj etc.) și definirea parametrilor de bază ai studiului;
- d) asocierea materialului și atribuirea proprietăților mecanice ale acestuia geometriei analizate;
- e) aplicarea constrângerilor corespunzătoare reazemelor;
- f) aplicarea încărcărilor, inclusiv forțe masice și variații de temperatură;
- g) discretizarea geometriei (împărțirea geometriei în elemente finite);
- h) rularea studiului;
- i) afișarea rezultatelor (valori limită, hărți de variație).

1.7.1 Modelarea geometriei

Pentru analizele FEM se utilizează geometrii 3D sau geometrii 2D. Acestea pot fi modelate direct în softuri CAD sau pot fi obținute prin determinări experimentale (scanare 3D, măsurare în coordonate, fotogrammetrie etc.).

Utilizarea modelelor 2D în simulările numerice scade timpul de lucru și crește precizia de calcul, dar poate fi aplicată la o gamă limitată de aplicații (în general plăci de grosime constantă). La un model 3D care are grosime constantă se poate aplica o simplificare 2D direct în etapa de definire a tipului de analiză.

Modelele 3D permit redarea cu acuratețe a detaliilor componentelor. În funcție de complexitatea lor, discretizarea acestor modele în elemente finite poate necesita echipamente de calcul cu putere mare de procesare și timpi mai mari de calcul. În anumite situații, proiectantul trebuie să decidă dacă anumite detalii constructive (ex: teșiri, alezaje de dimensiuni foarte mici, filete) vor fi incluse în simulare și dacă zonele acestor detalii necesită o discretizare superioară.

Un caz particular îl reprezintă analiza FEM a componentelor de tip bară/grindă, definite de secțiuni transversale constante (în SolidWorks 2024, opțiunea *Treat as Beam*, permite asimilarea geometriei cu o bară/grindă și analizează după un algoritm specific). În acest caz, viteza de procesare și precizia de calcul crește, dar nu pot fi luate în calcul detalii constructive. Spre exemplu, o tijă cu secțiune constantă și alezaje de prindere în zonele de capăt poate fi analizată sub formă de bară dacă nu se introduc în simulare aceste alezaje.

1.7.2 Importul geometriei în mediul de simulare

Simulările cu element finit pot fi realizate în softuri dedicate (ex. *ANSYS*, *Abaqus*, *COMSOL Multiphysics* etc.) sau în module dedicate din softuri de proiectare asistată cu caracter general (modulul *Simulation* din *SolidWorks*, modulul *Stress Analysis* din *Autodesk Inventor* etc.).

În situația în care se folosește un soft dedicat, pot fi importate fișiere cu extensii specifice diverselor softuri de modelare 3D (CATPart, sldprt, ipt etc.) sau fișiere cu extensii generale, recunoscute în majoritatea softurilor (iges, step, stp). În general, softurile dedicate pentru simulare numerică au o varietate mai mare de funcții și setări, fiind considerate o referință de specialiștii din domeniu.

Folosirea unui modul de simulare dintr-un soft cu caracter general are avantajul trecerii rapide între mediul de modelare și mediul de simulare (în ambele sensuri), proiectantul lucrând într-un “ecosistem” de inginerie asistată de calculator care include modelare, analiză FEM, optimizare, asamblare, generare documentație

de produs. În acest volum se vor prezenta aplicații dezvoltate în *SolidWorks Simulation*, modul al pachetului *SolidWorks* al companiei *Dassault Systemes*.

Pentru accesarea modului *SolidWorks Simulation* se va accesa meniul *Tools* din *SolidWorks*, opțiunea *Add-ins* și se va bifa opțiunea *SolidWorks Simulation* atât la *Active Add-ins* cât și la *StartUp* (lansare la pornirea softului). Ulterior se va afișa banda de instrumente *Simulation* prin click dreapta în zona benzilor de instrumente (deasupra spațiului de lucru) și accesarea opțiunii *Tabs*.

Banda de instrumente *Simulation* este prezentată în figura de mai jos. Instrumente de lucru sunt organizate în ordinea logică a folosirii lor în analiza FEM, pornind de la definirea unui nou studiu de simulare și terminând cu opțiunile specifice de generare a raportului analizei.

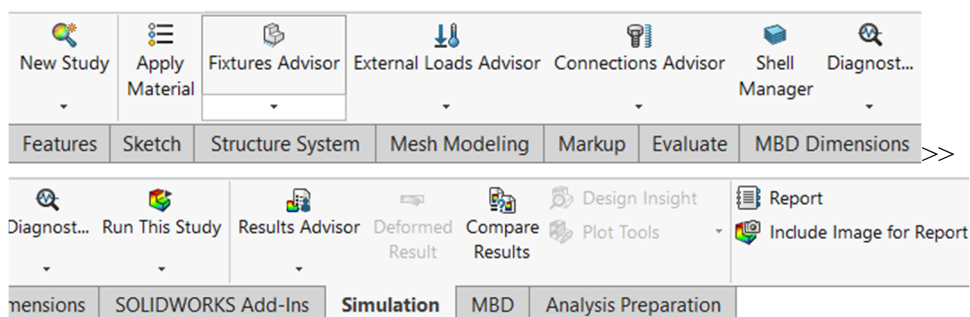


Fig. 1.10 Banda de instrumente *Simulation* din *SolidWorks*

1.7.3 Lansarea unui nou studiu de analiză

După modelarea geometriei 3D și accesarea modulului de simulare, proiectantul va defini tipul de analiză care urmează a fi efectuată. În *SolidWorks Simulation* sunt disponibile următoarele tipuri de studii:

- *Static* (analiza comportamentului la solicitări statice, pentru componente realizate din materiale cu comportament liniar în domeniul elastic);
- *Buckling* (analiza componentelor supuse la flambaj);
- *Fatigue* (analiza componentelor supuse la oboseală);
- *Drop Test* (analiza comportamentului la impact cu solul);
- *Pressure Vessel Design* (analiza recipientelor sub presiune);
- *Nonlinear* (analiza comportamentului mecanic pentru componente realizate din materiale cu comportament elastic neliniar);
- *Linear Dynamic* (analiza comportamentului la solicitări dinamice);

- *Frequency* (analiza frecvențelor proprii și a modurilor de deformare asociate acestor frecvențe);
- *Thermal* (analiza câmpurilor de temperatură și ale fluxurilor termice);
- *Topology study* (optimizare topologică – optimizarea formei piesei în funcție de constrângeri, încărcări și alte condiții impuse de proiectant);
- *Design study* (optimizarea unei geometrii în funcție de un obiectiv dat, prin varierea dimensiunilor).

Lansarea unui studiu presupune accesarea opțiunii *New Study* din banda *Simulation*, indicarea numelui studiului și a tipului de analiză. Se va deschide astfel o interfață specifică acestui studiu. Trecerea între interfața de modelare 3D și interfața de analiză se va face prin tab-urile *Model* și *Study* (denumire generică, nume dat de utilizator) din zona stânga-jos a ferestrei *SolidWorks*.

În mediul de lucru *Simulation* va fi disponibilă și o structură arborescentă a simulării, conținutul său depinzând de tipul analizei efectuate. În figura 1.11 se prezintă structura arborescentă specifică unei analize statice.

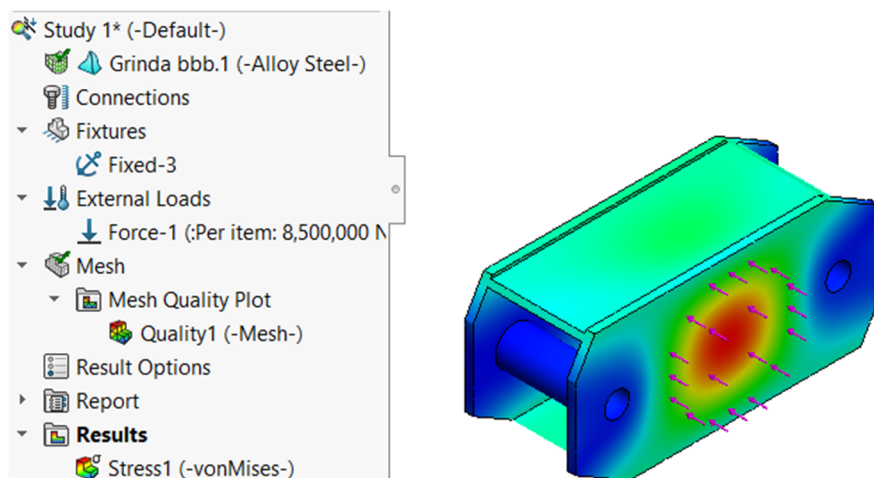


Fig. 1.11 Arborele operațiilor corespunzător unei analize statice

1.7.4 Asocierea proprietăților de material

Asocierea proprietăților de material componentei analizate se realizează prin opțiunea *Apply Material* din banda de instrumente *Simulation*. Alternativ, se poate selecta denumirea componentei în arborele operațiilor asociat studiului și prin click-dreapta se accesează *Apply/Edit Material*. În cazul unui ansamblu este necesară asocierea materialului pentru fiecare componentă.

Fereastra *Materials*, deschisă prin opțiunile de mai sus, permite selecția materialului din biblioteci predefinite, precum și definirea unor noi materiale/biblioteci de materiale. În *SolidWorks* se regăsesc două biblioteci predefinite: *SolidWorks Materials* și *SolidWorks DIN Materials*. Biblioteca *SolidWorks Materials* este organizată pe categorii generale de materiale (oțeluri, fonte, aliaje ale aluminiului, aliaje ale cuprului, materiale plastice, cauciucuri, lemn etc.). În aceste categorii se regăsesc materiale cu denumiri standardizate (spre exemplu oțelul inoxidabil AISI 304), dar și denumiri generale (*Alloy Steel*, *Plain Carbon Steel* etc.). A doua bibliotecă de materiale *SolidWorks DIN Materials* conține categorii mult mai clar structurate, în fiecare categorie regăsindu-se doar denumiri standardizate (indicate după normele EN prin număr și simbol, ex. oțelul carbon nealiat 1.0503 – C45). Biblioteca este organizată în următoarele categorii de materiale: aliaje ale aluminiului, aliaje ale cuprului, fonte, oțeluri aliate, oțeluri cu prelucrabilitate ridicată prin așchiere (*DIN Steel Free Cutting*), oțeluri pentru operare la temperaturi ridicate (*DIN Steel Hot Work Tool*), oțeluri de niturare (*DIN Steel Nitriding Alloy*), oțeluri inoxidabile, oțeluri pentru construcții metalice (structuri metalice), oțeluri pentru scule, oțeluri nealiat.

Materialele din bibliotecile *SolidWorks* au asociate principalele proprietăți fizice și mecanice (figura 1.12): densitatea, modulul de elasticitate longitudinal (*Elastic Modulus*), modulul de elasticitate transversal (*Shear Modulus*), coeficientul lui Poisson, rezistența mecanică la tracțiune (*Tensile Strenght*), limita de curgere (*Yield Strenght*), coeficientul de dilatare termică, conductivitatea termică, căldura specifică.

În funcție de tipul analizei, proprietățile sunt indicate cu culori distincte: roșu pentru proprietățile fără de care nu se poate rula studiul (modulul de elasticitate longitudinal, coeficientul lui Poisson, densitatea și limita de curgere pentru analizele la solicitări statice, materiale cu comportament elastic liniar și izotrop), albastru pentru proprietățile care pot fi folosite în analiză, dar nu sunt obligatorii (spre exemplu rezistența mecanică) și negru pentru proprietățile care nu sunt folosite în tipul curent de analiză. Diferențele dintre primele două categorii se exemplifică pentru limita de curgere și rezistența mecanică: în timpul rulării studiului limita de curgere este necesară pentru a stabili dacă deformațiile și tensiunile rămân în zona elastică a curbei caracteristice. Rezistența mecanică nu este necesară în timpul rulării, ea putând fi folosită ulterior pentru calculul coeficienților de siguranță în raport cu ruperea.

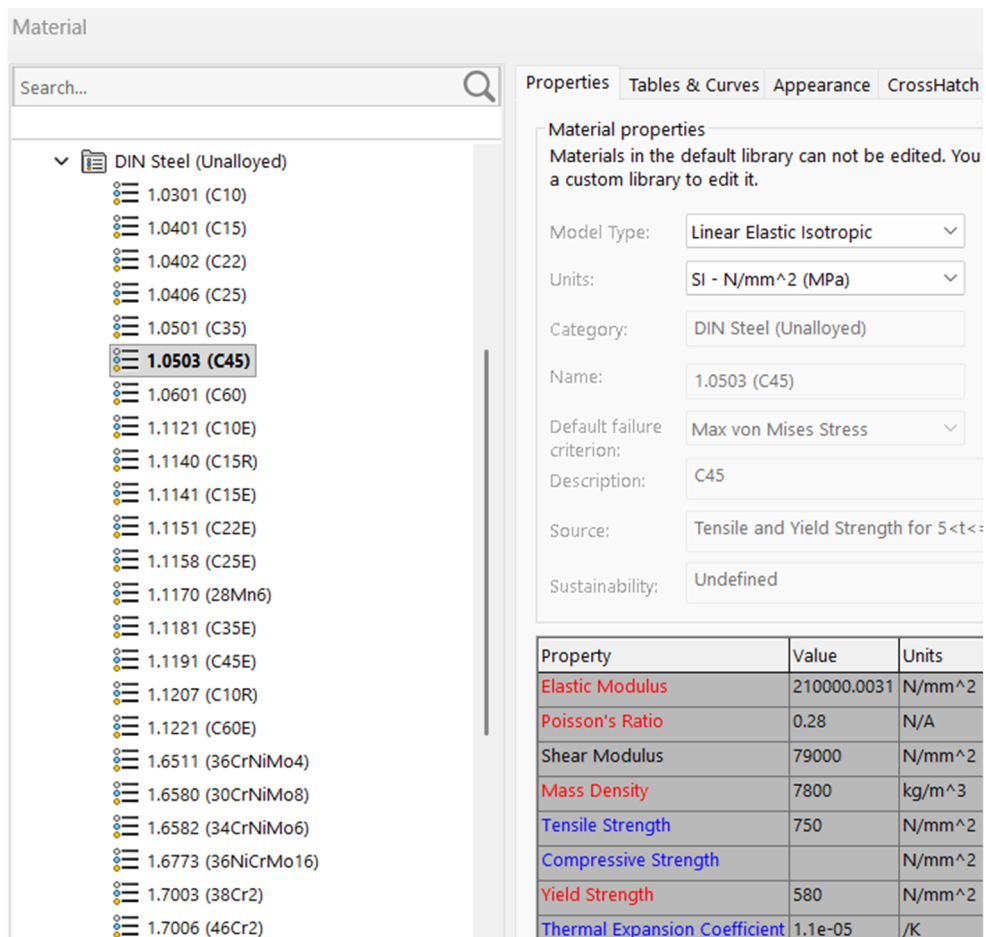


Fig. 1.12 Proprietăți de material

La definirea unui material proiectantul trebuie să cunoască proprietățile fizice și mecanice ale acestuia (cel puțin cele evidențiate cu roșu în figura 1.12), precum și comportamentul la rupere (rupere ductilă, rupere fragilă), în funcție de care se alege criteriul de rupere. În general se folosesc criteriul tensiunii tangențiale maxime și criteriul tensiunii maxime von Mises pentru materiale cu comportament ductil, respectiv criteriul Mohr-Coulomb și criteriul tensiunii axiale maxime pentru materialele cu comportament fragil. Un material nou definit poate fi salvat în baza de date locală a softului și folosit și în simulări realizate și pentru alte geometrii.

1.7.5 Aplicarea constrângerilor

Constrângerile aplicate în analizele FEM vor bloca gradele de libertate ale componentei, redând legăturile reale ale acesteia cu sistemul din care face parte. Fiecare grad de libertate blocat determină apariția unei forțe de reacțiune.

Modul de definire a constrângerilor în *SolidWorks* depinde de tipul geometriei analizate. Pentru geometriile de tip „înveliș” (*shell*) și bară/grindă (*beam*) constrângerile vor bloca maxim trei translații și trei rotații. Pentru geometriile de tip solid constrângerile vor bloca cele trei translații (un solid are șase grade de libertate, dar un punct al solidului rigid este legat de celelalte puncte care definesc volumul, neputându-se roti independent).

Constrângerile pot fi aplicate pe fețe ale geometriei, pe muchii, pe noduri (la bare/grinzi) sau pe puncte cheie (*vertex-uri*). Constrângerea unei translații în *SolidWorks Simulation* este evidențiată printr-o săgeată (implicit verde) dispusă pe aceea direcție și asociată elementului constrâns. Constrângerea unei rotații va fi evidențiată printr-o săgeată fără vârf, dar cu baza cilindrică (figura 1.13). În situația în care constrângerile se aplică pe o suprafață sau o muchie, atunci vor fi poziționate mai multe săgeți care marchează entitatea constrânsă.

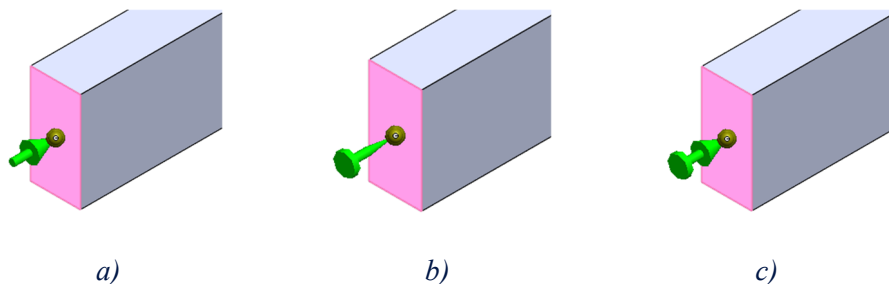


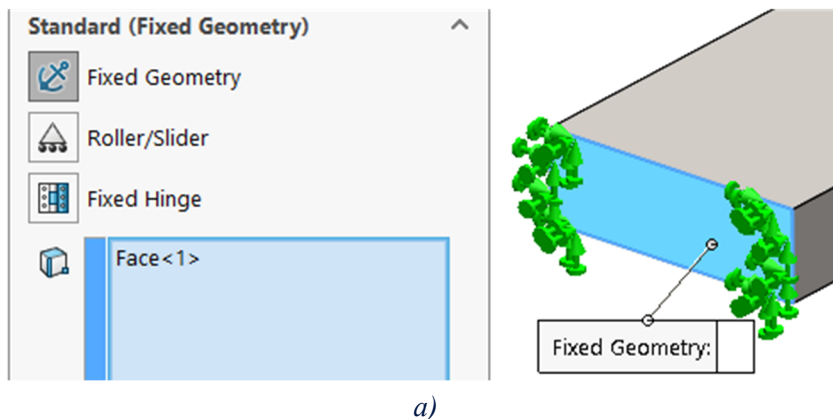
Fig. 1.13 Constrângerea mișcărilor în raport cu axa longitudinală: constrângerea translației (a), rotației (b), respectiv translației și rotației (c)

În situația aplicării unor constrângeri pe puncte cheie sau pe muchii, proiectantul trebuie să analizeze cu atenție dacă se reflectă legăturile reale ale piesei, apariția forțelor de reacțiune pe o suprafață foarte mică ducând la vârfuri de tensiune.

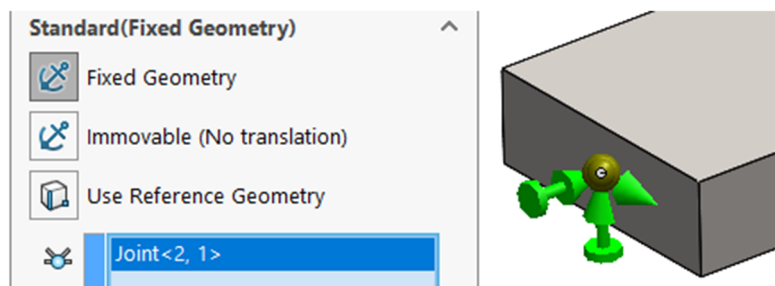
În *Solid Works*, pentru aplicarea constrângerilor se vor accesa comenzile din zona *Fixtures* din banda de instrumente *Simulation* sau din meniul contextual activat prin click-dreapta pe arborele operațiilor din simulare. În continuare se prezintă principalele tipuri de constrângeri care pot fi aplicate.

Fixed geometry (încastrare) blochează toate deplasările și rotirile entității constrânse (suprafață, muchie, nod sau punct cheie). Mai jos, se prezintă modul de

aplicare a acestei constrângeri pentru o față a unei geometrii de tip solid (figura 1.14a), respectiv pentru un nod al unei geometrii de tip grindă (figura 1.14 b).



a)



b)

Fig. 1.14 Aplicarea unei constrângeri de tip „Fixed geometry” pe o suprafață a unui solid (a) și pe un nod al unei grinzi (b)

Immovable, disponibilă doar pentru geometrii de tip *Beam* și *Shell*, blochează cele trei translații ale entității constrânse, lăsând libere rotațiile (exemplificare în figura 1.15 pentru un nod al unei grinzi).

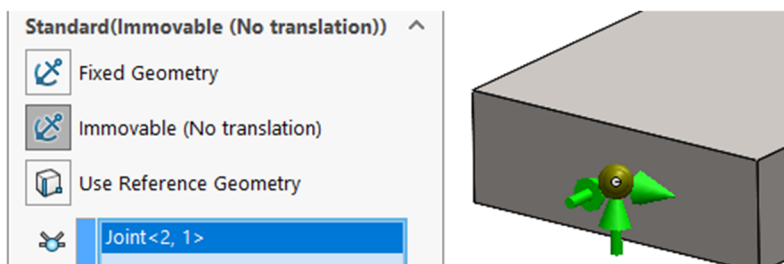


Fig. 1.15 Aplicarea unei constrângeri de tip „Immovable”

Roller/Slider (reazem mobil) constrânge deplasarea unei fețe plane, pe direcția perpendiculară ei (figura 1.16).

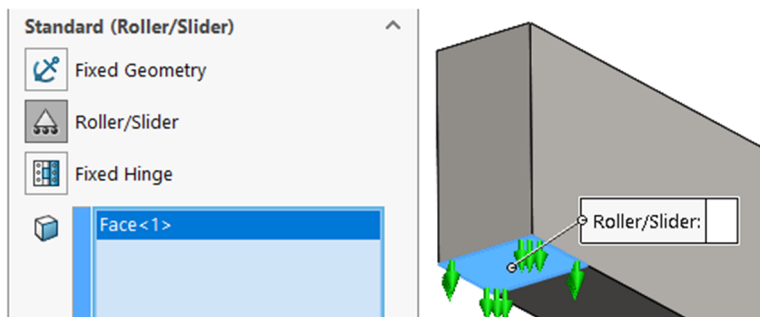


Fig. 1.16 Aplicarea unei constrângeri de tip „Roller/Slider”

Fixed Hinge (articulație fixă) constrânge deplasarea radială și axială a unei fețe cilindrice, permițând doar rotirea în jurul propriei axe (figura 1.17).



Fig. 1.17 Aplicarea unei constrângeri de tip „Fixed Hinge”

Elastic Support permite aplicarea unei conexiuni elastice între suprafața selectată și sol, indicând rigiditatea normală și tangențială (figura 1.18).

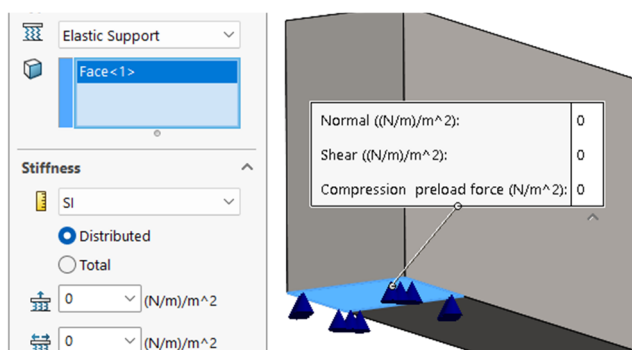


Fig. 1.18 Aplicarea unei constrângeri de tip „Elastic Support”

Use reference geometry (din submeniul *Advanced Fixtures*) permite definirea constrângerilor pentru fiecare grad de libertate. Se pot astfel limita mișcările de translație, respectiv de rotație (doar pentru geometrii de tip *Shell* și *Beam*), impunându-se deplasări/rotiri nule sau cu valoare dată. Constrângerea se poate aplica la entități de tip suprafață, muchie, punct cheie sau nod. Direcțiile constrânse sunt definite în funcție de un element de referință (suprafață, plan, muchie, axă) selectat de utilizator. În figura 1.19 se exemplifică constrângerea deplasărilor liniare pentru un nod de capăt al unei grinzi, direcțiile fiind definite în raport cu *Face<1>* (marcată cu magenta). Deplasarea după axa normală la suprafață este fixată la 5 mm, în timp ce deplasările după axele cuprinse în planul entității de referință sunt nule. Trebuie menționat că la deplasările nenule, contează sensul indicat de săgeată, schimbarea acestuia realizându-se prin opțiunea *Reverse direction*.

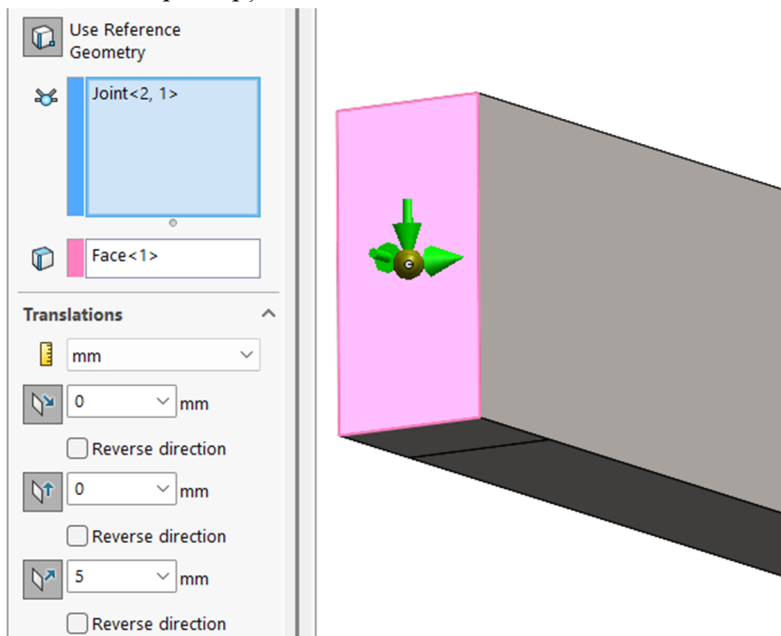


Fig. 1.19 Aplicarea unei constrângeri de tip „Reference geometry”

Constrângerile **On Flat Faces**, **On Cylindrical Faces**, **On Spherical Faces** (din sub meniul *Advanced Fixtures*) permit definirea direcțiilor constrânse pentru și în raport cu suprafețe plane, cilindrice sau sferice ale elementului de rezistență. Și în acest caz pot fi impuse deplasări/rotiri nule sau cu valoare dată. În figura 1.20 este impusă o constrângere de tip lagăr radial la un arbore, fiind blocate deplasările radiale și axiale ale suprafeței selectate și neconstrânsă rotația. Divizarea unei suprafețe se poate face în procesul de modelare, dar și direct la aplicarea

constrângerii, prin opțiunile din tab-ul *Split* al comenzilor de tip *Fixture* (opțiunea *Split* presupune desenarea unei schițe care conține linia/liniile de divizare și selecția suprafeței de divizat).

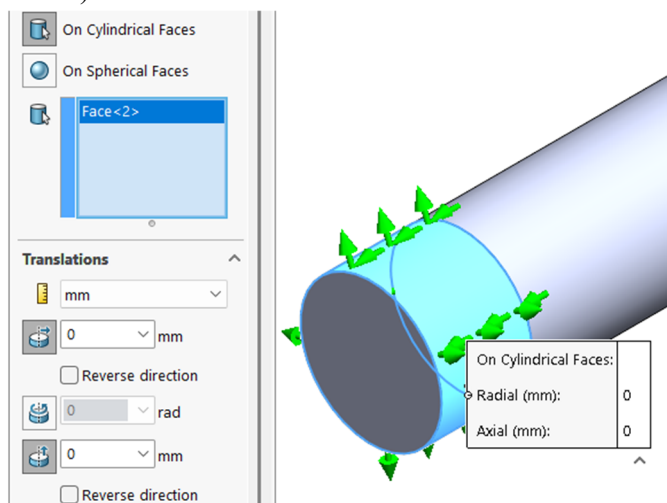


Fig. 1.20 Aplicarea unei constrângeri de tip „On Cylindrical Faces”

Constrângerile de tip **Symmetry** și **Cyclic Symmetry** permit realizarea analizei FEM pe un sector al unei componente care prezintă simetrie a geometriei, constrângerilor și încărcărilor. Avantajul este dat de creșterea preciziei de calcul și scurtarea timpului de rulare a simulării (prin analiza unei geometrii mai mici și mai simple). Sectorul analizat va fi delimitat de planuri de simetrie sau secțiuni/suprafețe care definesc simetria (inclusiv suprafețe circulare sau suprafețe definite de curbe *spline*). Proiectantul va izola (prin operații de decupare) acest sector și va crea axa de simetrie (pentru simetrie circulară).

Condiția de tip **Symmetry** poate fi aplicată în raport cu unul, două sau trei plane de simetrie (figura 1.21), în funcție de geometria și modul de sollicitare ale piesei.

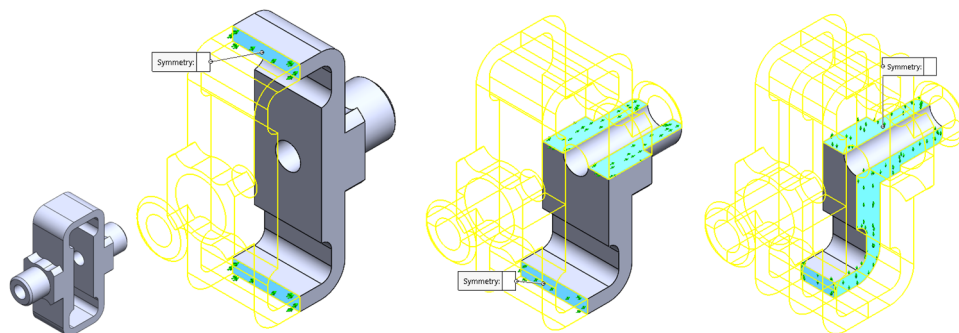


Fig. 1.21 Aplicarea simetriei după unul, două sau trei plane

În figura 1.22 se prezintă constrângerea unui sector reprezentând 1/6 dintr-o roată de mână, prin aplicarea a două condiții de tip *Cyclic Symmetry* (o condiție la secțiunile din butuc și o alta la secțiunile din inel).

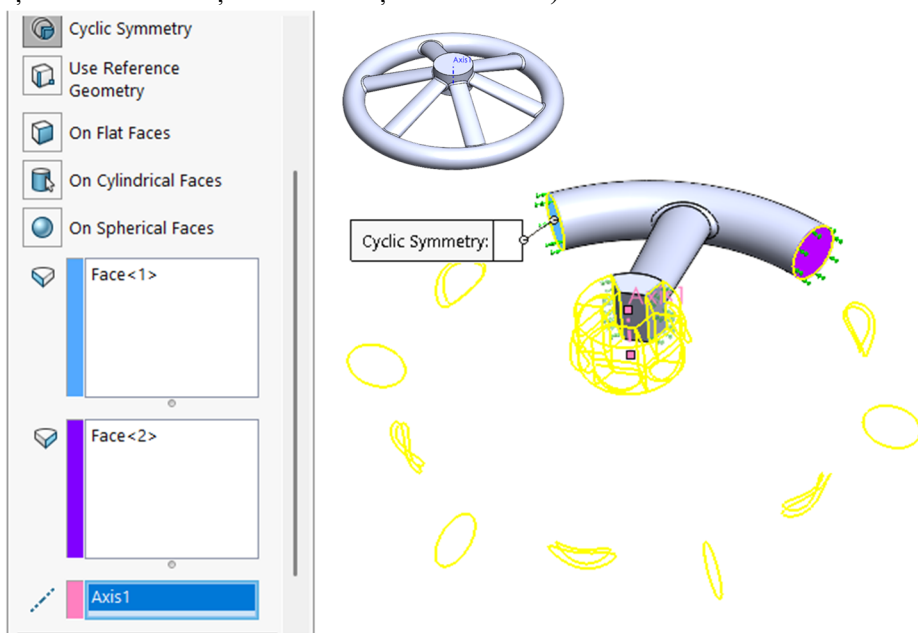


Fig. 1.22 Aplicarea unei constrângeri de tip „Cyclic Symmetry”

În analiza FEM a componentelor în contextual ansamblului (care va fi detaliată într-un alt volum) prezintă importanță interacțiunea dintre componente. Se prezintă în continuare câteva opțiuni uzuale:

- aplicarea unei opțiuni de solidarizare a componentelor (opțiunea *Bonded* din comanda *Component Interaction*). Opțiunea se poate aplica pentru componentele selectate sau pentru tot ansamblul (prin bifarea opțiunii *Global Interaction*);
- aplicarea unor condiții de contact, fără intersecție a volumelor componentelor (opțiunea **Contact** din *Component Interaction*). Proiectantul poate defini coeficientul de frecare pentru a caracteriza contactul cu alunecare;
- aplicarea unor condiții de contact cu un “zid” cu rigiditate infinită sau elastic (cu rigiditate dată). Opțiunea *Virtual Wall* este disponibilă în comanda *Local Interactions* (condiții locale de contact, aplicate doar la anumite entități), în care se regăsesc și alternativele *Contact*, *Bonded*

- (similare cu cele de mai sus) și *Shrink Fit* (asamblare cu strângere, prin fretare);
- utilizarea opțiunii de ansamblu liber (opțiunea **Free** din comanda *Component Interaction*), recomandată doar pentru componente disjuncte, la care încărcările nu pot genera contact sau intersecție de geometrie în timpul solicitării. Opțiunea scurtează timpul de rulare, dar folosirea ei inadecvată poate determina erori majore în raport cu sistemul real;
 - utilizarea unor conexiuni de tip arc (**spring**), știft (**pin**), bolt/șurub (**bolt**) sau rulment (**bearing**) fără a fi nevoie să fie modelate efectiv aceste componente. Aceste conexiuni înlocuiesc elementul real, preluând însă proprietățile elastice ale acestuia (rigiditate pe diferite direcții, modul de elasticitate, rezistență mecanică, coeficientul lui Poisson, coeficient de dilatare termică, forță de prestrângere – la șuruburi etc.).

1.7.6 Aplicarea încărcărilor

Instrumentele din zona *External Loads* a benzii de instrumente *Simulation* (accesibile și din meniul contextual *External Loads* din arborele operațiilor simulării) permit aplicarea încărcărilor, a forțelor inerțiale, a efectelor termice și presiunilor obținute din studii de curgere. Structura și opțiunile acestor comenzi depind de tipul geometriei analizate (*solid, beam, shell*), în continuare prezentându-se principalele opțiuni disponibile pentru solide și grinzi.

Forțele concentrate se aplică folosind opțiunea *Force*. La analiza solidelor, forțele concentrate pot fi aplicate pe o suprafață, pe o muchie sau într-un punct cheie al elementului de rezistență. Direcția forțelor poate fi determinată în funcție de entitatea pe care acționează sau în funcție de o entitate de referință (opțiunea *Face, Edge, Plane for Direction*). Aplicarea forțelor într-un punct sau pe o muchie a solidului va determina valori mari ale tensiunii în această zonă. În majoritatea situațiilor reale, forțele concentrate nu sunt aplicate pe o muchie sau într-un punct, ele acționând pe o suprafață cu arie mică în raport cu aria laterală a elementului de rezistență. În figura 1.23 se exemplifică aplicarea unei forțe concentrate pe o zonă de capăt a unui element de rezistență, indicându-se valorile celor două proiecții ale forței. Direcțiile proiecțiilor sunt definite în raport cu *Face<2>* (se observă corespondența culorilor între câmpurile de selecție și suprafețele selectate). În situația în care forța este aplicată simultan pe mai multe entități distincte, se va specifica dacă valoarea indicată este cea totală sau reprezintă valoarea pe entitate (opțiunile *Total* și *Per item*).

Aplicarea unei **forțe distribuite** la un solid se va face tot prin opțiunea *Force*, selecția suprafeței de distribuție și indicarea valorii echivalente în N, obținută prin înmulțirea intensității distribuției (N/m) cu lungimea pe care se aplică (m). Opțiunea *Nonuniform Distribution* permite definirea unor variații de forță exprimate prin ecuații scrise în coordonate carteziene, cilindrice sau sferice.

La analizele efectuate pe **geometrii de tip grindă**, o forță poate fi aplicată într-un punct cheie, într-un nod sau pe un tronson, în acest ultim caz putând fi definită și o forță distribuită uniform, prin indicarea intensității distribuției în N/m (prin activarea opțiunii *Per unit length*).

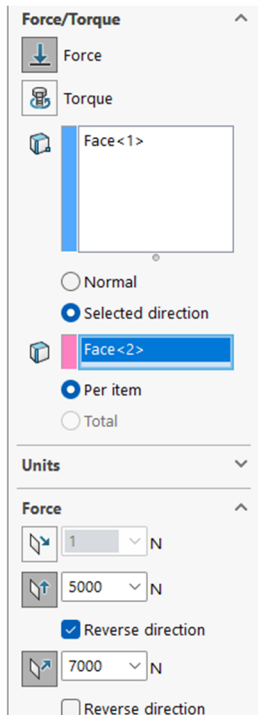


Fig. 1.23 Aplicarea unei forțe concentrate, prin proiecțiile sale

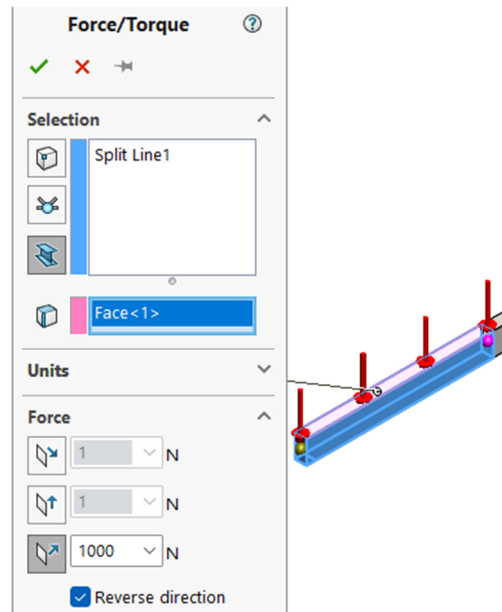


Fig. 1.24 Aplicarea unei forțe distribuite pe un tronson de grindă

Pentru a aplica o forță distribuită neuniform pe un tronson de grindă, se va activa opțiunea **Nonuniform Distribution** din comanda *Force* și se va selecta metoda și tipul distribuției:

- *Total Load Distribution* (indicarea valorii forței rezultante [N] echivalentă forței distribuite), aplicată pentru distribuție parabolică, eliptică sau de tip triunghi isoscel. Toate cele trei tipuri de distribuție vor fi aplicate simetric (figura 1.25);

- *Centered Load Distribution* (indicarea intensității maxime a distribuției, exprimată în N/m), aplicată pentru distribuție parabolică, eliptică sau de tip triunghi isoscel;
- *Table Driven Load Distribution*, prin care se poate defini o distribuție după valori punctuale ale intensității $[N/m]$, caracteristice anumitor secțiuni. Trecerea între aceste valori se face prin variație liniară.

Exemplificarea pe larg a modului de aplicare a forțelor distribuite neuniform la grinzi va fi prezentată în aplicațiile din capitolul 2 al acestui volum.

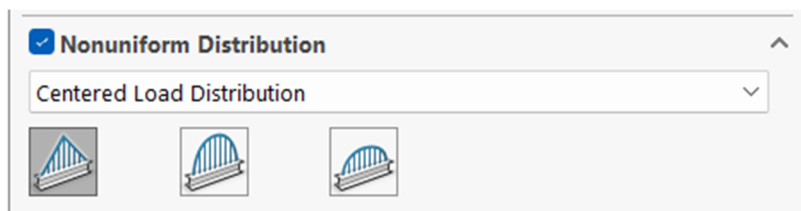


Fig. 1.25 Opțiuni pentru forțe distribuite triunghiular, parabolic sau eliptic

Momentele concentrate se aplică la solide folosind comanda *Torque*, fiind necesară selecția suprafeței pe care acționează momentul și a axei sau suprafeței cilindrice în jurul căreia acționează (figura 1.26). Sensul de rotație este controlat prin opțiunea *Reverse direction*, iar opțiunile *Per item* / *Total*, disponibile la încărcarea simultană a cel puțin două suprafețe distincte, definesc dacă valoarea momentului este exprimată per suprafață sau este valoarea totală.

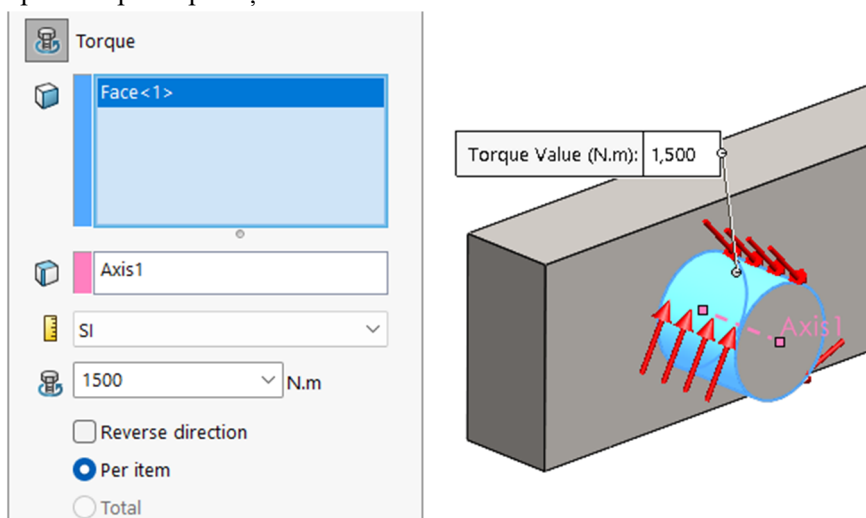


Fig. 1.26 Moment concentrat aplicat la o geometrie de tip solid

La **aplicarea momentelor la grinzi** sunt disponibile opțiuni similare celor de la aplicarea forțelor, inclusiv posibilități de definire a momentelor distribuite, a căror intensitate este exprimată în $[N \cdot m/m]$. Direcțiile după care se aplică momentele sunt definite în funcție de o suprafață, muchie sau plan de referință. Momentele vor acționa în jurul axelor/muchiilor de referință, iar sensul de rotație este dat de regula burghiului drept. În exemplul din figura 1.27 este aplicat un moment concentrat într-un nod al unei grinzi, sensul de rotație fiind cel orar.

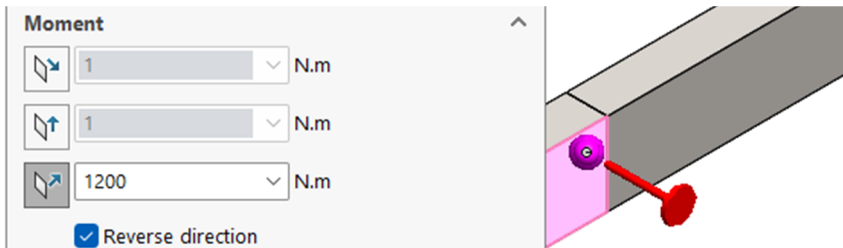


Fig. 1.27 Moment concentrat aplicat într-un nod al unei grinzi

Presiunea poate fi aplicată pe suprafețele unei geometrii de tip solid, folosind comanda *Pressure*. Comanda nu este disponibilă pentru geometrii de tip grindă. Figura 1.28 exemplifică aplicarea unei presiuni constante pe suprafețele interioare ale unui cilindru hidraulic (vizualizare în secțiune).

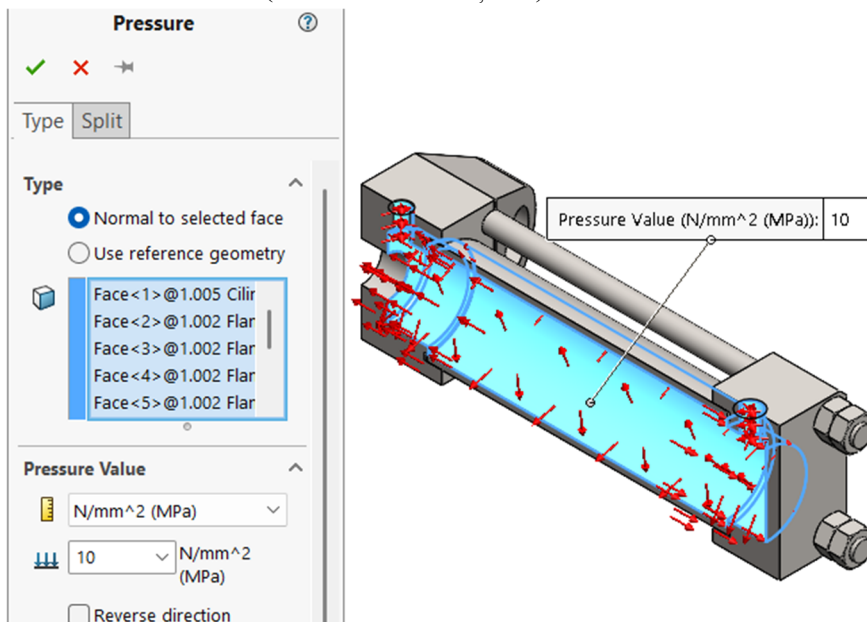


Fig. 1.28 Aplicarea unei presiuni constante pe suprafețele interioare ale unui cilindru hidraulic (vedere în secțiune)

Pentru aplicarea unei **presiuni distribuite după o anumită ecuație**, se va folosi opțiunea *Nonuniform distribution* din comanda *Pressure*. Această opțiune presupune alegerea unui sistem de coordonate și exprimarea funcției de variație a presiunii într-un sistem de referință cartezian, cilindric sau sferic.

În figura 1.29 se exemplifică aplicarea presiunii hidrostatice asupra unei porți de la o ecluză. Suprafața pe care acționează apa este delimitată printr-o comandă de tip *Split*, la limita superioară fiind poziționat un sistem de referință local XYZ, cu axa Y orientată pozitiv în jos. Acest sistem de referință (cartezian) este selectat în câmpul *Select a Coordinate System* din zona *Nonuniform Distribution* a comenzii *Pressure*. Funcția care definește variația presiunii este $F(x, y, z) = \rho \cdot g \cdot "y"$, unde densitatea apei este $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, iar accelerația gravitațională este $g = 9,81 \text{ m/s}^2$, rezultând $F(x, y, z) = 9810 \cdot "y"$. Valoarea presiunii într-un anumit punct de pe placă se obține din relația $p(x, y, z) = p \cdot F(x, y, z)$, unde p este valoarea nominală a presiunii definită în câmpul *Pressure Value*.

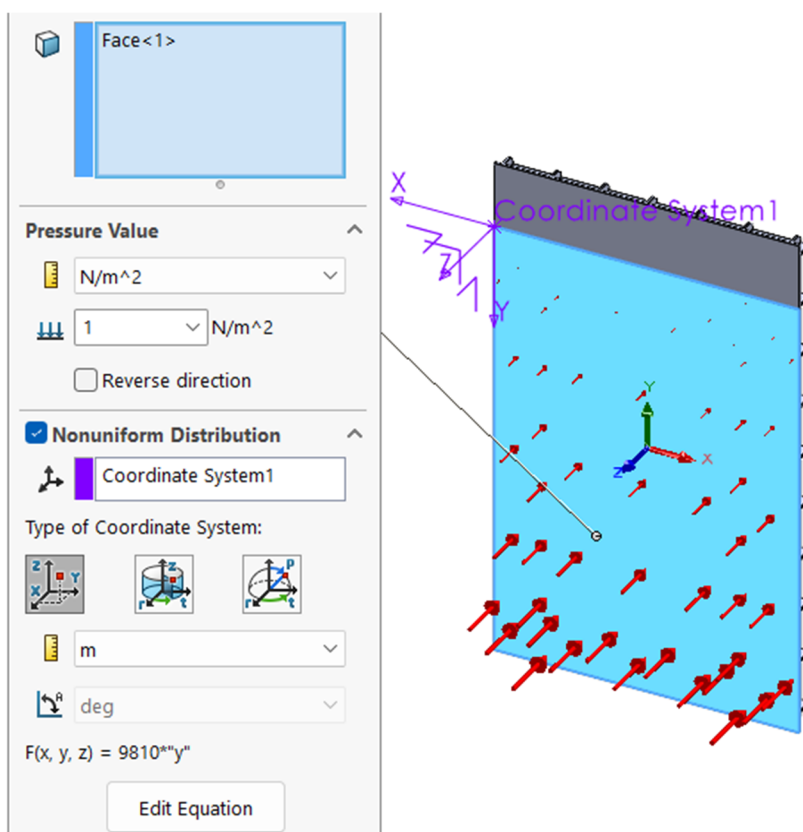


Fig. 1.29 Aplicarea presiunii hidrostatice pe poarta unei ecluze

La componentele cu masă mare, calculul de rezistență trebuie să ia în considerare și **greutatea proprie**. Comanda *Gravity* aplică greutatea proprie la componenta/sistemul analizat, indicându-se direcția (implicit perpendicular pe *Top Plane*), și accelerația gravitațională $g = 9,81 \text{ m/s}^2$. Greutatea proprie va fi evidențiată pe model printr-o săgeată cu vârf conic și cap sferic (figura 1.30).

Pentru aplicarea **forței centrifuge** se folosește comanda *Centrifugal Force*, fiind necesară definirea axei de rotație (prin selecția unei axe, a unei muchii sau a unei suprafețe cilindrice) și specificarea turației / vitezei unghiulare și a accelerației. Forța centrifuga va fi evidențiată pe model printr-o săgeată rotativă (figura 1.31).

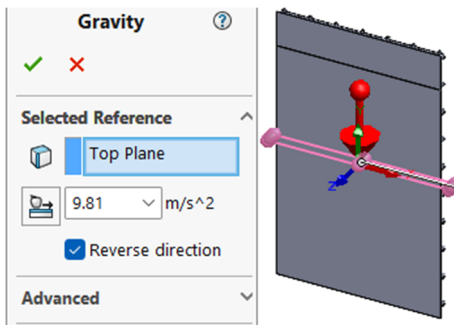


Fig. 1.30 Aplicarea greutății proprii

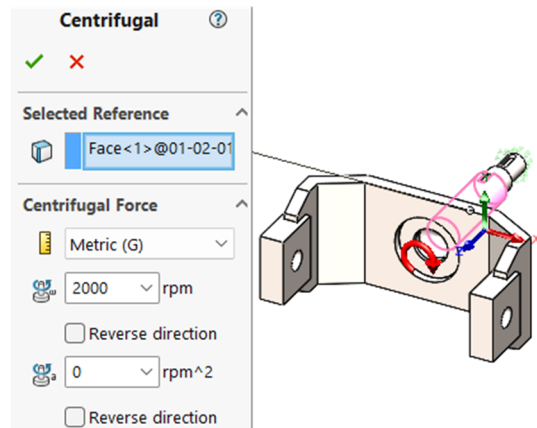


Fig. 1.31 Aplicarea forței centrifuge

Aplicarea **unei încărcări de tip lagăr** (comanda *Bearing Load*) presupune o distribuție neuniformă a reacțiunii rezultante (figura 1.29). Utilizatorul va delimita suprafața semicilindrică încărcată și va crea un sistem de referință local, cu axa Ox dispusă după direcția rezultantei forței și axa Oz coincidentă cu axa lagărului. Forța rezultantă va fi distribuită sinusoidal sau parabolic, având un maxim pe direcția rezultantei și valori nule la $\pm 90^\circ$ față de aceasta.

Comanda *Distributed Mass* permite **aplicarea unei mase distribuite uniform** (care înlocuiește componente neincluse în analiză) pe una sau mai multe suprafețe ale geometriei analizate. Această masă nu va acționa ca o presiune distribuită, fiind luată în calcul doar la calculul forțelor inerțiale: greutate proprie, forță de inerție (masa distribuită nu generează efecte dacă nu se aplică forțe inerțiale).

În situația în care se dorește aplicarea unei mase virtuale luând în calcul centrul său de masă, se va folosi comanda *Remote Load / Mass*. Componenta evidențiată cu portocaliu în figura 1.33 are centrul de greutate plasat asimetric în raport cu suprafețele ei de contact cu grinda suport. Aplicarea masei acestei componente

asupra celor două suprafețe suport, presupune definirea locației centrului de masă (coordonatele din zona *Location*, exprimate în funcție de sistemul de referință selectat) și specificarea valorii masei în câmpul *Remote Mass*.

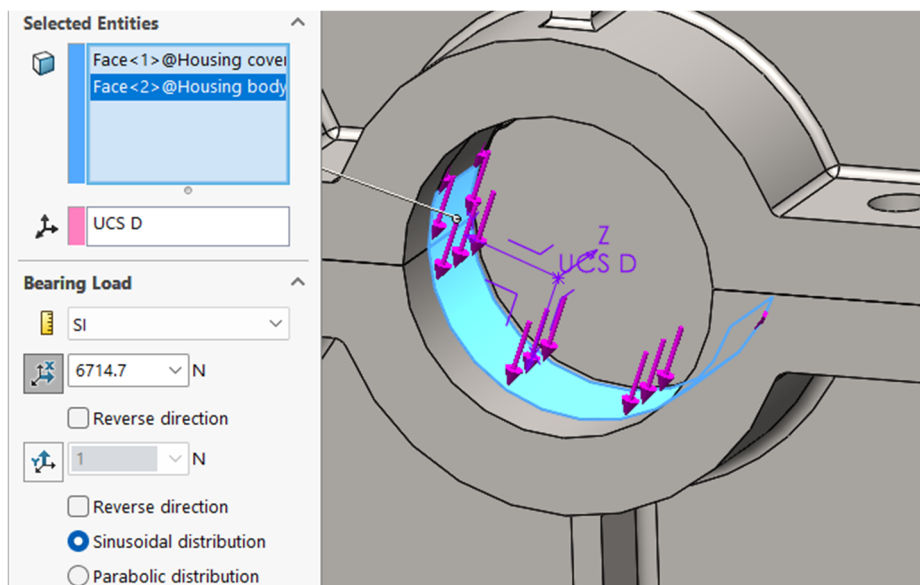


Fig. 1.32 Aplicarea încărcării din lagăr

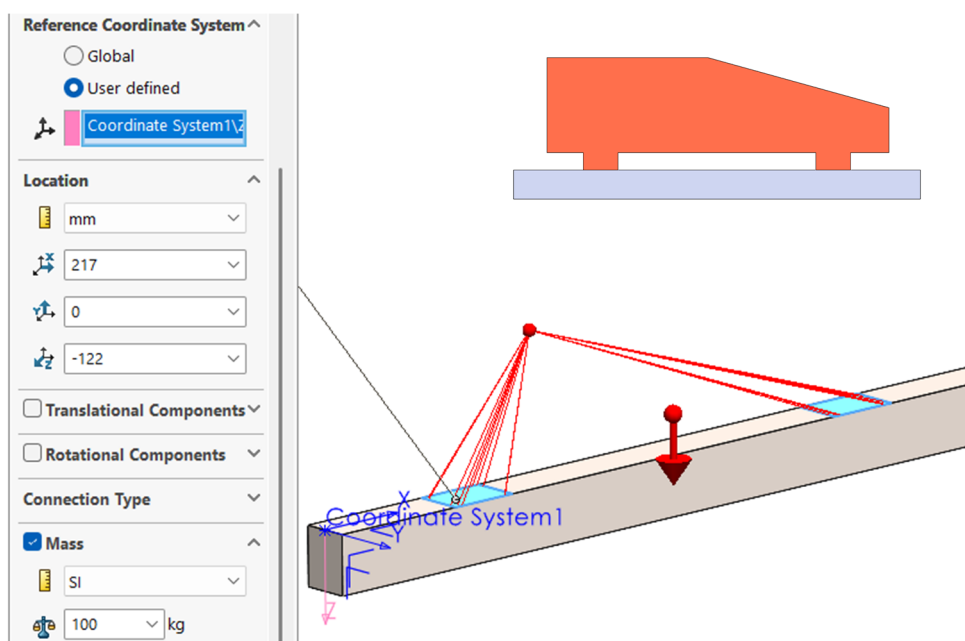


Fig. 1.33 Aplicarea unei mase la distanță

Comanda *Remote Load/Mass* permite și **aplicarea forțelor/momentelor la distanță**, într-un punct situat în exteriorul componentei analizate. În figura 1.34 se prezintă unui braț de pedală de la o bicicletă, la care forța de pe pedală este aplicată brațului prin opțiunea de forță la distanță. Proiectantul definește sistemul de referință aplicat, distanțele care caracterizează poziția forței de pe pedală și componentele acestei forțe (în acest caz doar componentă pe axa Oz).

Forțele aplicate la distanță vor genera în raport cu centrul suprafeței pe care acționează forțe echivalente și momente ale forțelor. Astfel, aplicarea forțelor la distanță reprezintă o opțiune foarte importantă atunci când anumite componente ale sistemului mecanic nu sunt redată în modelul CAD al ansamblului și în analiza FEM.

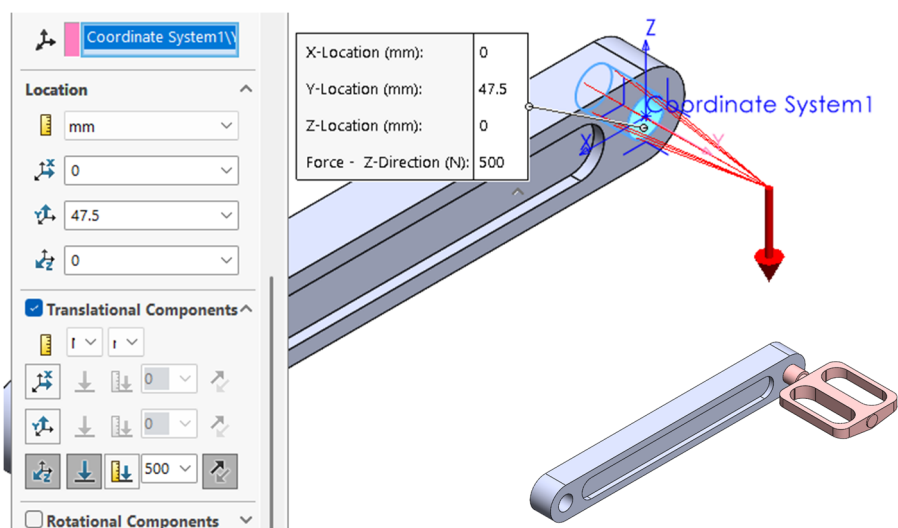


Fig. 1.34 Aplicarea unei forțe la distanță

Opțiunea *Rotational Components* a comenzii *Remote Load/Mass* permite aplicarea momentelor la distanță, în mod similar cu aplicarea forțelor.

Un exemplu foarte bun de utilizare a forțelor și maselor aplicate la distanță îl reprezintă rotoarele turbinelor. Analiza butucului rotorului unei turbine hidraulice, se poate face fără a include în analiză paletele rotorice, aplicând asupra butucului forțele hidrodinamice și forțele masice de pe palete, poziționate în centrul de presiune, respectiv centrul de masă.

În mod similar cu forțele și momentele aplicate la distanță, se pot defini (prin aceeași comandă *Remote Load/Mass*) **translații și rotații aplicate la distanță**. Punctul de aplicare al acestor translații/rotații va fi conectat rigid de toate punctele suprafeței suport, iar deplasarea/rotirea punctului de aplicare va determina deplasări/rotiri (și tensiunile aferente) la componenta analizată.

Analiza deformațiilor termice sau a dilatărilor termice împiedicate se realizează prin impunerea unei temperaturi de montaj (*Reference temperature at zero strain*) în proprietățile studiului static (meniul contextual accesat prin click-dreapta pe numele studiului în arborele simulării) și a unei temperaturi de calcul prin comanda *Temperature* din zona *Loads*. Utilizatorul poate alege suprafețele pe care se aplică această temperatură sau poate alege aplicarea pe toate suprafețele expuse.

1.7.7 Discretizarea modelului și rularea studiului

Discretizarea reprezintă procesul de împărțire a modelului analizat în elemente finite, cu geometrie mai simplă. Prin acest proces se trece de la un model continuu (un set infinit de puncte), la un model discret cu un număr finit de puncte (noduri) și elemente finite, conectate într-o rețea (*mesh*). Comanda prin care se realizează discretizarea în *SolidWorks Simulation* este *Create Mesh* (accesată din banda de instrumente *Simulation* sau din meniul contextual activat prin click dreapta pe intrarea *Mesh* din arborele simulării).

La discretizarea solidelor, proiectantul poate seta valori pentru o serie de parametri care definesc calitatea rețelei de elemente finite:

- reglajul liniar *Mesh density* permite setarea densității elementelor finite între limitele *Coarse* (grosier) și *Fine* (fin);
- opțiunile *Maximum element size* (dimensiunea maximă a unui element), *Minimum element size* (dimensiunea minimă a unui element), *Min number of elements in a circle* (numărul minim de elemente într-un cerc) și *Element size growth ratio* (fracția de variație a dimensiunii elementelor învecinate) permit introducerea de valori numerice pentru controlul calității rețelei de elemente finite;
- numărul de puncte Jacobiene.

Tipul rețelei de elemente finite aplicate la un solid poate fi ales dintre următoarele opțiuni:

- *Standard mesh*, situație în care se utilizează algoritmi Voronoi-Delaunay pentru generarea rețelei de elemente finite;
- *Curvature-based mesh*, prin care se dispun mai multe elemente în zonele caracterizate de curburi;
- *Blended curvature-based mesh*, opțiune prin care se adaptează automat dimensiunea elementului la curbura locală a geometriei pentru a crea un model de rețea uniform. Acest tip de discretizare este folosit pentru majoritatea exemplurilor de analiză a solidelor, prezentate în acest volum.

Comanda *Apply Mesh Control* (accesată din meniul contextual activat prin click dreapta pe intrarea *Mesh* din arborele simulării) permite aplicarea unor discretizări locale, de calitate superioară. Proiectantul poate decide că anumite zone critice (secțiuni periculoase, raze de racordare, filete, periferia unor alezaje) necesită discretizare superioară, ceea ce conduce la creșterea preciziei de calcul în acea zonă. În exemplul din figura 1.35 se prezintă aspectul rețelei de elemente finite pentru o furcă, fără discretizare locală, respectiv cu discretizare locală aplicată în zona de trecere dintre ax și corpul furcii.

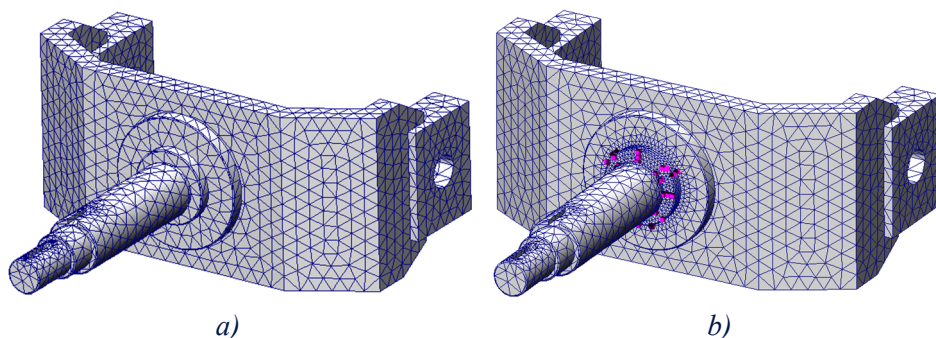


Fig. 1.35 Rețea de elemente finite fără (a) și cu (b) discretizare locală

Teoretic, o discretizare mai fină conduce la o precizie mai ridicată a rezultatelor, dar și la o creștere a timpului de rulare a studiului. Proiectantul poate realiza studii de convergență a rezultatelor, analizând variația parametrilor de ieșire (tensiuni, deplasări) în funcție de parametrii de definire a rețelei de elemente finite.

La geometriile de tip grindă discretizarea se realizează prin divizarea în “felii” – elemente finite liniare dispuse pe lungimea grinzii. Timpul de rulare este în acest caz foarte scurt. Utilizatorul poate controla doar numărul de elemente și dimensiunea elementului (prin opțiunea *Apply Mesh Control*, accesată din meniul contextual activat prin click dreapta pe intrarea *Mesh* din arborele simulării).

Rularea analizei se lansează prin comanda *Run this Study* din fereastra *Simulation*. Pe ecran va apărea o bandă procentuală care indică gradul de finalizare al analizei. Durata rulării studiului depinde de complexitatea sistemului analizat, de parametrii discretizării și de puterea de calcul disponibilă. Trebuie reținut că detaliile geometrice de mici dimensiuni (în raport cu dimensiunile de gabarit ale componentelor), pentru care s-au aplicat discretizări locale, cresc timpul de rulare. Stagnarea rulării la un anumit procent nu înseamnă implicit eșecul analizei. Autorul acestui volum are experiența unor analize la care rularea a durat mai multe ore. Dacă

anterior nu s-a realizat discretizarea, procesul de rulare va parcurge implicit și acest pas (cu parametrii implicați de discretizare).

Pentru scurtarea timpului de rulare se poate regândi structura analizei, eliminând din sistem componentele pentru care nu se dorește determinarea stării de tensiuni și deformații. Aceste componente pot fi înlocuite cu forțe de reacțiune sau încărcări și mase aplicate la distanță.

1.7.8 Vizualizarea rezultatelor

După rularea unui studiu, în arborele simulării vor fi disponibile rezultatele analizei. Aceste rezultate sunt afișate sub forma unor hărți de culori și a grilei care definește corespondența culorilor cu valorile parametrului analizat. Implicit vor fi afișate distribuțiile tensiunilor echivalente von Mises, distribuția deplasărilor rezultante și distribuția deformațiilor specifice echivalente. Din meniul contextual (click dreapta pe intrarea *Results* din arborele operațiilor) se pot accesa opțiunile de generare pentru alți parametri de rezultat (tensiuni, deplasări, deformații specifice, factori de siguranță, reacțiuni, diagrame de variație a forțelor interioare etc.).

La analiza geometriilor de tip solid, opțiunea *Define Stress Plot* permite afișarea următoarelor **distribuții de tensiuni**:

- tensiunile axiale ($SX = \sigma_x$; $SY = \sigma_y$; $SZ = \sigma_z$), raportare la sistemul de referință al geometriei analizate;
- tensiunile tangențiale ($TXY = \tau_x$; $TXZ = \tau_y$; $TYZ = \tau_z$);
- tensiunile principale ($P1 = \sigma_1$; $P2 = \sigma_2$; $P3 = \sigma_3$), calculate ca soluții ale ecuației (1.4);
- tensiunea echivalentă von Mises (teoria a V-a de rezistență), calculată în funcție de tensiunile axiale și tensiunile tangențiale (ecuația 1.22) sau în funcție de tensiunile principale (ecuația 1.23):

$$\sigma_{vM} = \sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2}{2} + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} \quad (1.22)$$

$$\sigma_{vM} = \sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2}{2}} \quad (1.23)$$

- tensiunea echivalentă după teoria a III-a de rezistență – criteriul Tresca (*Stress intensity INT*), definită de diferența dintre tensiunea principală maximă și tensiunea principală minimă:

$$INT = \sigma_1 - \sigma_3 \quad (1.24)$$

- presiunea de contact, aplicabilă la analiza ansamblurilor.
- invariantul I_1 (suma tensiunilor principale, *Triaxial stress - TRI*):

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \quad (1.25)$$

Tensiunea von Mises reprezintă o tensiune echivalentă folosită la solicitări compuse de categoria a II-a (solicitări compuse la care apar atât tensiuni axiale, cât și tensiuni tangențiale, ex: torsiune cu încovoiere, torsiune cu solicitări axiale), pentru materiale tenace. Folosirea acestui parametru la solicitări simple sau la solicitări compuse de categoria I poate conduce la interpretări greșite. Spre exemplu, la solicitarea simplă de torsiune a barelor drepte apare doar tensiune tangențială τ , care poate fi descompusă după axele secțiunii transversale, în componentele τ_{xy} și τ_{xz} , respectându-se relația $\tau = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2}$. Toate celelalte componente de tensiune sunt nule la torsiune. Dacă se calculează tensiunea echivalentă von Mises în acest caz, se obține $\sigma_{vM} = \sqrt{3(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2)} = \tau \cdot \sqrt{3}$, adică o valoare cu aproximativ 73% mai mare decât tensiunea tangențială. Totodată, se observă din ecuația (1.22) că tensiunea echivalentă von Mises are mereu valori pozitive. La solicitarea simplă de întindere/compresiune, unde apar doar tensiuni axiale σ_x , tensiunea echivalentă von Mises coincide în valori absolute cu tensiunea axială, dar nu redă tendința de întindere sau compresiune. Recomandarea autorului este ca la solicitările simple și la solicitările compuse de categoria I să fie folosite componentele de tensiuni axiale/tangențiale corespunzătoare solicitării și eventual tensiunile principale.

Pentru fiecare distribuție de tensiuni utilizatorul poate seta parametrii de afișare, în tab-urile *Definition* și *Chart Options* ale ferestrei *Stress plot* (figura 1.36):

- parametrul afișat (din lista detaliată mai sus);
- unitatea de măsură;
- modul de afișare a valorilor: valori pe noduri/valori pe elemente finite;
- factorul de deformare (pentru vizualizarea tendințelor de deformare se folosesc factori de scalare a deformațiilor mai mari decât 1);
- afișarea valorilor minime/maxime (minimele și maximele sunt considerate în valoare reală, ținând cont de semnul +/-);

- limitele care definesc grila de culori (implicit de la minim la maxim, albastru corespunzând valorii minime și roșu valorii maxime);
- formatul sub care sunt indicate valorile: științific (*scientific*, ex. $9.9e + 01 = 9,9 \cdot 10^1$), zecimal (*floating*, ex. 98.9) sau *general* (afișare în format științific / zecimal, în funcție de domeniul de valori);
- numărul de zecimale.

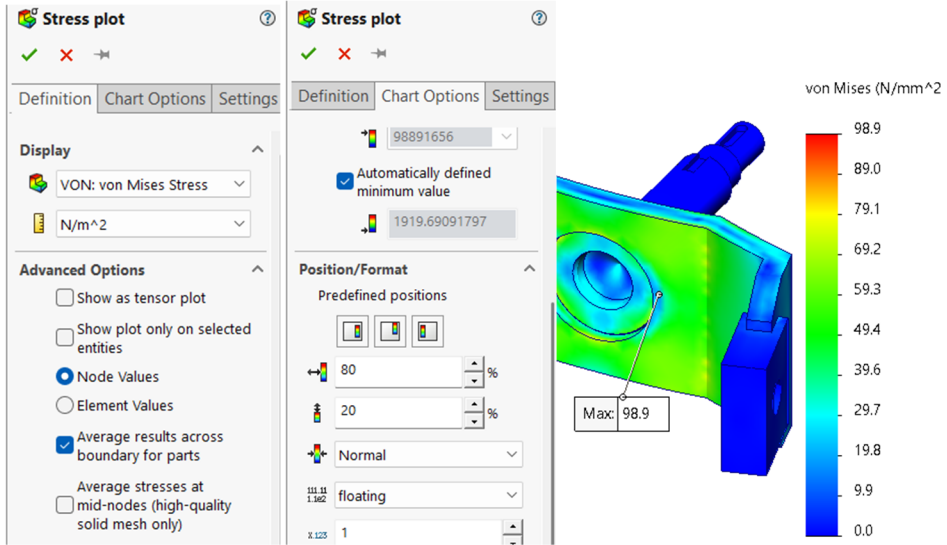


Fig. 1.36 Definirea parametrilor de afișare pentru tensiuni

Opțiunea *Define Displacement Plot* permite afișarea **distribuțiilor deplasărilor**: UX , UY , UZ ($\delta_x, \delta_y, \delta_z$, deplasările după axele Ox , Oy și Oz ale sistemului de referință) și $URES$ (δ_r , deplasarea rezultantă), definită de ecuația:

$$\delta_r = \sqrt{\delta_x^2 + \delta_y^2 + \delta_z^2} \quad (1.26)$$

Opțiunea *Define Strain Plot* permite afișarea **distribuțiilor deformațiilor** specifice: $EPSX$, $EPSY$, $EPSZ$ ($\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ – deformații specifice liniare), $GMXY$, $GMXZ$, $GMYZ$ ($\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ – deformații specifice unghiulare), deformațiile specifice principale ($E1$, $E2$, $E3$), deformația specifică echivalentă $ESTRN$ (ϵ_{eq} – deformația specifică echivalentă von Mises) definită de ecuația:

$$\epsilon_{eq} = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{\frac{3 \cdot (\epsilon_x^2 + \epsilon_y^2 + \epsilon_z^2)}{2} + \frac{3 \cdot (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)}{4}} \quad (1.27)$$

unde:

$$e_x = \frac{2\varepsilon_x - \varepsilon_y - \varepsilon_z}{3} \quad e_y = \frac{2\varepsilon_y - \varepsilon_x - \varepsilon_z}{3} \quad e_z = \frac{2\varepsilon_z - \varepsilon_x - \varepsilon_y}{3} \quad (1.28)$$

La afișarea deplasărilor și deformațiilor sunt disponibile opțiuni de afișare similare cu cele prezentate anterior pentru tensiuni.

La **calculul coeficienților de siguranță** (opțiunea *Define Factor of Safety Plot*) utilizatorul va alege criteriul de rupere (*von Mises* sau *Max. Shear Stress-Tresca* pentru materiale ductile, respectiv *Mohr-Coulomb* sau *Max. Normal Stress* pentru materiale cu rupere fragilă) și parametrul mecanic în raport cu care se calculează acești coeficienți (limita de curgere, rezistența mecanică).

Pentru **vizualizarea detaliată a rezultatelor**, în *Solid Works Simulation* sunt disponibile funcții suplimentare, grupate în zona *Plot Tools*.

Comanda *Section Clipping* permite afișarea distribuției tensiunilor/deplasărilor/deformațiilor specifice în raport cu o secțiune definită de utilizator. Secțiunea poate fi plană (figura 1.37), cilindrică sau sferică. Comanda permite și utilizarea a mai multe secțiuni simultan (prin activarea opțiunilor succesive *Section 2*, *Section 3* etc.). Poate fi afișată distribuția doar pentru secțiunea/secțiunile selectate (prin activarea opțiunii *Plot on section only*) sau pentru volumul din piesă delimitat de respectivele secțiuni.

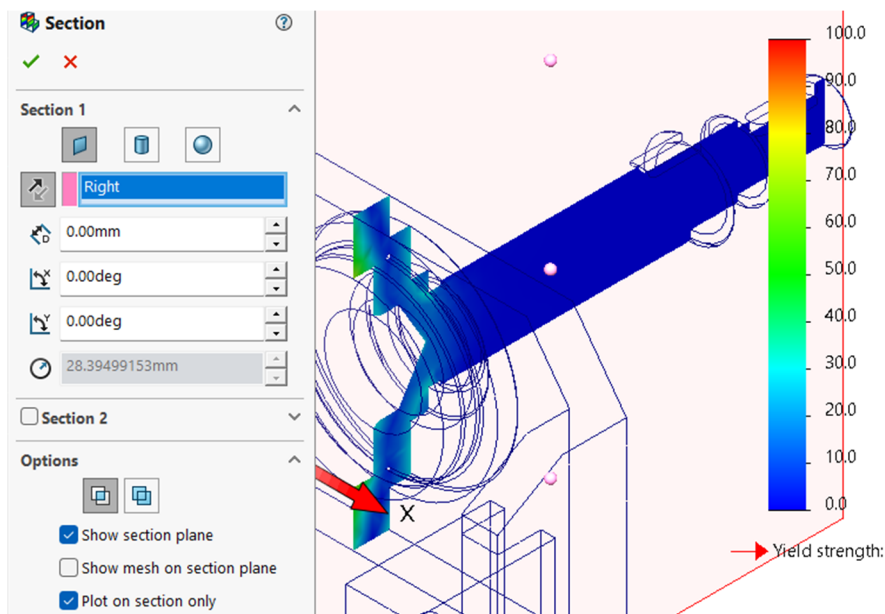


Fig. 1.37 Vizualizarea distribuției tensiunilor într-o secțiune

Utilizatorul poate vizualiza zonele pentru care parametrul analizat depășește o valoare dată (sau este într-un interval dat), folosind *Iso Clipping* (figura 1.38).

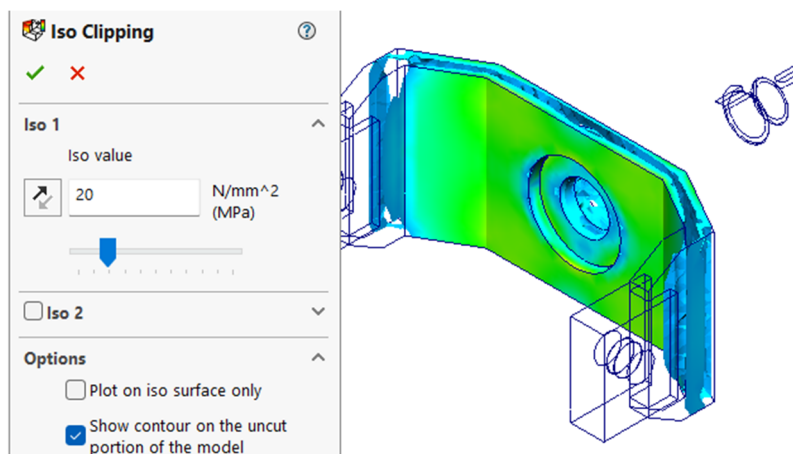


Fig. 1.38 Vizualizarea zonelor cu tensiuni mai mari decât o valoare dată

Afișarea rezultatelor dintr-un anumit punct/nod sau de pe o anumită entitate se realizează prin comanda *Probe*. Valorile de pe o anumită entitate vor fi afișate sub formă tabelară (nod, valoare, coordonate), selecția unor linii din tabel ducând la evidențierea acestora pe harta de culori (figura 1.39).

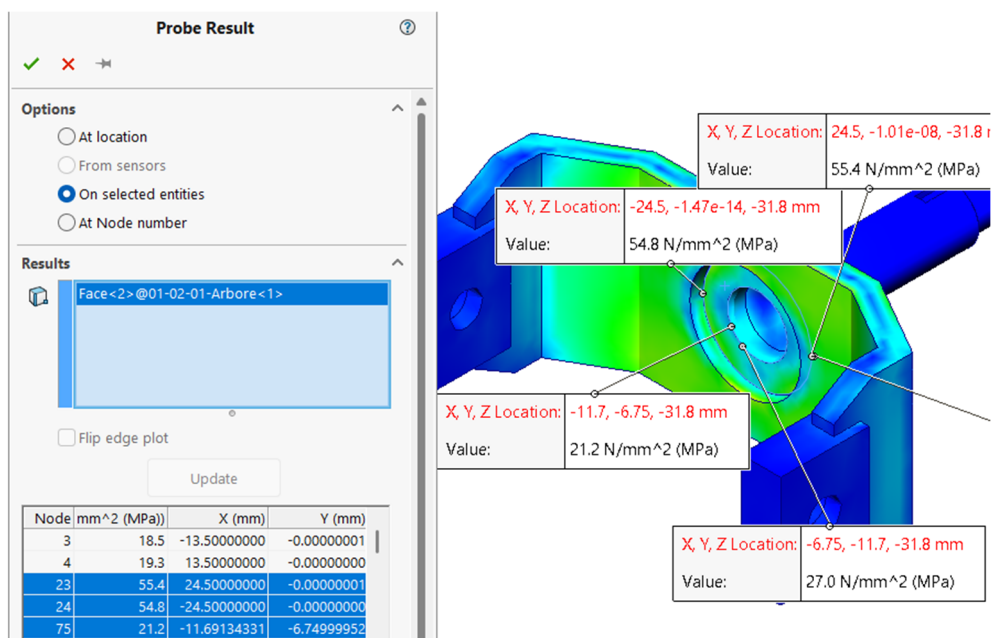


Fig. 1.39 Afișarea valorilor pentru noduri specifice unei entități

Folosind comanda *Mesh Sectioning* se poate realiza o reprezentare într-o secțiune definită la limitele elementelor finite.

Comanda *Animate* din zona *Plot Tools* generează o animație a comportamentului sistemului în timpul solicitării. Pentru o vizualizare clară a tendinței de deformare, se va activa în prealabil opțiunea *Deformed result* (afișarea deformațiilor la scară mărită), din banda de instrumente *Simulation*. Această animație poate fi salvată sub forma unui fișier AVI.

Pentru generarea raportului unei simulări într-un document MS Word se va utiliza comanda *Report*. Utilizatorul va selecta informațiile introduse în raport, la rezultate fiind incluse distribuțiile create anterior în zona *Results*. Imaginile corespunzătoare fiecărei etape a analizei vor fi generate direct și incluse în raport.

La analiza geometriilor de tip grindă sunt disponibile opțiuni diferite de rezultat (în raport cu geometriile de tip solid). Trebuie reținut că geometriile de tip grindă sunt caracterizate de secțiune transversală constantă, iar pentru o secțiune este obținută doar valoarea maximă a parametrului analizat (exemplificare în figura 1.40 pentru o grindă solicitată la încovoiere de o forță distribuită). Cu alte cuvinte, dacă se analizează un arbore solicitat la torsiune, geometria fiind definită ca *beam*, într-o secțiune transversală a arborelui va fi afișată doar valoarea maximă a tensiunii tangențiale, nu și variația acesteia din centrul secțiunii spre periferie.

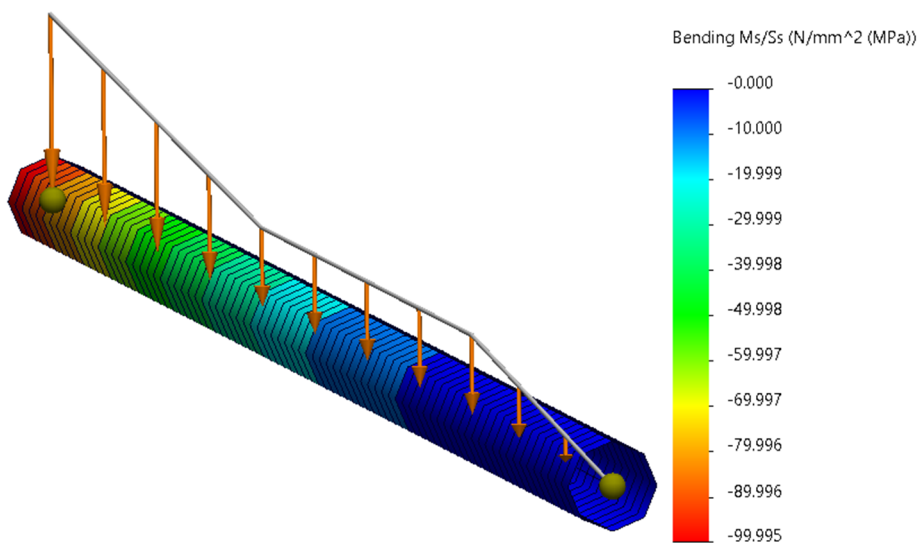


Fig. 1.40 Afișarea tensiunilor axiale generate la încovoiere pentru o geometrie analizată ca grindă (opțiunea *Treat as Beam*)

Tensiunile la geometriile de tip grindă sunt corelate cu cele șase tipuri de forțe interioare (N , T_y , T_z , M_{iz} , M_{iy} , M_t), fiind afișate valorile maxime din secțiunea transversală pentru: tensiunile axiale la întindere (*Axial*), tensiunile axiale la încovoiere după direcția 1 și direcția 2 (*Upper bound bending in DIR 1 / DIR 2*), tensiunile tangențiale la torsiune (*Torsional*), tensiunile tangențiale la încovoiere după direcția 1 și direcția 2 (*Shear in DIR 1 / DIR 2*). Totodată, poate fi afișată distribuția valorilor maxime din secțiunile transversale pentru tensiunea echivalentă de la solicitarea compusă gradul I de întindere/compresiune cu încovoiere (*Upper bound axial and bending*).

Pentru **deplasările geometriilor de tip grindă** pot fi afișate atât componentele axiale (alungiri), cât și componentele unghiulare (rotiri). Folosind comanda *List Displacement Plot* pot fi afișate și valorile reacțiunilor de tip forță și moment (disponibile și prin comanda *List Result Force*).

Valorile forțelor interioare (pentru fiecare element finit) și **diagramele de variație a forțelor interioare la grinzi** se obțin utilizând comenzile *List Beam Forces*, respectiv *List Beam Diagrams*. Pot fi vizualizate valorile și diagramele de variație ale forței axiale (*Axial Force*), forței tăietoare după direcția 1 sau 2 (*Shear Force in Dir1 / Dir 2*), momentelor încovoietoare după direcția 1 sau 2 (*Moment about Dir1 / Dir 2*), momentului de torsiune (*Torque*). Direcțiile 1 sau 2 nu sunt definite de utilizator, fiind asociate direct cu secțiunea transversală a grinzii. Direcția 1 este paralelă cu cea mai lungă latură care definește profilul secțiunii. Etapele de lucru pentru calculul diagramelor de variație a forțelor interioare la grinzi, folosind SolidWorks Simulation, sunt detaliate în capitolul 2 al acestei lucrări.

2. Diagrame de variație a forțelor interioare

În capitolul 2 se prezintă algoritmi de calcul analitic și etapele simulărilor numerice parcurse pentru determinarea reacțiunilor din reazeme și a diagramelor de variație a celor șase forțe interioare (forța axială N , forțele tăietoare T_z și T_y , momentele încovoietoare M_{iz} și M_{iy} , momentul de torsiune M_t).

Sunt prezentate exemple de calcul și simulări numerice pentru grinzi drepte, bare curbe, cadre plane și sisteme spațiale static determinate, încărcate cu forțe și momente concentrate, forțe distribuite uniform și neuniform.

Structura capitolului este următoarea:

- 2.1 Calculul reacțiunilor*
- 2.2 Diagrame de variație a forțelor interioare la grinzi drepte*
- 2.3 Diagrame de variație a forțelor interioare la bare curbe plane*
- 2.4 Diagrame de variație a forțelor interioare la cadre plane*
- 2.5 Diagrame de variație a forțelor interioare la sisteme spațiale*

2.1 CALCULUL REACȚIUNILOR

În capitolul I s-a arătat că forțele interioare sunt determinate de încărcări (forțe active) și de forțele de legătură care apar în conexiunile dintre elementul de rezistență calculat și elementele învecinate. Aceste forțe de legătură (reacțiuni) corespund mișcărilor relative blocate prin acea conexiune.

Considerând cazul general al unei conexiuni dintr-un sistem sollicitat spațial, aceasta poate anula mișcarea relativă a componentelor pentru trei translații și trei rotații (considerate după un sistem de referință ortogonal). Blocarea translației după o axă determină apariția în conexiune a unei reacțiuni de tip forță, iar blocarea rotației în jurul unei axe determină apariția unei reacțiuni de tip moment.

Reacțiunile se determină din ecuațiile de echilibru static. Pentru un sistem spațial se pot scrie șase ecuații de echilibru static (suma componentelor forțelor exterioare pe direcțiile x , y și z trebuie să fie zero, respectiv suma momentelor M_x , M_y și M_z trebuie să fie zero) [12]:

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0; \quad \sum F_y = 0; \quad \sum F_z = 0; \\ \left(\sum M_x\right)_K = 0; \quad \left(\sum M_y\right)_K = 0; \quad \left(\sum M_z\right)_K = 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

La un element de rezistență dispus și sollicitat într-un singur plan se folosesc uzual următoarele tipuri de reazeme:

- *reazemul mobil* (reazem alunecător sau articulație mobilă) limitează doar mișcarea de translație pe direcția perpendiculară pe suprafața de sprijin (axa y a unui sistem de referință Oxy), introducând o reacțiune de tip forță pe această direcție (figura 2.1 a);
- *reazemul fix* (articulație fixă) limitează translația după axele x și y ale sistemului de referință atașat, introducând două reacțiuni de tip forță (figura 2.1 b);
- *încastrarea* (fixarea completă) limitează ambele translații (după axele x și y) și rotația în jurul axei z , introducând două reacțiuni de tip forță și o reacțiune de tip moment (figura 2.1 c);

Considerând un element de rezistență și reazemele aferente, sunt posibile următoarele situații:

- numărul de reacțiuni din reazeme este egal cu numărul ecuațiilor de echilibru static (sistem static determinat). Exemple de astfel de sisteme:

grinda încastrată la un capăt și cu celălalt capăt liber, grinda simplu rezemată (reazem mobil + reazem fix la capete). Acest tip de sisteme constituie subiectul acestui capitol;

- numărul de reacțiuni din reazeme este mai mare decât numărul ecuațiilor de echilibru (sistem static nedeterminat). Exemple de astfel de sisteme: grinda încastrată la un capăt și cu un reazem mobil la celălalt capăt, grindă dublu încastrată. Acest tip de sisteme se rezolvă prin scrierea unor ecuații suplimentare legate de deplasări și sunt tratate în capitolul IV.

Observație: Dacă numărul de reacțiuni este mai mic decât numărul ecuațiilor de echilibru static (ex.: grindă cu articulație fixă la un singur capăt) sistemul nu se află în stare de echilibru. În acest caz, pentru a se putea efectua calcule de rezistență, se vor considera situații limită, corespunzătoare unor stări de echilibru static.

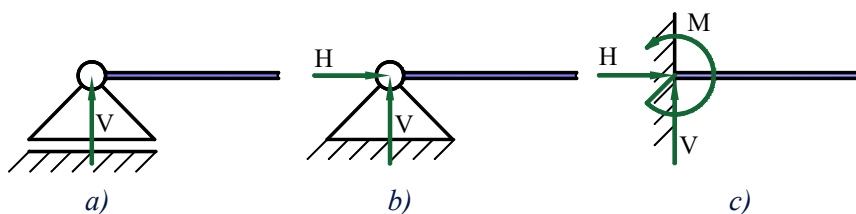


Fig. 2.1 Reacțiuni [12]

Reacțiunile din conexiunile unui element de rezistență pot fi calculate și folosind softuri specifice (inclusiv aplicații online, cum ar fi <https://skyciv.com/free-beam-calculator/>). În *Solid Works Simulation* forțele de reacțiune pot fi determinate pentru studii statice, dinamice, neliniare etc. În continuare se prezintă prin exemple algoritmi de calcul și analiză FEM pentru determinarea reacțiunilor.

Aplicația A2.1 Să se determine reacțiunile din reazeme pentru grinda din figura de mai jos (secțiune dreptunghiulară $h = 120 \text{ mm}$ și $b = 40 \text{ mm}$), realizată din oțel S235JR). Se cunosc: $F = 25 \text{ kN}$, $p = 7 \text{ kN/m}$, $M_e = 12 \text{ kNm}$, $a = 0,2 \text{ m}$.

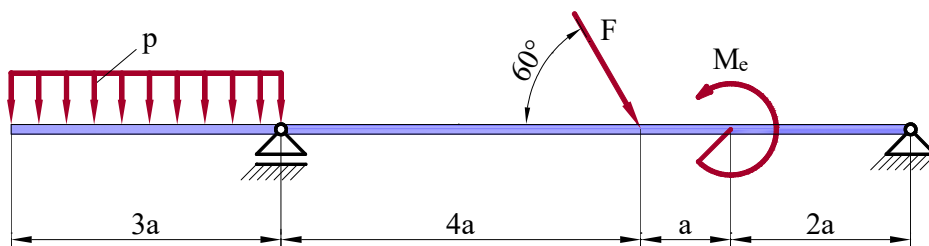


Fig. 2.2 Aplicația A2.1

Calculul analitic

Calcul analitic al reacțiunilor presupune parcurgerea următoarelor etape:

Identificarea intervalelor și punctelor caracteristice pentru grinda dată.

Punctele caracteristice sunt definite de secțiunile în care se aplică încărcările concentrate, de secțiunile de capăt ale încărcărilor distribuite și de secțiunile în care se aplică conexiunile. Două puncte caracteristice succesive definesc un interval. Pe un interval, orice componentă de forță interioară este caracterizată de o singură funcție de variație. Grinda din aplicația A2.1 are patru intervale și cinci puncte caracteristice.

Analiza forțelor exterioare. Pentru a facilita scrierea ecuațiilor de echilibru al forțelor pe verticală / orizontală, respectiv ecuațiilor de echilibru al momentelor, este necesară descompunerea forțelor înclinate și echivalarea forțelor/momentelor distribuite. Pentru exemplul dat, forța înclinată F va fi descompusă în proiecțiile sale pe direcțiile x și y (figura 2.3), iar forța uniform distribuită p va fi echivalată cu o forță concentrată $P = p \cdot a$, dispusă în centrul de greutate al distribuției.

Aplicarea reacțiunilor în reazeme: în reazemul alunecător 2 apare reacțiunea verticală V_2 , iar în reazemul fix 5 apar reacțiunile V_5 și H_5 .

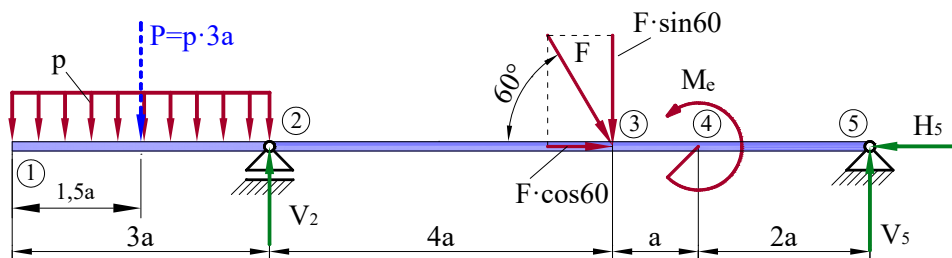


Fig. 2.3 A2.1. Reacțiuni

Scrierea ecuațiilor de echilibru: pentru exemplul dat se scriu ecuațiile de echilibru al forțelor orizontale, respectiv ecuațiile de echilibru al momentelor în raport cu punctele 2 și 5.

$$\sum F_x = 0; \quad F \cdot \cos(60) - H_5 = 0$$

$$(\sum M)_2 = 0; \quad -p \cdot 3a \cdot 1,5a + F \cdot \sin(60) \cdot 4a - M_e - V_5 \cdot 7a = 0$$

$$(\sum M)_5 = 0; \quad -p \cdot 3a \cdot 8,5a + V_2 \cdot 7a - F \cdot \sin(60) \cdot 3a - M_e = 0$$

Alegerea acestor ecuații este corelată cu obiectivul de a simplifica calculul. În toate cele trei ecuații apare o singură necunoscută. Alternativ, în ecuația de echilibru

al forțelor pe verticală intervin două necunoscute, reacțiunile V_1 și V_5 ; în mod similar, tot două necunoscute intervin în ecuațiile sumelor de momente scrise în punctele 1, 3, 4.

Din ecuațiile de mai sus rezultă expresiile și valorile celor trei reacțiuni:

$$H_5 = F \cdot \cos(60) = 25 \cdot \cos(60) = 12,5 \text{ kN}$$

$$\begin{aligned} V_5 &= \frac{4F \cdot a \cdot \sin(60) - 4,5p \cdot a^2 - M_e}{7 \cdot a} \\ &= \frac{4 \cdot 25 \cdot 0,2 \cdot \sin(60) - 4,5 \cdot 7 \cdot 0,2^2 - 12}{7 \cdot 0,2} = 2,90 \text{ kN} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_2 &= \frac{25,5p \cdot a^2 + 3F \cdot a \cdot \sin(60) + M_e}{7a} \\ &= \frac{25,5 \cdot 7 \cdot 0,2^2 + 3 \cdot 25 \cdot 0,2 \cdot \sin(60) + 12}{7 \cdot 0,2} = 22,95 \text{ kN} \end{aligned}$$

Verificarea corectitudinii rezultatelor se realizează prin scrierea unei noi ecuații de echilibru și introducerea în aceasta a valorilor calculate ale reacțiunilor. Pentru exemplul dat se introduc valorile reacțiunilor calculate anterior în ecuația de echilibru al forțelor pe direcția verticală:

$$\sum F_y = 0; \quad V_2 + V_5 - p \cdot 3a - F \cdot \sin(60) = 0$$

$$\text{respectiv: } 22,95 + 2,90 - 7 \cdot 3 \cdot 0,2 - 25 \cdot \sin(60) = 0$$

Analiza FEM

Pentru determinarea reacțiunilor prin simulare numerică, în *SolidWorks Simulation* se parcurg etapele detaliate în cele ce urmează.

Generarea geometriei 3D a grinzii într-un fișier de tip *SolidWorks part*. Grinda va fi modelată astfel încât fiecare tronson să reprezinte un solid distinct. Transformarea acestor solide în geometrii de tip grindă va permite aplicarea facilă a constrângerilor și încărcărilor.

Schița secțiunii transversale a grinzii (dreptunghi 120 mm x 40 mm, cuprins în planul *Right* și cu punctul de intersecție al diagonalelor în originea sistemului de referință) va fi extrudată pe lungimea primului tronson (600 mm) – figura 2.4. Celelalte trei tronsoane sunt adăugate prin extrudări succesive, pornind de la schițe conținând secțiunea definită anterior (în noile schițe se vor proiecta muchiile

secțiunii ultimului tronson folosind comanda *Convert Entities*; se vor obține astfel schițe legate – modificarea dimensiunilor din prima schiță va conduce la modificarea dimensiunilor și în schițele 2, 3 și 4). Fiecare tronson va fi generat ca solid distinct, prin dezactivarea opțiunii *Merge result* din cadrul comenzii *Extrude* (figura 2.8).

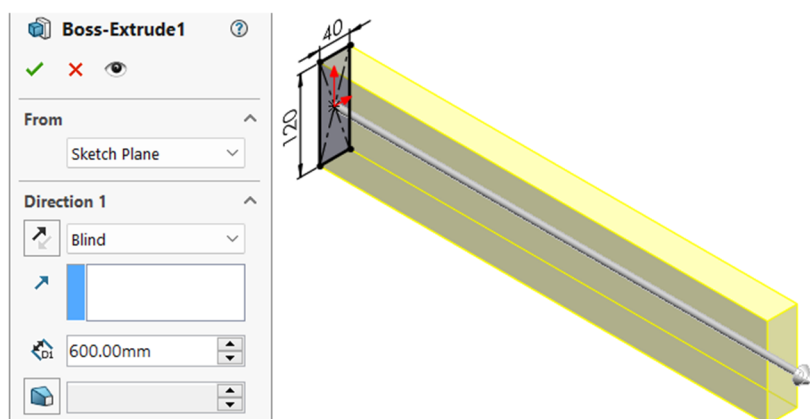


Fig. 2.4 A2.1. Extrudarea primului tronson al grinzii

Generarea unor entități suport necesare la definirea constrângerilor și încărcărilor. Pentru exemplul dat se va genera o dreaptă înclinată la 60° , care trece prin punctul caracteristic 3 al grinzii și reprezintă direcția forței înclinate F . Această dreaptă va fi trasată într-o schiță cuprinsă în planul *Front* și va avea originea în punctul de mijloc al înălțimii secțiunii transversale $h = 120 \text{ mm}$. Tot în această etapă se va trasa o dreaptă paralelă cu axa Z , prin punctul caracteristic 4 al grinzii, dreaptă care reprezintă axa în jurul căreia se aplică momentul exterior M_e . Cele două drepte, evidențiate în figura 2.5, se trasează în schițe distincte.

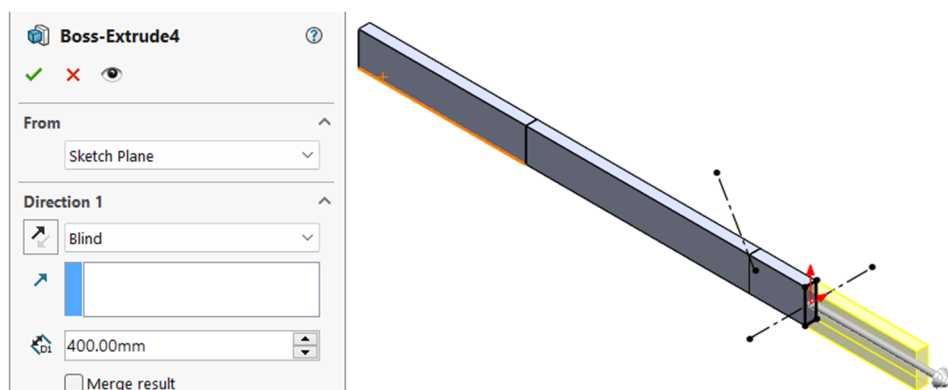


Fig. 2.5 A2.1. Extrudarea tronsonului 4-5 și evidențierea dreptelor suport

Generarea unui studiu de analiză statică. Din banda de instrumente *Simulation* din *SolidWorks* se accesează opțiunea *New Study*. Se va indica numele studiului și se va selecta tipul – *Static*. Studiul nou creat va apărea ca un nou *tab* în partea din stânga – jos a ferestrei *SolidWorks*. Editarea / vizualizarea acestui studiu se va face prin selecția acestui *tab* și activarea benzii de instrumente *Simulation*. Revenirea în modul de editare / vizualizare a solidului se va face prin activarea *tab*-ului *Model*. Mediul de modelare și mediul de simulare din *SolidWorks* sunt active în același fișier, ceea ce implică câteva consecințe importante a fi reținute:

- comenzile *Undo* și *Redo* acționează asupra pașilor realizați în procesul de modelare (chiar dacă este activ *tab*-ul corespunzător simulării). Editarea operațiilor aplicate în simulare se va face doar din arborele simulării;
- orice modificare a geometriei 3D este transpusă în simulare și necesită o nouă rulare a acesteia. În situația în care prin modificarea geometriei se elimină entități suport sau de referință pentru constrângerile și încărcările deja aplicate, acestea vor trebui redefinite;
- orice schimbare a geometriei determină și o schimbare a structurii rețelei de elemente finite.

Tratarea solidelor ca grinzi. În arborele de operații aferent studiului static, sub denumirea fișierului curent, se va regăsi lista de solide definite pentru cele patru tronsoane ale grinzii. Selectând aceste solide (cu click+CTRL pentru selecție multiplă), se poate alege din meniul contextual (accesat prin click dreapta mouse), opțiunea *Treat selected bodies as beams*. Vor rezulta patru tronsoane de tip grindă, cu secțiune transversală constantă. La capetele fiecărui tronson vor fi marcate punctele caracteristice ale grinzii (denumite *joints* în *SolidWorks Simulation*). Această transformare permite determinarea reacțiunilor și diagramelor de variație a forțelor interioare pentru sistemul analizat.

Transformarea solidelor în geometrii de tip grindă este reversibilă (prin opțiunea *Treat as Solid* din meniul contextual). Pictograma atașată unei entități 3D în arborele operațiilor din simulare relevă tipul acesteia: volum prismatic () pentru solide, respectiv secțiune de profil I () pentru geometrii de tip grindă.

În situația în care raportul dintre lungimea unui tronson și dimensiunea maximă a secțiunii transversale este mai mic decât 10, *SolidWorks Simulation* indică un mesaj de avertizare: *The body is too short to be considered as beam*. Cu toate acestea simularea poate fi efectuată, dacă scopul principal este determinarea reacțiunilor din rezeme și a diagramelor de variație a forțelor interioare.

Asocierea proprietăților de material pentru cele patru tronsoane. Din meniul contextual (accesat prin click dreapta pe numele fișierului, în arborele operațiilor din simulare) se va selecta opțiunea *Apply Material to All Bodies*. Se va deschide astfel fereastra *Materials*, în care se va identifica oțelul 1.0037 (S235JR).

Determinarea reacțiunilor și a diagramei de variație a forțelor interioare nu implică proprietăți de material, dar prin simularea se generează și distribuția tensiunilor și a deformațiilor, astfel că asocierea materialului este obligatorie chiar și în situația în care se urmărește doar determinarea reacțiunilor.

Aplicarea constrângerilor corespunzătoare celor două reazeme. Având în vedere că axa grinzii și încărcările aplicate sunt cuprinse într-un singur plan (*Oxy*) constrângerile vor viza doar mișcările de translație după axele x și y , respectiv mișcarea de rotație în jurul axei z .

Observație: Utilizatorul poate decide și blocarea translației după z , respectiv a rotațiilor în jurul axelor x și y , dar rezultatele vor fi identice (softul va indica reacțiuni pentru fiecare mișcare blocată, dar neavând încărcare spațială, reacțiunile necuprinse în planul *Oxy* vor fi infinit mici).

Pentru modelarea reazemului mobil, din secțiunea 2 a grinzii, se va bloca translația după axa y , iar pentru reazemul fix din secțiunea 5 se vor bloca translațiile după x și y . Se va lansa comanda *Fixed Geometry* din banda de instrumente *Simulation* și se va alege opțiunea *Use reference geometry* care permite utilizatorului să selecteze care mișcări de translație sau de rotație vor fi blocate. În câmpul *Joints* se selectează punctul cheie care definește reazemul, iar în câmpul *Face, Edge, Plane, Axis for Direction* se selectează o entitate de referință în raport cu care se definesc axele. În exemplificarea din figura 2.6, suprafața superioară a grinzii este entitatea de referință în raport cu care sunt blocate translațiile pentru *joint*-ul corespunzător reazemului fix. Cele două săgeți verzi din secțiunea 5 indică mișcările blocate. Reacțiunile vor corespunde acestor constrângeri.

Observații:

1. Numerotarea *joint*-urilor și orientarea axelor în *Solidworks* nu este corelată direct cu numerotarea și sensul axelor din calculul analitic. Proiectantul va urmări ca modelul din simulare să redea modelul analitic, independent de aceste aspecte.
2. Dacă în câmpul entității în raport cu care se definesc rotațiile și translațiile se selectează o suprafață plană / un plan, atunci direcțiile vor fi identificate ca *Along Plane Dir 1*, *Along Plane Dir 2* (direcții paralele cu planul selectat) și *Normal to Plane* (direcție perpendiculară pe planul selectat).

3. Constrângerile sunt evidențiate pe ecran prin simboluri de culoare verde. Blocarea unei translații este evidențiată printr-o săgeată simplă. Blocarea unei rotații este evidențiată printr-o săgeată cu vârf subțire și cap cilindric. Dacă dimensiunile săgeților care marchează constrângerile sunt prea mici în raport cu secțiunea grinzii (nu sunt vizibile), se poate mări dimensiunea acestora în câmpul *Symbol Settings* al comenzii *Fixtures*.

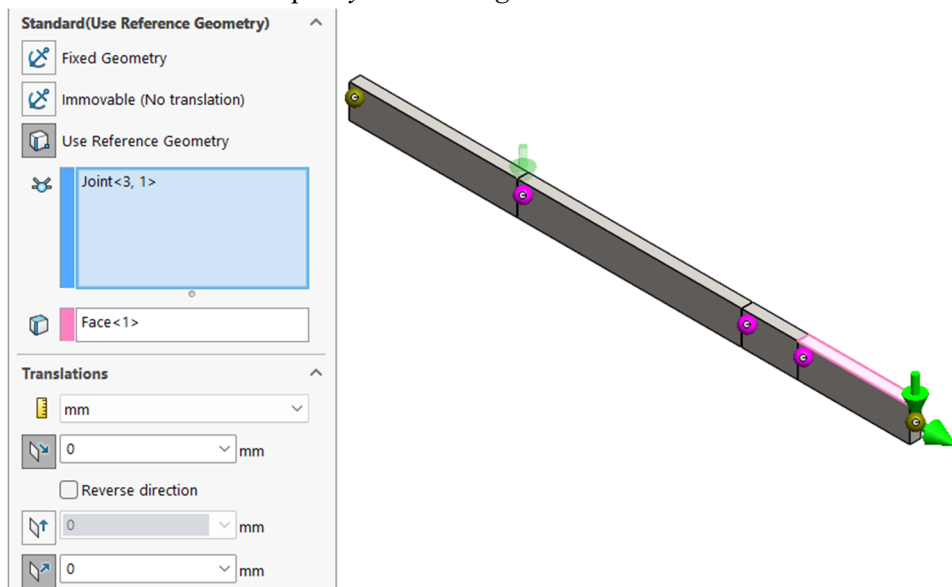


Fig. 2.6 A2.1. Aplicarea constrângerilor în punctele caracteristice

Aplicarea încărcărilor. Pentru grinda A2.1 va fi aplicată o forță uniform distribuită, o forță concentrată și un moment de încovoiere. Forțele și momentele aplicate vor fi evidențiate cu o culoare distinctă în raport cu cea folosită la constrângeri (implicit *magenta*). În acest volum încărcările sunt evidențiate cu roșu pentru o vizualizare mai bună și pentru corelarea cu schemele de la calculul analitic.

Forță uniform distribuită va fi aplicată prin comanda *Force* din zona *External Loads* a benzii *Simulation*. În zona *Selection* a comenzii *Force* se va activa opțiunea *Beam* și se va selecta un tronson al grinzii (tronsonul 1-2 pentru exemplul dat). Direcția forței va fi definită în raport cu o entitate de referință (perpendicular pe *Face 1* în exemplul din figura 2.7). Pentru definirea valorii forței sunt posibile două alternative:

- activarea opțiunii *Per unit length* permite exprimarea forței pe unitate de lungime ($p = 7000 \text{ N/m}$, pentru aplicația A2.1);

- neactivarea opțiunii *Per unit length*, situație în care valoare forței introduse (exprimată în N) va reprezenta forța totală, echivalentă distribuției. Pentru exemplul dat, forța echivalentă celei distribuite este $P = p \cdot 3a = 4200 \text{ N}$. Impunând această forță pe tronsonul $[1 \div 2)$, vom obține același efect precum în situația aplicării forței distribuite $p = 7000 \text{ N/m}$.

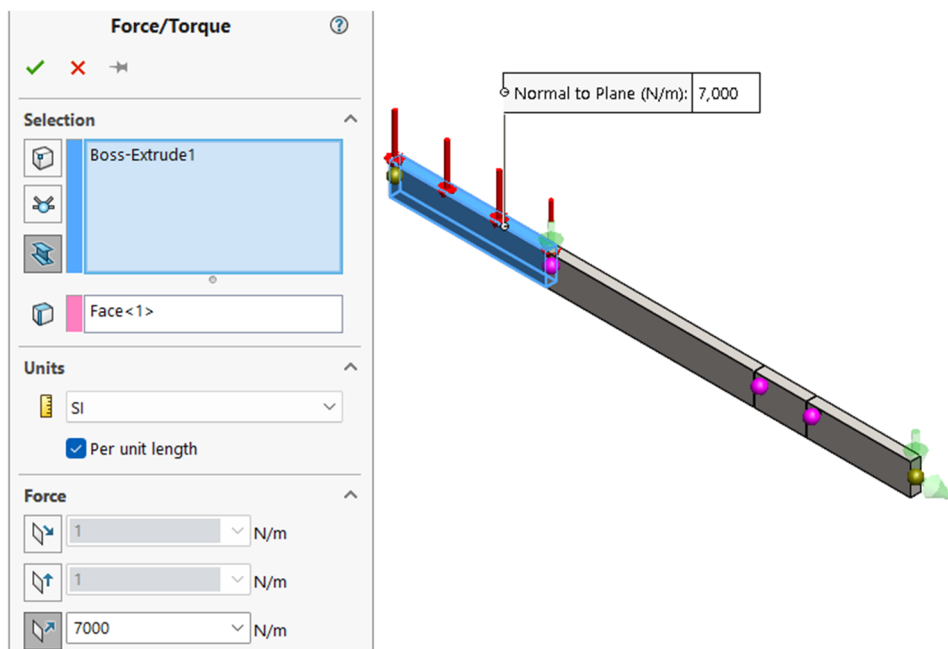


Fig. 2.7 A2.1. Aplicarea forței distribuite $p = 7 \text{ kN/m}$

Forța concentrată înclinată se va aplica tot prin comanda *Force*, activând opțiunea *Joints* din zona *Selection* și selectând punctul caracteristic corespunzător. Direcția forței va fi indicată prin selecția liniei înclinate, definite la modelarea piesei (figura 2.8). Sensul forței poate fi schimbat prin activarea opțiunii *Reverse direction*. În cazul forțelor concentrate (aplicate într-un punct caracteristic – *joint*) opțiunea *Per unit length* nu mai este disponibilă.

Pentru definirea momentului de încovoiere exterior $M_e = 12 \text{ kN} \cdot \text{m}$ se lansează comanda *Torque* din banda de instrumente *Simulation*, zona *External Loads*. Momentul concertat va fi aplicat pe *joint*-ul aferent secțiunii 4 a grinzii (figura 2.9), în jurul axei definite de linia suport 2 (paralelă cu axa z). Valoarea momentului este exprimată în $N \cdot \text{m}$. Sensul momentului este dat de regula burghiului drept (privind grinda din perspectiva de aplicare a momentului, înaintarea unui burghiu virtual corespunde sensului orar de rotație).

2. Diagrame de variație a forțelor interioare

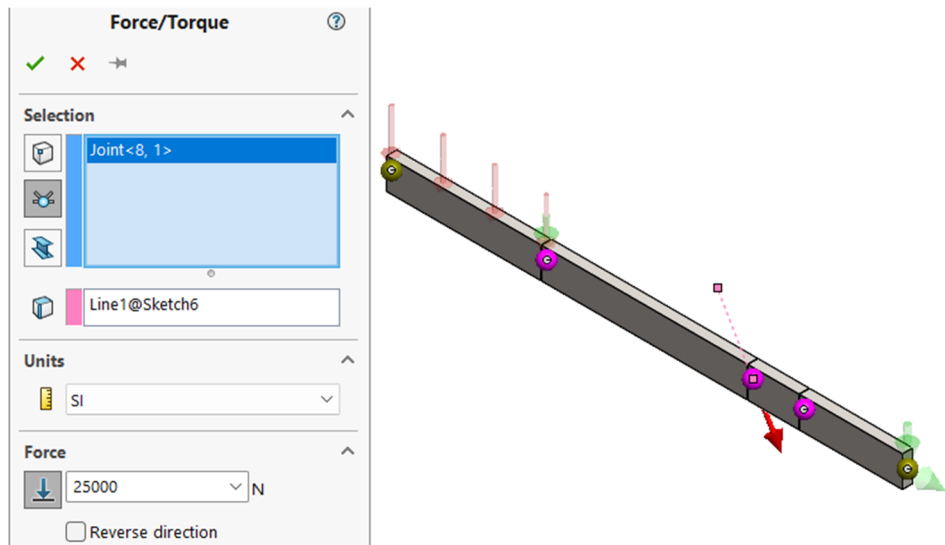


Fig. 2.8 A2.1. Aplicația forței concentrate $F = 25 \text{ kN}$

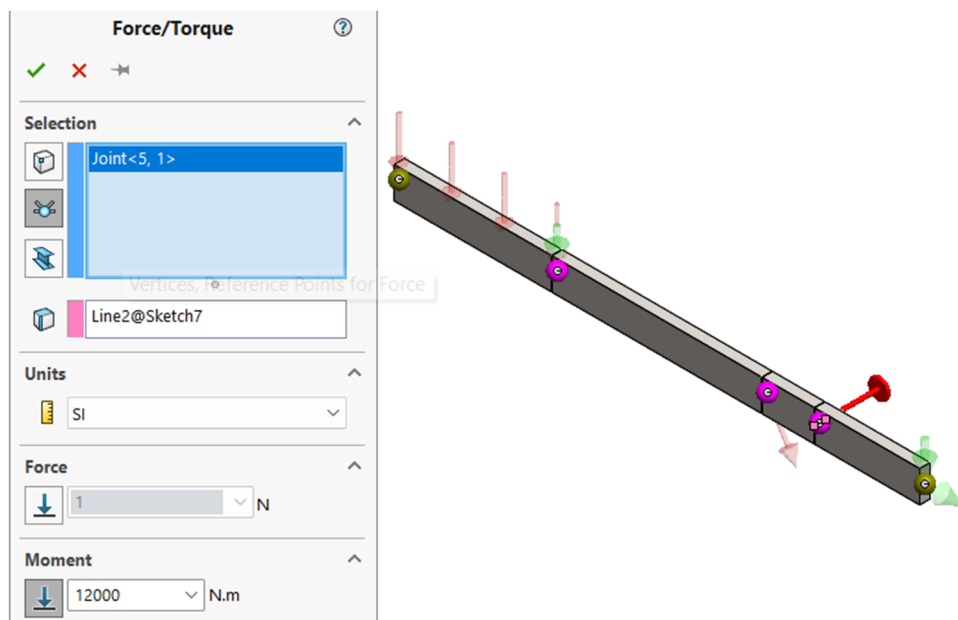


Fig. 2.9 A2.1. Aplicarea momentului de încovoiere exterior $M_e = 12 \text{ kN} \cdot \text{m}$

Figura 2.10 sintetizează constrângerile și încărcările aplicate la grinda dată.

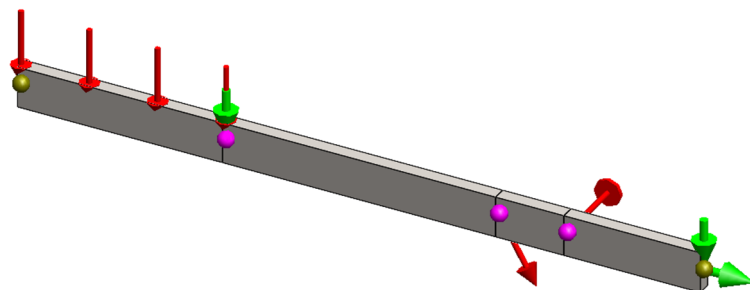


Fig. 2.10 Constrângeri și încărcări aplicate la grinda A2.1

Discretizarea modelului. Generarea rețelei de elemente finite se realizează prin comanda *Create Mesh* din banda *Simulation*. La geometriile de tip grindă, elementele finite vor diviza volumul în „feli” dispuse după axa sa longitudinală. Deși discretizarea în elemente finite poate influența rezultatele obținute în simulările numerice, la calculul reacțiunilor la geometrii de tip grindă influența densității rețelei de elemente finite este scăzută.

Rularea studiului se realizează prin comanda *Run This Study* din banda *Simulation*. În cazul geometriilor tratate ca grindă timpul de rulare este scurt, nefiind necesare PC-uri cu putere mare de calcul.

Vizualizarea rezultatelor. În câmpul *Results* din arborele simulării sunt afișate implicit distribuții de tensiuni și distribuții de deformații/deplasări. Pentru vizualizarea reacțiunilor se va selecta opțiunea *List Result Force* din meniul contextual corespunzător rezultatelor (click dreapta pe *Results* în arborele simulării). În fereastra acestei comenzi se va selecta punctul caracteristic (*joint*-ul) pentru care se dorește vizualizarea reacțiunilor și opțiunea *Update*. Reacțiunile nenule vor fi afișate tabelar în zonele *Reaction Force* și *Reaction moment*. Aceleași valori vor fi afișate și atașat de punctul caracteristic. Figurile 2.11 și 2.12 prezintă valorile reacțiunilor pentru cele două rezeme ale grinzii A2.1.

În tabelele *Reaction force* și *Reaction moment* sunt afișate efectiv sumele reacțiunilor de tip forță și moment pe cele trei axe pentru punctele caracteristice selectate (coloana *Selection*) și pentru tot modelul (coloana *Entire Model*). În consecință, dacă în câmpul *Joints* se selectează mai multe puncte caracteristice, în zona de lucru vor fi afișate distinct reacțiunile, dar în cele două tabele vor fi afișate valorile cumulate. Valorile afișate în zona de lucru sunt indicate în format științific (spre exemplu, valoarea $V_2 = \text{SumY} = 22950 \text{ N}$ din tabel este afișată în zona de lucru sub forma rotunjită $FY = 2.3e + 04 \text{ N} = 2,3 \cdot 10^4 \text{ N}$). Valorile negative ale

2. Diagrame de variație a forțelor interioare

reacțiunilor indică că acestea acționează în sens invers orientării axelor pozitive ale sistemului de referință din *SolidWorks*. Sensul real după care sunt dispuse reacțiunile este afișat pe ecran prin săgeți (colorate identic cu axele sistemului de referință).

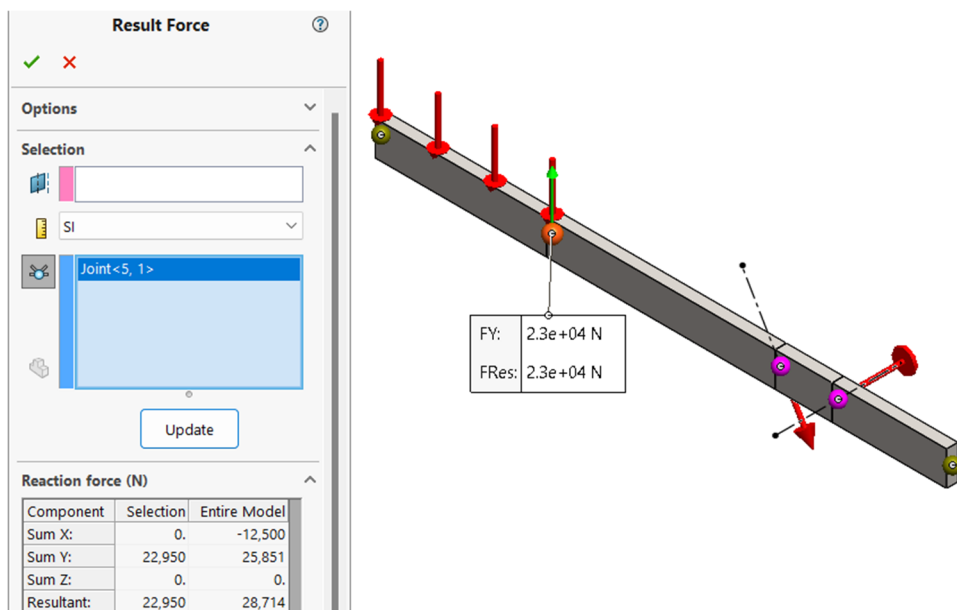


Fig. 2.11 A2.1 Vizualizarea reacțiunilor din reazemul alunecător 2

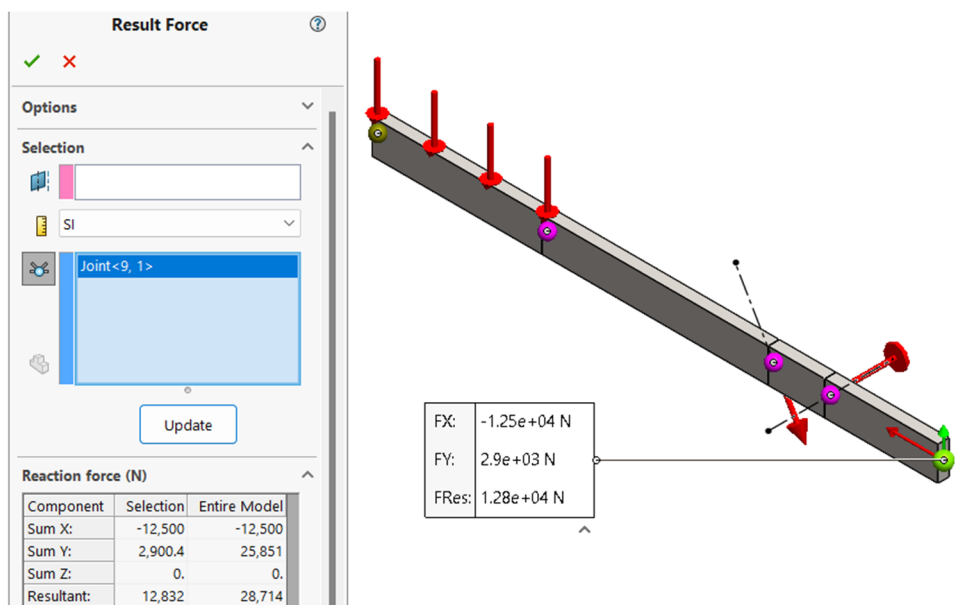


Fig. 2.12 A2.2 Vizualizarea reacțiunilor din reazemul fix 5

Aplicația A2.2 Să se determine reacțiunile din încastrare pentru grinda din figura de mai jos, încărcată cu o forță distribuită neuniform. Se cunosc: $p_1 = 7 \text{ kN/m}$, $p_2 = p_3 = 3 \text{ kN/m}$, $a = 0,4 \text{ m}$. Grinda are secțiune dreptunghiulară $h = 40 \text{ mm}$ și $b = 120 \text{ mm}$ și este realizată din oțel E335.

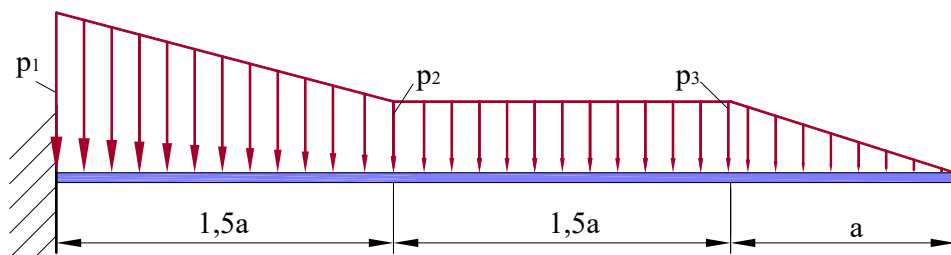


Fig. 2.13 Aplicația A2.2

Calculul analitic

Identificarea intervalelor și punctelor caracteristice pentru grinda dată: trei intervale și patru puncte caracteristice.

Analiza forțelor exterioare: pe tronsonul $[1 \div 2]$ și $(3 \div 4]$ acționează forțe cu distribuție liniară, iar pe tronsonul $(2 \div 3)$ acționează o forță distribuită uniform.

Forța distribuită liniară de pe tronsonul $[1 \div 2]$ poate fi echivalată, pentru calcul reacțiunilor, cu două forțe concentrate P_1 și P_2 calculate prin împărțirea distribuției în două triunghiuri. Figura 2.14 evidențiază poziția celor două forțe echivalente (în centrele de greutate ale triunghiurilor). Forța uniform distribuită de pe tronsonul $(2 \div 3)$ poate fi echivalată cu forța concentrată P_3 , poziționată în secțiunea de mijloc a tronsonului. Forța distribuită liniară de pe tronsonul $(3 \div 4]$ se poate echivala prin forța concentrată P_4 poziționată în centrul de greutate al triunghiului.

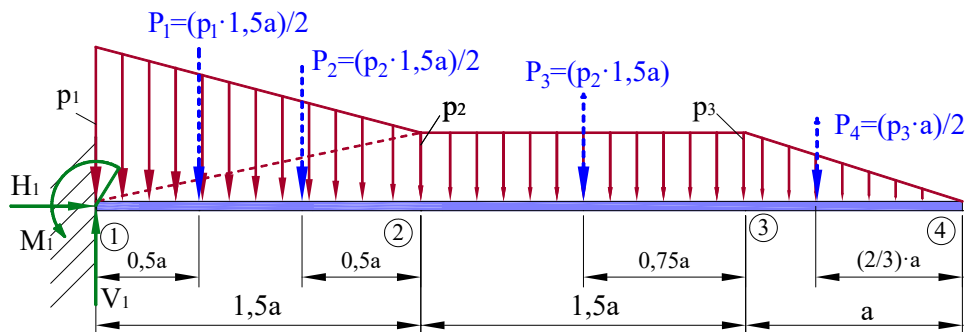


Fig. 2.14 A2.2. Reacțiuni

2. Diagrame de variație a forțelor interioare

Aplicarea reacțiunilor: în încastrare apar reacțiunea verticală V_2 , reacțiunea orizontală H_1 și reacțiunea de tip moment M_1 . Deoarece toate forțele acționează pe verticală, reacțiunea orizontală este nulă.

Scrierea ecuațiilor de echilibru: se vor scrie ecuațiile de echilibru al forțelor pe verticală și suma de momente M_z în raport cu punctul 1.

$$\sum F_y = 0; \quad V_1 - p_1 \cdot \frac{1,5a}{2} - p_2 \cdot \frac{1,5a}{2} - p_2 \cdot 1,5a - p_3 \cdot \frac{a}{2} = 0$$

$$(\sum M)_1 = 0; \quad -M_1 + p_1 \cdot \frac{1,5a}{2} \cdot 0,5a + p_2 \cdot \frac{1,5a}{2} \cdot a + p_2 \cdot 1,5a \cdot 2,25a + p_3 \cdot \frac{a}{2} \cdot 3,33a = 0$$

Rezultă expresiile și valorile celor două reacțiuni:

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{p_1 \cdot 1,5a}{2} + \frac{p_2 \cdot 1,5a}{2} + p_2 \cdot 1,5a + \frac{p_3 \cdot a}{2} \\ &= \frac{7 \cdot 1,5 \cdot 0,4}{2} + \frac{3 \cdot 1,5 \cdot 0,4}{2} + 3 \cdot 1,5 \cdot 0,4 + \frac{3 \cdot 0,4}{2} \\ &= 5,4 \text{ kN} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{p_1 \cdot 1,5a}{2} \cdot 0,5a + \frac{p_2 \cdot 1,5a}{2} \cdot a + p_2 \cdot 1,5a \cdot 2,25a + \frac{p_3 \cdot a}{2} \cdot 3,33a \\ &= \frac{7 \cdot 1,5 \cdot 0,4}{2} \cdot 0,5 \cdot 0,4 + \frac{3 \cdot 1,5 \cdot 0,4}{2} \cdot 0,4 + 3 \cdot 1,5 \cdot 0,4 \cdot 2,25 \cdot 0,4 + \frac{3 \cdot 0,4}{2} \cdot 3,33 \cdot 0,4 = 3,2 \text{ kN} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

Verificarea corectitudinii rezultatelor obținute prin introducerea lor în ecuația de echilibru a momentelor în raport cu punctul 2:

$$(\sum M)_2 = 0; \quad -M_1 + V_1 \cdot 1,5a - \frac{p_1 \cdot 1,5a}{2} \cdot a - \frac{p_2 \cdot 1,5a}{2} \cdot 0,5a + p_2 \cdot 1,5a \cdot 0,75a + \frac{p_3 \cdot a}{2} \cdot 1,83a = 0$$

$$\begin{aligned} \text{respectiv:} \quad &-3,2 + 5,4 \cdot 1,5 \cdot 0,4 - \frac{7 \cdot 1,5 \cdot 0,4}{2} \cdot 0,4 - \frac{2 \cdot 1,5 \cdot 0,4}{2} \cdot 0,5 \\ &\cdot 0,4 + 3 \cdot 1,5 \cdot 0,4 \cdot 0,75 \cdot 0,4 + \frac{3 \cdot 0,4}{2} \cdot 1,83 \cdot 0,4 = 0 \end{aligned}$$

Analiza FEM

Generarea geometriei 3D a grinzii într-un fișier de tip *SolidWorks part*. Grinda încastrată A2.2 este încărcată cu forță distribuită uniform pe tronsonul (2÷3) și forțe distribuite cu variație liniară pe tronsoanele [1÷2] și (3÷4]. În *SolidWorks Simulation* această distribuție poate fi aplicată unitar, astfel că nu este necesară divizarea grinzii în mai multe tronsoane. Modelarea geometriei 3D se va face prin extrudarea dreptunghiului 120 mm x 40 mm din figura 2.15 pe lungimea totală de 1600 mm.

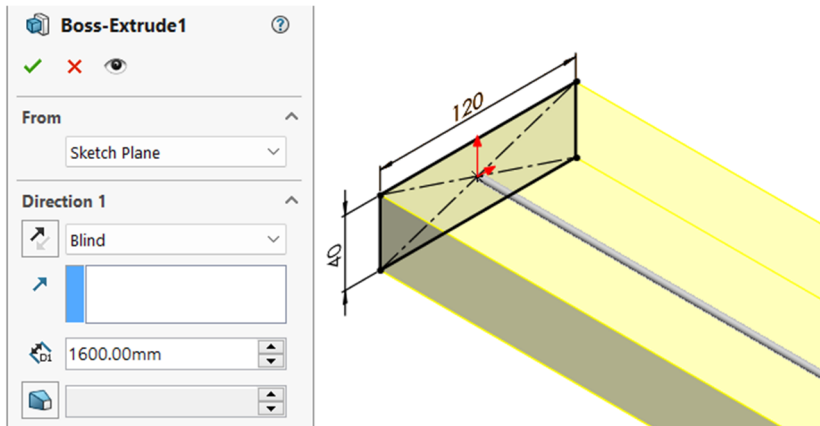


Fig. 2.15 A2.2. Generarea modelului (vedere parțială)

Generarea unui studiu de analiză statică. Din banda de instrumente *Simulation* se accesează opțiunea *New Study*. Se va indica numele studiului și se va selecta tipul: *static*.

Tratarea solidului ca grindă. Se va selecta solidul A2.2 din arborele de operații aferent studiului static și din meniul contextual (afișat prin click dreapta mouse) se va activa *Treat selected bodies as beams*. Simularea se va face pe o grindă cu un singur tronson, cu două puncte caracteristice.

Asocierea proprietăților de material. Grinzii A.2.2 i se va asocia oțelul E355 din fereastra *Materials*, accesată prin comanda *Apply Material* (banda *Simulation*). Biblioteca *SolidWorks DIN Materials* este structurată pe categorii de materiale metalice (aliaje de aluminiu, aliaje de cupru, fonte, oțeluri aliate, etc.), E355 regăsindu-se în categoria oțelurilor pentru construcții (*Steel Structural*).

Aplicarea constrângerilor. Grinda este încastrată la un capăt. Încastrarea presupune anularea tuturor mișcărilor relative de translație și de rotație. Opțiunea *Fixed Geometry* aplicată asupra punctului caracteristic aferent secțiunii 1 redă încastrarea acestei secțiuni (figura 2.16). Având în vedere că încărcarea și axa grinzii sunt cuprinse într-un singur plan (*Oxy*), reacțiunile necuprinse în acest plan vor fi

nule. În consecință, încastrarea grinzii A2.2 poate fi redată și doar prin blocarea translațiilor pe axele x și y și a rotației în jurul axei z .

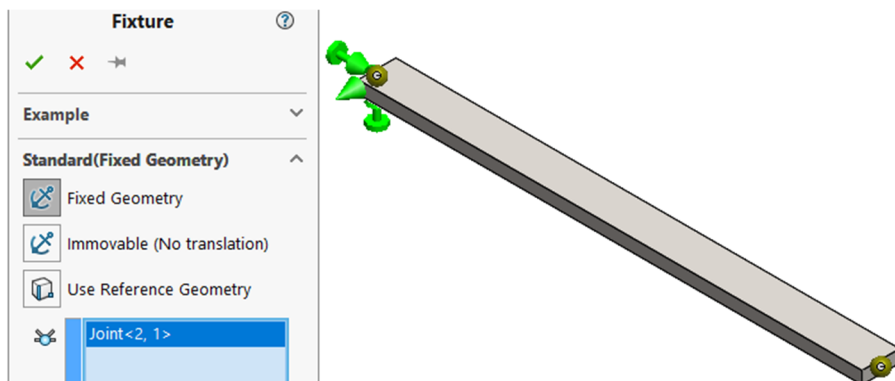


Fig. 2.16 A2.2. Aplicarea încastrării

Aplicarea încărcărilor.

O forță aplicată pe un tronson de grindă (prin selecția opțiunii *Beams* și a tronsonului de grindă aferent, în zona *Selection* a comenzii *Force*) poate fi distribuită uniform sau neuniform. Distribuția neuniformă este definită prin activarea opțiunii *Nonuniform distribution* și selecția uneia din opțiunile *Table Driven Load Distribution*, *Total Load Distribution* sau *Centered Load Distribution*. Opțiunea *Table Driven Load Distribution* permite aplicarea încărcării prin precizarea intensității forței distribuite (exprimată în N/m) în diferite secțiuni ale grinzii. Valorile se definesc sub formă tabelară, în prima coloană introducându-se distanțele față de capătul grinzii, exprimate în metri sau procente din lungimea totală, iar în a doua coloană introducându-se intensitatea forței distribuite. Opțiunea *Flip origin* permite schimbarea capătului în raport cu care se definesc distanțele. Pentru grinda A2.2 s-au definit intensitățile forței distribuite pentru cele patru secțiuni caracteristice, referința fiind secțiunea 4 (figura 2.17). Variația intensității forței distribuite între secțiunile caracteristice se poate face liniar sau după o curbă cubică.

Observații:

1. Opțiunea *Table Driven Load Distribution* poate fi aplicată doar pentru forțe distribuite neuniform. Opțiunile *Total Load Distribution* și *Centered Load Distribution* se pot aplica atât pentru forțe cât și pentru momente distribuite neuniform.
2. Opțiunea *Total Load distribution* permite aplicarea unei forțe/moment după o distribuție triunghiulară simetrică (figura 2.18 a), parabolică (figura 2.18 b) sau eliptică (figura 2.18 c), indicând valoarea totală a

încărcării (exprimată în N pentru forță, respectiv $N \cdot m$ pentru moment). Opțiunea *Centered Load Distribution* permite aplicarea unei forțe sau a unui moment după o distribuție triunghiulară simetrică, parabolică sau eliptică, indicând intensitatea maximă a încărcării (exprimată în N/m pentru forță, respectiv $N \cdot m/m$ pentru moment). În ambele cazuri încărcarea va fi dispusă simetric în raport cu centrul tronsonului.

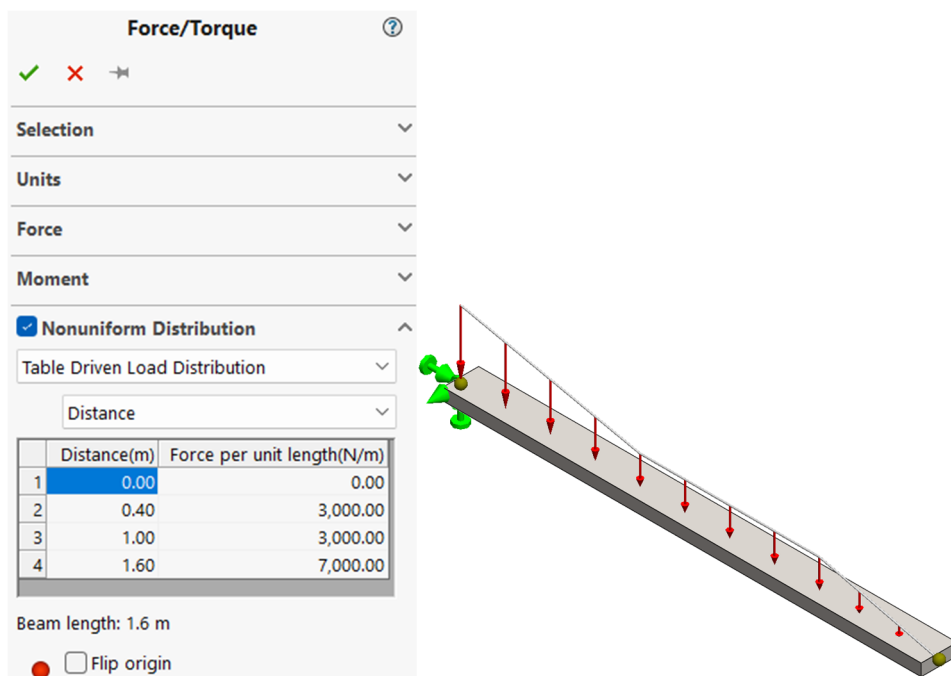


Fig. 2.17 A2.2. Aplicarea încărcării distribuite neuniform

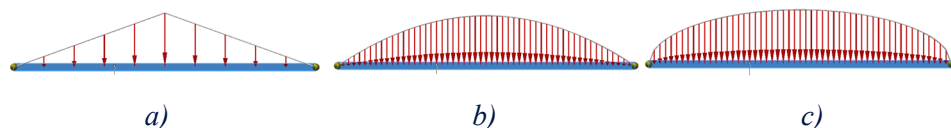


Fig. 2.18 Exemple de încărcări cu distribuție triunghiulară (a), sinusoidală (b) sau parabolică (c) aplicate prin opțiunea *Total Load distribution*

Discretizarea modelului și rularea analizei. În situația în care nu se urmărește modificarea parametrilor discretizării, se poate genera rețeaua de elemente și rula simularea într-un singur pas, lansând comanda *Run This Study* din banda *Simulation*.

Vizualizarea rezultatelor. Se va selecta opțiunea *List Result Force* din banda *Simulation* (zona *Results Advisor*) și se vor vizualiza valorile reacțiilor pentru punctul caracteristic corespunzător secțiunii încastrate. Se observă că valorile obținute în simulare (figura 2.19) sunt practic identice cu cele calculate analitic.

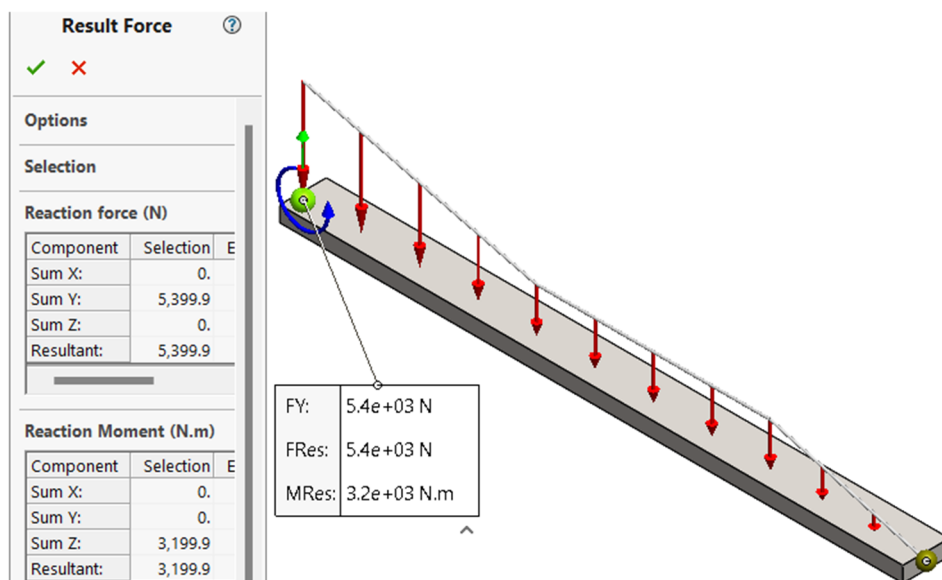


Fig. 2.19 A2.2. Vizualizarea reacțiunilor din încastrare

2.2 DIAGrame DE VARIAȚIE A FORȚELOR INTERIOARE LA GRINZI DREPTE

Tensiunile și deformațiile la care este supus un element de rezistență sunt calculate în funcție de forțele interioare (eforturile) care apar în interiorul acestuia. Considerând situația în care se urmărește determinarea distribuției tensiunilor și deformațiilor la un element de rezistență de tip grindă, rezultă necesitatea de a cunoaște valoarea forțelor interioare din orice secțiune transversală a acestuia. În acest scop vor fi scrise funcțiile de variație și se vor trasa diagramele de variație ale forțelor interioare.

Algoritmul analitic de trasare a diagramelor de variație se bazează pe metoda secțiunii. Această metodă presupune divizarea grinzii în raport cu o secțiune transversală virtuală (notată cu K în figura 2.20). Vor rezulta două părți ale grinzii, la capătul secționat al fiecărei părți fiind aplicate forțele interioare N , T_z , T_y , M_{iz} , M_{iy} și M_t , (dacă grinda este dispusă și solicitată într-un singur plan, atunci se aplică

doar N , T_y , M_{iz}). Determinarea valorilor forțelor interioare pentru secțiunea K se va face prin aplicarea ecuațiilor de echilibru pentru oricare din cele două părți rezultate în urma secționării. Pentru o grindă dispusă și solicitată într-un singur plan se pot formula următoarele reguli de calcul:

- forța interioară axială N din secțiunea K va fi suma forțelor axiale din stânga secțiunii luate cu + dacă întind grinda (acționează spre stânga) sau cu minus dacă comprimă grinda;

- forța interioară tăietoare T_y din secțiunea K va fi suma forțelor verticale din stânga secțiunii luate cu + dacă acționează în sus;

- momentul încovoietor interior M din secțiunea K va fi suma momentelor încovoietoare generate de încărcările și reacțiunile din stânga secțiunii, calculate în raport cu centrul secțiunii K și luate cu + dacă acționează în sens orar;

Convenția de semne detaliată mai sus este prezentată și în figura 2.21 (doar pentru sensul pozitiv). În mod similar cu regulile de calcul în raport cu sectorul din stânga secțiunii K , se pot defini regulile de calcul pentru sectorul din dreapta secțiunii K . Rezultatele vor fi identice, proiectantul alegând partea de calcul cea mai convenabilă (uzual cea cu încărcări mai simple).

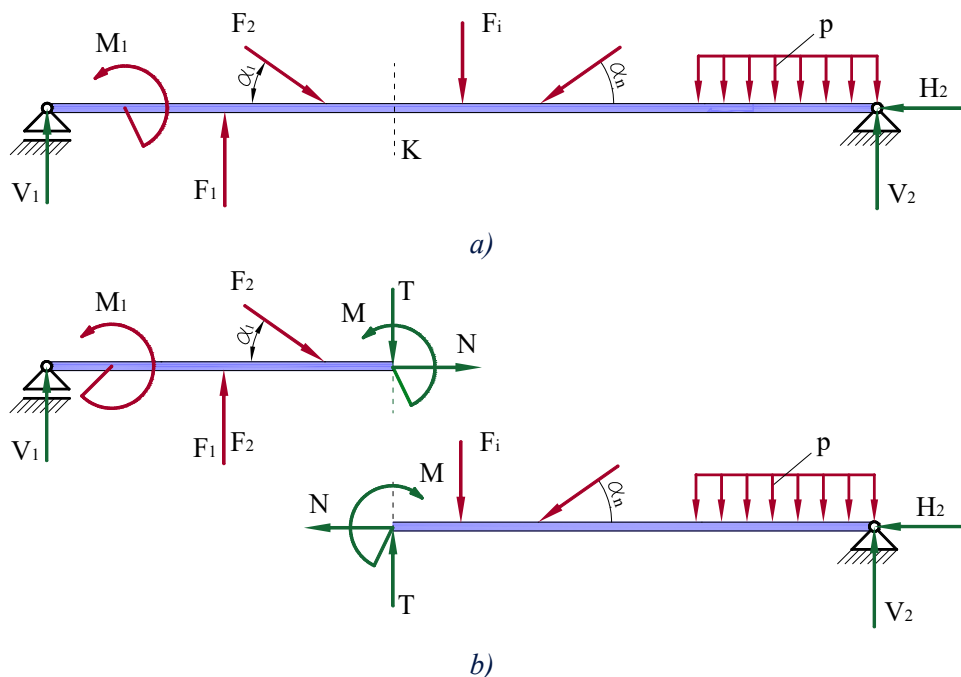


Fig. 2.20 Metoda secțiunii [12]

2. Diagrame de variație a forțelor interioare

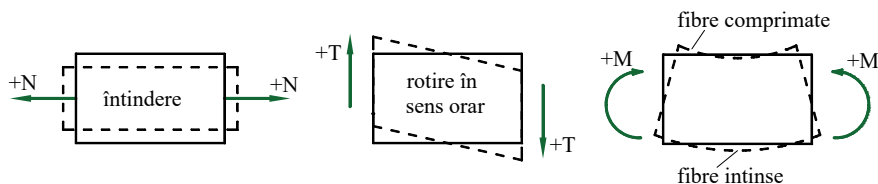


Fig. 2.21 Convenție de semne [12]

Aplicând metoda secțiunii pe fiecare tronson/interval al unei grinzi, în secțiuni oarecare definite de variabile x , se pot scrie funcțiile de variație ale forțelor interioare. Diagramele de variație se vor stabili atribuind valori variabilei x . În exemplele următoare se prezintă detaliat acest algoritm de calcul și se compară rezultatele obținute analitic cu cele obținute prin simulări numerice.

Aplicația A2.3. Să se traseze diagramele de variație ale forțelor interioare pentru grinda din figura 2.22. Se cunosc: $p = 8500 \text{ N/m}$, $a = 0,3 \text{ m}$. Grinda are secțiune constantă HE120A (conform EN 10365) și este realizată din oțel S275JR.

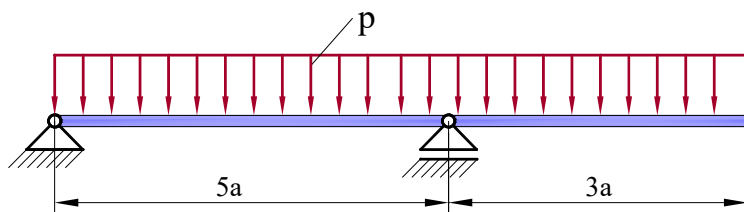


Fig. 2.22 Aplicația A2.3

Calculul analitic

Asupra grinzii acționează o forță uniform distribuită p . Reacțiunile H_1 , V_1 și V_2 (figura 2.23) se determină din ecuațiile de echilibru static:

$$(\sum F)_x = 0; \quad H_1 = 0$$

$$(\sum M)_1 = 0; \quad p \cdot 8a \cdot 4a - V_2 \cdot 5a = 0$$

$$(\sum M)_2 = 0; \quad V_1 \cdot 5a - p \cdot 8a \cdot a = 0$$

Rezultă:

$$V_1 = \frac{8p \cdot a}{5} = \frac{8 \cdot 8500 \cdot 0,3}{5} = 4080 \text{ N}$$

$$V_2 = \frac{32p \cdot a}{5} = \frac{32 \cdot 8500 \cdot 0,3}{5} = 16320 \text{ N}$$

Aceste valori verifică ecuația de echilibru a forțelor pe verticală:

$$(\sum F)_y = 0; \quad V_1 + V_2 - p \cdot 8a = 0$$

Grinda are trei puncte cheie, care determină două intervale de variație a forțelor interioare. Pentru simplificarea calculelor, intervalul [1-2) va fi parcurs de la stânga la dreapta, iar intervalul [3-2) va fi parcurs de la dreapta la stânga.

Intervalul [1÷2), $x \in [0; 5a)$

$$T_{12} = V_1 - p \cdot x$$

rezultă:

$$T_1 = T_{12/x=0} = V_1 = 4080 \text{ N}$$

$$T_2 = T_{12/x=5a} = V_1 - p \cdot 5a = 4080 - 8500 \cdot 5 \cdot 0,3 = -8670 \text{ N}$$

Se observă că funcția T își schimbă semnul pe intervalul T_{12} , fiind nulă într-o secțiune caracterizată de $x = x_K$:

$$T_K = T_{12/x=x_K} = V_1 - p \cdot x_K = 0$$

rezultă:

$$x_K = \frac{V_1}{p} = \frac{4080}{8500} = 0,48 \text{ m}$$

În secțiunea în care funcția T a forței tăietoare se anulează, funcția M a momentului încovoietor prezintă o valoare maximă/minimă locală M_K (valoare maximă/minimă pe intervalul calculat).

$$M_{12} = V_1 \cdot x - p \cdot x \cdot \frac{x}{2} = V_1 \cdot x - \frac{p}{2} \cdot x^2$$

rezultă:

$$M_1 = M_{12/x=0} = 0 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$\begin{aligned} M_2 = M_{12/x=5a} &= V_1 \cdot 5a - \frac{p}{2} \cdot (5a)^2 \\ &= 4080 \cdot 5 \cdot 0,3 - \frac{8500}{2} \cdot (5 \cdot 0,3)^2 = -3442,5 \text{ N} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_K = M_{12/x=x_K} &= V_1 \cdot x_K - \frac{p}{2} \cdot x_K^2 \\ &= 4080 \cdot 0,48 - \frac{8500}{2} \cdot 0,48^2 = 979,2 \text{ N} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

Pe intervalul [1÷2) forța axială este nulă, forța interioară tăietoare variază după o funcție de gradul I, iar momentul încovoietor este descris de o funcție de gradul II.

Intervalul [3÷2), $x \in [0; 3a)$

Pe acest interval se redefineste variabila x , originea ei fiind aleasă în punctul 3. Pe intervalul [3÷2) funcțiile T și M vor fi:

$$T_{32} = p \cdot x$$

rezultă:

$$T_3 = T_{32/x=0} = 0 \text{ N}$$

$$T_2 = T_{32/x=3a} = p \cdot 3a = 8500 \cdot 3 \cdot 0,3 = 7650 \text{ N}$$

$$M_{32} = -p \cdot x \cdot \frac{x}{2} = -\frac{p}{2} \cdot x^2$$

rezultă:

$$M_3 = M_{32/x=0} = 0 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$M_2 = M_{32/x=3a} = -\frac{p}{2} \cdot (3a)^2 = -\frac{8500}{2} \cdot (3 \cdot 0,3)^2 = -3442,5 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Pe intervalul [3÷2) forța interioară tăietoare variază după o funcție de gradul I, iar momentul încovoiător este descris de o funcție de gradul II.

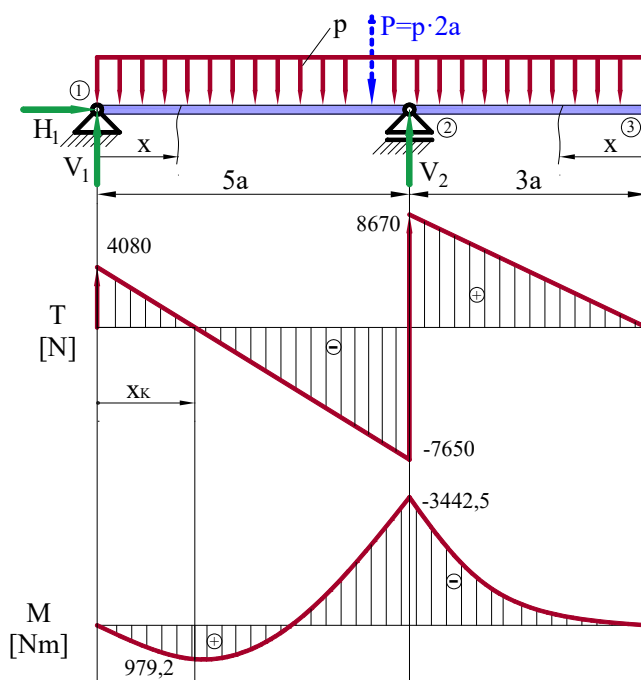


Fig. 2.23 A2.3. Diagramele funcțiilor T și M trasate analitic

Analiza FEM

Se vor parcurge pași similari cu cei prezentați la calculul reacțiunilor. Trebuie reținut că determinarea diagramelor de variație prin simulare numerică este posibilă doar dacă geometriile 3D sunt tratate ca și grinzi.

Modelarea geometriei grinzii

Axa grinzii va fi desenată într-o schiță suport, folosind-se câte un segment de dreaptă pentru fiecare tronson (lungimi 1500 mm, respectiv 900 mm).

Banda de instrumente *Structure System* din *SolidWorks* permite definirea rapidă a unor structuri de elemente cu secțiune standardizată (mod de lucru specific structurilor sudate). Activarea inițială a acestei benzi se face prin click dreapta în zona benzilor de instrumente, accesarea opțiunii *Tabs* și bifarea *Structure System*. Din această bandă de instrumente se accesează comanda *Structure System*, deschizându-se un mediu de lucru specific structurilor.

Prin comanda *Primary Member* se vor adăuga succesiv tronsoanele grinzii. În tab-ul *Member* al acestei comenzi se definește modul de definire al axei tronsonului – printr-o linie directoare (*Path Segment Member*) și se selectează segmentul de dreaptă corespunzător axei în câmpul *Select sketch entities/edges*, din zona *Path Segments*. În tab-ul *Profile* se definește standardizarea aplicată (ISO/ANSI/BSI/DIN etc.), tipul profilului (*HEA* – pentru această aplicație) și dimensiunea (*HE120A* - profil HEA cu lățime de 120 mm). Rotirea secțiunii în raport cu sistemul de referință se va realiza prin unghiul impus în câmpul *Profile Alignment*.

După adăugarea primului tronson se lansează din nou comanda *Primary Member* pentru definirea celui de-al doilea tronson (figura 2.24).

După adăugarea tronsoanelor necesare și ieșirea din mediul de lucru specific structurilor (opțiunea *Exit Structure System*), în arborele modelului 3D va apărea intrarea *Structure System1* care conține intrările *Member1* și *Member 2* bazate pe secțiune *HE120A*.

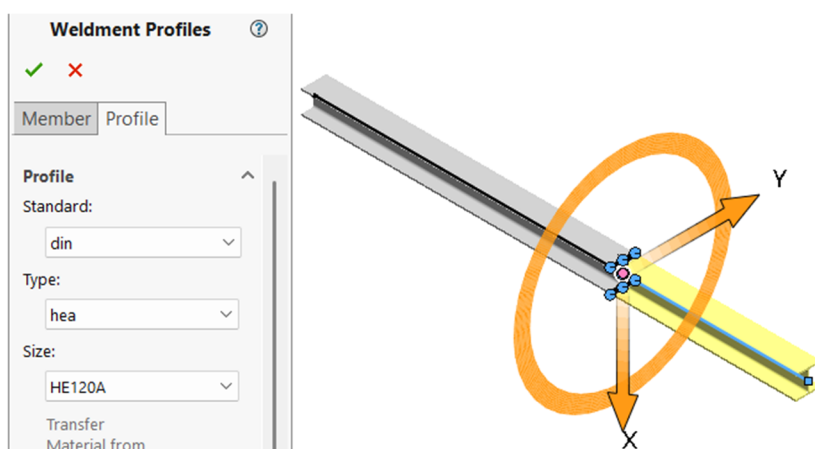


Fig. 2.24 A2.3. Adăugarea tronsoanelor grinzii

Definirea studiului de analiză statică se realizează prin comanda *New Study* din banda *Simulation*. Următoarele comenzi vor fi accesate din fereastră aferentă acestui studiu și banda de instrumente *Simulation*.

Prin click dreapta pe numele celor două componente, în arborele operațiilor din simulare, se accesează meniul contextual și comanda *Treat as Beam*, ceea ce conduce la tratarea geometriilor ca și grindă.

Proprietățile de material se aplică prin opțiunea *Apply Material*, S275JR regăsindu-se în categoria oțelurilor pentru uz structural din biblioteca DIN.

Pentru aplicarea constrângerilor (reazem fix în secțiunea 1 și reazem mobil în secțiunea 2) se accesează comanda *Fixed Geometry*, opțiunea *Use Reference Geometry*. Reazemul fix va fi aplicat prin blocarea translațiilor pe două direcții, definite în raport cu suprafața de referință (marcată cu magenta în figura 2.25). În mod similar, modelarea reazemului mobil presupune blocarea translației pe direcția normală la suprafața de referință indicată în figura 2.26.

Forța uniform distribuită va fi aplicată folosind comanda *Force* din zona *External Loads* (figura 2.27). În zona *Selection* a comenzii va fi bifată opțiunea *Beams* și indicate cele două tronsoane de grindă. Direcția forței va fi definită perpendicular pe suprafața de referință (selectată în câmpul *Face, Edge, Plane for Direction*), iar intensitatea va fi indicată prin bifarea opțiunii *Per unit length* și introducerea valorii de 8500 N/m în câmpul *Normal to Plane*. Sensul forței este controlat prin bifarea/debifarea opțiunii *Reverse direction*.

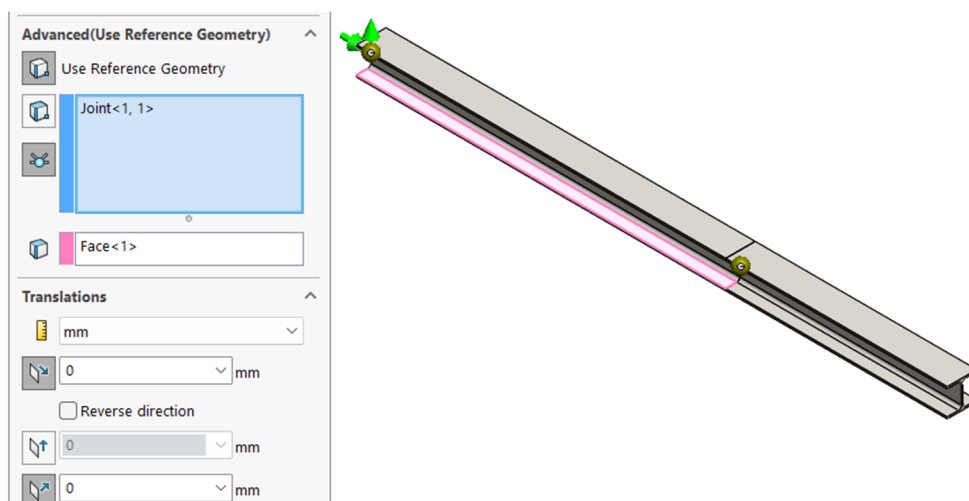


Fig. 2.25 A2.3. Aplicarea reazemului fix în secțiunea 1

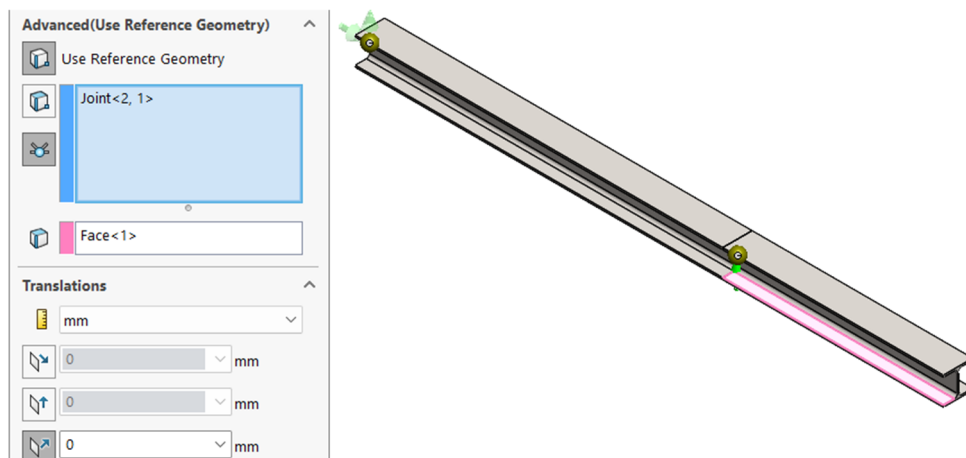


Fig. 2.26 A2.3. Aplicarea reazemului mobil în secțiunea 2

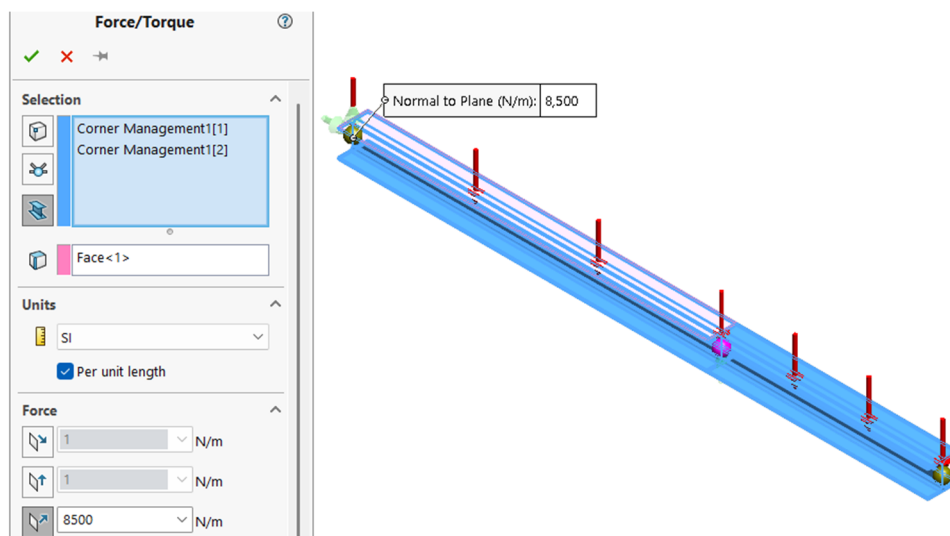


Fig. 2.27 A2.3. Aplicarea forței uniform distribuite

După realizarea discretizării (comanda *Create Mesh*) și rularea studiului (comanda *Run This Study*) vor fi vizualizate rezultatele analizei. Diagramele de variație a forțelor interioare vor fi afișate prin click dreapta pe intrarea *Results* din arborele simulării și accesarea opțiunii *Define Beam Diagrams*. Vor fi afișate forța tăietoare T_y (*Shear force in Dir2*) și momentul de încovoiere M_{iz} (*Moment about Dir1*), direcția 1 fiind asociată dimensiunii maxime a secțiunii profilului HE120A.

2. Diagrame de variație a forțelor interioare

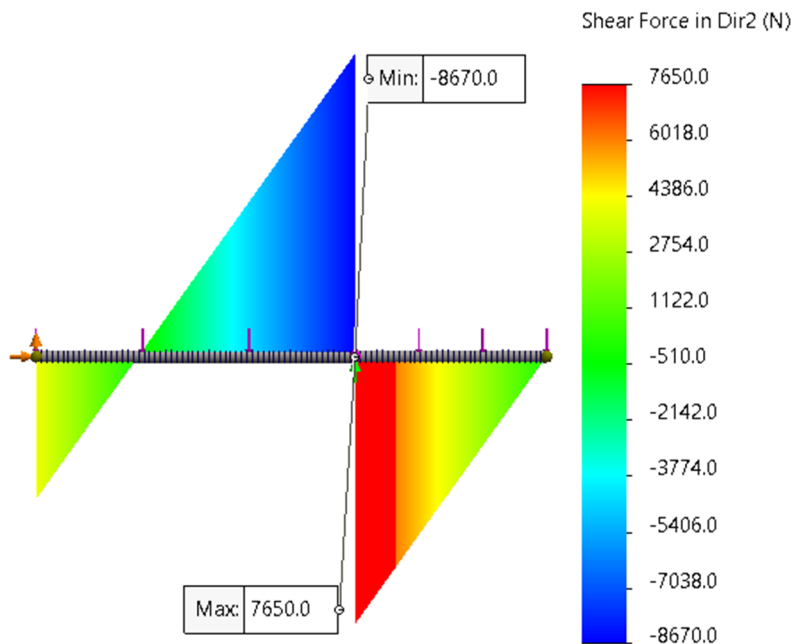


Fig. 2.28 A2.3. Diagrama de variație a forței tăietoare

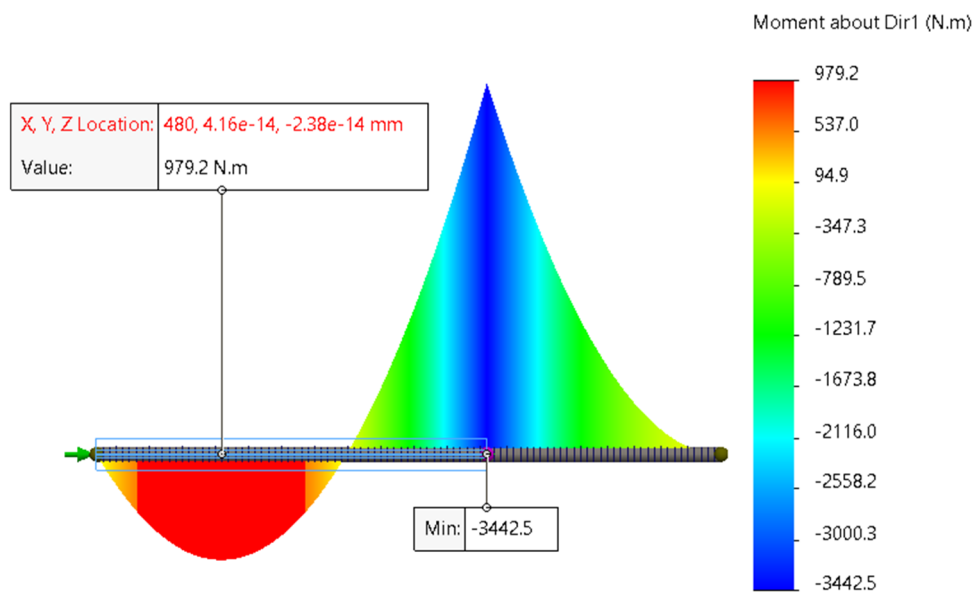


Fig. 2.29 A2.3. Diagrama de variație a momentului încovoietor

Aplicația A2.4. Să se traseze diagramele de variație a forțelor interioare pentru grinda din figura 2.30. Se cunosc: $p = 20000 \text{ N/m}$, $q = 10000 \text{ N/m}$, $M_e = 3000 \text{ N} \cdot \text{m}$, $F = 6000 \text{ N}$, $a = 0,5 \text{ m}$. Grinda are secțiune IPE100 (conform EN 10365) și este realizată din oțel C45.

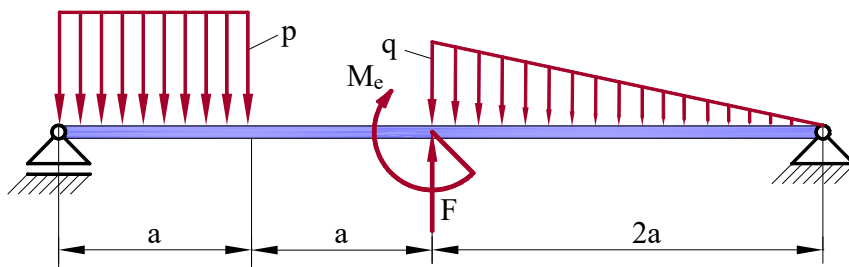


Fig. 2.30 Aplicația A2.4

Calculul analitic

Asupra grinzii acționează o forță uniform distribuită p , o forță distribuită cu variație liniară q , un moment de încovoiere exterior M_e și o forță concentrată F . Reacțiunea orizontală H_4 din reazemul 4 este zero. Reacțiunile verticale V_1 și V_4 se determină din ecuațiile de echilibru static:

$$(\sum F)_x = 0; \quad H_4 = 0$$

$$(\sum M)_1 = 0; \quad p \cdot a \cdot \frac{a}{2} + M_e - F \cdot 2a + \frac{q \cdot 2a}{2} \cdot \left(2a + \frac{1}{3} \cdot 2a\right) - V_4 \cdot 4a = 0$$

$$(\sum M)_4 = 0; \quad V_1 \cdot 4a - p \cdot a \cdot 3,5a + M_e + F \cdot 2a - \frac{q \cdot 2a}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2a = 0$$

Rezultă:

$$V_1 = \frac{21p \cdot a^2 - 6M_e - 12F \cdot a + 8q \cdot a^2}{24a}$$

$$= \frac{21 \cdot 20000 \cdot 0,5^2 - 6 \cdot 3000 - 12 \cdot 6000 \cdot 0,5 + 8 \cdot 10000 \cdot 0,5^2}{24 \cdot 0,5}$$

$$= 5916,66 \text{ N}$$

$$V_4 = \frac{3p \cdot a^2 + 6M_e - 12F \cdot a + 16q \cdot a^2}{24a}$$

$$= \frac{3 \cdot 20000 \cdot 0,5^2 + 6 \cdot 3000 - 12 \cdot 6000 \cdot 0,5 + 16 \cdot 10000 \cdot 0,5^2}{24 \cdot 0,5}$$

$$= 3083,33 \text{ N}$$

Aceste valori verifică ecuația de echilibru a forțelor pe verticală:

$$(\sum F)_y = 0; \quad V_1 + V_4 + F - p \cdot a - \frac{q \cdot 2a}{2} = 0$$

Grinda are patru puncte cheie, care determină trei intervale de variație a forțelor interioare. Intervalele $[1 \div 2)$ și $(2 \div 3)$ vor fi parcurse de la stânga la dreapta, iar intervalul $[4 \div 3)$ va fi parcurs de la dreapta la stânga.

Intervalul $[1 \div 2)$, $x \in [0; a)$

$$T_{12} = V_1 - p \cdot x$$

rezultă:

$$T_1 = T_{12/x=0} = V_1 = 5916,66 \text{ N}$$

$$T_2 = T_{12/x=a} = V_1 - p \cdot a = 5916,66 - 20000 \cdot 0,5 = -4083,34 \text{ N}$$

Se observă că funcția T_{12} își schimbă semnul pe intervalul $[1 \div 2)$, fiind nulă într-o secțiune caracterizată de $x = x_K$:

$$T_K = T_{12/x=x_K} = V_1 - p \cdot x_K = 0$$

rezultă:

$$x_K = \frac{V_1}{p} = \frac{5916,66}{20000} = 0,295 \text{ m}$$

În secțiunea în care funcția T_{12} a forței tăietoare se anulează, funcția M_{12} a momentului încovoietor prezintă o valoare maximă/minimă locală M_K .

$$M_{12} = V_1 \cdot x - p \cdot x \cdot \frac{x}{2} = V_1 \cdot x - \frac{p}{2} \cdot x^2$$

rezultă:

$$M_1 = M_{12/x=0} = 0 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$\begin{aligned} M_2 = M_{12/x=a} &= V_1 \cdot a - \frac{p}{2} \cdot a^2 = 5916,66 \cdot 0,5 - \frac{20000}{2} \cdot 0,5^2 \\ &= 458,33 \text{ N} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_K = M_{12/x=x_K} &= V_1 \cdot x_K - \frac{p}{2} \cdot x_K^2 \\ &= 5916,66 \cdot 0,295 - \frac{20000}{2} \cdot 0,295^2 = 875,16 \text{ N} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

Pe intervalul $[1 \div 2)$ forța axială este nulă, forța tăietoare variază după o funcție de gradul I, iar momentul încovoietor este descris de o funcție de gradul II.

Intervalul $(2 \div 3)$, $x \in (0; a)$

Pe acest interval se redefineste variabila x , originea ei fiind aleasă în punctul 2. Pe intervalul $(2 \div 3)$ funcțiile T și M vor fi:

$$T_{23} = V_1 - p \cdot a$$

rezultă:

$$T_2 = T_3 = V_1 - p \cdot a = 5916,66 - 20000 \cdot 0,5 = -4083,34 \text{ N}$$

$$M_{23} = V_1 \cdot (a + x) - p \cdot a \cdot \left(\frac{a}{2} + x\right)$$

rezultă:

$$\begin{aligned} M_2 = M_{23/x=0} &= V_1 \cdot a - \frac{p}{2} \cdot a^2 = 5916,66 \cdot 0,5 - \frac{20000}{2} \cdot 0,5^2 \\ &= 458,33 \text{ N} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_3 = M_{23/x=a} &= V_1 \cdot 2a - p \cdot a \cdot \frac{3a}{2} \\ &= 5916,66 \cdot 2 \cdot 0,5 - 20000 \cdot 0,5 \cdot \frac{3 \cdot 0,5}{2} \\ &= -1583,34 \text{ N} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

Pe intervalul (2÷3) forța tăietoare este constantă, iar momentul încovoiător este descris de o funcție de gradul I.

Intervalul [4÷3), $x \in [0; 2a)$

$$T_{43} = \frac{q_x \cdot x}{2} - V_4 = \frac{q}{4a} \cdot x^2 - V_4$$

unde:

$$q_x = q \cdot \frac{x}{2a}$$

rezultă:

$$T_4 = T_{43/x=0} = -V_4 = -3083,33 \text{ N}$$

$$\begin{aligned} T_3 = T_{43/x=2a} &= \frac{q}{4a} \cdot (2a)^2 - V_4 = \frac{10000}{4 \cdot 0,5} \cdot (2 \cdot 0,5)^2 - 3083,33 \\ &= 1916,67 \text{ N} \end{aligned}$$

Se observă că funcția T_{43} își schimbă semnul pe intervalul [4÷3), fiind nulă într-o secțiune caracterizată de $x = x_{K_2}$:

$$T_{K_2} = T_{12/x=x_{K_2}} = \frac{q}{4a} \cdot x_{K_2}^2 - V_4 = 0$$

rezultă:

$$x_{K_2} = \sqrt{\frac{V_4 \cdot 4a}{q}} = \sqrt{\frac{3083,33 \cdot 4 \cdot 0,5}{10000}} = 0,785 \text{ m}$$

În secțiunea în care funcția T_{43} a forței tăietoare se anulează, funcția M_{43} a momentului încovoiător prezintă o valoare maximă/minimă locală M_{K_2} .

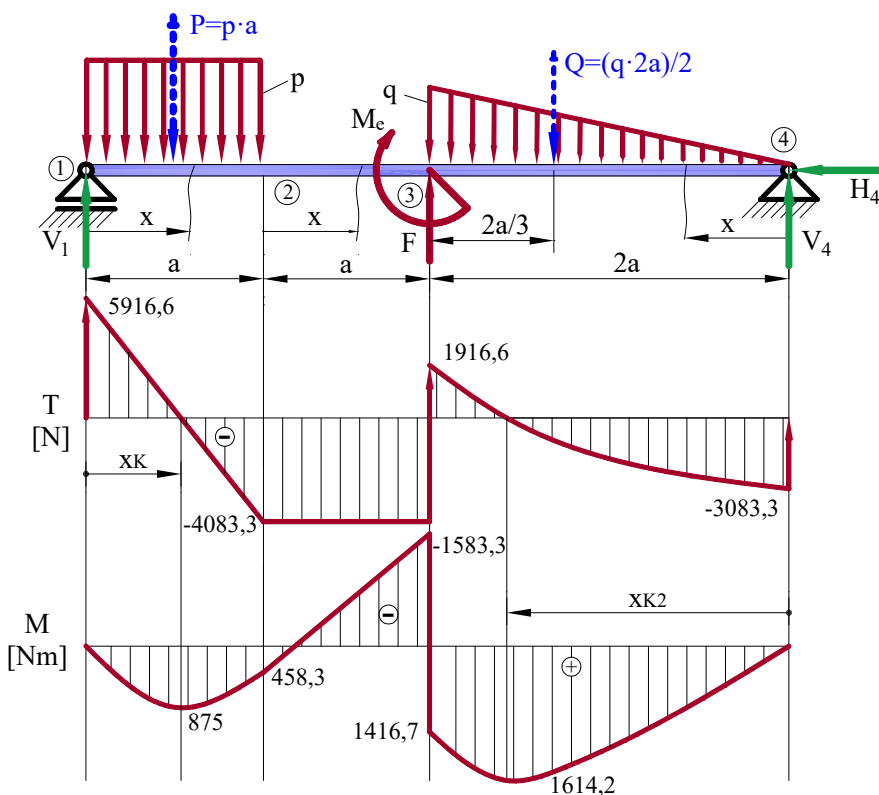


Fig. 2.31 A2.4. Diagramele funcțiilor T și M

$$M_{43} = V_4 \cdot x - \frac{1}{2} \cdot q_x \cdot x \cdot \frac{1}{3} \cdot x = V_4 \cdot x - \frac{q}{12a} \cdot x^3$$

rezultă:

$$M_4 = M_{43/x=0} = 0 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$M_3 = M_{43/x=2a} = V_4 \cdot 2a - \frac{q}{12a} \cdot (2a)^3$$

$$= 3083,33 \cdot 2 \cdot 0,5 - \frac{10000}{12 \cdot 0,5} \cdot (2 \cdot 0,5)^3$$

$$= 1416,66 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$\begin{aligned}
 M_K &= M_{43/x=x_{K_2}} = V_4 \cdot x_{K_2} - \frac{q}{12a} \cdot x_{K_2}^3 \\
 &= 3083,33 \cdot 0,785 - \frac{10000}{12 \cdot 0,5} \cdot 0,785^3 \\
 &= 1614,18 \text{ N} \cdot \text{m}
 \end{aligned}$$

Pe intervalul $[4 \div 3)$ forța tăietoare variază după o funcție de gradul II, iar momentul încovoietor este descris de o funcție de gradul III.

Analiza FEM

Pentru modelarea tronsoanelor grinzii se utilizează mediul de lucru specific structurilor (accesat prin comanda *Structure System* din banda de instrumente cu același nume). Schița suport care definește axa grinzii va fi alcătuită din trei segmente de dreaptă, coliniare, de lungime 500 mm, 500 mm, respectiv 1000 mm. Prin aplicarea comenzii *Primary Member* și selecția tuturor celor trei segmente în câmpul *Path Segments* se vor obține simultan cele trei tronsoane (figura 2.32). Secțiunea acestora va fi selectată în tab-ul *Profile* al comenzii (pentru aplicația A2.4 se folosește profilul IPE cu înălțime de 100 mm, standardizare DIN).

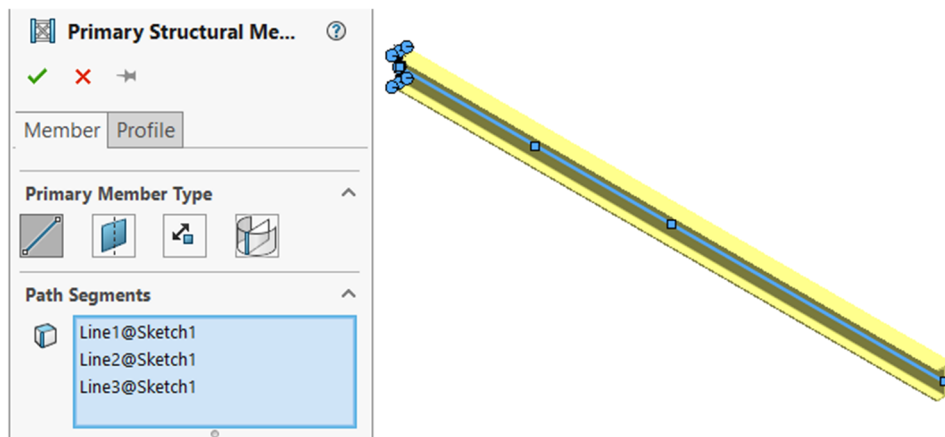


Fig. 2.32 A2.4 Definirea tronsoanelor grinzii

Pentru definirea studiului de analiză statică (comanda *New Study* din banda *Simulation*), tratarea ca și grindă a celor trei tronsoane (opțiunea *Treat as Beam*, din meniul contextual afișat prin click-dreapta pe numele tronsoanelor, în arborele simulării) și aplicarea proprietăților de material (comanda *Apply Material*) se parcurg aceiași pași ca și la aplicația A2.3.

Aplicarea constrângerilor (reazem mobil în secțiunea 1 și reazem fix în secțiunea 4) se realizează folosind comanda *Fixed Geometry*, opțiunea *Use Reference Geometry*. Pentru punctele cheie (*joint*) corespunzătoare secțiunilor 1 și 4 vor fi blocate deplasările pe direcția verticală (reazemul mobil), respectiv pe direcția verticală și în lungul grinzii (reazemul fix), aceste direcții fiind definite în raport cu suprafața de referință selectată de utilizator (*Face1* în exemplul din figura 2.33)

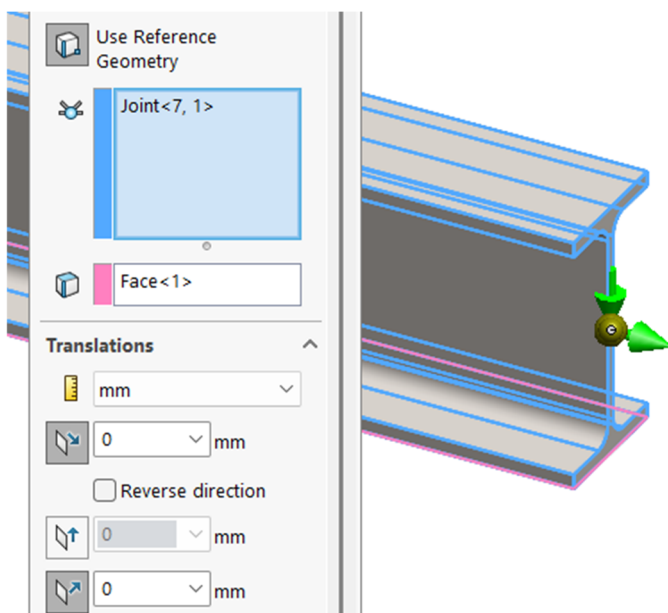


Fig. 2.33 A2.4. Definirea reazemului fix

Pentru aplicarea încărcărilor se folosește comanda *Force* care permite definirea atât a componentelor de tip forță, cât și a celor de tip moment (*Torque*).

Forța uniform distribuită $p = 20000 \text{ N/m}$ se aplică pe tronsonul [1÷2), selectat în câmpul aferent opțiunii *Beams* din comanda *Force*. Intensitatea distribuției va fi definită după bifarea opțiunii *Per unit length*, normal pe suprafața de referință (suprafața plană superioară în exemplul din figura 2.34).

Forța distribuită după variație liniară $q = 10000 \text{ N/m}$ se aplică pe tronsonul (3÷4] al grinzii. Aplicând o forță distribuită, și în acest caz este necesar să se activeze opțiunea *Per unit length* (exprimarea forței în unitate de forță pe unitate de lungime, N/m). Activarea opțiunii *Nonuniform distribution* și selecția metodei *Table Driven Load Distribution* va permite definirea variației intensității forței distribuite sub formă tabelară. În acest exemplu, aplicându-se o variație liniară, sunt necesare doar valorile la capăt de interval: 0 N/m în secțiunea 3 și 10000 N/m în secțiunea 4.

Valorile pot fi corelate cu distanța efectivă raportată la capătul intervalului (opțiunea *Distance*) sau cu procente din lungimea tronsonului (opțiunea *Percentage*). Sensul de parcurgere al intervalului este evidențiat prin două săgeți orientate după axa grinzii (figura 2.35) și poate fi inversat prin opțiunea *Flip origin*.

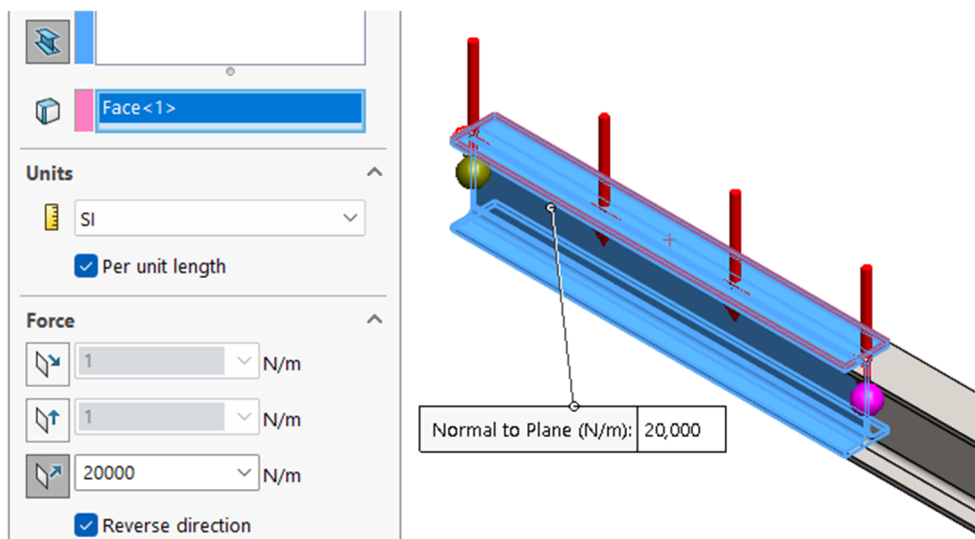


Fig. 2.34 A2.4. Aplicarea forței uniform distribuite p

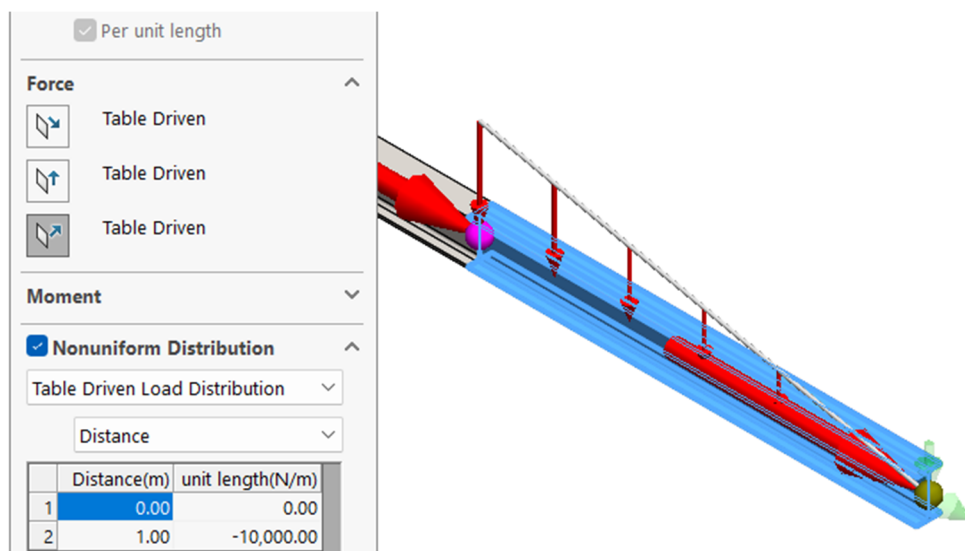


Fig. 2.35 A2.4. Aplicarea forței distribuite liniar q

Momentul de încovoiere $M_e = 3000 \text{ N} \cdot \text{m}$ va fi aplicat pe nodul (*joint-ul*) corespunzător secțiunii 3, axa în jurul căreia acționează fiind definită în raport cu o suprafață de referință verticală (marcată cu magenta în exemplul din figura 2.36). În câmpul *Normal to Plane* se va introduce valoarea momentului, iar sensul său este dat de regula burghiului drept, fiind marcat pe ecran printr-o săgeată subțire cu capăt cilindric (sens orar de rotație privind perpendicular pe grindă, cu secțiunea 1 în stânga, pentru exemplul dat). Schimbarea sensului de rotație se realizează prin bifarea opțiunii *Reverse direction*.

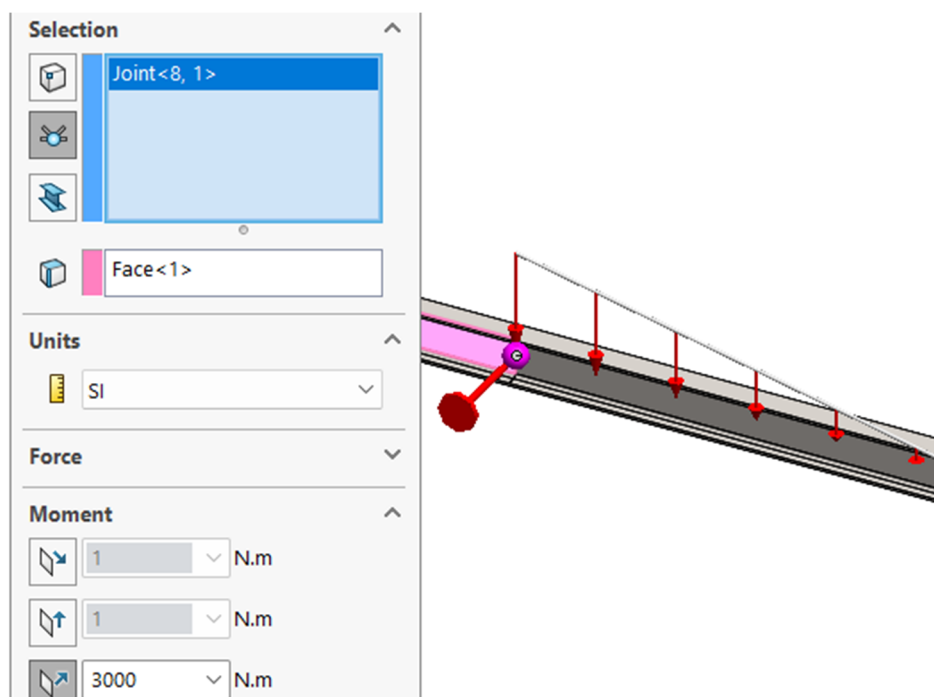


Fig. 2.36 A2.4. Aplicarea momentului de încovoiere M_e

Forța concentrată $F = 6000 \text{ N}$ va fi aplicată în același nod ca și momentul, perpendicular pe o suprafață de referință orizontală (figura 2.37).

Acționând în același nod, momentul și forța concentrată pot fi aplicate și simultan, selectând o suprafață de referință comună și completând câmpul valoric corespunzător direcției forței și câmpul valoric corespunzător axei în jurul căreia acționează momentul (pentru aplicația A2.4, suprafața de referință poate să fie verticală, axa momentului fiind perpendiculară pe aceasta, iar direcția forței orientată după o direcție paralelă cu aceasta). Sensurile celor două încărcări vor fi controlate independent, prin opțiunile *Reverse direction* aferente fiecărui câmp valoric.

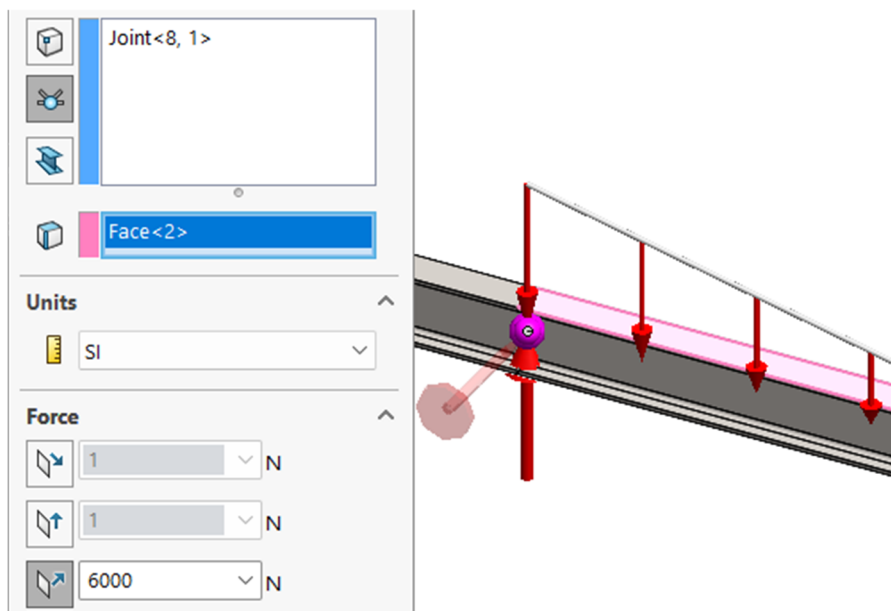


Fig. 2.37 A2.4. Aplicarea forței concentrate F

În figura 2.38 sunt sintetizate toate constrângerile și încărcările aplicate grinzii A2.4.

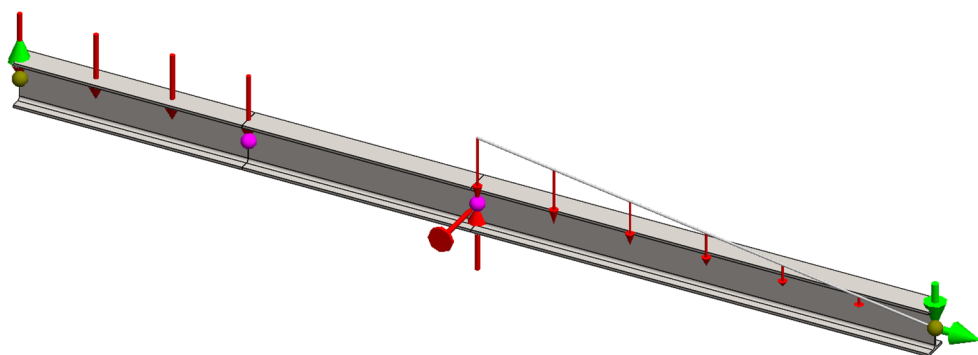


Fig. 2.38 A2.4. Constrângeri și încărcări

După generarea rețelei de elemente finite și rularea studiului, pot fi afișate rezultatele. Diagramele de variație ale forței tăietoare (*Shear force in Dir1*) și momentului încovoietor (*Moment about Dir2*), afișate prin opțiunea *Define Beam Diagrams* (click dreapta pe intrarea *Results* din arborele simulării), indică valori similare cu cele obținute analitic. Valorile extreme sunt afișate prin activarea

2. Diagrame de variație a forțelor interioare

opțiunilor *Show min annotation* / *Show max annotation* din tabul *Chart Options* (meniul contextual afișat prin click dreapta pe diagramă în arborele simulării). Valorile punctuale (capete de intervale, maxime/minime locale) sunt afișate folosind comanda *Probe* din zona *Plot Tools*, banda *Simulation*.

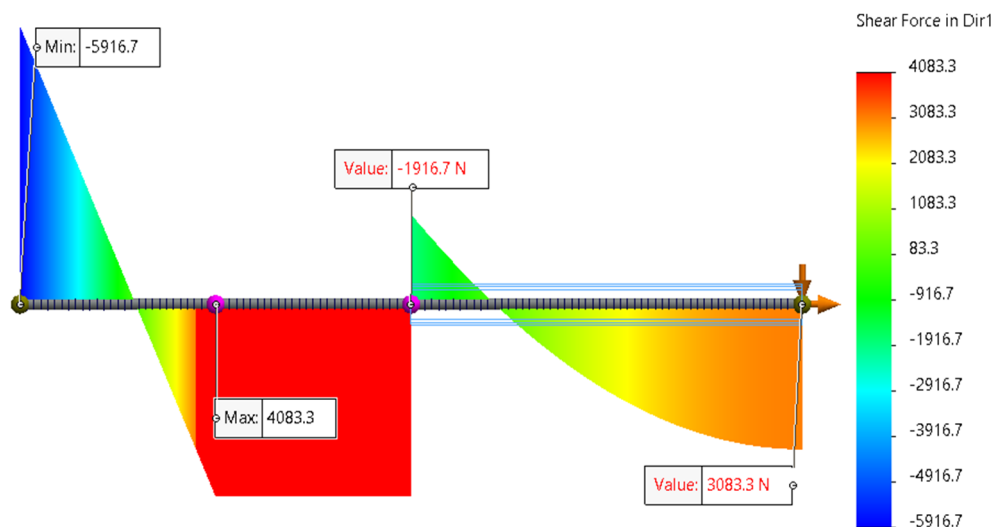


Fig. 2.39 A2.4. Diagrama forței tăietoare

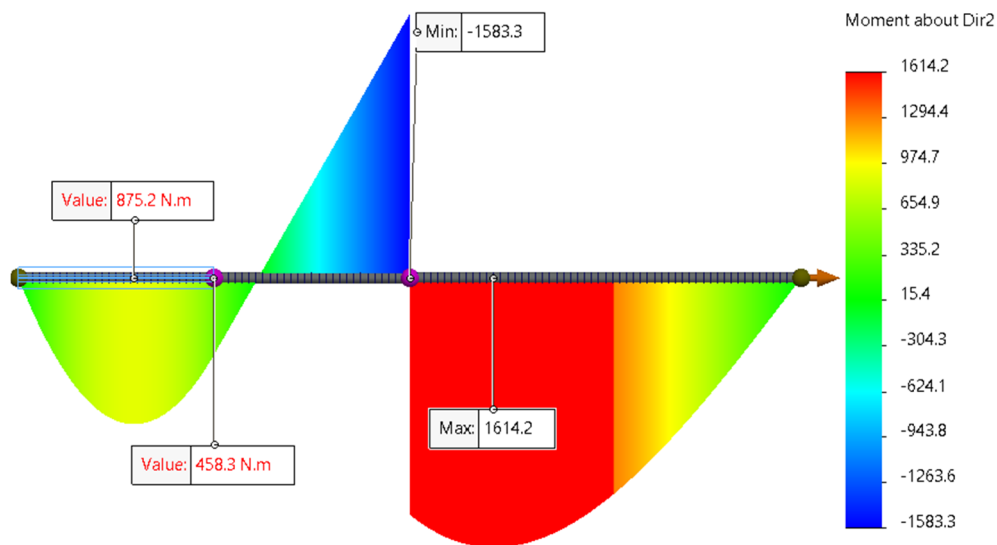


Fig. 2.40 A2.4. Diagrama momentului încovoietor

2.3 DIAGrame DE VARIAȚIE A FORȚELOR INTERIOARE LA BARE CURBE PLANE

Forțele interioare N , T și M sunt orientate la barele curbe plane după un sistem de referință care are originea în punctul de calcul și are axele orientate după:

- tangenta la curba barei în punctul de calcul (axă după care este orientată forța axială N);
- perpendiculara pe tangenta la curbă în punctul de calcul (axă după care este orientată forța tăietoare T);
- perpendiculara pe planul axei de simetrie a barei (axă după care este orientat momentul încovoietor M).

Funcțiile de variație N , T și M sunt definite pentru fiecare interval al barei în funcție de o variabilă unghiulară (notată aici cu β).

Aplicația A2.5. Să se determine reacțiunile și să se traseze diagramele de variație a forțelor interioare pentru bara în arc de cerc din figura 2.41. Se cunosc: forța $F = 1400 \text{ N}$, raza $r = 0,75 \text{ m}$. Bara este realizată din țevă dreptunghiulară $120 \text{ mm} \times 80 \text{ mm} \times 8 \text{ mm}$ (cu lățimea $l = 80 \text{ mm}$ dispusă pe direcția razei). Materialul barei este oțelul 1.0060 (E335).

Calculul analitic

Axa barei are lungimea $\pi \cdot r$ (jumătate din lungimea unui cerc de raza r). Bara este încastrată și este supusă unei forțe verticale $2F$ în secțiunea de mijloc, respectiv unei forțe orizontale F la capătul liber.

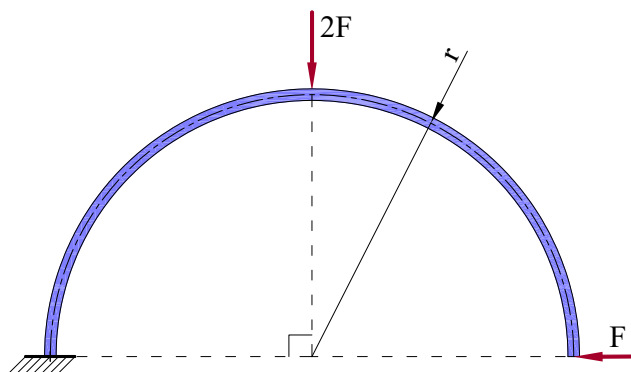


Fig. 2.41 Aplicația A2.5

În încastrare apar reacțiunile H_1, V_1 și M_1 , care se vor calcula din ecuațiile de echilibru static:

$$(\sum F)_x = 0; \quad H_1 - F = 0$$

$$(\sum F)_y = 0; \quad V_1 - 2F = 0$$

$$(\sum M)_1 = 0; \quad 2F \cdot r - M_1 = 0$$

Rezultă: $H_1 = 1400 \text{ N}$, $V_1 = 2800 \text{ N}$ și $M_1 = 2100 \text{ N} \cdot \text{m}$. Pentru verificarea valorilor se poate scrie suma momentelor într-un alt punct al barei:

$$(\sum M)_2 = 0; \quad V_1 \cdot r - H_1 \cdot r - M_1 + F \cdot r = 0$$

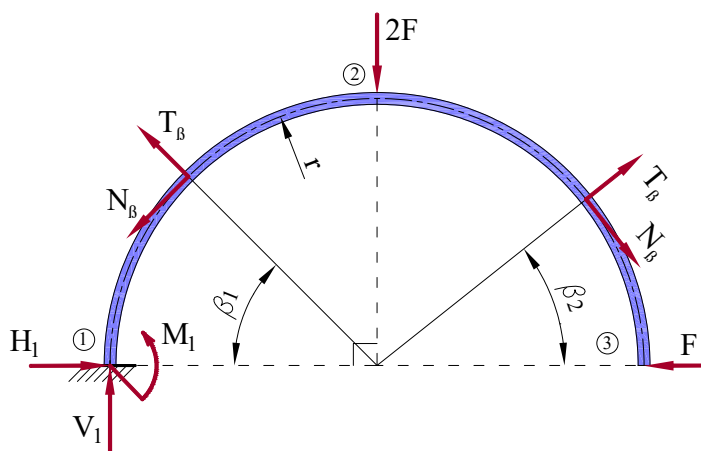


Fig. 2.42 A2.5. Reacțiuni și intervale de calcul

Încastrarea și forțele exterioare determină trei puncte cheie ale barei curbe și două intervale de calcul. Variabilele de parcurgere a acestor intervale β_1 și β_2 vor lua valori în domeniul $[0; \pi / 2)$ – figura 2.42.

Intervalul [1-2), $\beta_1 \in [0; \pi / 2)$.

Unghiul β_1 va fi măsurat pornind de la direcția orizontală a încastrării, în sens orar. Funcțiile N , T și M au următoarele expresii pe acest interval:

$$N_{12} = -H_1 \cdot \sin\beta_1 - V_1 \cdot \cos\beta_1$$

$$T_{12} = V_1 \cdot \sin \beta_1 - H_1 \cdot \cos \beta_1$$

$$M_{12} = V_1 \cdot r \cdot (1 - \cos \beta_1) - H_1 \cdot r \cdot \sin \beta_1 - M_1$$

Cele trei funcții sunt caracterizate de variații rezultate din combinații de variații sinus – cosinus. Având în vedere că reacțiunile H_1 și V_1 nu sunt egale, este necesară determinarea unghiului β_1 pentru care funcția T_{12} se anulează și pentru care funcțiile N_{12} și M_{12} prezintă maxime/minime locale.

$$T_K = 0$$

$$T_K = T_{12/\beta_1=\beta_K} = V_1 \cdot \sin \beta_K - H_1 \cdot \cos \beta_K = 0$$

$$\tan(\beta_K) = \frac{H_1}{V_1}$$

$$\beta_K = \text{atan}\left(\frac{H_1}{V_1}\right) = \text{atan}\left(\frac{1400}{2400}\right) = 26,2551^\circ = 0,4636 \text{ rad}$$

Vor rezulta valorile:

$$\begin{aligned} N_1 = N_{12/\beta_1=0} &= -H_1 \cdot \sin 0 - V_1 \cdot \cos 0 \\ &= -1400 \cdot \sin 0 - 2800 \cdot \cos 0 = -2800 \text{ N} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_2 = N_{12/\beta_1=\frac{\pi}{2}} &= -H_1 \cdot \sin \frac{\pi}{2} - V_1 \cdot \cos \frac{\pi}{2} \\ &= -1400 \cdot \sin \frac{\pi}{2} - 2800 \cdot \cos \frac{\pi}{2} = -1400 \text{ N} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_K = N_{12/\beta_1=\beta_K} &= -H_1 \cdot \sin \beta_K - V_1 \cdot \cos \beta_K \\ &= -1400 \cdot \sin(0,4636) - 2800 \cdot \cos(0,4636) \\ &= -3130,5 \text{ N} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_1 = T_{12/\beta_1=0} &= V_1 \cdot \sin 0 - H_1 \cdot \cos 0 = 2800 \cdot \sin 0 - 1400 \cdot \cos 0 \\ &= -1400 \text{ N} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_2 = T_{12/\beta_1=\frac{\pi}{2}} &= V_1 \cdot \sin \frac{\pi}{2} - H_1 \cdot \cos \frac{\pi}{2} = 2800 \cdot \sin \frac{\pi}{2} - 1400 \cdot \cos \frac{\pi}{2} \\ &= 2800 \text{ N} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_1 = M_{12/\beta_1=0} &= V_1 \cdot r \cdot (1 - \cos 0) - H_1 \cdot r \cdot \sin 0 - M_1 \\ &= 2800 \cdot 0,75 \cdot (1 - \cos 0) - 1400 \cdot 0,75 \cdot \sin 0 \\ &\quad - 2100 = -2100 \text{ N} \cdot m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_2 &= M_{12/\beta_1=\frac{\pi}{2}} = V_1 \cdot r \cdot \left(1 - \cos \frac{\pi}{2}\right) - H_1 \cdot r \cdot \sin \frac{\pi}{2} - M_1 \\
 &= 2800 \cdot 0,75 \cdot \left(1 - \cos \frac{\pi}{2}\right) - 1400 \cdot 0,75 \cdot \sin \frac{\pi}{2} \\
 &\quad - 2100 = -1050 \text{ N} \cdot \text{m} \\
 M_K &= M_{12/\beta_1=\beta_K} = V_1 \cdot r \cdot (1 - \cos \beta_K) - H_1 \cdot r \cdot \sin \beta_K - M_1 \\
 &= V_1 \cdot r \cdot (1 - \cos(0,4636)) - H_1 \cdot r \cdot \sin(0,4636) \\
 &\quad - M_1 = -2347,9 \text{ N} \cdot \text{m}
 \end{aligned}$$

Intervalul [3-2), $\beta_2 \in [0; \pi / 2)$.

Unghiul β_2 va fi măsurat pornind de la direcția orizontală corespunzătoare punctului 2, în sens trigonometric. Funcțiile N, T și M au următoarele expresii:

$$N_{32} = -F \cdot \sin \beta_2$$

rezultă:

$$N_3 = N_{32/\beta_2=0} = -F \cdot \sin 0 = 0 \text{ N}$$

$$N_2 = N_{32/\beta_2=\frac{\pi}{2}} = -F \cdot \sin \frac{\pi}{2} = -1400 \cdot \sin \frac{\pi}{2} = -1400 \text{ N}$$

$$T_{32} = F \cdot \cos \beta_2$$

rezultă:

$$T_3 = T_{32/\beta_2=0} = F \cdot \cos \beta_2 = 1400 \cdot \cos \beta_2 = 1400 \text{ N}$$

$$T_2 = T_{32/\beta_2=\frac{\pi}{2}} = F \cdot \cos \frac{\pi}{2} = 0 \text{ N}$$

$$M_{32} = -F \cdot r \cdot \sin \beta_2$$

rezultă:

$$M_3 = M_{32/\beta_2=0} = -F \cdot r \cdot \sin 0 = 0 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$\begin{aligned}
 M_2 &= M_{32/\beta_2=\frac{\pi}{2}} = -F \cdot r \cdot \sin \frac{\pi}{2} = -1400 \cdot 0,75 \cdot \sin \frac{\pi}{2} \\
 &= -1050 \text{ N} \cdot \text{m}
 \end{aligned}$$

Se observă că pe intervalul [3÷2) funcțiile N, T și M sunt caracterizate de variații simple, sinusoidale sau cosinusoidale, fiind nule la un capăt de interval ($N_3 = 0 \text{ N}$, $T_2 = 0 \text{ N}$, $M_3 = 0 \text{ N}$) și crescând constant până la celălalt capăt.

La diagramele de variație ale forței axiale N și forței tăietoare T (figura 2.43) valorile pozitive sunt reprezentate în afara arcului de cerc, iar valorile negative în interiorul arcului de cerc. La diagrama de moment M valorile negative sunt reprezentate în exteriorul arcului de cerc (momentul este dispus pe fibra întinsă).

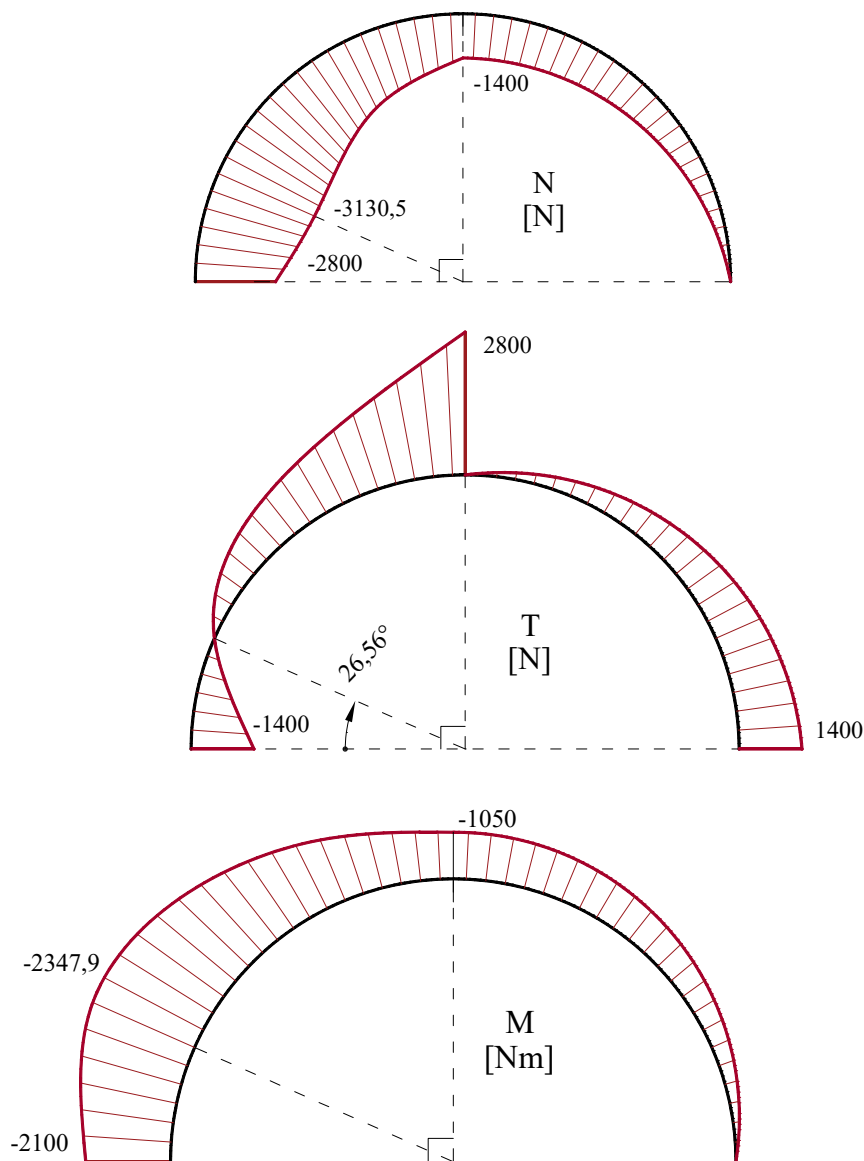


Fig. 2.43 A2.5. Diagramele funcțiilor N , T și M

Analiza FEM

Pentru modelarea geometriei 3D se va crea mai întâi o schiță suport în care se vor trasa cele două arce de cerc care definesc axa barei curbe (este necesar să fie realizate două arce de cerc, pentru a se obține în etapa următoare două tronsoane distincte de bară).

Folosind mediul de lucru *Structure System*, comanda *Primary Member*, se vor crea simultan cele două tronsoane circulare cu secțiune de tip țeavă dreptunghiulară, 120 mm x 80 mm x 8 mm, standardizare ISO (figura 2.44)

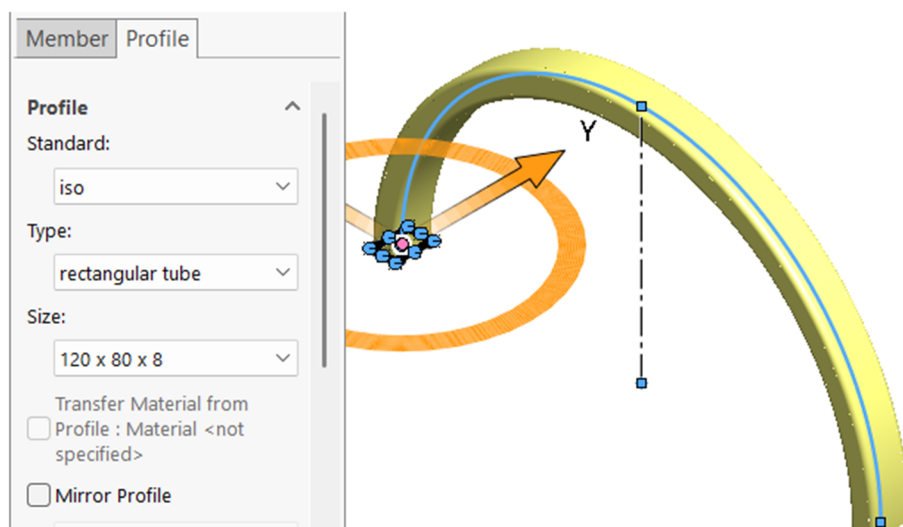


Fig. 2.44 A2.5. Generarea tronsoanelor barei

În următorii pași se va genera un studiu static (comanda *New Study* din banda *Simulation*), se vor trata cele două tronsoane ca bară (opțiunea *Treat as Beam* din meniul contextual, accesat prin click dreapta pe componenta structurală în arborele simulării) și se vor asocia proprietățile de material (opțiunea *Apply material* din banda *Simulation*).

Aplicarea încăstrării se va realiza prin comanda *Fixed Geometry*, selectând opțiunea cu același nume și nodul (*joint*-ul) aferent secțiunii 1 a barei (figura 2.45).

Forța verticală și forța orizontală vor fi aplicate prin două lansări ale comenzii *Force*, selectând nodul pe care acționează, suprafața de referință (capătul orizontal al barei, marcat cu magenta în figura 2.46) și introducând magnitudinea în câmpul corespunzător direcției dorite. Sensul forței este controlat prin opțiunea *Reverse direction*.

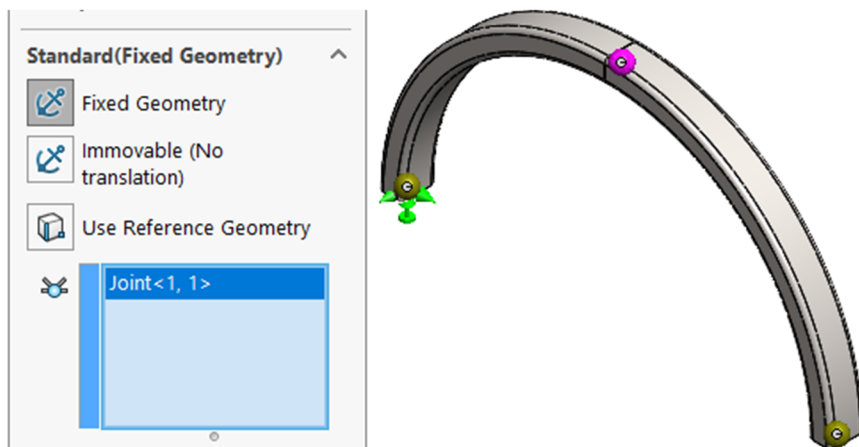


Fig. 2.45 A2.5. Aplicarea încastrării

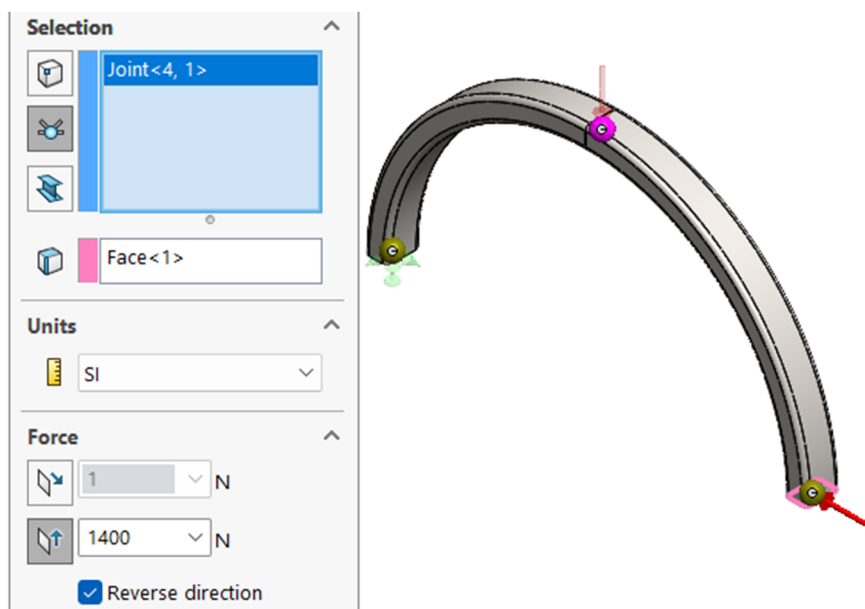


Fig. 2.46 A2.5. Aplicarea forței orizontale

După generarea rețelei de elemente finite (comanda *Create Mesh*) și rularea studiului (comanda *Run This Study*) vor putea fi vizualizate diagramele de variație ale forțelor interioare (comanda *Define Beam Diagrams* din meniul contextual, afișat prin click dreapta pe intrarea *Results* din arborele simulării).

Dispunerea diagramelor N, T și M depinde de raportul dimensiunilor secțiunii transversale a grinzii. În cazul dat, lățimea de 120 mm reprezintă cota maximă a secțiunii, definind direcția 1 de reprezentare. După această direcție va fi reprezentată diagrama forței axiale, dispusă pe o suprafață curbată, construită după axa barei (figura 2.47). Diagrama forței tăietoare T va fi redată pe suprafața care conține axa barei și direcția forțelor care o generează (figura 2.48). Se observă că la barele curbe diagramele N și T obținute prin simulare prezintă variație discretă (cu salturi între valori), aceasta fiind o limitare a softului, în realitate variația fiind continuă. Datorită acestei afișări în trepte a valorilor, se vor obține diferențe între simulare și calculul analitic. Numărul de trepte de valori este influențat de zveltețea barei. Cu cât raportul dintre lungimea barei și dimensiunea maximă a secțiunii transversale este mai mare, cu atât numărul de trepte va crește (tinzând spre o variație continuă), ceea ce conduce la o mai mare apropiere a rezultatelor de cele calculate analitic.

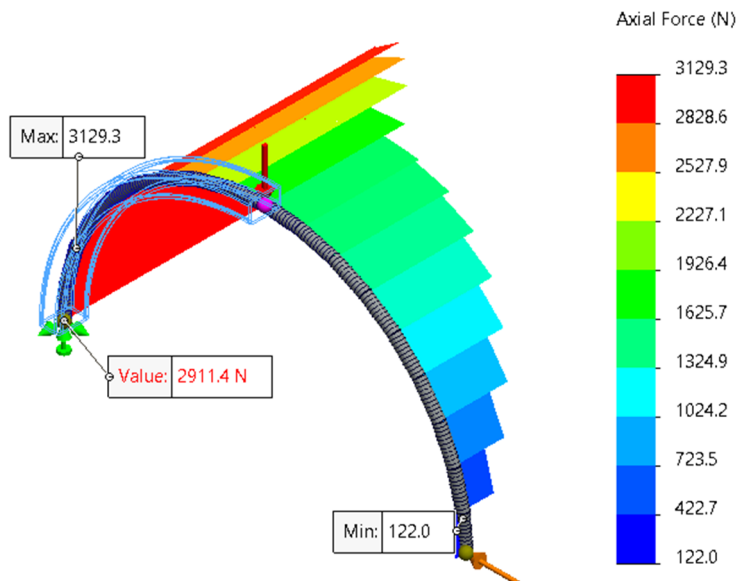


Fig. 2.47 A2.5. Diagrama forței axiale

Diagrama momentului încovoietor pentru aplicația A2.5 va fi redată după direcția 1, fiind dispusă după o suprafață curbată (figura 2.49). Această diagramă prezintă o variație continuă, apropierea rezultatelor de cele obținute în calculul analitic fiind foarte bună. La cele trei diagrame prezentate în acest exemplu s-au folosit opțiunile de afișare a valorilor maxime și minime, iar valorile specifice anumitor secțiuni au fost redată prin comanda *Probe* din zona *Plot Tools*.

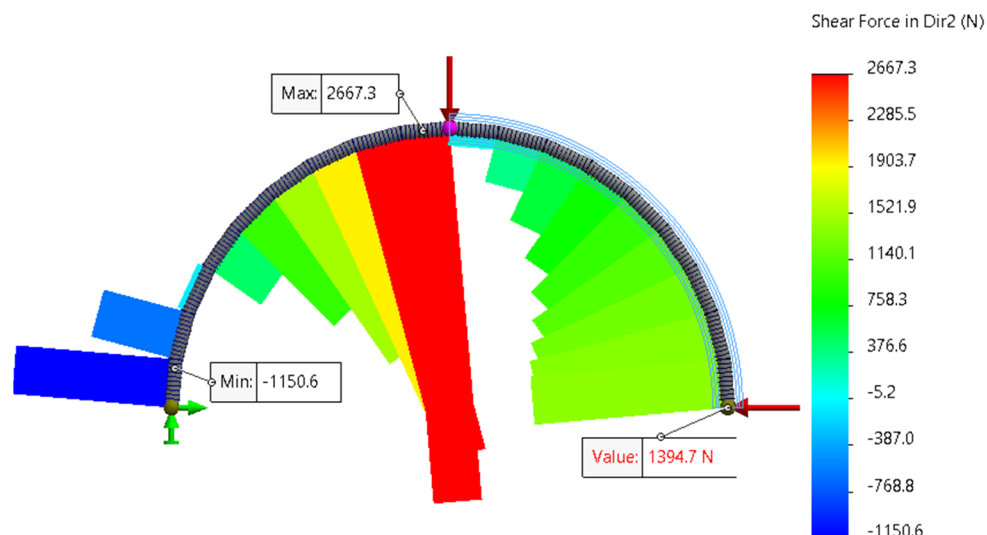


Fig. 2.48 A2.5. Diagrama forței tăietoare

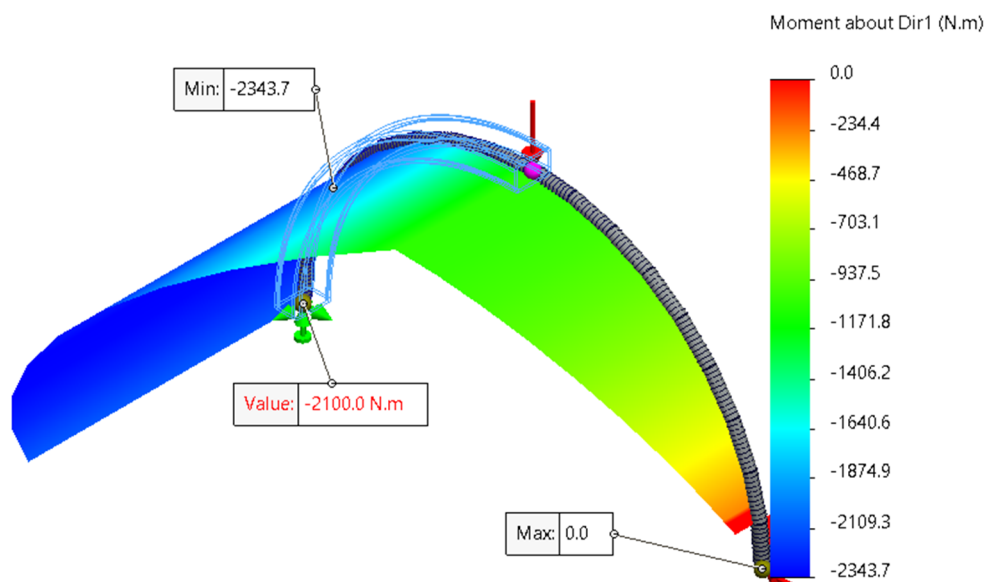


Fig. 2.49 A2.5. Diagrama momentului încovoietor

Înțelegând limitările prezentate mai sus, construirea diagramelor forțelor interioare la bare curbe este o metodă care poate fi folosită pentru vizualizarea tendințelor de variație și compararea acestora cu calculul teoretic.

2.4 DIAGrame DE VARIAȚIE A FORȚELOR INTERIOARE LA CADRE PLANE

La cadrele plane apare o transformare a efectelor acolo unde axa barei își schimbă orientarea. Spre exemplu, într-un punct în care două tronsoane se unesc sub un unghi de 90° , forța tăietoare se transformă în forță axială (și viceversa), iar momentul de încovoiere se rabate. Cu alte cuvinte, o forță exterioară care determină un efect de întindere pe un prim tronson al cadrului, va determina un efect de forfecare sau încovoiere pe un al doilea tronson, poziționat perpendicular pe primul. În exemplul prezentat în cele ce urmează se detaliază modul de calcul analitic și prin simulare numerică pentru diagramele de variație a forțelor interioare la cadre plane.

Aplicația A2.6. Să se traseze diagramele de variație ale forțelor interioare N , T și M pentru cadrul plan din figura de mai jos. Se consideră relația de legătură $F = p \cdot a$ între cele două forțe exterioare. Se cunosc: $p = 2000 \text{ N/m}$, $a = 0,5 \text{ m}$. Cadrul este realizat din țevă din oțel S235, cu secțiune dreptunghiulară cu dimensiunile exterioară $h = 60 \text{ mm}$, $b = 40 \text{ mm}$ și grosime 3,2 mm.

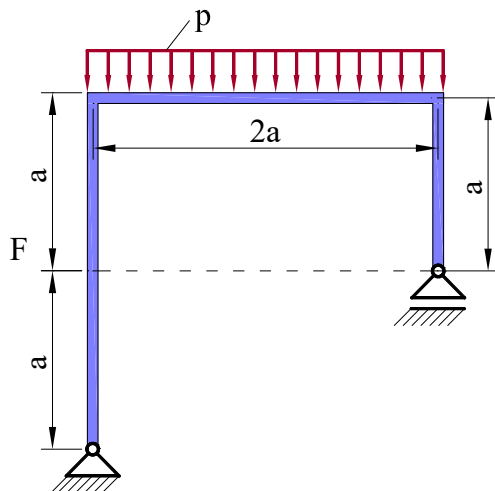


Fig. 2.50 Aplicația A2.6

Calculul analitic

Având relația de legătură din enunț, se poate calcula valoarea forței concentrate F care acționează în secțiunea 2:

$$F = p \cdot a = 2000 \cdot 0,5 = 1000 \text{ N}$$

Reacțiunile din cele două reazeme se calculează din ecuațiile de echilibru static:

$$(\sum F)_x = 0; \quad F - H_1 = 0$$

$$(\sum M)_1 = 0; \quad F \cdot a + p \cdot 2a \cdot a - V_5 \cdot 2a = 0$$

$$(\sum M)_5 = 0; \quad V_1 \cdot 2a + H_1 \cdot a - p \cdot 2a \cdot a = 0$$

Rezultă:

$$H_1 = F = 1000 \text{ N}$$

$$V_1 = \frac{2p \cdot a^2 - H_1 \cdot a}{2a} = \frac{2 \cdot 2000 \cdot 0,5^2 - 1000 \cdot 0,5}{2 \cdot 0,5} = 500 \text{ N}$$

$$V_5 = \frac{F \cdot a + p \cdot 2a^2}{2a} = \frac{1000 \cdot 0,5 + 2000 \cdot 2 \cdot 0,5^2}{2 \cdot 0,5} = 1500 \text{ N}$$

Aceste valori verifică ecuația de echilibru a forțelor după direcția y :

$$(\sum F)_y = 0; \quad V_1 - p \cdot 2a + V_5 = 0$$

Cadru are cinci puncte caracteristice, care determină patru intervale de variație. Pentru simplificarea calculelor, intervalele $[1 \div 2)$, $(2 \div 3)$ și $(3 \div 4)$ vor fi parcurse de la stânga la dreapta, iar intervalul $[5 \div 4)$ va fi parcurs de la dreapta la stânga.

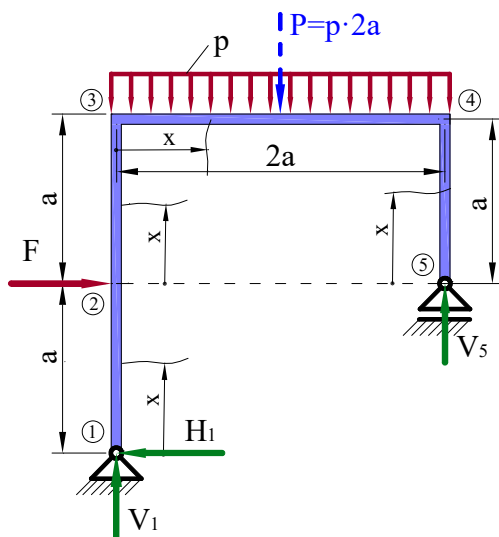


Fig. 2.51 A2.6. Reacțiuni și intervale de calcul

Intervalul [1÷2), $x \in [0; a)$

Funcțiile N, T și M au următoarele expresii pe acest interval:

$$N_{12} = -V_1$$

rezultă:

$$N_1 = N_2 = -V_1 = -500 \text{ N}$$

$$T_{12} = H_1$$

rezultă:

$$T_1 = T_2 = H_1 = 1000 \text{ N}$$

$$M_{12} = H_1 \cdot x$$

rezultă:

$$M_1 = M_{12/x=0} = 0 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$M_2 = M_{12/x=a} = H_1 \cdot a = 1000 \cdot 0,5 = 500 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Se observă că pe intervalul [1÷2) forța axială și forța tăietoare sunt constante, iar momentul încovoietor variază după o funcție de gradul I.

Intervalul (2÷3), $x \in (0; a)$

Pe acest interval se redefinește variabila x , originea ei fiind aleasă în punctul 2. Pe intervalul (2÷3) funcțiile N, T și M vor fi:

$$N_{23} = -V_1$$

rezultă:

$$N_2 = N_3 = -V_1 = -500 \text{ N}$$

$$T_{23} = H_1 - F = 0$$

rezultă:

$$T_2 = T_3 = 0 \text{ N}$$

$$M_{23} = H_1 \cdot (a + x) - F \cdot x$$

rezultă:

$$M_2 = M_{23/x=0} = H_1 \cdot a = 1000 \cdot 0,5 = 500 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$M_3 = M_{23/x=a} = H_1 \cdot 2a - F \cdot a = 1000 \cdot 2 \cdot 0,5 - 1000 \cdot 0,5 = 500 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Pe intervalul (2÷3) forța axială este constantă, forța tăietoare este nulă, iar momentul încovoietor este descris de o funcție de gradul I.

Intervalul (3÷4), $x \in (0; 2a)$

$$N_{34} = H_1 - F = 0$$

rezultă:

$$N_3 = N_4 = 0 \text{ N}$$

$$T_{34} = V_1 - p \cdot x$$

rezultă:

$$T_3 = T_{34/x=0} = V_1 = 500 \text{ N}$$

$$T_4 = T_{34/x=2a} = V_1 - p \cdot 2a = 500 - 2000 \cdot 2 \cdot 0,5 = -1500 \text{ N}$$

Se observă că funcția T își schimbă semnul pe intervalul T_{34} , fiind nulă într-o secțiune caracterizată de $x = x_K$:

$$T_K = T_{34/x=x_K} = V_1 - p \cdot x_K = 0$$

rezultă:

$$x_K = \frac{V_1}{p} = \frac{500}{2000} = 0,250 \text{ m}$$

În secțiunea în care funcția T a forței tăietoare se anulează, funcția M a momentului încovoietor prezintă o valoare maximă locală M_K (valoare maximă pe intervalul calculat).

$$M_{34} = V_1 \cdot x - p \cdot x \cdot \frac{x}{2} + H_1 \cdot 2a - F \cdot a$$

rezultă:

$$\begin{aligned} M_3 = M_{34/x=0} &= H_1 \cdot 2a - F \cdot a = 1000 \cdot 2 \cdot 0,5 - 1000 \cdot 0,5 \\ &= 500 \text{ N} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_4 = M_{34/x=2a} &= V_1 \cdot 2a - p \cdot 2a \cdot \frac{2a}{2} + H_1 \cdot 2a - F \cdot a \\ &= 500 \cdot 2 \cdot 0,5 - 2000 \cdot 2 \cdot 0,5 \cdot \frac{2 \cdot 0,5}{2} + 1000 \cdot 2 \cdot 0,5 \\ &\quad - 1000 \cdot 0,5 = 0 \text{ N} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_K = M_{34/x=x_K} &= V_1 \cdot x_K - p \cdot x_K \cdot \frac{x_K}{2} + H_1 \cdot 2a - F \cdot a \\ &= 500 \cdot 0,25 - 2000 \cdot 0,25 \cdot \frac{0,25}{2} + 1000 \cdot 2 \cdot 0,5 - 1000 \cdot 0,5 \\ &= 562,5 \text{ N} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

Pe intervalul (3÷4) forța axială este nulă, forța interioară tăietoare variază după o funcție de gradul I, iar momentul încovoietor este descris de o funcție de gradul II.

Intervalul [5÷4), $x \in [0; a)$

Pentru acest interval originea lui x a fost aleasă în capătul din dreapta al cadrului. Semnele cu care se introduc în calcul forțele exterioare sunt inverse față de calculul pe partea stânga. Funcțiile T și M vor fi:

$$N_{54} = -V_5$$

Rezultă:

2. Diagrame de variație a forțelor interioare

$$N_5 = N_4 = -V_5 = -1500 \text{ N}$$

$$T_{54} = 0$$

Rezultă:

$$T_5 = T_4 = 0 \text{ N}$$

$$M_{54} = 0$$

Rezultă:

$$M_5 = M_4 = 0 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Pe intervalul [4÷3] forța axială este constantă, iar forța tăietoare și momentul încovoietor sunt nule.

Diagramele de variație ale funcțiilor forțelor interioare N, T și M sunt prezentate în figura de mai jos.

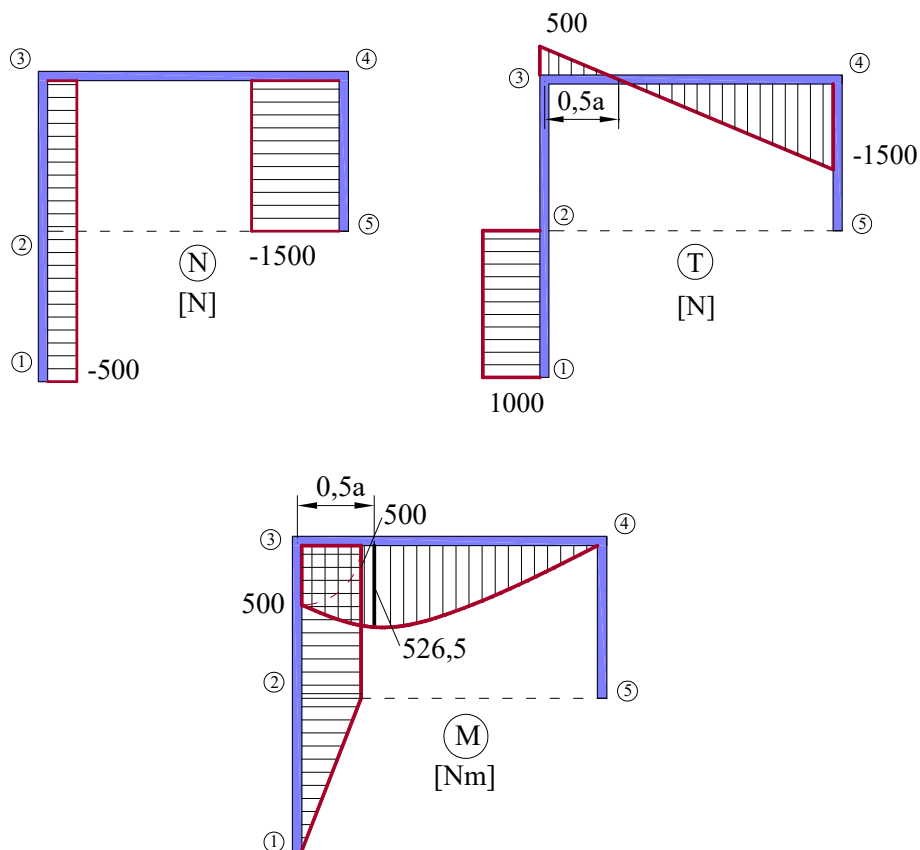


Fig. 2.52 A2.6. Diagramele funcțiilor N, T și M

Analiza FEM

Geometria 3D va fi creată pornind de la schița suport conținând cele patru segmentele de dreaptă care definesc axele tronsoanelor cadrului (figura 2.53). Ulterior, în mediul de lucru *Structure System* se vor genera, folosind comanda *Primary Member*, cele patru tronsoane. Secțiunea acestora va fi de tip țevă dreptunghiulară, cu dimensiunile 60 mm x 40 mm x 3,2 mm, standardizare ISO (figura 2.54 – cota 40 mm fiind orientată după axa Y).

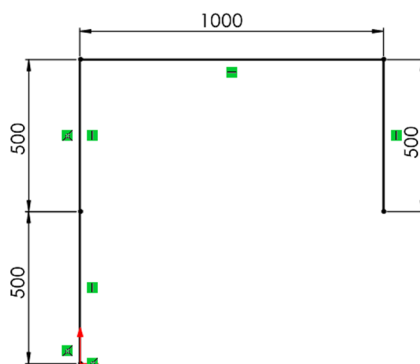


Fig. 2.53 A2.6. Schița axelor cadrului

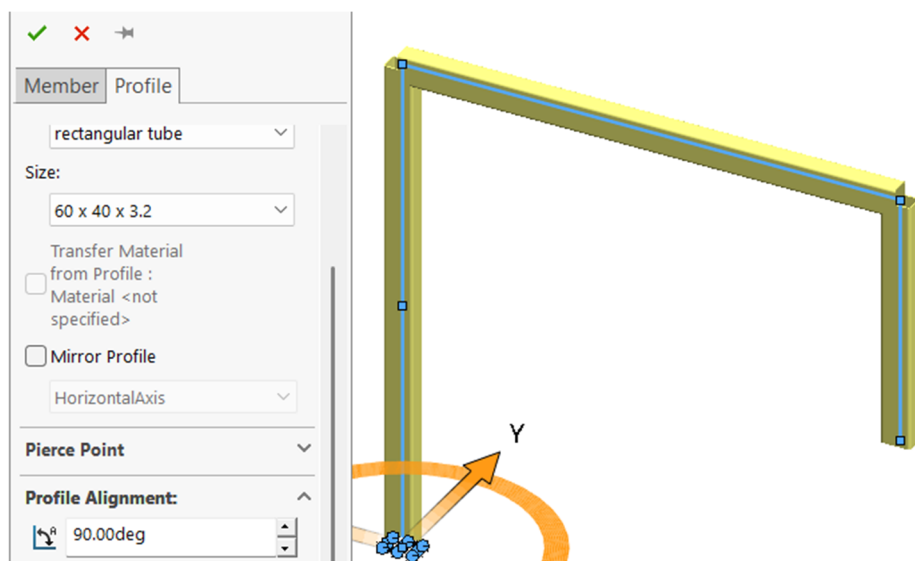


Fig. 2.54 A2.6. Tronsoanele cadrului

Geometria îmbinărilor dintre tronsoane este definită în fereastra *Corner Management*, deschisă implicit după generarea structurii sau accesată prin opțiunea

Edit din meniul contextual al intrării *Corner Management* din arborele operațiilor. Cadrul dat are patru tronsoane și trei îmbinări între acestea. Îmbinările dintre tronsoanele concurente pot fi realizate simetric (opțiunea *Miter Trim* –figura 2.55, la unghi de 45° în exemplul dat) sau prin suprapunerea capătului unui tronson pe lateralul tronsonului vecin (opțiunile *End Butt1* și *End Butt2*).

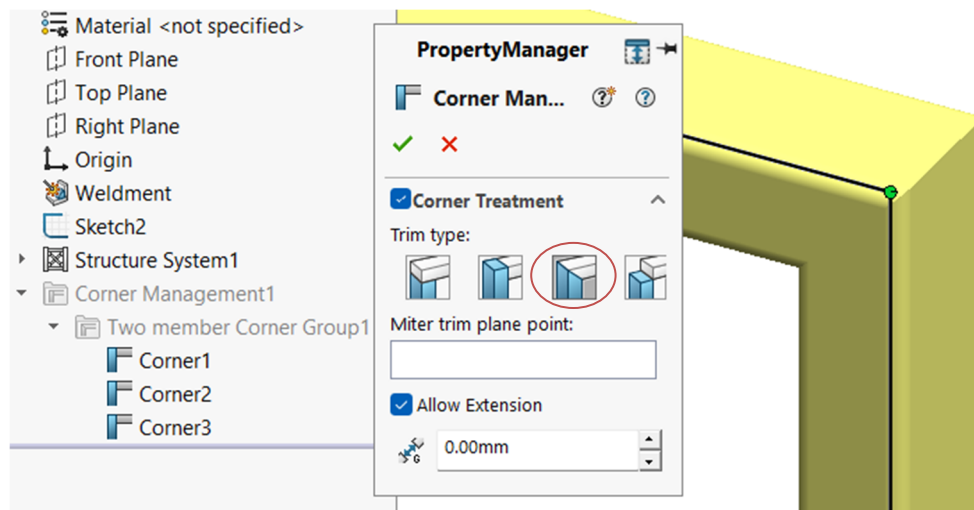


Fig. 2.55 A2.6. Definirea îmbinărilor între tronsoane concurente

În etapele următoare se va crea studiul static (comanda *New Study*, opțiunea *Static*), se vor trata cele patru tronsoane ca grinzi (opțiunea *Treat as Beam* din meniul contextual asociat geometriilor 3D în arborele simulării) și se vor atribui proprietățile de material (comanda *Apply Material*, materialul S235JR regăsindu-se în categoria oțelurilor de uz structural).

Folosind comanda *Fixed Geometry*, opțiunea *Use Reference Geometry*, se vor aplica constrângerile corespunzătoare celor două reazeme. Acestea vor fi aplicate pe noduri, direcțiile fiind definite în raport cu suprafețe de referință selectate de utilizator (*Face1*, marcată cu magenta pentru reazemul fix din figura 2.56). Pentru reazemul fix din secțiunea 1 se vor bloca translațiile după axele cuprinse în planul de simetrie al cadrului, iar pentru reazemul mobil din secțiunea 5 se va bloca translația după axa longitudinală a tronsonului (4÷5].

Pentru aplicarea forței uniform distribuită $p = 2000 \text{ N/m}$ se lansează comanda *Force*, se selectează opțiunea *Beams* în zona *Selection*, indicându-se tronsonul (3÷4) al cadrului. Forța va fi definită pe unitate de lungime (opțiunea *Per unit length*), mărimea sa fiind introdusă în câmpul care definește direcția raportat la suprafața de referință.

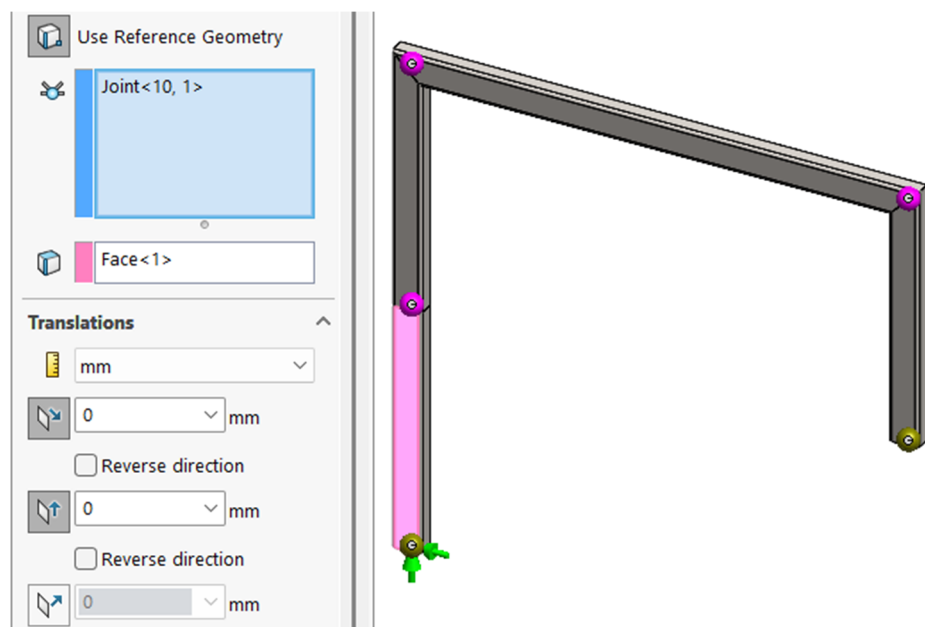


Fig. 2.56 A2.6. Aplicarea reazemului fix

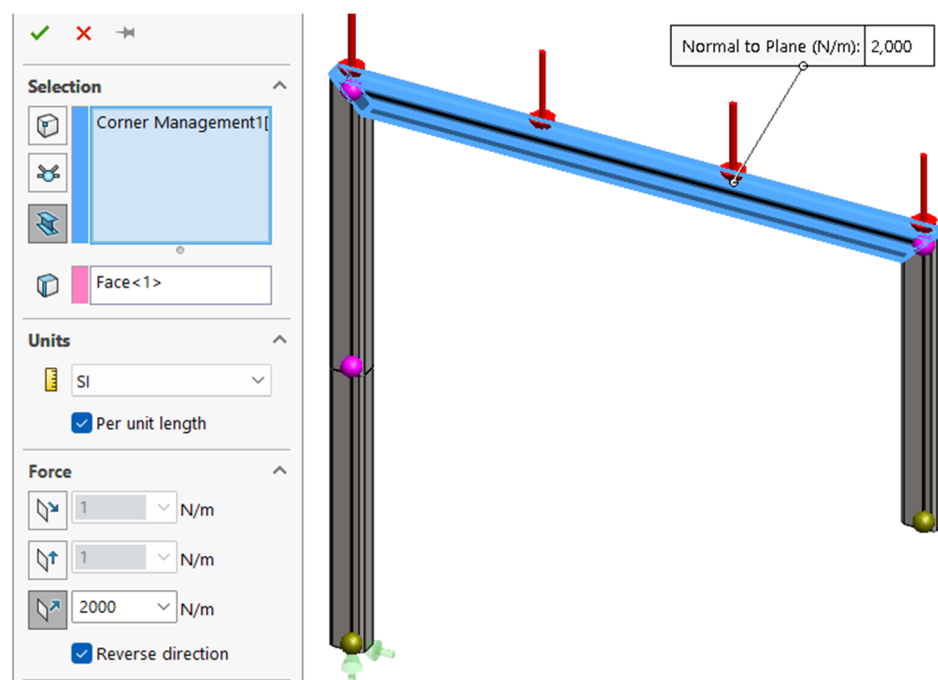


Fig. 2.57 A2.6. Aplicarea forței uniform distribuite

2. Diagrame de variație a forțelor interioare

Forța concentrată $F = 1000\text{ N}$ va fi aplicată pe nodul aferent secțiunii 2, selectat în zona *Selection*, după activarea opțiunii *Joints* (figura 2.58).

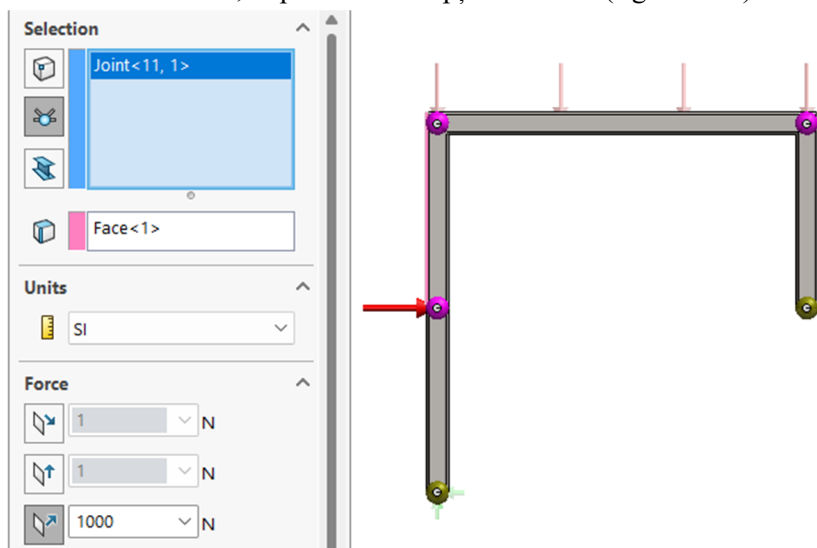


Fig. 2.58 A2.6. Aplicarea forței concentrate

Diagramele de variație pentru forțele interioare N , T și M sunt prezentate în figurile 2.59 – 2.61. Se observă suprapunerea rezultatelor cu cele obținute analitic.

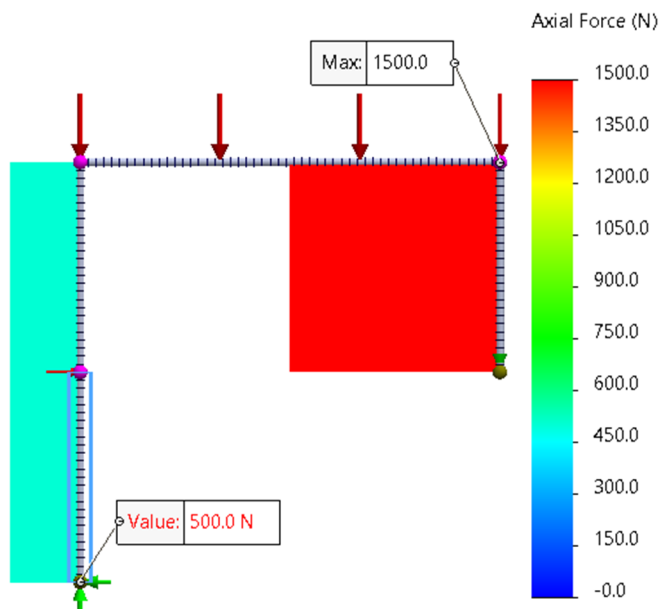


Fig. 2.59 A2.6. Diagrama forței axiale N

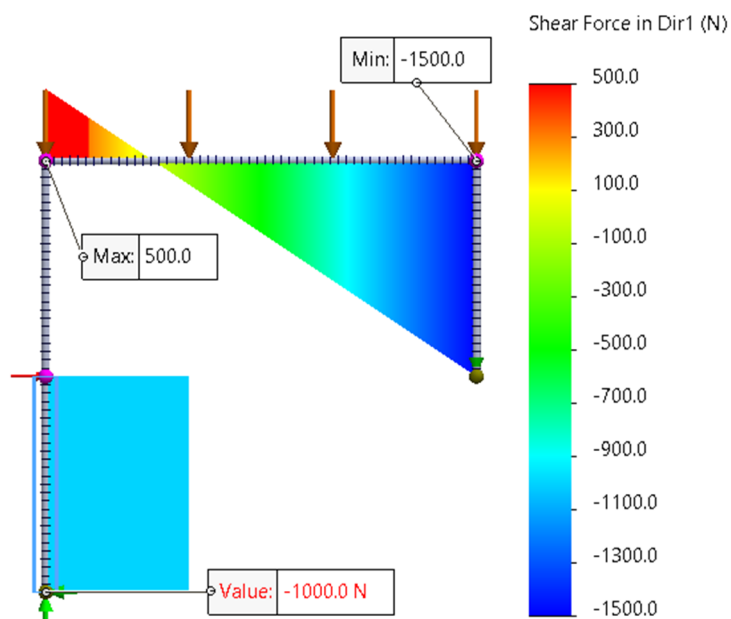


Fig. 2.60 A2.6. Diagrama forței tăietoare T

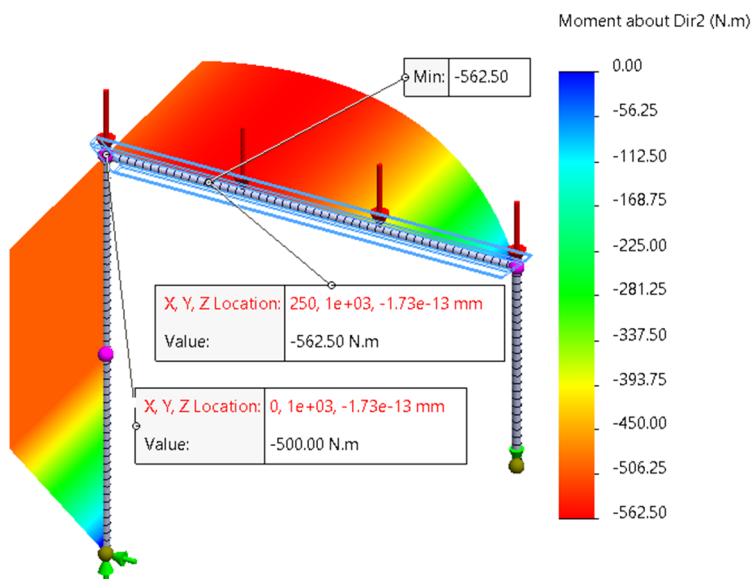


Fig. 2.61 A2.6. Diagrama momentului încovoietor M

2.5 DIAGrame DE VARIAȚIE A FORȚELOR INTERIOARE LA SISTEME SPAȚIALE

Un sistem spațial este caracterizat de dispunerea axelor longitudinale ale tronsoanelor sale în cel puțin două plane distincte. În consecință, la sistemele spațiale pot să apară toate cele șase tipuri de forțe interioare: forța axială N , forțele tăietoare T_y și T_z , momentele încovoietoare M_{iy} și M_{iz} și momentul de torsiune M_t .

În algoritmul de calcul se pot folosi două abordări:

- folosirea unor sisteme de referință locale atașat fiecărui tronson al sistemului, păstrând axa x ca axă longitudinală a tronsonului și axele z și y în planul secțiunii transversale.
- folosirea unui sistem de referință universal.

Autorul consideră că a doua abordare este mai simplă, dar ea presupune că cele șase forțe interioare nu mai sunt corelate direct cu axele. Cu alte cuvinte, pentru un anumit tronson, direcția x poate să definească o forță tăietoare, iar forța axială să fie orientată după axele y sau z (în mod similar la momente). La trasarea diagramelor forțelor tăietoare și momentelor încovoietoare se pot folosi notații neutre pentru diferențierea direcțiilor (ex. d_1 și d_2).

Aplicația A2.7. Să se traseze diagramele forțelor interioare pentru sistemul spațial din figura 2.62. Se dau: $F = 1000 \text{ N}$, $p = 2000 \text{ N} \cdot \text{m}$, $a = 0,7 \text{ m}$. Sistemul este realizat din țevă cu secțiune pătrată $80 \text{ mm} \times 80 \text{ mm} \times 5 \text{ mm}$, iar materialul este oțelul 1.0060 (E335).

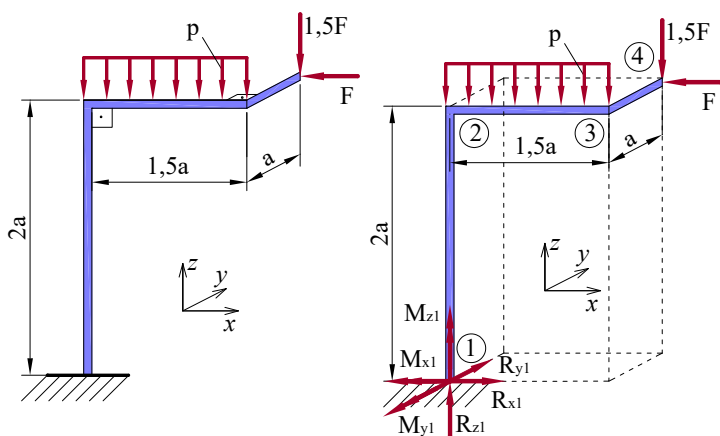


Fig. 2.62 Aplicația A2.7

Calculul analitic

Cele șase reacțiuni din încastrare se calculează din ecuațiile de echilibru static, considerând axele sistemului de referință universal:

$$(\sum F)_x = 0; \quad R_{x1} - F = 0$$

$$(\sum F)_y = 0; \quad R_{y1} = 0$$

$$(\sum F)_z = 0; \quad R_{z1} - p \cdot 1,5a - 1,5F = 0$$

$$(\sum M_x)_1 = 0; \quad -M_{x1} - 1,5F \cdot a = 0$$

$$(\sum M_y)_1 = 0; \quad M_{y1} - p \cdot 1,5a \cdot 0,75a - 1,5F \cdot 1,5a + F \cdot 2a = 0$$

$$(\sum M_z)_1 = 0; \quad M_{z1} + F \cdot a = 0$$

Rezultă:

$$R_{x1} = F = 1000 \text{ N}$$

$$R_{y1} = 0 \text{ N}$$

$$R_{z1} = p \cdot 1,5a + 1,5F = 2000 \cdot 1,5 \cdot 0,7 + 1,5 \cdot 1000 = 3600 \text{ N}$$

$$M_{x1} = -1,5F \cdot a = -1,5 \cdot 1000 \cdot 0,7 = -1050 \text{ N} \cdot m$$

$$\begin{aligned} M_{y1} &= p \cdot 1,5a \cdot 0,75a + 1,5F \cdot 1,5a - F \cdot 2a \\ &= 2000 \cdot 1,5 \cdot 0,7 \cdot 0,75 \cdot 0,7 + 1,5 \cdot 1000 \cdot 1,5 \cdot 0,7 - 1000 \cdot 2 \cdot 0,7 = 1277,5 \text{ N} \cdot m \end{aligned}$$

$$M_{z1} = -F \cdot a = -1000 \cdot 0,7 = -700 \text{ N} \cdot m$$

Verificarea valorilor obținute se poate face prin scrierea ecuațiilor de echilibru ale momentelor după cele trei axe, într-un alt punct decât cel corespunzător încastrării. Pentru punctul 3 se vor obține ecuațiile:

$$\left(\sum M_x\right)_3 = M_{x1} + 1,5F \cdot a - R_{y1} \cdot 2a = -1050 + 1,5 \cdot 1000 \cdot 0,7 - 0 = 0$$

$$\begin{aligned} \left(\sum M_y\right)_3 &= M_{y1} + p \cdot 1,5a \cdot 0,75a - R_{z1} \cdot 1,5a + R_{x1} \cdot 2a \\ &= 1277,5 + 2000 \cdot 1,5 \cdot 0,7 \cdot 0,75 \cdot 0,7 - 3600 \cdot 1,5 \cdot 0,7 \\ &\quad + 1000 \cdot 2 \cdot 0,7 = 0 \end{aligned}$$

$$\left(\sum M_z\right)_3 = M_{z1} - R_{y1} \cdot 1,5a + F \cdot a = -700 - 0 + 1000 \cdot 0,7 = 0$$

Semnele componentelor care definesc forțele interioare pot fi stabilite conform convenției de la grinzile drepte. Problema va fi rezolvată parcurgând

sistemul de la capătul liber spre încastrare (de la dreapta la stânga). Se va ține cont că diagramele momentelor încovoietoare se dispun pe fibra întinsă. Sistemul spațial are patru puncte caracteristice, care determină trei intervale de variație.

Intervalul [4÷3), $y \in [0; a)$

Funcțiile de variație a forțelor interioare vor fi:

$$N_{43} = 0$$

rezultă:

$$N_4 = N_3 = 0 \text{ N}$$

$$T_{x43} = F$$

rezultă:

$$T_{x4} = T_{x3} = F = 1000 \text{ N}$$

$$T_{z43} = 1,5F$$

rezultă:

$$T_{z4} = T_{z3} = 1,5F = 1,5 \cdot 1000 = 1500 \text{ N}$$

$$M_{x43} = -1,5F \cdot y$$

rezultă:

$$M_{x4} = M_{x43/y=0} = 0 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$M_{x3} = M_{x43/y=a} = -1,5F \cdot a = -1,5 \cdot 1000 \cdot 0,7 = -1050 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$M_{z43} = F \cdot y$$

rezultă:

$$M_{z4} = M_{z43/y=0} = 0 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$M_{z3} = M_{z43/y=a} = F \cdot a = 1000 \cdot 0,7 = 700 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$M_{t43} = M_{y43} = 0$$

rezultă:

$$M_{t4} = M_{t3} = 0 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Din relațiile de mai sus se observă că pe intervalul [4÷3) forța axială și momentul de torsiune sunt nule, forțele tăietoare sunt constante, iar momentele încovoietoare variază după o funcție de gradul I.

Intervalul (3÷2), $x \in (0; 1,5a)$

Funcțiile de variație a forțelor interioare vor fi:

$$N_{32} = -F$$

rezultă:

$$N_3 = N_2 = -F = -1000 \text{ N}$$

$$T_{y32} = 0$$

rezultă:

$$T_{y3} = T_{y2} = 0 \text{ N}$$

$$T_{z32} = p \cdot x + 1,5 \cdot F$$

rezultă:

$$T_{z3} = T_{z32/x=0} = 1,5 \cdot F = 1,5 \cdot 1000 = 1500 \text{ N}$$

$$\begin{aligned} T_{z2} = T_{z32/x=1,5a} &= p \cdot 1,5a + 1,5 \cdot F = 2000 \cdot 1,5 \cdot 0,7 + 1,5 \cdot 1000 \\ &= 3600 \text{ N} \cdot m \end{aligned}$$

$$M_{y32} = -1,5F \cdot x - p \cdot x \cdot \frac{x}{2} = -1,5F \cdot x - \frac{p}{2} \cdot x^2$$

rezultă:

$$M_{y3} = M_{y32/x=0} = 0 \text{ N} \cdot m$$

$$\begin{aligned} M_{y2} = M_{y32/x=1,5a} &= -1,5F \cdot 1,5a - \frac{p}{2} \cdot (1,5a)^2 \\ &= -1,5 \cdot 1000 \cdot 1,5 \cdot 0,7 - \frac{2000}{2} \cdot (1,5 \cdot 0,7)^2 \\ &= -2677,5 \text{ N} \cdot m \end{aligned}$$

$$M_{z32} = F \cdot a$$

rezultă:

$$M_{z3} = M_{z2} = F \cdot a = 1000 \cdot 0,7 = 700 \text{ N} \cdot m$$

$$M_{t32} = M_{x32} = 1,5F \cdot a$$

rezultă:

$$M_{t4} = M_{t3} = 1,5F \cdot a = 1,5 \cdot 1000 \cdot 0,7 = 1050 \text{ N} \cdot m$$

Pe intervalul $(3 \div 2)$ forța axială N este constantă, forța tăietoare T_y este nulă, forța tăietoare T_z are o variație liniară, momentul încovoietor M_y are o variație de gradul II, iar momentul încovoietor M_z și momentul de torsiune M_t sunt constante.

Intervalul $(2 \div 1)$, $z \in (0; 2a]$

$$N_{21} = -1,5F - p \cdot 1,5a$$

rezultă:

$$\begin{aligned} N_2 = N_1 &= -1,5F - p \cdot 1,5a = -1,5 \cdot 1000 - 2000 \cdot 1,5 \cdot 0,7 \\ &= -3600 \text{ N} \end{aligned}$$

$$T_{x21} = F$$

rezultă:

$$T_{x2} = T_{x1} = F = 1000 \text{ N}$$

$$T_{y21} = 0$$

rezultă:

$$T_{y2} = T_{y1} = 0 \text{ N}$$

$$M_{x21} = 1,5F \cdot a$$

rezultă:

$$M_{x2} = M_{x1} = 1,5F \cdot a = 1,5 \cdot 1000 \cdot 0,7 = 1050 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$M_{y21} = -p \cdot 1,5a \cdot 0,75a - 1,5F \cdot 1,5a + F \cdot z$$

rezultă:

$$\begin{aligned} M_{y2} = M_{y21/z=0} &= -p \cdot 1,5a \cdot 0,75a - 1,5F \cdot 1,5a \\ &= -2000 \cdot 1,5 \cdot 0,7 \cdot 0,75 \cdot 0,7 - 1,5 \cdot 1000 \cdot 1,5 \cdot 0,7 \\ &= -2677,5 \text{ N} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{y1} = M_{y21/z=2a} &= -p \cdot 1,5a \cdot 0,75a - 1,5F \cdot 1,5a + F \cdot 2a \\ &= -2000 \cdot 1,5 \cdot 0,7 \cdot 0,75 \cdot 0,7 - 1,5 \cdot 1000 \cdot 1,5 \cdot 0,7 \\ &\quad + 1000 \cdot 2 \cdot 0,7 = -1277,5 \text{ N} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

$$M_{t21} = M_{z21} = F \cdot a$$

rezultă:

$$M_{t2} = M_{t1} = F \cdot a = 1000 \cdot 0,7 = 700 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Pe intervalul $(2 \div 1]$ forța axială N și forța tăietoare T_x sunt constante, forța tăietoare T_y este nulă, momentul încovoietor M_y are o variație de gradul I, iar momentul încovoietor M_x și momentul de torsiune M_t sunt constante.

Diagramele de variație ale funcțiilor forțelor interioare sunt prezentate în figurile de mai jos.

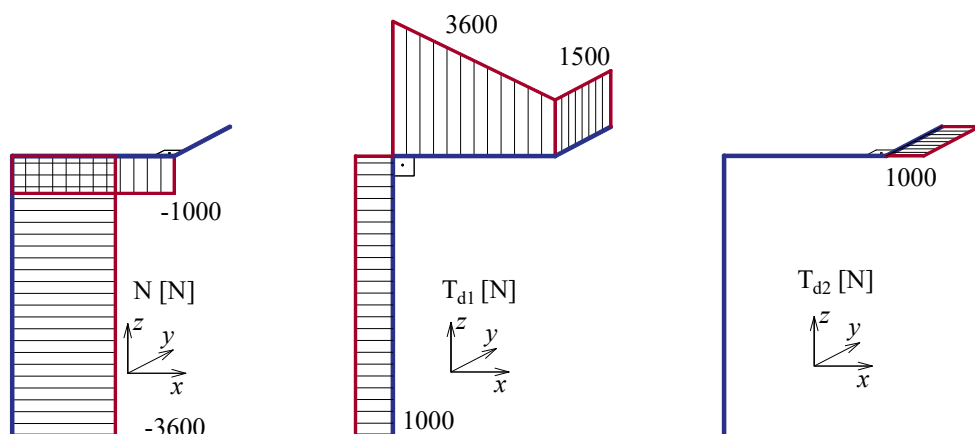


Fig. 2.63 A2.7. Diagramele de variație ale forței axiale și forțelor tăietoare

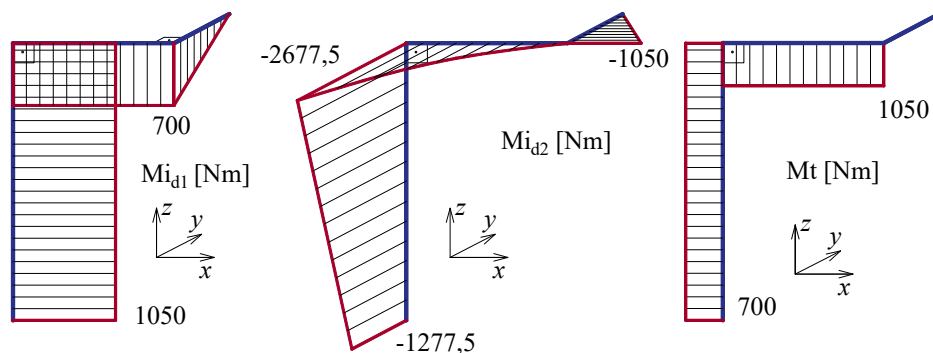


Fig. 2.64 A2.7. Diagramele de variație ale momentelor încovoietoare și momentului de torsiune

Analiza FEM

Geometria sistemului va fi modelată ca structură cu tronsoane de secțiune standardizată. În prima etapă se va crea o schiță 3D (folosind comanda *3D Sketch* din banda de instrumente de schițare). Pornind din sistemul de referință se vor crea succesiv segmentele de linie cu lungimile 1400 mm, 1050 mm (ambele dispuse în planul Oxy) și 700 mm (dispus în planul Oxz). Trecerea între cele trei plane ale sistemului de referință se poate face în timpul rulării comenzii *Line* prin apăsarea tastei *Tab* de la tastatură. Alinierea unui segment în raport cu o axă a sistemului de referință este confirmată prin constrângerile *Along X*, *Along Y*, *Along Z*, evidențiate în figura 2.65 prin simbolurile aferente (marcate cu verde).

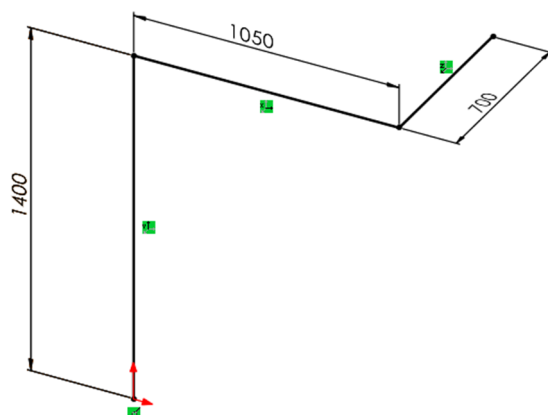


Fig. 2.65 A2.7. Axele tronsoanelor sistemului spațial

După finalizarea schiței 3D suport se va construi sistemul spațial în mediul de lucru *Structure System*. Se va lansa comanda *Primary Member* și în tab-ul *Member* al acestei comenzi, zona *Path segments*, se vor selecta cele trei segmente trasate în schița 3D. În tab-ul *Profile* se va defini tipul și dimensiunile secțiunii, *square tube* 80 mm x 80 mm x 5 mm, standardizare ISO (figura 2.66). Cele două îmbinări de colț vor fi simetrice (la 45° pentru sistemul analizat), în fereastra comenzii *Corner Management* fiind selectată opțiunea *Miter Trim*.

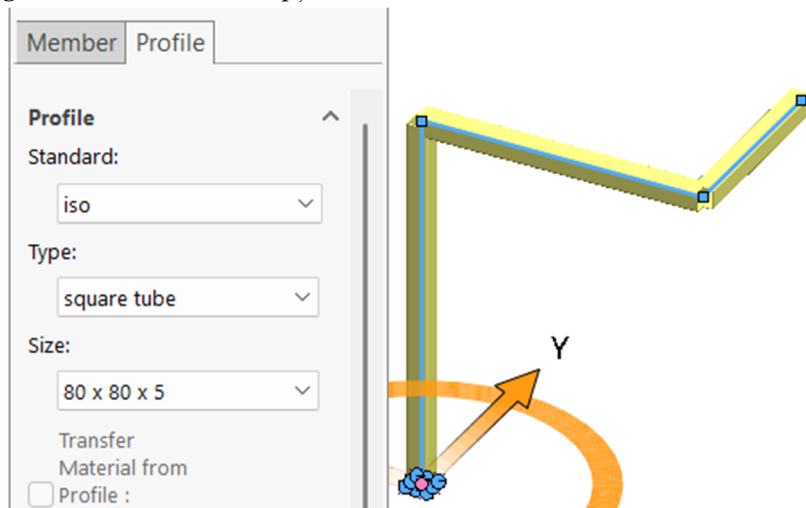


Fig. 2.66 A2.7. Construirea tronsoanelor sistemului

Pentru generarea studiului static se va lansa comanda *New study* din banda *Simulation*. Cele trei tronsoane ale sistemului vor fi tratate ca și grinzi (opțiunea *Treat as Beam*, din meniul contextual afișat prin click dreapta pe numele componentelor 3D, în arborele simulării), la fiecare capăt de tronson fiind generat un nod caracteristic (*joint*). Folosind comanda *Apply Material* se vor asocia sistemului proprietățile oțelului E335.

Sistemul este încastrat în secțiunea 1. Pentru nodul corespunzător acestei secțiuni se vor bloca toate translațiile și rotațiile folosind comanda *Fixed Geometry* (figura 2.67).

Cele trei încărcări vor fi definite folosind comanda *Force*. Forțele concentrate care acționează în secțiunea 4 (pe nodul corespunzător) pot fi aplicate simultan, introducând valori pentru două câmpuri care definesc direcțiile de solicitare în raport cu suprafața de referință (figura 2.68). Forța uniform distribuită $p = 2000 \text{ N/m}$ va fi aplicată pe tronsonul (2÷3) – figura 2.69. Pentru a fi exprimată în N/m se va activa opțiunea *Per unit length*.

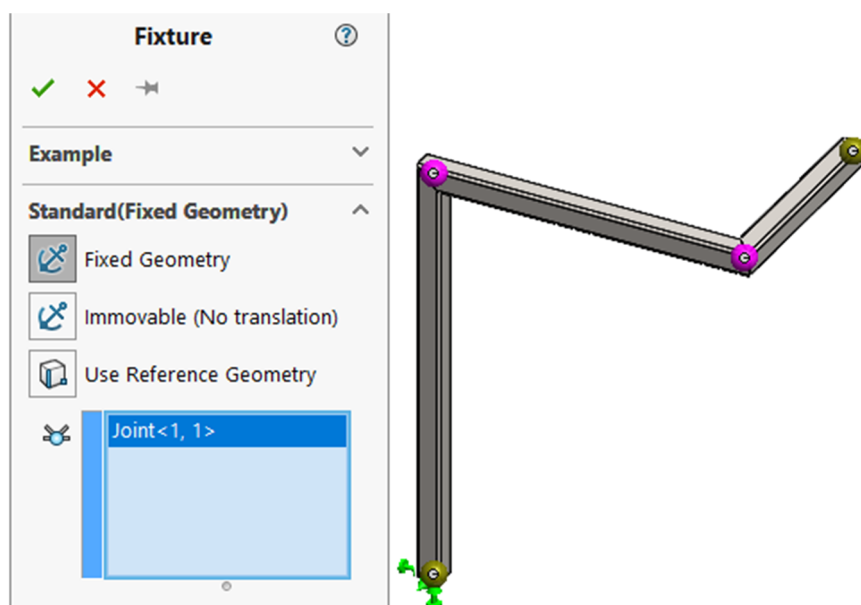


Fig. 2.67 A2.7. Aplicarea încastrării secțiunii 1

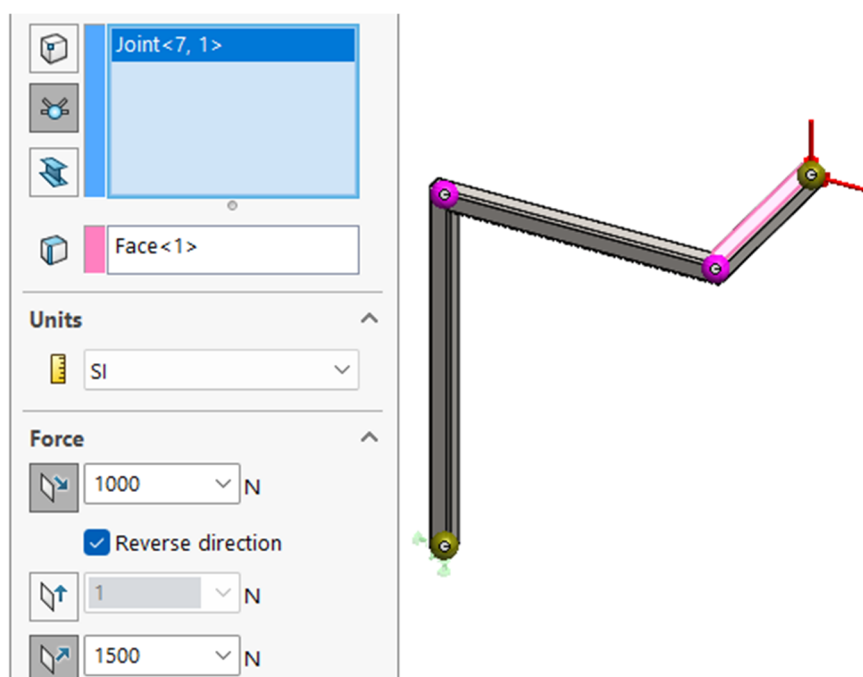


Fig. 2.68 A2.7. Aplicarea forțelor concertate $1,5F$ și F

2. Diagrame de variație a forțelor interioare

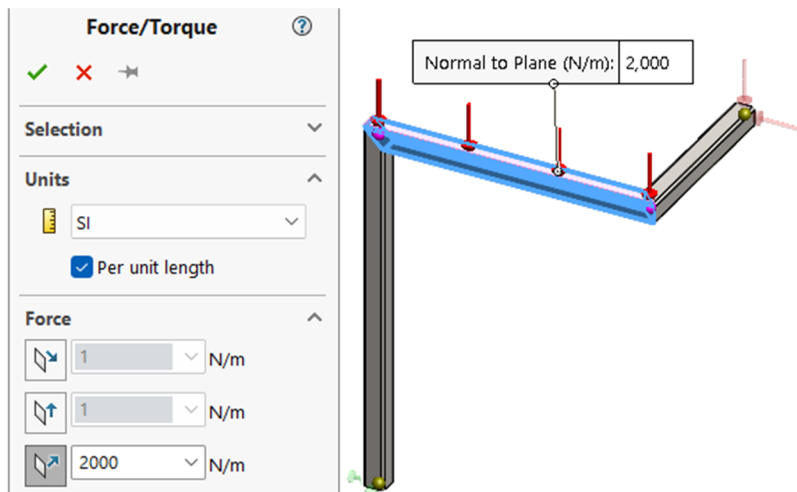


Fig. 2.69 A2.7. Aplicarea forței distribuite p

În figura 2.70 sunt prezentate valorile celor șase reacțiuni din încastrare, obținute prin rularea comenzii *List Result Force* din zona *Results Advisor*. Valorile corespund unui sistem de referință ortogonal cu axa x perpendiculară pe planul Top.

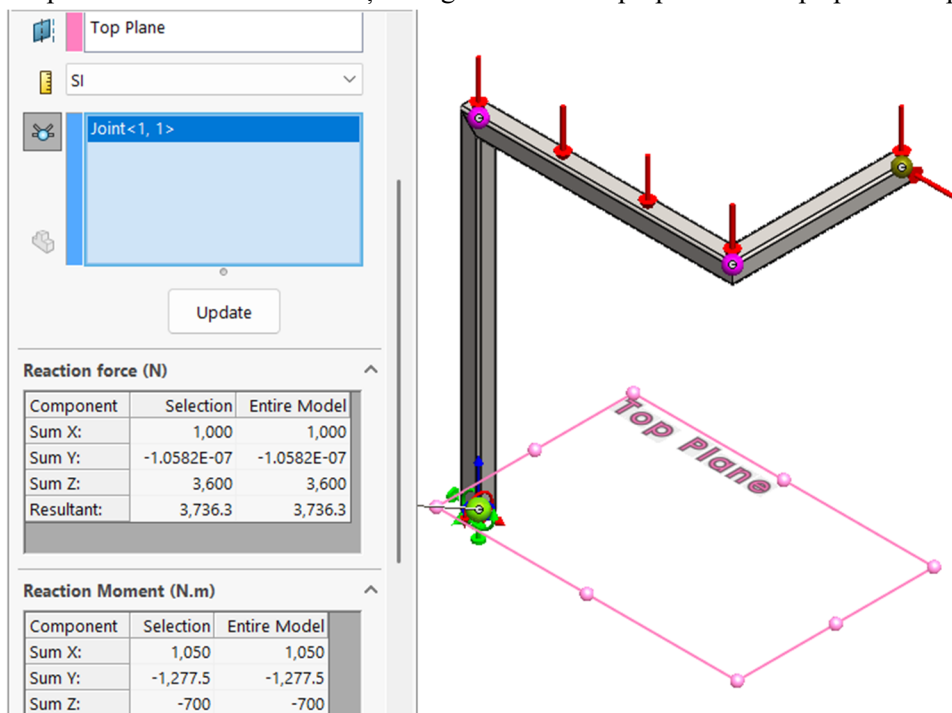


Fig. 2.70 A2.7. Reacțiuni

Atât valorile reacțiunilor, cât și valorile care definesc cele șase diagrame de forțe interioare (figurile 2.71-2.76) coincid cu cele determinate analitic.

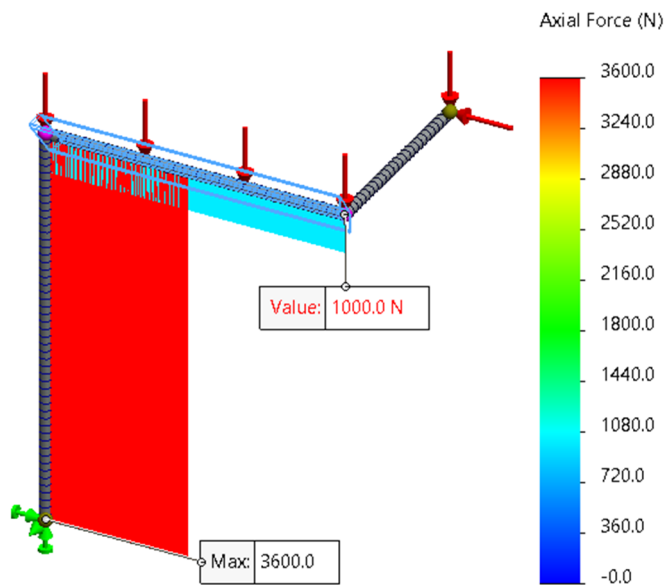


Fig. 2.71 A2.7. Diagrama forței axiale

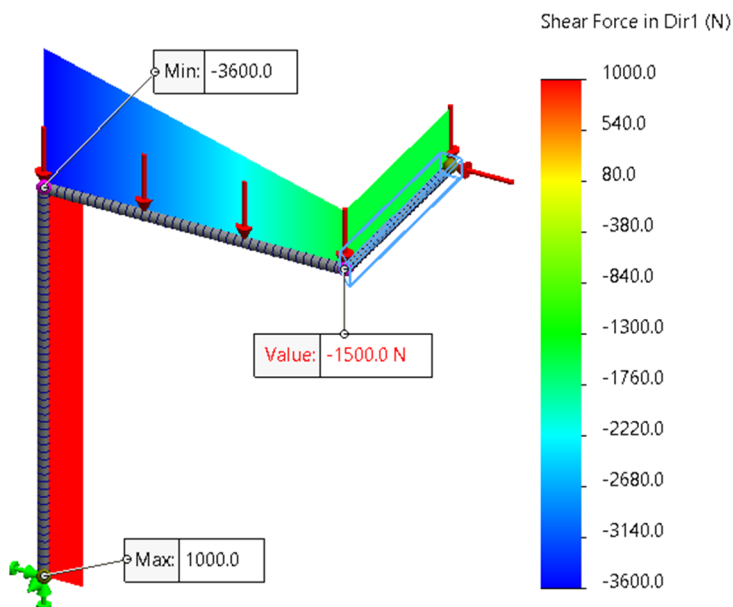


Fig. 2.72 A2.7. Diagrama forței tăietoare după direcția 1

2. Diagrame de variație a forțelor interioare

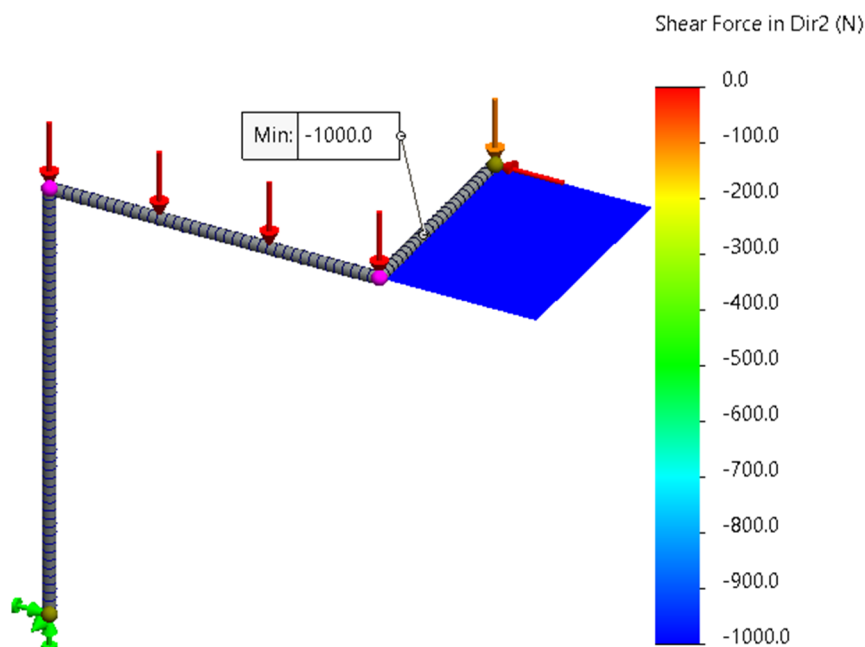


Fig. 2.73 A2.7. Diagrama forței tăietoare după direcția 2

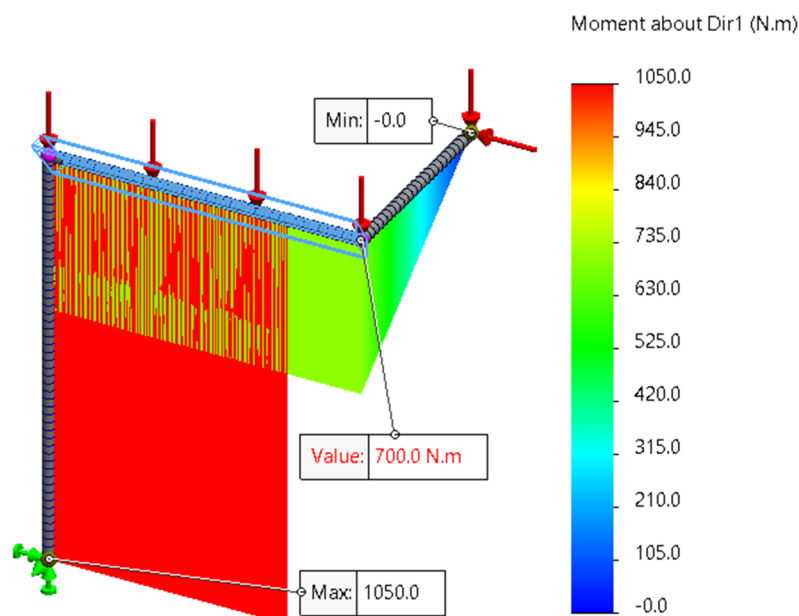


Fig. 2.74 A2.7. Diagrama momentului încovoietor după direcția 1

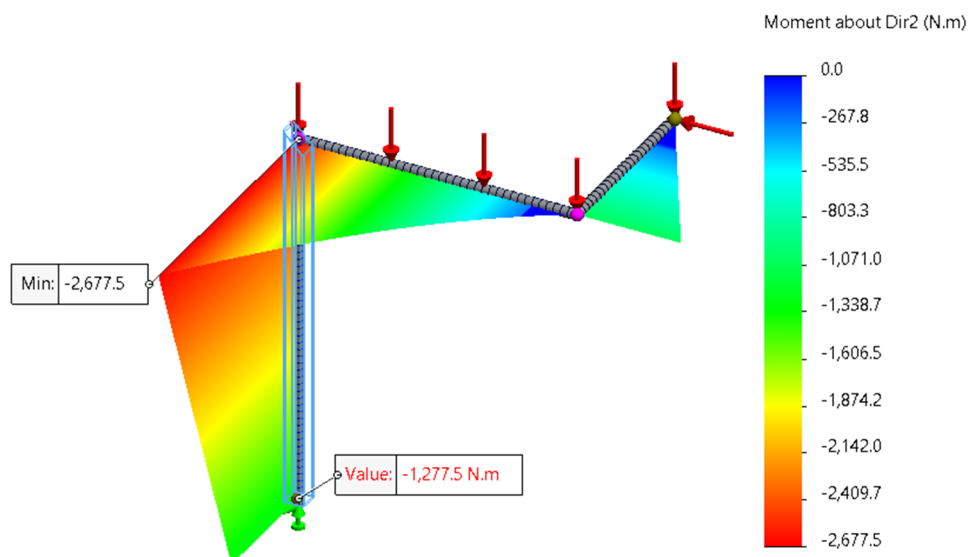


Fig. 2.75 A2.7. Diagrama momentului încovoietor după direcția 2

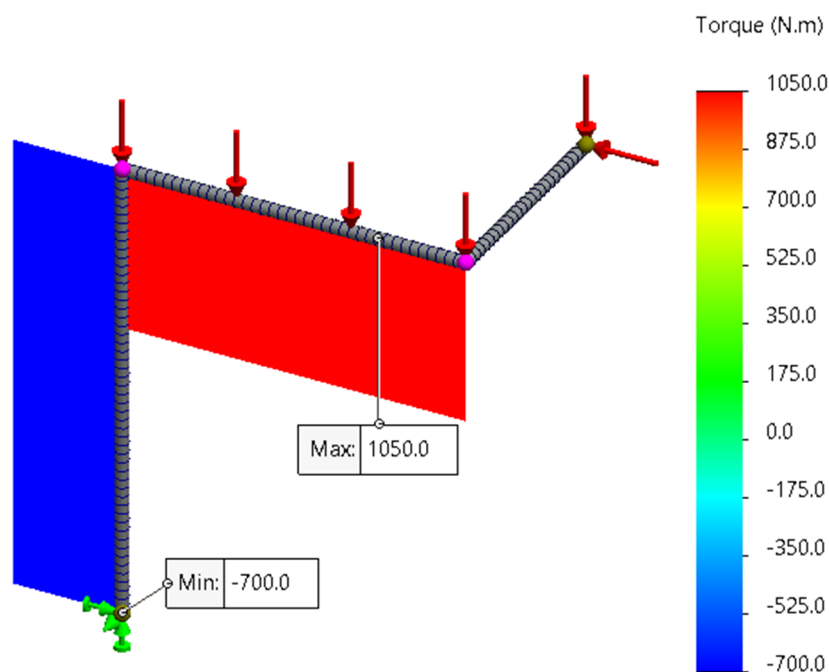


Fig. 2.76 A2.7. Diagrama momentului de torsiune

3. Caracteristici geometrice ale secțiunilor plane

În acest capitol se prezintă relațiile de definiție și algoritmi de calcul pentru caracteristicile geometrice ale secțiunilor plane, simple și compuse. Pentru secțiunile care nu au cel puțin o axă de simetrie este necesară calcularea momentelor de inerție principale (momentul de inerție maxim și momentul de inerție minim al secțiunii) și a direcțiilor după care acestea apar (direcții principale). Valorile minime/maxime ale tensiunilor și deformațiilor se obțin atunci când încărcările sunt orientate după direcțiile principale ale secțiunii transversale. Exemplele de calcul sunt rezolvate analitic și prin utilizarea funcțiilor de analiză a secțiunii din SolidWorks.

Structura capitolului este următoarea:

- 3.1 Definierea caracteristicilor inerțiale*
- 3.2 Variația momentelor de inerție în raport cu sisteme de referință cu axe paralele*
- 3.3 Variația momentelor de inerție în raport cu sisteme de referință cu axe concurente*
- 3.4 Momente de inerție principale și axe principale*
- 3.5 Calculul caracteristicilor geometrice la suprafețe simple*
- 3.6 Calculul caracteristicilor geometrice la suprafețe compuse*

3.1 DEFINIREA CARACTERISTICILOR INERȚIALE

Comportamentul mecanic al unui element de rezistență este determinat de forțele interne, de proprietățile de material și de caracteristicile sale dimensionale. În această ultimă categorie intră forma elementului, lungimile tronsoanelor din care este alcătuit și caracteristicile geometrice ale secțiunilor transversale.

Aria secțiunii transversale a unei bare determină comportamentul său la solicitări axiale și forfecare, dar la solicitările de torsiune și încovoiere aria nu este suficientă pentru calculul tensiunilor și deformațiilor. Pentru exemplificare, se consideră un arbore drept cu secțiune constantă supus la torsiune, realizat în două variante constructive: secțiune circulară plină și secțiune circulară inelară. Dacă se aleg dimensiunile astfel încât cele două secțiuni să aibă arii egale, se va constata că deformațiile arborelui cu secțiune plină sunt mai mari decât deformațiile arborelui cu secțiune tubulară. În mod similar, se poate observa că deformațiile la încovoiere ale unei grinzi încastrate, cu secțiune transversală dreptunghiulară, depind de orientarea momentului încovoiitor în raport cu secțiunea (același moment încovoiitor determină efecte diferite dacă este orientat după axa y , respectiv după axa z a secțiunii transversale). Rezultă că la aceste solicitări intervin alte caracteristici geometrice ale secțiunii (numite și caracteristici inerțiale).

În majoritatea manualelor de rezistența materialelor [5, 10, 12, 35, 38, 39] se prezintă detaliat modul de definire al caracteristicilor inerțiale. Mai jos se prezintă doar o sinteză, evidențiindu-se principalele relații de calcul.

Se consideră o secțiune transversală oarecare căreia i se asociază un sistem de referință $Oxyz$, cu axele Oy și Oz cuprinse în planul secțiunii (figura 3.1). Centrul de greutate al secțiunii are coordonatele y_c și z_c în raport cu originea sistemului de referință, iar un element unitar de arie (infinit mic) dA are coordonatele y și z față de sistemul de referință $Oxyz$.

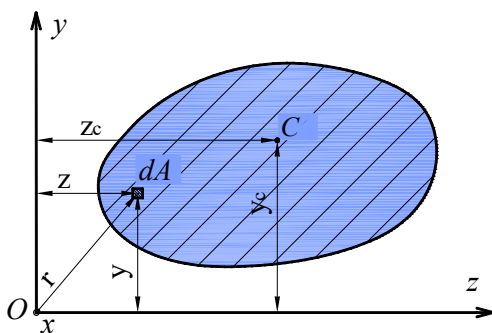


Fig. 3.1 Secțiune plană oarecare

Aria secțiunii se calculează cu relația:

$$A = \int_A dA \quad (3.1)$$

Momentele statice în raport cu axele y și z sunt definite de relațiile:

$$S_z = \int_A y \cdot dA = y_c \cdot A \quad S_y = \int_A z \cdot dA = z_c \cdot A \quad (3.2-3.3)$$

Din relațiile (3.2) și (3.3) se observă că momentele statice sunt nule dacă se calculează în raport cu axele care trec prin centrul de greutate.

Momentele de inerție axiale, calculate în raport cu axele y și z , sunt:

$$I_z = \int_A y^2 \cdot dA \quad I_y = \int_A z^2 \cdot dA \quad (3.4-3.5)$$

Momentul de inerție polar este egal cu suma momentelor de inerție axiale:

$$I_p = \int_A r^2 \cdot dA = I_z + I_y \quad (3.6)$$

Momentul de inerție centrifugal este definit de relația:

$$I_{zy} = I_{yz} = \int_A z \cdot y \cdot dA \quad (3.7)$$

Dacă axele z sau y sunt axe de simetrie ale secțiunii, atunci $I_{zy} = I_{yz} = 0$.

Modulele de rezistență axiale minime sunt definite de rapoartele:

$$W_{z \min} = \frac{I_z}{|y_{\max}|} \quad W_{y \min} = \frac{I_y}{|z_{\max}|} \quad (3.8-3.9)$$

unde $y_{\max}$ și $z_{\max}$ sunt distanțele maxime de la axa de calcul la fibra extremă a secțiunii (periferia secțiunii) după axele y și z .

Modulul de rezistență polar este definit de relația:

$$W_p = W_z + W_y \quad (3.10)$$

Razele de inerție sau razele de girație sunt definite de relațiile:

$$i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} \quad i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \quad (3.11)$$

3.2 VARIAȚIA MOMENTELOR DE INERȚIE ÎN RAPORT CU SISTEME DE REFERINȚĂ CU AXE PARALELE

După cum se observă în relațiile 3.4 – 3.7 valoarea momentelor de inerție inerțiale ale unei suprafețe oarecare depind de poziția și orientarea sistemului de referință în raport cu care sunt calculate.

Se consideră două sisteme de referință cu axe paralele: zCy asociat centrului de greutate al unei secțiuni transversale oarecare (numit și sistem de referință central), respectiv $z_I O_I y_I$ situat în același plan și cu axe paralele cu sistemul de referință central (figura 3.2). Se vor nota cu c și d coordonatele sistemului de referință zCy în raport cu sistemul de referință $z_I O_I y_I$. Pornind de la relațiile dintre coordonatele elementului de arie dA în raport cu cele două sisteme de referință, se pot determina relațiile de legătură dintre momentele de inerție:

$$I_{z_1} = I_z + c^2 \cdot A \quad (3.12)$$

$$I_{y_1} = I_y + d^2 \cdot A \quad (3.13)$$

$$I_{z_1 y_1} = I_{zy} + c \cdot d \cdot A \quad (3.14)$$

$$I_{p_1} = I_p + (c^2 + d^2) \cdot A \quad (3.15)$$

unde I_{z_1} , I_{y_1} , $I_{z_1 y_1}$, I_{p_1} sunt momentele de inerție calculate în raport cu sistemul de referință $z_I O_I y_I$, iar I_z , I_y , I_{zy} , I_p sunt momentele de inerție calculate în raport cu sistemul de referință zCy .

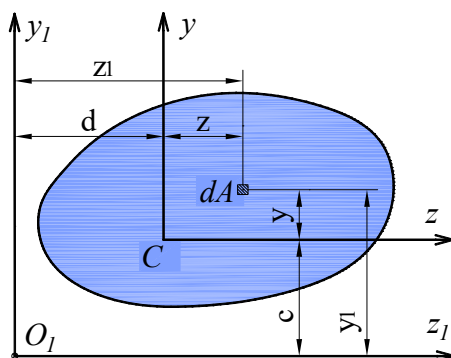


Fig. 3.2 Variația momentelor de inerție în raport cu axe paralele

Ecuatiile (3.12) - (3.15) reprezintă *relațiile lui Steiner* pentru calculul momentelor de inerție în raport cu sisteme de referință cu axe paralele. Ele arată că *momentul de inerție al unei suprafețe față de o axă oarecare este egal cu momentul de inerție față de axa paralelă care trece prin centrul de greutate plus produsul dintre aria suprafeței și pătratul distanței dintre cele două axe*. Pornind de la relațiile lui Steiner, considerând o infinitate de axe paralele, se poate constata că valoarea minimă a momentului de inerție corespunde axei care trece prin centrul de greutate.

3.3 VARIAȚIA MOMENTELOR DE INERȚIE ÎN RAPORT CU SISTEME DE REFERINȚĂ CU AXE CONCURENTE

Coordonatele y și z din expresiile momentelor de inerție depind nu doar de poziția centrului sistemului de referință, ci și de orientarea axelor. Se consideră două sisteme de referință yCz și y_1Cz_1 poziționate în centrul de greutate al unei secțiuni transversale, rotite unul în raport cu altul cu unghiul α (figura 3.3). Între momentele de inerție calculate în raport cu axele celor două sisteme se pot scrie relațiile:

$$I_{z_1} = \frac{I_z + I_y}{2} + \frac{I_z - I_y}{2} \cdot \cos 2\alpha - I_{zy} \cdot \sin 2\alpha \quad (3.16)$$

$$I_{y_1} = \frac{I_z + I_y}{2} - \frac{I_z - I_y}{2} \cdot \cos 2\alpha + I_{zy} \cdot \sin 2\alpha \quad (3.17)$$

$$I_{z_1y_1} = \frac{I_z - I_y}{2} \cdot \sin 2\alpha + I_{zy} \cdot \cos 2\alpha \quad (3.18)$$

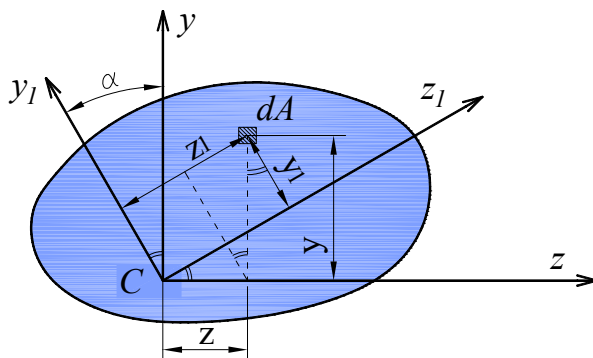


Fig. 3.3 Variația momentelor de inerție în raport cu axe concurente

3.4 MOMENTE DE INERȚIE PRINCIPALE ȘI AXE PRINCIPALE

În capitolele următoare se va arăta că deformațiile și tensiunile la încovoiere și torsiune sunt invers proporționale cu momentele de inerție. Cu alte cuvinte, momente de inerție maxime determină tensiuni și deformații minime. Astfel, pentru orice secțiune transversală este important a fi stabilite direcțiile după care momentele de inerție axiale sunt maxime, respectiv minime.

Prin însumarea relațiilor (3.16) și (3.17) se obține egalitatea $I_{z_1} + I_{y_1} = I_z + I_y$, ceea ce conduce la concluzia că suma momentelor de inerție axiale calculate în raport cu sisteme de referință centrale și concurente este tot timpul constantă. Rezultă că dacă momentul de inerție după o axă este maxim, momentul de inerție în raport cu axa perpendiculară este minim. Momentele de inerție maxime/minime se numesc **momente de inerție principale** (notate cu I_1 și I_2), iar axele corespunzătoare acestora reprezintă **direcțiile principale**.

Valorile limită ale momentelor de inerție axiale se obțin pentru valorile unghiului 2α la care derivatele funcțiilor (3.16) și (3.17) se anulează. Rezultă:

$$\tan 2\alpha_p = -\frac{2I_{zy}}{I_z - I_y} \quad (3.19)$$

Unghiurile α_p și $\alpha_p + 90^\circ$ definesc direcțiile principale (α_p pozitiv este măsurat în sens trigonometric, pornind de la axa z a sistemului de referință central).

O axă de simetrie a unei secțiuni transversale reprezintă întotdeauna o direcție principală, iar momentul centrifugal calculat în raport cu axele principale este nul.

Cunoscând momentele de inerție axiale și centrifugal în raport cu un sistem de referință central zCy , momentele de inerție principale pot fi calculate din relația:

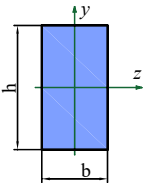
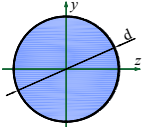
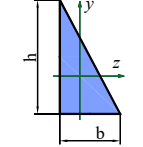
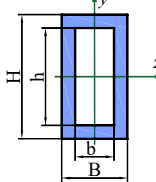
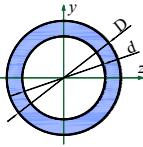
$$I_{1,2} = \frac{(I_z + I_y)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_z - I_y}{2}\right)^2 + I_{zy}^2} \quad (3.20)$$

3.5 CALCULUL CARACTERISTICILOR GEOMETRICE LA SUPRAFEȚE SIMPLE

Pentru secțiunile simple, momentele de inerție axiale și modulele de rezistență axiale în raport cu axe asociate centrului de greutate se pot calcula rapid cu formule directe, rezultate din expresiile (3.4) – (3.10). Acestea sunt sintetizate în tabelul 3.1.

3. Caracteristici geometrice ale secțiunilor plane

Tab. 3.1 Momente de inerție și module de rezistență axiale la suprafețe simple

Tip secțiune	Momente de inerție axiale		Module de rezistență axiale	
	$I_z [mm^4]$	$I_y [mm^4]$	$W_z [mm^3]$	$W_y [mm^3]$
	$\frac{b \cdot h^3}{12}$	$\frac{b^3 \cdot h}{12}$	$\frac{b \cdot h^2}{6}$	$\frac{b^2 \cdot h}{6}$
	$\frac{\pi \cdot d^4}{64}$		$\frac{\pi \cdot d^3}{32}$	
	$\frac{b \cdot h^3}{36}$	$\frac{b^3 \cdot h}{36}$	$\frac{b \cdot h^2}{24}$	$\frac{b^2 \cdot h}{24}$
	$\frac{B \cdot H^3 - b \cdot h^3}{12}$	$\frac{B^3 \cdot H - b^3 \cdot h}{12}$	$\frac{B \cdot H^3 - b \cdot h^3}{6H}$	$\frac{B^3 \cdot H - b^3 \cdot h}{6B}$
	$\frac{\pi \cdot (D^4 - d^4)}{64}$		$\frac{\pi \cdot (D^4 - d^4)}{32D}$	

Pentru secțiunea circulară plină, momentele de inerție polare (I_p) și modulele de rezistență polare (W_p) sunt date de relațiile:

$$I_p = \frac{\pi \cdot d^4}{32}$$

$$W_p = \frac{\pi \cdot d^3}{16}$$

iar pentru secțiune inelară:

$$I_p = \frac{\pi \cdot (D^4 - d^4)}{32}$$

$$W_p = \frac{\pi \cdot (D^4 - d^4)}{32D}$$

Lucrările de specialitate conțin relații de calcul sau tabele cu valori și pentru alte secțiuni uzuale și profile standardizate folosite la construcția structurilor (profile standardizate I, H, L, U, sectoare de cerc etc.).

3.6 CALCULUL CARACTERISTICILOR GEOMETRICE LA SUPRAFEȚE COMPUSE

În aplicațiile ingineresti întâlnim, în general, componente cu secțiune transversală complexă. O astfel de secțiune poate fi descompusă în n suprafețe simple (dreptunghi, triunghi, cerc etc.).

Momentul de inerție axial al unei suprafețe compuse S , calculat în raport cu o axă a sistemului de referință central, este egal cu suma momentelor de inerție ale suprafețelor simple $S_1, S_2, \dots, S_n$ care alcătuiesc suprafața compusă, calculate față de aceeași axă [12]. Având în vedere relațiile lui Steiner putem scrie:

$$I_z = \sum_{i=1}^n (I_{z_i} + c_i^2 \cdot A_i) \quad (3.21)$$

$$I_y = \sum_{i=1}^n (I_{y_i} + d_i^2 \cdot A_i) \quad (3.22)$$

$$I_{zy} = \sum_{i=1}^n (I_{z_i y_i} + c_i \cdot d_i \cdot A_i) \quad (3.23)$$

Unde:

I_z și I_y – momentele de inerție axiale ale suprafeței compuse, calculate în raport cu axele z și y ale unui sistem de referință central zCy ;

I_{zy} – momentul de inerție centrifugal al suprafeței compuse, calculat în raport cu axele z și y ale unui sistem de referință central zCy ;

$i = 1 \dots n$ – indicele suprafeței simple, suprafața compusă fiind alcătuită din n suprafețe simple;

I_{z_i} și I_{y_i} – momentele de inerție axiale ale suprafețelor simple i , calculate în raport cu sisteme de referință $z_i O_i y_i$ atașate centrelor de greutate proprii;

$I_{z_i y_i}$ – calculate în raport cu sisteme de referință $z_i O_i y_i$ atașate centrelor de greutate proprii;

A_i – aria suprafețelor simple i ;

c_i – coordonatele pe axa y ale centrelor sistemelor de referință locale $z_i O_i y_i$ în raport cu sistemul de referință zCy ;

d_i – coordonatele pe axa z ale centrelor sistemelor de referință locale $z_i O_i y_i$ în raport cu sistemul de referință zCy ;

Relațiile de calcul (3.21) – (3.23) se aplică dacă toate sistemele de referință locale $z_i C_i y_i$ sunt paralele cu sistemul de referință central $z C y$ al suprafeței compuse.

Semnul coordonatelor c_i și d_i nu influențează momentele de inerție axiale ale suprafeței compuse, dar determină valoarea momentului de inerție centrifugal. În funcție de semnul momentului de inerție centrifugal, se poate stabili cadranul în care este poziționată axa principală aferentă momentului de inerție principal maxim: cadranul I sau III dacă $I_{zy} < 0$, respectiv cadranul II sau IV dacă $I_{zy} > 0$.

În continuare se prezintă prin exemple algoritmul de calcul al caracteristicilor inerțiale la suprafețe compuse, rezultatele fiind comparate cu cele obținute direct pe modelele 3D. Majoritatea softurilor folosite în modelarea 2D/3D a componentelor mecanice au funcții directe pentru calcul caracteristicilor inerțiale. Chiar dacă acest proces nu constituie o aplicație de analiză cu element finit, calculul momentelor de inerție direct în CAD prezintă importanță în procesul de proiectare mecanică.

Aplicația A3.1. Pentru secțiunea din figura 3.4 să se determine: poziția centrului de greutate C al secțiunii; momentele de inerție axiale I_z , I_y , polar I_p și centrifugal I_{zy} în raport cu un sistem de referință central $z C y$ (cu axa z orizontală); momentele de inerție principale I_1 și I_2 și direcția axelor principale de inerție (unghiul α_p).

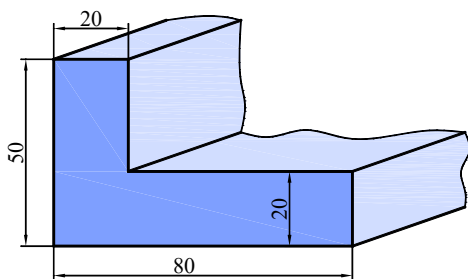


Fig. 3.4 Aplicația A3.1

Calculul analitic

Determinarea poziției centrului de greutate.

Secțiunea compusă poate fi divizată în două dreptunghiuri (figura 3.5). Fiecărui dreptunghi i se asociază sistemul de referință propriu $z_i O_i y_i$. Pentru determinarea centrului de greutate al secțiunii compuse se alege un sistem de referință arbitrar $z_0 O y_0$, în raport cu care se calculează coordonatele z_i , y_i , ale centrelor de greutate O_i (în acest exemplu s-a ales axa y_0 suprapusă peste y_1 și axa z_0 suprapusă peste z_2 , astfel încât toate coordonatele z_i , y_i să fie pozitive). Poziția centrului de greutate va fi dată de coordonatele z_C și y_C definite în raport cu $z_0 O y_0$:

$$z_C = \frac{\sum(z_i \cdot A_i)}{\sum A_i}; \quad y_C = \frac{\sum(y_i \cdot A_i)}{\sum A_i};$$

unde A_i este aria secțiunii simple „ i ”.

Se folosește tabelul de calcul rapid:

i	A_i [mm ²]	z_i [mm]	y_i [mm]	$z_i \cdot A_i$ [mm ³]	$y_i \cdot A_i$ [mm ³]
1	600	0	25	0	15000
2	1600	30	0	48000	0
Σ	2200	/	/	48000	15000

Coordonatele centrului de greutate al figurii compuse, în raport cu z_0Oy_0 vor fi:

$$z_c = \frac{\Sigma(z_i \cdot A_i)}{\Sigma A_i} = \frac{15000}{2200} = 6,818 \text{ mm}$$

$$y_c = \frac{\Sigma(y_i \cdot A_i)}{\Sigma A_i} = \frac{48000}{2200} = 21,818 \text{ mm}$$

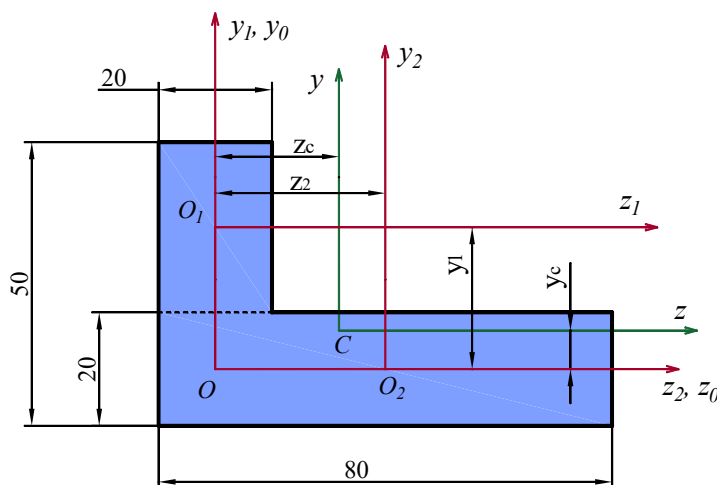


Fig. 3.5 A3.1. Determinarea poziției centrului de greutate

Determinarea momentelor de inerție axiale ale suprafeței compuse

Momentele de inerție axiale ale celor două dreptunghiuri, calculate în raport cu sistemele de referință proprii $z_iO_iy_i$, sunt:

$$I_{z_1} = \frac{b_1 \cdot h_1^3}{12} = \frac{20 \cdot 30^3}{12} = 45000 \text{ mm}^4$$

$$I_{y_1} = \frac{b_1^3 \cdot h_1}{12} = \frac{20^3 \cdot 30}{12} = 20000 \text{ mm}^4$$

$$I_{z_2} = \frac{b_2 \cdot h_2^3}{12} = \frac{80 \cdot 20^3}{12} = 53333,33 \text{ mm}^4$$

$$I_{y_2} = \frac{b_2^3 \cdot h_2}{12} = \frac{80^3 \cdot 20}{12} = 853333,33 \text{ mm}^4$$

Momentele de inerție axiale I_z și I_y ale suprafeței compuse sunt date de sumele momentelor de inerție ale celor două dreptunghiuri, calculate în raport cu axele sistemului de referință central zCy :

$$I_z = \sum (I_{z_i} + c_i^2 \cdot A_i) \qquad I_y = \sum (I_{y_i} + d_i^2 \cdot A_i)$$

unde mărimile c_i și d_i definesc coordonatele centrelor O_i în raport cu sistemul de referință central zCy (figura 3.4). Aceste coordonate sunt:

$$c_1 = y_1 - y_C = 25 - 6,818 = 18,182 \text{ mm}$$

$$c_2 = y_2 - y_C = 0 - 6,818 = -6,818 \text{ mm}$$

$$d_1 = z_1 - z_C = 0 - 21,818 = -21,818 \text{ mm}$$

$$d_2 = z_2 - z_C = 30 - 21,818 = 8,182 \text{ mm}$$

Introducând aceste valori în expresiile lui I_z și I_y se obțin următoarele valori:

$$\begin{aligned} I_z &= \sum (I_{z_i} + c_i^2 \cdot A_i) \\ &= 45000 + (18,182)^2 \cdot 600 + 53333,33 + (-6,818)^2 \cdot 1600 = 371060,60 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_y &= \sum (I_{y_i} + d_i^2 \cdot A_i) \\ &= 20000 + (-21,818)^2 \cdot 600 + 853333,33 + (8,182)^2 \cdot 1600 = 1266060,60 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

Determinarea momentului de inerție polar

Momentul de inerție polar este egal cu suma momentelor de inerție axiale:

$$I_p = I_y + I_z = 371060,60 + 1266060,60 = 1637121,20 \text{ mm}^4$$

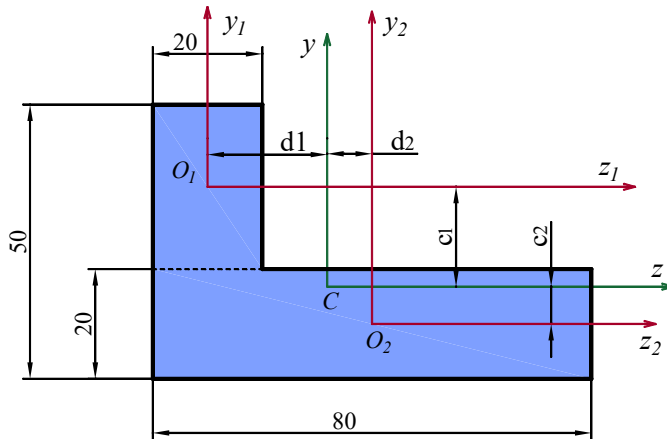


Fig. 3.6 A3.1. Definirea coordonatelor c_i și d_i

Determinarea momentului de inerție centrifugal

O secțiune dreptunghiulară are momentul de inerție centrifugal nul în raport cu axele care trec prin centrul de greutate propriu. Astfel $I_{z_1y_1} = I_{z_2y_2} = 0$.

Momentul de inerție centrifugal al suprafeței compuse va fi calculat ca sumă a momentelor de inerție centrifugale ale suprafețelor dreptunghiulare în raport cu axele z și y (din relațiile lui Steiner):

$$\begin{aligned} I_{zy} &= \sum (I_{z_i y_i} + c_i \cdot d_i \cdot A_i) \\ &= 18,182 \cdot (-21,818) \cdot 600 + (-6,818) \cdot 8,182 \cdot 1600 \\ &= -327272,73 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

Determinarea momentelor de inerție principale I_1 și I_2

Momentul de inerție principal maxim va fi:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{(I_z + I_y)}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_z - I_y}{2}\right)^2 + I_{zy}^2} \\ &= \frac{(371060,60 + 1266060,60)}{2} \\ &\quad + \sqrt{\left(\frac{371060,60 - 1266060,60}{2}\right)^2 + (-327272,73)^2} \\ &= 1372964,51 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

Momentul de inerție principal minim va fi:

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \frac{(I_z + I_y)}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_z - I_y}{2}\right)^2 + I_{zy}^2} = \\
 &= \frac{(371060,60 + 1266060,60)}{2} \\
 &\quad - \sqrt{\left(\frac{371060,60 - 1266060,60}{2}\right)^2 + (-327272,73)^2} \\
 &= 264156,70 \text{ mm}^4
 \end{aligned}$$

Determinarea axelor principale

Unghiul α_p , care definește direcțiile axelor principale, va fi:

$$\tan 2\alpha_p = -\frac{2I_{zy}}{I_z - I_y} = -\frac{2 \cdot (-327272,73)}{371060,60 - 1266060,60} = -0,7313$$

$$\alpha_{p_1} = \frac{1}{2} \cdot \arctan(-0,7313) = -18,09^\circ$$

$$\alpha_{p_2} = \alpha_{p_1} + \frac{\pi}{2} = -18,08^\circ + 90^\circ = 71,91^\circ$$

Conform celor două valori ale unghiului α_p , cele două axe principale de inerție trec prin cadrul I (pentru unghiul α_{p_2}), respectiv prin cadranul IV (pentru α_{p_1}). Momentul de inerție principal maxim va fi orientat după axa principală 2 ($\alpha_{p_2} = 71,91^\circ$), trecând prin cadranul I (dacă $I_{zy} < 0$ momentul de inerție principal maxim este orientat după o axă care trece prin cadranul I; dacă $I_{zy} > 0$ momentul de inerție principal minim este orientat după o axă care trece prin cadranul I).

Calcul folosind modelul CAD

În SolidWorks se modelează grinda cu secțiunea transversală indicată în enunț. Schița secțiunii transversale este construită pe planul *Right* (zOy), astfel încât orientarea axelor sistemului de referință să fie identică cu cea din calculul analitic (orientarea este indicată prin sistemul marcat cu roșu – figura 3.7).

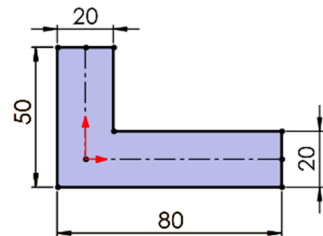


Fig. 3.7 Secțiunea A3.1

Originea a fost plasată la intersecția axelor celor două dreptunghiuri, pentru o mai ușoară comparare a rezultatelor cu cele obținute analitic.

Din banda de instrumente *Evaluate* se lansează comanda *Section Properties*. Se va selecta suprafața transversală pentru care se determină proprietățile inerțiale și opțiunea *Recalculate* pentru generarea valorilor. În fereastra *Section Properties* vor fi afișate (figura 3.8):

- aria suprafeței selectate;
- coordonatele centrului de greutate al suprafeței selectate în raport cu originea sistemului de referință din SolidWorks;
- momentele de inerție axiale (L_{zz} și L_{yy}), momentul de inerție centrifugal (L_{zy}) și momentul de inerție polar (L_{xx}), calculate în raport cu un sistem de referință atașat centrului de greutate, cu axa z orizontală;
- momentele de inerție principale (notate aici cu $I_y = I_1$ – moment de inerție maxim și $I_z = I_2$ – moment de inerție minim);
- unghiul dintre axele principale și axele sistemului de referință local (corespunzător direcției principale aferente momentului de inerție principal maxim) și previzualizarea direcțiilor principale (cu magenta);
- momentele de inerție în raport cu sistemul de referință din Solid Works.

Valorile obținute în SolidWorks sunt identice cu cele calculate analitic.

Section properties of the selected face of A3.1

Area = 2200.000 millimeters²

Centroid relative to output coordinate system origin: (millimeters)

X = 200.000
Y = 6.818
Z = -21.818

Moments of inertia of the area, at the centroid: (millimeters⁴)

Lxx = 1637121.212	Lxy = 0.000	Lxz = 0.000
Lyx = 0.000	Lyy = 1266060.606	Lyz = -327272.727
Lzx = 0.000	Lzy = -327272.727	Lzz = 371060.606

Polar moment of inertia of the area, at the centroid = 1637121.212 millimeters⁴

Angle between principal axes and part axes = 71.910 degrees

Principal moments of inertia of the area, at the centroid: (millimeters⁴)

Ix = 264156.703
Iy = 1372964.509

Moments of inertia of the area, at the output coordinate system: (millimeters⁴)

LXX = 2786666.667	LXY = 3000000.000	LXZ = -9600000.000
LYX = 3000000.000	LYY = 90313333.333	LYZ = 0.000
LZX = -9600000.000	LZY = 0.000	LZZ = 88473333.333

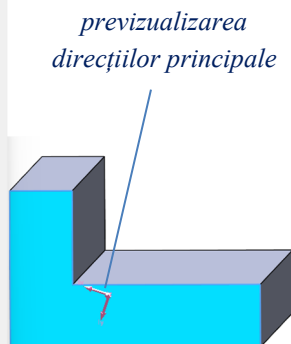


Fig. 3.8 A3.1. Valorile caracteristicilor inerțiale determinate în SolidWorks

Aplicația A3.2. Pentru secțiunea transversală din figura 3.2 să se determine: poziția centrului de greutate C; momentele de inerție axiale I_z , I_y , polar I_p și centrifugal I_{zy} în raport cu un sistem de referință central zCy (cu axa z orizontală); momentele de inerție principale I_1 și I_2 și direcția axelor principale de inerție (unghiul α_p).

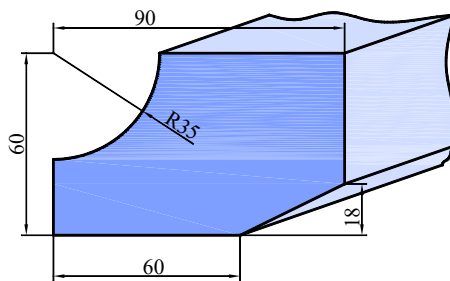


Fig. 3.9 Aplicația A3.2

Calculul analitic

Determinarea poziției centrului de greutate

Secțiunea compusă poate fi divizată în trei secțiuni simple, un dreptunghi din care se extrag un sfert de cerc și un triunghi dreptunghic (figura 3.10). Fiecărei figuri simple i se asociază sistemul de referință propriu $z_iO_iy_i$. Pentru determinarea centrului de greutate al secțiunii compuse se poziționează în colțul său din stânga jos sistemul de referință z_0Oy_0 , în raport cu care se calculează coordonatele z_i , y_i care definesc centrele de greutate O_i . Se completează tabelul de calcul rapid pentru centrele de greutate, ariile secțiunilor decupate fiind considerate negative:

i	A_i [mm ²]	z_i [mm]	y_i [mm]	$z_i \cdot A_i$ [mm ³]	$y_i \cdot A_i$ [mm ³]
1	5400	45	30	243000	162000
2	-962,11	14,85	45,15	-14291,67	-43439,26
3	-270	80	6	-21600	-1620
Σ	4167,89	/	/	207108,33	116944,90

Se vor obține coordonatele centrului de greutate al figurii compuse:

$$z_c = \frac{\Sigma(z_i \cdot A_i)}{\Sigma A_i} = \frac{207108,33}{4167,89} = 49,69 \text{ mm}$$

$$y_c = \frac{\Sigma(y_i \cdot A_i)}{\Sigma A_i} = \frac{116944,90}{4167,89} = 28,06 \text{ mm}$$

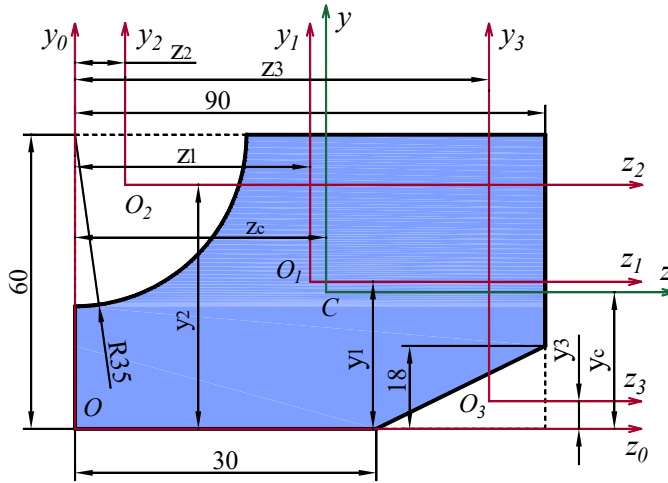


Fig. 3.10 A3.2. Determinarea poziției centrului de greutate

Determinarea momentelor de inerție axiale

Momentele de inerție axiale ale celor trei figuri simple, calculate în raport cu sistemele de referință proprii $z_i O_i y_i$, sunt:

$$I_{z_1} = \frac{b_1 \cdot h_1^3}{12} = \frac{90 \cdot 60^3}{12} = 1620000 \text{ mm}^4$$

$$I_{y_1} = \frac{b_1^3 \cdot h_1}{12} = \frac{90^3 \cdot 60}{12} = 3645000 \text{ mm}^4$$

$$I_{z_2} = -\left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi}\right) \cdot r^4 = -\left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi}\right) \cdot 35^4 = -82352,02 \text{ mm}^4$$

$$I_{y_2} = -\left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi}\right) \cdot r^4 = -\left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi}\right) \cdot 35^4 = -82352,02 \text{ mm}^4$$

$$I_{z_3} = -\frac{b_3 \cdot h_3^3}{36} = -\frac{30 \cdot 18^3}{36} = -4860 \text{ mm}^4$$

$$I_{y_3} = -\frac{b_3^3 \cdot h_3}{36} = -\frac{30^3 \cdot 18}{36} = -13500 \text{ mm}^4$$

Coordonatele c_i și d_i ale centrelor de greutate locale O_i în raport cu sistemul de referință central zCy sunt (figura 3.11):

$$c_1 = y_1 - y_C = 30 - 28,06 = 1,94 \text{ mm}$$

$$c_2 = y_2 - y_C = 45,15 - 28,06 = 17,09 \text{ mm}$$

$$c_3 = y_3 - y_C = 6 - 28,06 = -22,06 \text{ mm}$$

$$d_1 = z_1 - z_C = 45 - 49,69 = -4,69 \text{ mm}$$

$$d_2 = z_2 - z_C = 18,85 - 49,69 = -34,84 \text{ mm}$$

$$d_3 = z_3 - z_C = 80 - 49,69 = 30,31 \text{ mm}$$

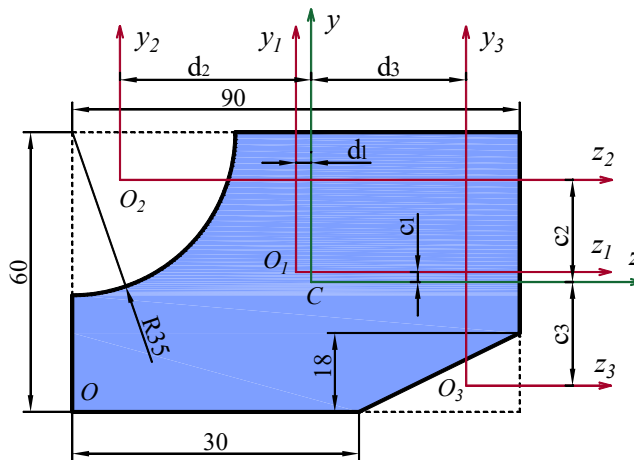


Fig. 3.11 A3.2. Determinarea poziției centrului de greutate

Introducând aceste valori în expresiile lui I_z și I_y se obțin următoarele valori:

$$\begin{aligned} I_z &= \sum (I_{z_i} + c_i^2 \cdot A_i) \\ &= 1620000 + (1,94)^2 \cdot 5400 - 82352,02 - (17,09)^2 \\ &\quad \cdot 962,11 - 4860 - (-22,06)^2 \cdot 270 = 1140861,89 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_y &= \sum (I_{y_i} + d_i^2 \cdot A_i) \\ &= 3645000 + (-4,69)^2 \cdot 5400 - 82352,02 - (-34,84)^2 \\ &\quad \cdot 962,11 - 13500 - (30,31)^2 \cdot 270 = 2252340,95 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

Determinarea momentului de inerție polar

$$I_p = I_y + I_z = 1140861,89 + 2252340,95 = 3393202,84 \text{ mm}^4$$

Determinarea momentului de inerție centrifugal

Pornind de la relațiile de calcul din literatura de specialitate, momentele de inerție centrifugale ale celor trei figuri simple, calculate în raport cu sistemele de referință proprii $z_i O_i y_i$, sunt :

$$I_{z_1 y_1} = 0 \text{ mm}^4$$

$$I_{z_2 y_2} = -\left(\frac{4}{9\pi} - \frac{1}{8}\right) \cdot r^4 = -\left(\frac{4}{9\pi} - \frac{1}{8}\right) \cdot 35^4 = -24716,88 \text{ mm}^4$$

$$I_{z_3 y_3} = -\frac{b_3^2 \cdot h_3^2}{72} = -\frac{30 \cdot 18^3}{36} = -4050 \text{ mm}^4$$

Momentul de inerție centrifugal I_{zy} al suprafeței compuse va fi suma momentelor de inerție centrifugale ale suprafețelor simple calculate în raport cu axele z și y (cu relațiile lui Steiner):

$$\begin{aligned} I_{zy} &= \sum (I_{z_i y_i} + c_i \cdot d_i \cdot A_i) \\ &= -24716,88 - 4050 + 1,94 \cdot (-4,69) \cdot 5400 - 17,09 \\ &\quad \cdot (-34,84) \cdot 962,11 - (-22,06) \cdot 30,31 \cdot 270 = \\ &= 675267,16 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

Determinarea momentelor de inerție principale I_1 și I_2

Momentul de inerție principal maxim va fi:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{(I_z + I_y)}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_z - I_y}{2}\right)^2 + I_{zy}^2} \\ &= \frac{(1140861,89 + 2252340,95)}{2} \\ &\quad + \sqrt{\left(\frac{1140861,89 - 2252340,95}{2}\right)^2 + (675267,16)^2} \\ &= 2571148,26 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

Momentul de inerție principal minim va fi:

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \frac{(I_z + I_y)}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_z - I_y}{2}\right)^2 + I_{zy}^2} = \\
 &= \frac{(1140861,89 + 2252340,95)}{2} \\
 &\quad - \sqrt{\left(\frac{1140861,89 - 2252340,95}{2}\right)^2 + (675267,16)^2} \\
 &= 822054,58 \text{ mm}^4
 \end{aligned}$$

Determinarea axelor principale

Unghiul α_p care definește direcțiile axelor principale va fi:

$$\tan 2\alpha_p = -\frac{2I_{zy}}{I_z - I_y} = -\frac{2 \cdot (675267,16)}{1140861,89 - 2252340,95} = 1,2151$$

$$\alpha_{p_1} = \frac{1}{2} \cdot \arctan(1,2151) = 25,27^\circ$$

$$\alpha_{p_2} = \alpha_{p_1} + \frac{\pi}{2} = 25,27^\circ + 90^\circ = 115,27^\circ$$

Conform celor două valori ale unghiului α_p , cele două axe principale de inerție trec prin cadrul I (pentru unghiul α_{p_1}), respectiv prin cadranul II (pentru α_{p_2}). Momentul de inerție principal maxim va fi orientat după unghiul α_{p_2} trecând prin cadranul II, deoarece $I_{zy} > 0$.

Calcul folosind modelul CAD

Pentru determinarea în Solid Works a caracteristicilor inerțiale, se modelează o grindă cu secțiunea transversală indicată în enunț. Schița secțiunii transversale este construită pe planul *Right* (zOy), astfel încât orientarea axelor sistemului de referință și originea să fie identice cu cele din calculul analitic (figura 3.12). Lungimea grinzii nu influențează aceste calcule.

Folosind comanda *Section Properties* din banda de instrumente *Evaluation* se afișează caracteristicile inerțiale. După cum se observă în figura 3.13 aria, coordonatele centrului de greutate, momentele de inerție axiale (L_{yy} , L_{zz}),

momentul de inerție polar (L_{xx}), momentul de inerție centrifugal (L_{yz}), momentele de inerție principale și unghiul care definește momentul de inerție principal maxim sunt identice cu cele calculate pe cale analitică.

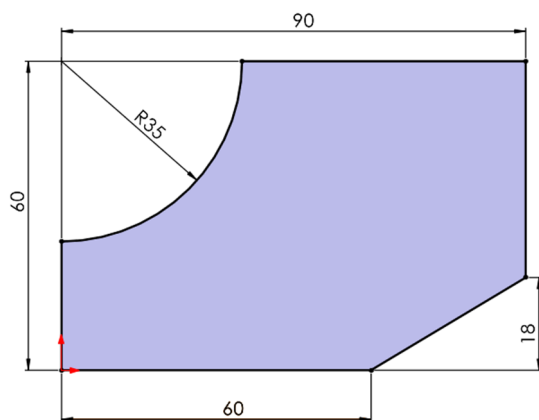


Fig. 3.12 A3.2 Poziționarea secțiunii în raport cu sistemul de referință

Section properties of the selected face of A3.2		
Area = 4167.89 millimeters ²		
Centroid relative to output coordinate system origin: (millimeters)		
X = 0.00		
Y = 28.06		
Z = -49.69		
Moments of inertia of the area, at the centroid: (millimeters ⁴)		
Lxx = 3393202.84	Lxy = 0.00	Lxz = 0.00
Lyx = 0.00	Lyy = 2252340.95	Lyz = 675267.16
Lzx = 0.00	Lzy = 675267.16	Lzz = 1140861.89
Polar moment of inertia of the area, at the centroid = 3393202.84 millimeters ⁴		
Angle between principal axes and part axes = 115.27 degrees		
Principal moments of inertia of the area, at the centroid: (millimeters ⁴)		
lx = 822054.58		
ly = 2571148.26		

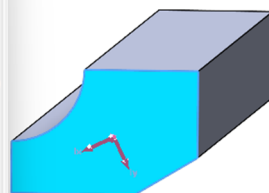


Fig. 3.13 A3.2. Valorile caracteristicilor inerțiale determinate în SolidWorks

4. Solicitări simple

Solicitățile simple apar atunci când în secțiunile transversale ale unui tronson de bară, acționează o singură componentă a forțelor interioare. Sunt prezentate relațiile fundamentale și algoritmi de calcul pentru determinarea stării de tensiune și deformare în cazul solicitări axiale (întindere/compresiune), torsiunii și încovoierii. Se evidențiază că la întindere/compresiune apar tensiuni axiale, la torsiune tensiuni tangențiale, iar la încovoiere tensiuni axiale și tensiuni tangențiale.

La solicitările simple sunt prezentate exemple de calcul atât pentru sisteme static determinate cât și pentru sisteme static nedeterminate (sisteme la care reacțiunile nu se pot calcula doar pe baza ecuațiilor de echilibru static, fiind necesară scrierea unor ecuații de compatibilitate a deformațiilor). Aplicațiile sunt rezolvate analitic și prin simulări numerice, evidențiindu-se corelația foarte bună a rezultatelor. Simulările numerice din acest capitol sunt realizate pe modele de tip solid (atunci când se dorește vizualizarea variației tensiunilor într-o secțiune transversală) sau pe modele de tip grindă (când se urmăresc doar valorile maxime din secțiune), acest ultim tip de analiză diminuând efectele locale generate de constrângeri și încărcări.

Structura capitolului este următoarea:

- 4.1 Tensiuni și deformații la solicitări axiale*
- 4.2 Sisteme static nedeterminate la solicitări axiale*
- 4.3 Torsiunea barelor cu secțiune circulară*
- 4.4 Sisteme static nedeterminate la torsiune*
- 4.5 Calculul tensiunilor la încovoiere*
- 4.6 Calculul deformațiilor la încovoiere*
- 4.7 Sisteme static nedeterminate supuse la încovoiere*

4.1 TENSIUNI ȘI DEFORMAȚII LA SOLICITĂRI AXIALE

Un tronson de bară pe care acționează o forță interioară axială N este supus la solicitare axială. Dacă $N > 0$ tronsonul este solicitat la întindere, iar dacă $N < 0$ tronsonul este solicitat la compresiune.

Solicitățile axiale generează tensiuni axiale (σ) și deformații specifice liniare (ε_x). Conform ipotezei lui Bernoulli, o secțiune transversală plană a unei bare își păstrează forma după aplicarea unei forțe axiale (secțiunea se deplasează într-o poziție paralelă cu poziția sa inițială). Rezultă că deformația specifică la solicitarea axială va avea aceeași valoare pentru orice punct din secțiunea transversală. Luând în considerare proporționalitatea dintre tensiuni și deformații specifice (legea lui Hooke), se poate concluziona că într-o secțiune transversală a unei bare supuse la solicitare axială, tensiunile au aceeași valoare pentru orice punct din secțiune.

Tensiunile la solicitările axiale se vor calcula cu relația:

$$\sigma = \frac{N}{A} \quad (4.1)$$

unde N este forța interioară axială din secțiunea de calcul, iar A este aria secțiunii.

Deformația specifică axială se poate calcula ca raport între tensiunea axială și modulul de elasticitate longitudinal (E) (din legea lui Hooke):

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \quad (4.2)$$

Alungirea totală a unui tronson de bară cu secțiune constantă A și lungime l , supus unei forțe interioare N , va fi:

$$\Delta l = \varepsilon \cdot l = \frac{\sigma}{E} \cdot l = \frac{N \cdot l}{E \cdot A} \quad (4.3)$$

În funcție de încărcările exterioare și de modul de fixare, forța axială interioară poate varia de la un tronson la altul al unei bare. În prima etapă a calculului este necesară stabilirea diagramei de variație a forței axiale, folosind metoda secțiunii (prezentată în capitolul 2).

Considerând o bară cu n tronsoane definite de lungimile l_i ($i = 1 \dots n$), fiecare tronson supus unei forțe interioare axiale distincte N_i și având rigiditate $E_i \cdot A_i$, alungirea totală a barei va fi:

$$\Delta l = \sum_{i=1}^n \frac{N_i \cdot l_i}{E_i \cdot A_i} \quad (4.4)$$

iar tensiunea axială din tronsonul i al barei se poate calcula cu relația:

$$\sigma_i = \frac{N_i}{A_i} \quad (4.5)$$

Variațiile de temperatură generează deformății termice. Supunând o bară încastrată la un capăt, la o variație de temperatură ΔT , se va produce o variație a lungimii sale:

$$\Delta l_T = \varepsilon_T \cdot l = \alpha \cdot l \cdot \Delta T \quad (4.6)$$

unde: l – lungimea inițială a barei, iar α - coeficientul de dilatare termică (caracteristică de material) măsurat în $[1/^\circ\text{C}]$ sau în $[1/^\circ\text{K}]$.

Dacă dilatarea este împiedicată (bară încastrată la ambele capete), atunci variația de temperatură va genera o tensiune axială:

$$\sigma = E \cdot \alpha \cdot \Delta T \quad (4.7)$$

Variațiile de formă ale secțiunii transversale ale unei bare pot determina efecte de concentrare a tensiunilor, chiar dacă aria se menține constantă. În literatura de specialitate [28, 33] sunt prezentate diagrame de variație ale factorilor de concentrare a tensiunilor în funcție de tipul și dimensiunile concentratorilor (alezaje, canale, raze, trepte de trecere etc.).

Aplicația A4.1. Se consideră bara din figura 4.1 formată din două tronsoane cilindrice cu diametre și lungimi diferite, solicitată la compresiune de forțele $F_1 = 24 \text{ kN}$ și $F_2 = 18 \text{ kN}$. Să se determine tensiunea axială din cele două tronsoane ale barei, deplasarea secțiunii 2, alungirea totală a barei și coeficienții de siguranță în raport cu limita de curgere a oțelului S355JR ($R_e = 275 \text{ N/mm}^2$). Se cunosc: $d_1 = 30 \text{ mm}$, $d_2 = 22 \text{ mm}$, $l_1 = 210 \text{ mm}$, $l_2 = 165 \text{ mm}$, $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$.

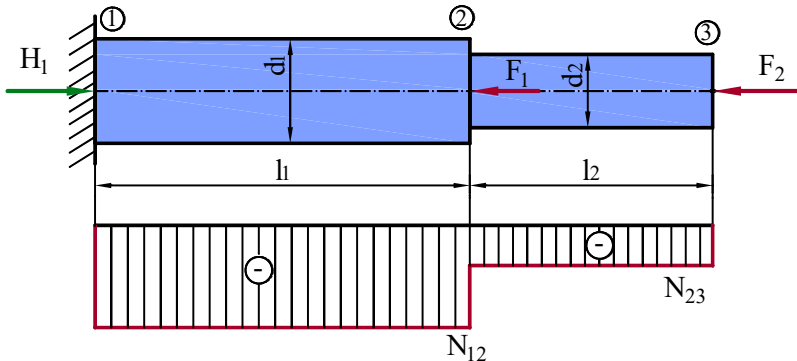


Fig. 4.1 Aplicația A4.1

Calculul analitic

Din ecuația de echilibru a forțelor pe orizontală se poate determina reacțiunea din încastrare:

$$H_1 = F_1 + F_2 = 24 + 18 = 42 \text{ kN}$$

Diagrama de variație a forței axiale (figura 4.1) se trasează pornind de la funcțiile de variație de pe cele două tronsoane:

$$N_{12} = -H_1 = -42 \text{ kN}$$

$$N_{23} = -H_1 + F_1 = -42 + 24 = -18 \text{ kN}$$

Tensiunea axială pe tronsonul [1-2] al barei va fi:

$$\sigma_1 = \frac{N_{12}}{A_1} = \frac{N_{12}}{\frac{\pi \cdot d_1^2}{4}} = -\frac{42000}{\frac{\pi \cdot 30^2}{4}} = -59,41 \text{ N/mm}^2$$

iar pe tronsonul (2-3] se va obține:

$$\sigma_1 = \frac{N_{23}}{A_2} = \frac{N_{23}}{\frac{\pi \cdot d_2^2}{4}} = -\frac{18000}{\frac{\pi \cdot 22^2}{4}} = -47,35 \text{ N/mm}^2$$

Deplasarea secțiunii 2 este egală cu alungirea tronsonului [1-2):

$$\delta_2 = \Delta l_{12} = \frac{N_{12} \cdot l_1}{E \cdot A_1} = \frac{N_{12} \cdot l_1}{E \cdot \frac{\pi \cdot d_1^2}{4}} = -\frac{42000 \cdot 210}{2,1 \cdot 10^5 \cdot \frac{\pi \cdot 30^2}{4}} = -0,059 \text{ mm}$$

Alungirea totală a barei este suma alungirii celor două tronsoane (relația 4.4):

$$\begin{aligned} \Delta l_t = \Delta l_{12} + \Delta l_{23} &= \frac{N_{12} \cdot l_1}{E_1 \cdot A_1} + \frac{N_{23} \cdot l_2}{E_1 \cdot A_1} = \frac{N_{12} \cdot l_1}{E \cdot \frac{\pi \cdot d_1^2}{4}} + \frac{N_{23} \cdot l_2}{E \cdot \frac{\pi \cdot d_2^2}{4}} \\ &= -\frac{42000 \cdot 210}{2,1 \cdot 10^5 \cdot \frac{\pi \cdot 30^2}{4}} - \frac{18000 \cdot 165}{2,1 \cdot 10^5 \cdot \frac{\pi \cdot 22^2}{4}} = -0,096 \text{ mm} \end{aligned}$$

Coefficienții de siguranță calculați în raport cu limita de curgere a oțelului S355JR, luând în calcul tensiunile de pe cele două tronsoane (în valoare absolută), vor fi:

$$c_1 = \frac{R_e}{\sigma_1} = \frac{275}{59,41} = 4,62$$

$$c_2 = \frac{R_e}{\sigma_2} = \frac{275}{47,35} = 5,80$$

Analiza FEM

Geometria barei este modelată în SolidWorks prin două extrudări succesive, pornind de la schițe trasate în planul Front (astfel, X va fi axa barei). Analiza se va face pe model solid, ceea ce va permite vizualizarea tensiunilor în secțiune (evidențierea menținerii valorii constante a tensiunilor în secțiune transversală).

Folosind comanda *New Study* din banda de instrumente *Simulation* va fi creat un studiu static. Pentru o bună organizare a activității, se recomandă plasarea fișierului de bază într-un director dedicat, deoarece la rularea analizei se vor genera fișiere auxiliare cu nume derivate de la fișierul de bază.

Proprietățile oțelului S355JR, asociate solidului A4.1 prin comanda *Apply Material*, sunt redate în figura 4.2. În practică, proprietățile unui material variază în funcție de tehnologia de elaborare, de dimensiunile semifabricatului, de tratamentele termice aplicate. În situația în care materialul din aplicație nu se regăsește în bibliotecile din SolidWorks sau are proprietăți diferite de cele indicate în soft, proiectantul poate să definească un nou material, atribuindu-i proprietățile aferente.

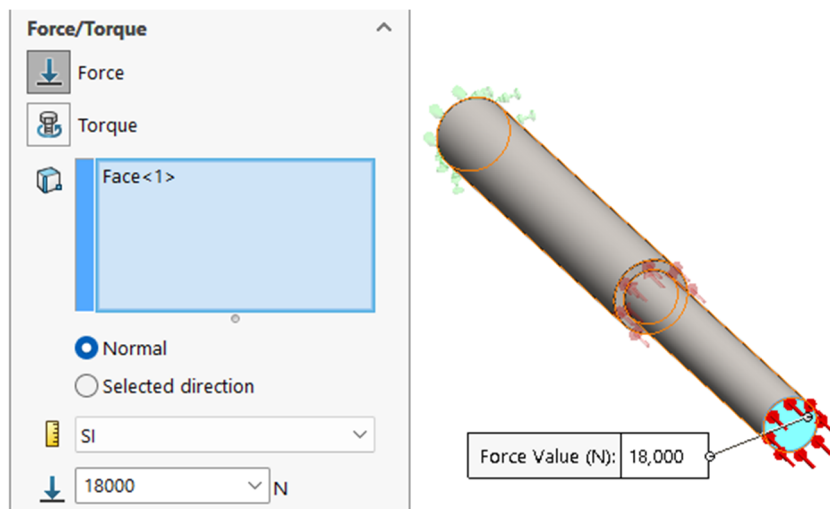
Property	Value	Units
1.0045 (S355JR)		
1.0050 (E295)		
1.0060 (E335)		
1.0070 (E360)		
1.0114 (S235J0)		
1.0116 (S235J2G3)		
1.0117 (S235J2G4)		
1.0143 (S275J0)		
1.0144 (S275J2G3)		
1.0145 (S275J2G4)		
1.0490 (S275N)		
1.0491 (S275NL)		
1.0545 (S355N)		
Elastic Modulus	210000.0031	N/mm ²
Poisson's Ratio	0.28	N/A
Shear Modulus	79000	N/mm ²
Mass Density	7800	kg/m ³
Tensile Strength	450	N/mm ²
Compressive Strength		N/mm ²
Yield Strength	275	N/mm ²
Thermal Expansion Coefficient	1.1e-05	/K
Thermal Conductivity	14	W/(m·K)
Specific Heat	440	J/(kg·K)
Material Damping Ratio		N/A

Fig. 4.2 A4.1. Aplicarea proprietăților de material

Bara va fi încăstrată la capătul cu diametru $\varnothing 30 \text{ mm}$, prin aplicarea unei constrângeri de tip *Fixed Geometry*.

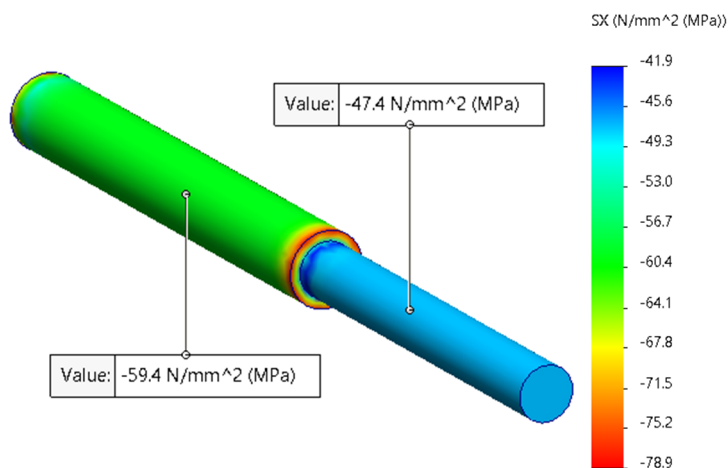
Forțele $F_1 = 24 \text{ kN}$ și $F_2 = 18 \text{ kN}$ vor fi aplicate perpendicular (opțiunea *Normal*) pe suprafața de capăt $\varnothing 22 \text{ mm}$, respectiv pe umărul de trecere dintre cele două tronsoane, folosind comanda *Force* (figura 4.3).

Aplicarea încărcărilor și constrângerilor trebuie să redea cât mai fidel modelul real de solicitare și fixare. La analiza FEM pe modele solide se va evita aplicarea încărcărilor/fixărilor pe muchii sau puncte, chiar dacă sunt date forțe sau momente concentrate. O astfel de aplicare va duce la valori locale foarte mari ale tensiunilor.


 Fig. 4.3 A4.1. Aplicarea forței F_2

Folosind comenzile *Create Mesh* și *Run This Study* se discretizează modelul în elemente finite și se rulează analiza. La analize pe modele de tip solid, dimensiunea elementelor finite poate influența valorile tensiunilor, în special la modele complexe. În cazul dat, varierea densității discretizării determină schimbarea valorilor vârfurilor de tensiune, dar nu influențează tensiunile din corpul barei.

Pentru afișarea distribuției tensiunilor axiale σ_x (x – axă longitudinală, figura 4.4), se va selecta componenta SX din tab-ul *Definition* al comenzii *Define Stress Plot*. Folosind comanda *Probe* vor fi afișate valorile tensiunilor din zonele centrale ale celor două tronsoane. Cele două valori sunt identice cu cele calculate analitic.


 Fig. 4.4 A4.1. Distribuția tensiunilor axiale σ_x

Distribuția tensiunilor SX arată că cele două valori calculate analitic corespund unei mari părți din volumul piesei, dar pe zona de trecere dintre cele două tronsoane și în zona încastrării apar valori considerabil mai mari. Aceste valori locale sunt legate de concentratorii de tensiune din zona de trecere (muchii ascuțiți în loc de raze și teșiri) și de constrângerile specifice încastrării. Încastrarea blochează deplasarea oricărui punct din suprafața pe care se aplică, ceea ce determină constrângerea deformației în această zonă și apariția unor vârfuri de tensiune (figura 4.5).

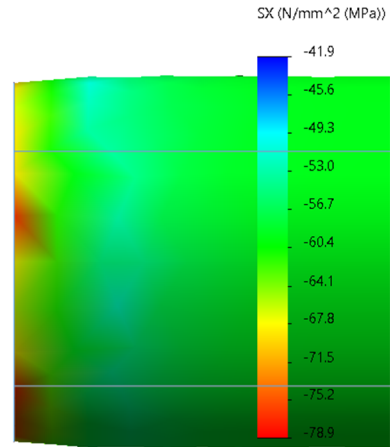


Fig. 4.5 A4.1. Vârfuri de tensiune

Proiectantul trebuie să analizeze dacă aceste vârfuri de tensiune sunt singularități (valori locale, distribuite pe o zonă mică a geometriei și necorelate cu situația practică) sau sunt valori care pot să apară în realitate și trebuie introduse ca atare în procesul de proiectare.

Figura 4.6 prezintă distribuția deplasărilor axiale δ_x (notate cu UX în SolidWorks). Deplasarea secțiunii 3 definește în acest caz alungirea totală a barei (Δl_t). Se observă că cele două valori sunt identice cu cele calculate analitic.

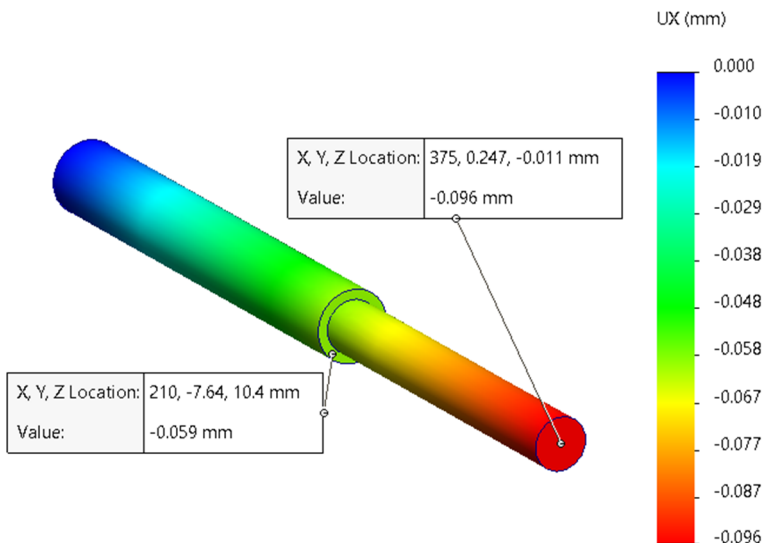


Fig. 4.6 A4.1. Distribuția deplasărilor axiale δ_x

Pentru afișarea distribuției coeficientului de siguranță (figura 4.7) se va accesa comanda *Define Factor of Safety Plot* din meniul contextual, afișat prin click-dreapta pe *Results* în arborele simulării. Factorul de siguranță este calculat pe baza criteriului de rupere folosit, proiectantul putând alege între criteriul tensiunii maxime von Mises și criteriul tensiunii tangențiale maxime – Tresca (pentru materiale cu comportament ductil), respectiv criteriile Mohr-Coulomb și criteriul tensiunii axiale maxime (pentru materialele cu comportament fragil). Pentru aplicația A4.1, în zona centrală a celor două tronsoane de bară, tensiunile echivalente von Mises sunt egale cu tensiunile axiale (deoarece apare doar solicitare axială).

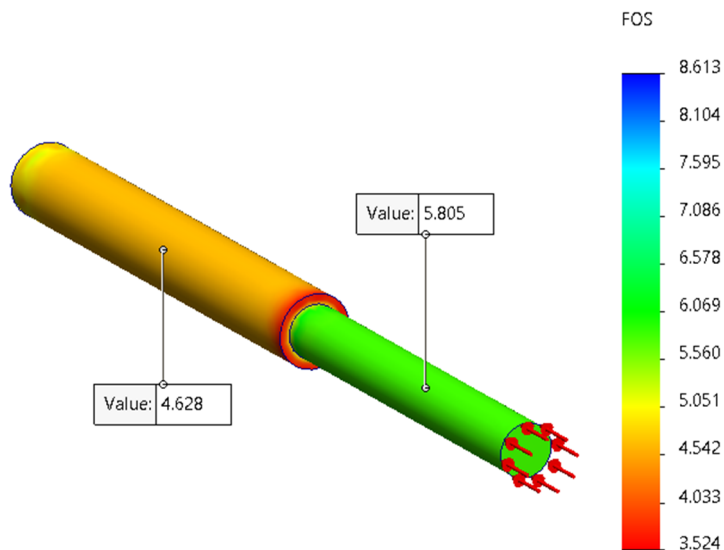


Fig. 4.7 A4.1. Distribuția factorului de siguranță c calculat în raport cu limita de curgere a materialului

4.2 SISTEME STATIC NEDETERMINATE LA SOLICITĂRI AXIALE

Sistemele static nedeterminate sunt caracterizate de un număr de reacțiuni mai mare decât numărul de ecuații de echilibru static. Rezolvarea acestor sisteme se bazează pe scrierea unor ecuații suplimentare, rezultate din legături între deplasările de la diferite componente ale sistemului (sau tronsoane ale aceleiași bare). Exemple de sisteme static nedeterminate solicitate la întindere/compresiune sunt: bare dublu încastrate, bare cu secțiune neomogenă, sisteme de bare articulate etc. În continuare se prezintă, prin două aplicații, etapele de rezolvare a unor astfel de sisteme.

Aplicația A4.2. Bara cu rigiditate foarte mare BH este poziționată printr-o articulație fixă în punctul B (figura 4.8) și susținută de două tije verticale în articulațiile C și D. Să se determine tensiunile axiale care apar în corpul celor două tije și deplasarea verticală a punctului H, atunci când pe un tronson al barei rigide este aplicată forța uniform distribuită $p = 170 \text{ kN/m}$, precum în figura de mai jos. Tijele, realizate din oțel aliat 16NiCr4 ($E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$), au secțiune dreptunghiulară cu lățime de $b = 30 \text{ mm}$ și adâncime de $t = 10 \text{ mm}$. Se cunosc: $l_1 = 200 \text{ mm}$, $l_2 = 300 \text{ mm}$, $a = 50 \text{ mm}$.

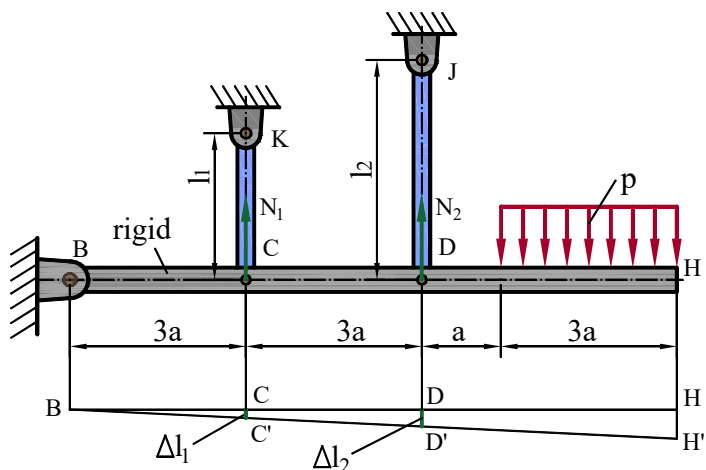


Fig. 4.8 Aplicația A4.2

Calculul analitic

Cerințele problemei vizează tensiunile axiale din tijele verticale, astfel că este necesară determinarea forțelor interioare axiale care acționează asupra acestora: N_1 pentru tija KC și N_2 pentru tija JD (în figura 4.8 forțele interioare axiale N_1 și N_2 au fost reprezentate ca reacțiuni care acționează asupra barei rigide. La tije aceste forțe vor avea sens opus, generând întindere). Se poate scrie ecuația de echilibru static al momentelor de încovoiere, în raport cu articulația fixă B:

$$p \cdot 3a \cdot 8,5a - N_1 \cdot 3a - N_2 \cdot 6a = 0$$

Având două necunoscute, este necesară scrierea unei ecuații suplimentare, rezultată din corelarea deplasărilor. Sub acțiunea forței p bara BH se va deplasa în poziția BH', deformațiile sale putând fi considerate neglijabile (rigiditate mare). Cele două tije se vor alungi cu Δl_1 (CC') și Δl_2 (DD'). BCC' și BDD' sunt triunghiuri asemenea, putându-se scrie relația de proporționalitate a laturilor lor:

$$\frac{CC'}{DD'} = \frac{BC}{BD} \Rightarrow \frac{\Delta l_1}{\Delta l_2} = \frac{3a}{6a} \Rightarrow 2 \cdot \frac{N_1 \cdot l_1}{E \cdot A_1} = \frac{N_2 \cdot l_2}{E \cdot A_2} \Rightarrow N_2 = \frac{400}{300} N_1$$

În echivalarea expresiilor de mai sus s-a ținut cont că tijele sunt realizate din același material și au aceeași arie transversală ($E_1 \cdot A_1 = E_2 \cdot A_2$). Introducând relația $N_2 = 4N_1/3$ în ecuația de echilibru static, se obține:

$$p \cdot 3a \cdot 8,5a - N_1 \cdot 3a - \frac{4N_1}{3} \cdot 6a = 0$$

$$N_1 = \frac{p \cdot 3a \cdot 8,5}{11} = \frac{170 \cdot 3 \cdot 50 \cdot 8,5}{11} = 19704,54 \text{ N}$$

Forța axială N_2 va fi:

$$N_2 = \frac{4N_1}{3} = \frac{4 \cdot 19704,54}{3} = 26272,72 \text{ N}$$

Aria transversală a celor două tije este identică:

$$A_1 = A_2 = b \cdot t = 30 \cdot 10 = 300 \text{ mm}^2$$

Tensiunile axiale din cele două tije vor fi:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{19704,54}{300} = 65,68 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_3 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{26272,72}{300} = \frac{35000}{\frac{\pi \cdot 20^2}{4}} = 87,57 \text{ N/mm}^2$$

Aceste tensiuni corespund corpului tijelor, în zonele articulațiilor de capăt putând să apară valori mai mari, generate de variația de arie și de concentratorii de tensiune (alezaje, raze de racordare).

Deplasarea verticală a punctului H se poate determina din rapoartele laturilor triunghiurilor asemenea BDD' și BHH':

$$\frac{HH'}{DD'} = \frac{BH}{BD} \Rightarrow \frac{\delta_{Hv}}{\Delta l_2} = \frac{10a}{6a} \Rightarrow \delta_{Hv} = \frac{10}{6} \cdot \Delta l_2$$

$$\delta_{Hv} = \frac{10}{6} \cdot \frac{N_2 \cdot l_2}{E \cdot A_2} = \frac{10}{6} \cdot \frac{26272,72 \cdot 300}{2,1 \cdot 10^5 \cdot 300} = 0,209 \text{ mm}$$

Analiza FEM

Sistemul A4.2 va fi modelat sub formă de ansamblu de trei componente. Articulațiile B, K, J, C și D vor fi aplicate direct în analiza FEM, nefiind necesară modelarea lor 3D (bara rigidă și tijele vor fi modelate cu alezajele aferente articulațiilor, dar nu se vor realiza bolțurile și elementele fixe de la articulațiile de capăt). Geometriile celor trei componente vor fi modelate individual în fișiere de tip *Part*, conform dimensiunilor din figurile 4.9 – 4.11. Toate cele trei componente pot fi realizate prin operații simple de extrudare cu adăugare sau eliminare de material. Definirea formei și dimensiunilor s-a făcut pe baza datelor din enunț, luând în considerare și considerentele de montaj (canalul și alezajele din bara rigidă, geometria capetelor la tije). Pe suprafața superioară a barei rigide va fi trasată o linie la 150 mm de capăt, pentru delimitarea zonei de aplicare a forței.

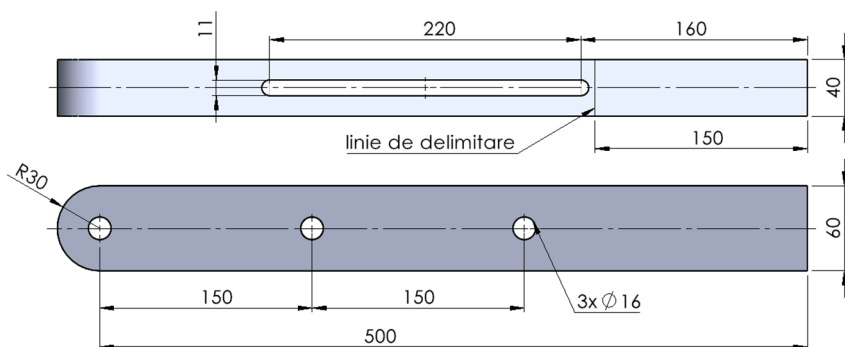


Fig. 4.9 A4.2. Geometria barei rigide BH

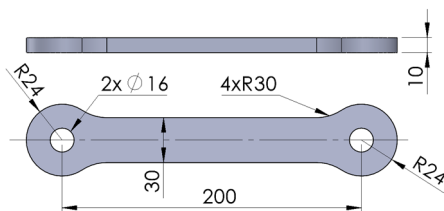


Fig. 4.10 A4.2. Geometria tijei CK

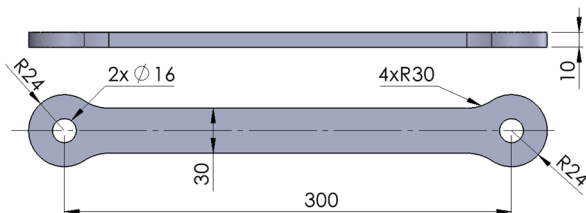


Fig. 4.11 A4.2. Geometria tijei JD

Pentru poziționarea celor trei componente în ansamblu se va deschide un fișier de tip *Assembly* și se va crea schița suport din figura 4.12. Folosind punctele corespunzătoare articulațiilor fixe B, K, J se vor genera linii de axă perpendiculare pe planul schiței (din zona *Reference Geometry*, banda *Assembly* se lansează comanda *Axis*, se alege opțiunea *Point and Face/Plane* și se selectează pe ecran punctul și planul care definesc respectiva axă).

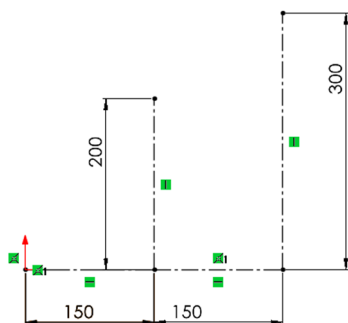


Fig. 4.12 A4.2. Schiță suport pentru poziționarea componentelor în ansamblu

În ansamblu se vor insera simultan cele trei componente, fără a le fixa în raport cu spațiul de lucru: se lansează comanda *Insert Components*, se selectează toate cele trei componente în zona *Part/Assembly to Insert* și se urmărește bifarea opțiunii *Float* în zona *Fix/float component to insert*. Prin click-uri succesive pe ecran vor fi poziționate provizoriu cele trei componente.

Folosind comanda *Mate*, vor fi aplicate în ansamblu următoarele constrângeri:

- simetrie a suprafețelor laterale ale canalului din bara rigidă în raport cu planul schiței suport din figura 4.12;
- concentricități între alezajele articulațiilor fixe B (bara rigidă), K (tija 1), respectiv J (tija 2) cu cele trei axe corespunzătoare;
- concentricități ale alezajelor care formează articulațiile C, respectiv D;
- dispunerea simetrică pe lățime (opțiunea *Width* din comanda *Mate->Advanced*) între suprafețele laterale ale canalului din bara rigidă și suprafețele laterale ale tijelor (figura 4.13).

Din banda *Simulation* se va lansa comanda *New Study* creându-se un studiu static. Oțelul aliat 16NiCr4 va fi asociat pentru cele două tije (folosind comanda *Apply Material*), iar bara BH va fi definită ca infinit rigidă – nedeformabilă (din meniul contextual afișat prin click dreapta pe numele barei, în arborele operațiilor din simulare, se selectează opțiunea *Make Rigid*).

4. Solicitări simple

La articulațiile C și D se vor impune două conexiuni de tip *Pin* (din zona *Connections* a benzii *Simulation*). Acestea leagă toate suprafețele cilindrice care formează o articulație, impunând blocarea deplasării axiale (opțiunea *With retaining ring*, figura 4.14) sau/și blocarea rotației relative (opțiunea *With key*). Folosirea acestei opțiuni în locul celei de modelare efectivă a articulației (cu inserarea știftului de legătură) are avantajul de elimina analiza contactului dintre componente, care în această situație nu reprezintă cerință de calcul.

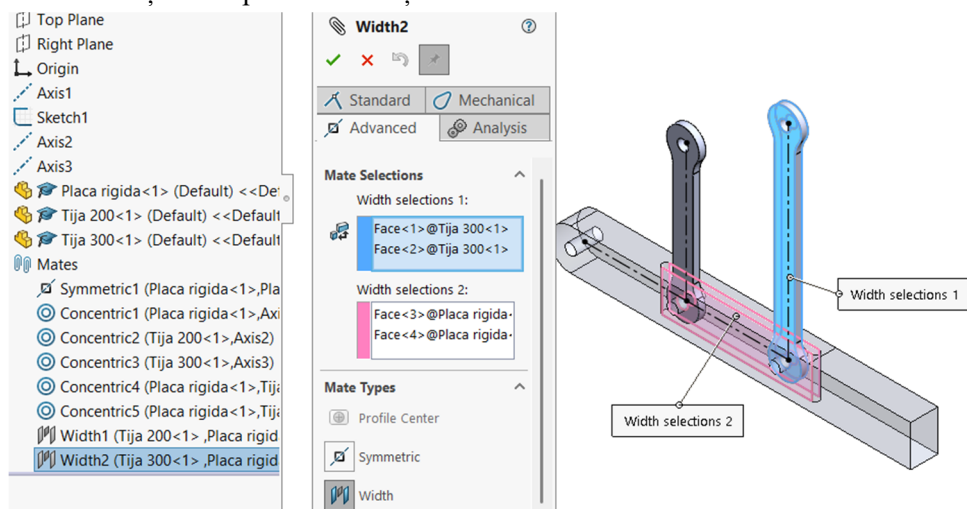


Fig. 4.13 A4.2. Aplicarea relației de tip *Width* între bara rigidă și tija 2

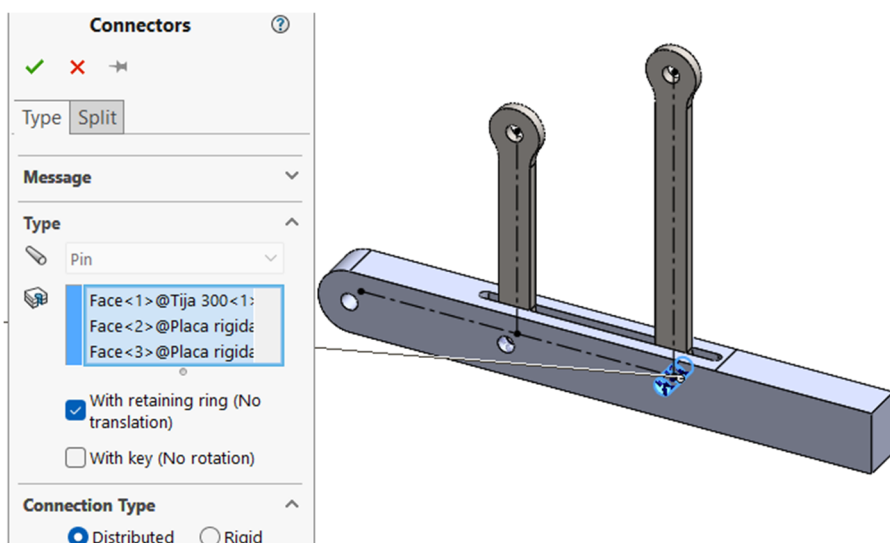


Fig. 4.14 A4.2. Aplicarea conexiunii de tip *Pin* la articulația D

La articulațiile fixe B, K, J se vor aplica constrângeri de tip *Fixed Hinge* (din banda *Simulation* zona *Fixtures*). Acestea blochează translațiile, lăsând liberă rotația.

Forța uniform distribuită ($p = 170 \text{ kN/m}$) nu poate fi aplicată direct în analiza geometriilor de tip solid, dar poate fi redată sub forma forței echivalente (în acest caz $25,5 \text{ kN} = 170 \text{ kN/m} \cdot 0,15 \text{ m}$), aplicată pe suprafața corespunzătoare a barei rigide. Pentru definirea suprafeței, în tab-ul *Split* al comenzii *Force* se va diviza suprafața superioară a barei BH, în funcție de linia de delimitare creată anterior în fișierul de tip part (figura 4.15).

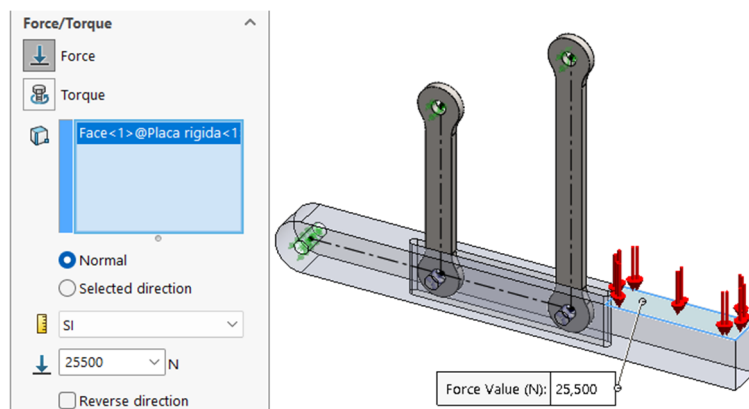


Fig. 4.15 A4.2. Aplicarea forței echivalente distribuite

Aplicând comanda *Create Mesh* va fi generată discretizarea în elemente finite atât pentru cele două, tije cât și pentru bara rigidă (evidențiată cu o culoare distinctă – figura 4.16).

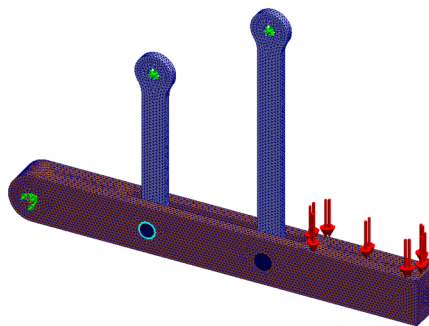


Fig. 4.16 A4.2. Discretizarea modelului în elemente finite

După rularea analizei (comanda *Run This Study*) vor fi afișate rezultatele în arborele operațiilor. Tensiunile din corpul tijelor pot fi vizualizate pe diagrama tensiunii axiale corespunzătoare axei tijelor sau pe diagrama tensiunii echivalente

von Mises, preluând probe de valori (comanda *Probe* din zona *Results*). Se observă suprapunerea rezultatelor obținute în simulare cu cele calculate analitic (figura 4.17). Tensiunile din zonele de capăt ale tijelor sunt diferite de cele din corpul tijelor, datorită particularităților geometrice.

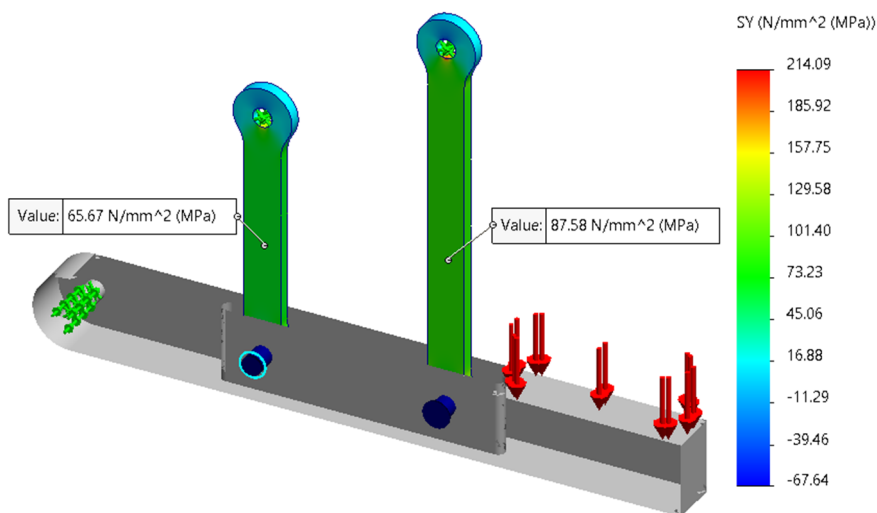


Fig. 4.17 A4.2. Evidențierea tensiunilor axiale în corpul tijelor suport

Bara rigidă nu prezintă deformații, dar prezintă deplasări. Figura 4.18 redă distribuția deplasărilor pe direcția verticală, evidențiindu-se valoarea corespunzătoare punctului H, egală cu cea obținută în calculul analitic.

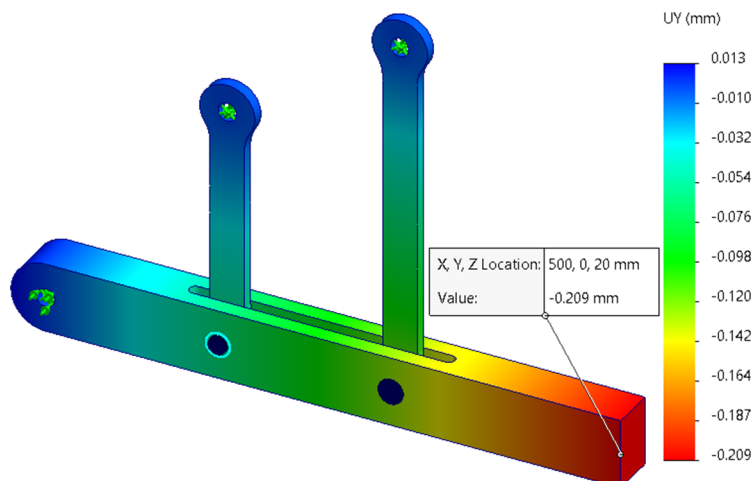


Fig. 4.18 A4.2. Distribuția deplasărilor la sistemul analizat

Aplicația A4.3. Tija din figura 4.19 este realizată din două tronsoane cilindrice de diametre $d_1 = 30 \text{ mm}$ și $d_3 = 20 \text{ mm}$, confecționate din oțel inoxidabil X5CrNi18-10 (cu modul de elasticitate $E_1 = 2 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$). Tija este încastrată în secțiunea 1, iar între secțiunea 2 (trecerea între diametre) și peretele fix (secțiunea 3) se montează fără joc o bucșă din bronz CuSn4 (cu modul de elasticitate $E_2 = 1,1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$). Bucșa are diametrul exterior $d_1 = 30 \text{ mm}$ și diametrul interior $d_2 = 22 \text{ mm}$. După realizarea acestui montaj, la capătul liber al tijei (secțiunea 4) se aplică forța $F = 35 \text{ kN}$. Să se calculeze tensiunile din cele două tronsoane ale tijei, tensiunea din bucșă, deplasarea secțiunii 2 și alungirea totală a tijei. Se cunosc: $l_1 = 200 \text{ mm}$, $l_2 = 100 \text{ mm}$ și $l_3 = 180 \text{ mm}$.

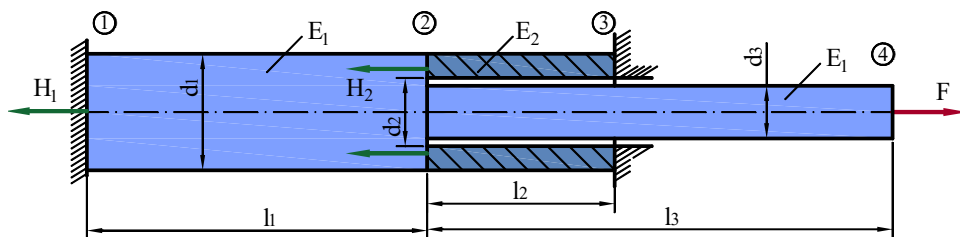


Fig. 4.19 Aplicația A4.3

Calculul analitic

Forței F din secțiunea 4 i se opune reacțiunea H_1 din încastrare, dar și reacțiunea H_2 de la contactul tijă – bucșă. Se poate scrie ecuația de echilibru static:

$$F - H_1 - H_2 = 0$$

În figura de mai sus au fost reprezentate reacțiunile care acționează asupra tijei. Tronsonul [1-2] al tijei va fi solicitat de forța interioară axială $N_{12} = H_1$, iar tronsonul [2-4] de forța interioară axială $N_{24} = H_1 + H_2 = F$. Bucșa va fi supusă unei forțe de compresiune egală și de sens opus lui H_2 ($N_{23b} = -H_2$).

Pentru a determina cele două necunoscute, H_1 și H_2 , este nevoie de scrierea unei ecuații de legătură între deformații. Se observă că alungirea tronsonului [1-2] al tijei va fi egală cu comprimarea bucșei:

$$\begin{aligned} \Delta l_{12(\text{tijă})} &= \Delta l_{23(\text{bucșă})} & \Rightarrow & \frac{N_{12} \cdot l_1}{E_1 \cdot A_1} = \frac{N_{23} \cdot l_2}{E_2 \cdot A_2} \\ \frac{H_1 \cdot l_1}{E_1 \cdot A_1} &= \frac{H_2 \cdot l_2}{E_2 \cdot A_2} & \Rightarrow & H_2 = \frac{E_2 \cdot A_2 \cdot l_1}{E_1 \cdot A_1 \cdot l_2} \cdot H_1 \end{aligned}$$

Introducând expresia lui H_2 în ecuația de echilibru static rezultă:

$$H_1 = \frac{F}{\left(1 + \frac{E_2 \cdot A_2 \cdot l_1}{E_1 \cdot A_1 \cdot l_2}\right)} = \frac{35000}{\left(1 + \frac{1,1 \cdot 10^6 \cdot 326,73 \cdot 200}{2 \cdot 10^6 \cdot 706,86 \cdot 100}\right)} = 23202,71 \text{ N}$$

unde:

$$A_1 = \frac{\pi \cdot d_1^2}{4} = \frac{\pi \cdot 30^2}{4} = 706,86 \text{ mm}^2$$

$$A_2 = \frac{\pi \cdot (d_1^2 - d_2^2)}{4} = \frac{\pi \cdot (30^2 - 22^2)}{4} = 326,73 \text{ mm}^2$$

În mod similar, reacțiunea H_2 va fi:

$$H_2 = \frac{F}{\left(1 + \frac{E_1 \cdot A_1 \cdot l_2}{E_2 \cdot A_2 \cdot l_1}\right)} = \frac{35000}{\left(1 + \frac{2 \cdot 10^6 \cdot 706,86 \cdot 100}{1,1 \cdot 10^6 \cdot 326,73 \cdot 200}\right)} = 11797,28 \text{ N}$$

Tensiunile axiale din cele două tronsoane ale tijei vor fi:

$$\sigma_1 = \frac{N_{12}}{A_1} = \frac{23202,71}{706,86} = 32,82 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_3 = \frac{N_{24}}{A_3} = \frac{F}{\frac{\pi \cdot d_3^2}{4}} = \frac{35000}{\frac{\pi \cdot 20^2}{4}} = 111,40 \text{ N/mm}^2$$

Tensiunea axială din bucșă va fi:

$$\sigma_2 = \frac{N_{23b}}{A_2} = -\frac{11797,28}{326,73} = -36,10 \text{ N/mm}^2$$

Deplasarea secțiunii 2 este egală cu alungirea tronsonului [1-2] al tijei:

$$\delta_2 = \Delta l_{12} = \frac{N_{12} \cdot l_1}{E_1 \cdot A_1} = \frac{23202,71 \cdot 200}{2 \cdot 10^5 \cdot 706,86} = 0,032 \text{ mm}$$

Alungirea totală a tijei de oțel este suma alungirii celor două tronsoane:

$$\begin{aligned} \Delta l_t &= \Delta l_{12} + \Delta l_{24} = \frac{N_{12} \cdot l_1}{E_1 \cdot A_1} + \frac{N_{24} \cdot l_3}{E_1 \cdot A_3} = \\ &= \frac{23202,71 \cdot 200}{2 \cdot 10^5 \cdot 706,86} + \frac{35000 \cdot 180}{2 \cdot 10^5 \cdot 314,16} = 0,133 \text{ mm} \end{aligned}$$

Analiza FEM

Modelul 3D al sistemului tijă – bucășă poate fi realizat sub formă de ansamblu sau direct într-un fișier de tip *Part*. Având în vedere simplitatea constructivă, în acest exemplu s-a ales a doua variantă, generându-se cele două componente în același fișier, prin extrudări succesive. La extrudarea bucășei se va debifa opțiunea *Merge results* pentru a obține un solid distinct.

După generarea unui nou studiu static se vor asocia proprietățile de material (X5CrNi18-10 la tijă, CuSn4 la bucășă). În pasul următor se va verifica condiția de contact dintre cele două componente: în zona *Component Interaction* din arborele simulării se editează intrarea *Global Interaction*, alegând tipul de interacțiune *Contact*. Acest tip de interacțiune permite deplasarea laterală relativă a bucășei în raport cu tijă, fără ruperea contactului și fără intersectarea volumelor.

Suprafața de capăt 1 a tijei și suprafața de capăt 3 a bucășei vor fi încastate prin aplicarea unor constrângeri de tip *Fixed Geometry*. Pe suprafața de capăt 4 a tijei se va aplica forța $F = 35 \text{ kN}$.

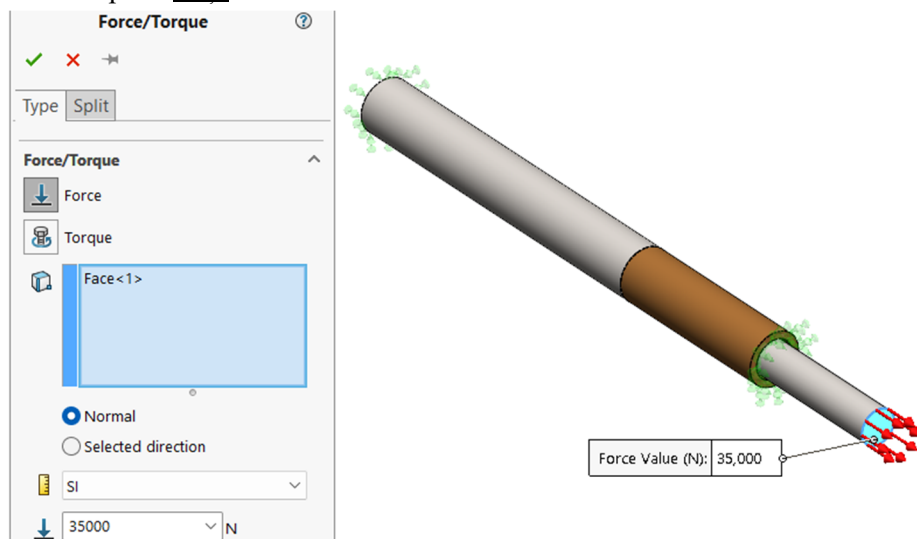


Fig. 4.20 A4.3. Aplicarea forței F

După generarea discretizării și rularea studiului vor fi afișate distribuțiile de tensiuni și deplasări. Se vor seta componentele urmărite: tensiunea axială SX și deplasarea UX (x fiind axa barei, în acest exemplu).

Figura 4.21 prezintă variația tensiunii axiale în secțiunea longitudinală a sistemului, reprezentare obținută prin comanda *Section Clipping*, din zona *Plot Tools*. Se observă că tijă este supusă la întindere, iar bucășă supusă la compresiune.

4. Sollicitări simple

Valorile din corpul tronsoanelor tijei și corpul buchei, evidențiate cu comanda *Probe* din zona *Plot Tools*, indică o apropiere mare a rezultatelor de cele obținute prin calcul. Variația deplasărilor axiale (figura 4.22) evidențiază diferențe de aproximativ 1,5% în raport cu valorile calculate teoretic.

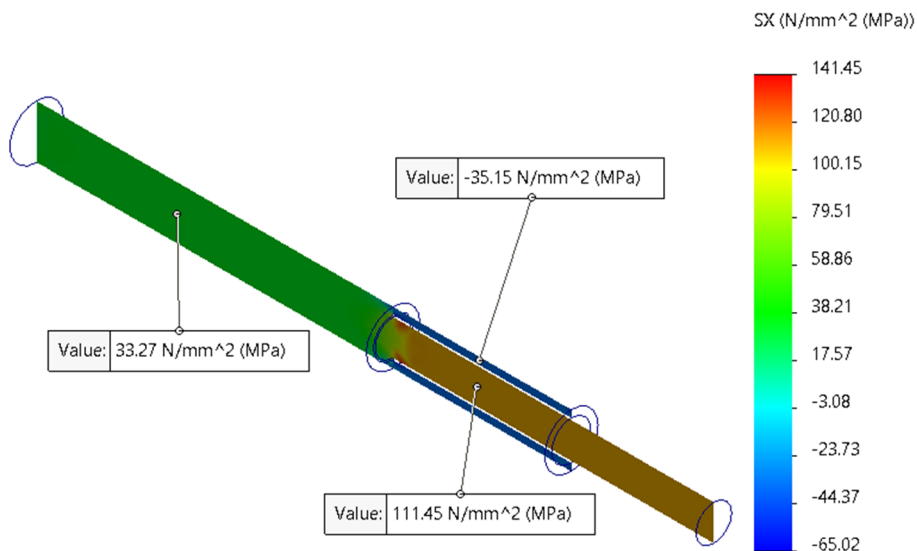


Fig. 4.21 A4.3. Distribuția tensiunilor axiale σ_x

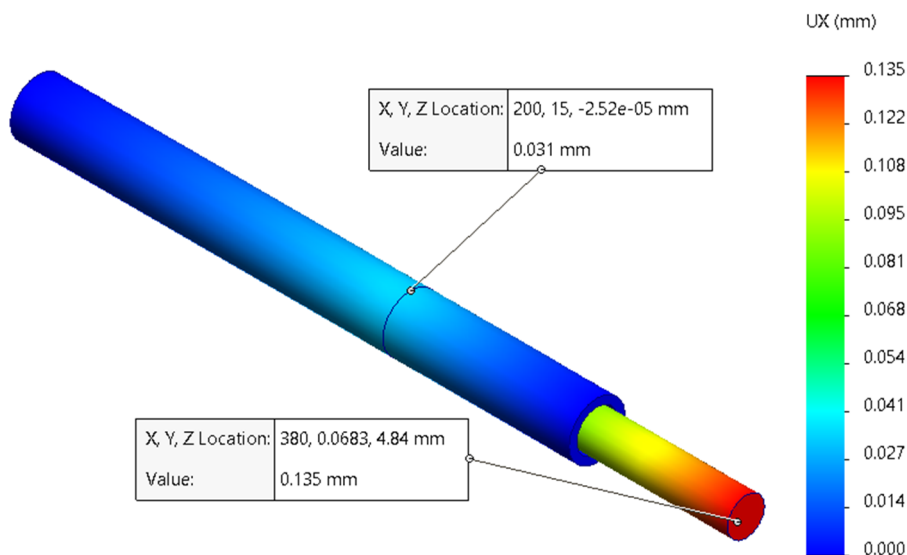


Fig. 4.22 A4.3. Distribuția deplasărilor axiale δ_x

4.3 TORSIUNEA BARELOR CU SECȚIUNE CIRCULARĂ

Torsiunea este solicitarea simplă generată de acțiunea momentului de torsiune interior M_t . Considerând o bară cilindrică, încastrată la un capăt și supusă unui cuplu de forțe la capătul opus, se poate constata că secțiunile transversale ale acesteia suferă deformații unghiulare (rotiri) în raport cu poziția inițială. Dacă se consideră o secțiune transversală, solicitată de un moment de torsiune interior M_t , într-un punct oarecare al secțiunii va apărea tensiunea tangențială τ :

$$\tau = \frac{M_t}{I_p} \cdot r \quad (4.8)$$

unde r este raza care definește poziția punctului în raport cu centrul secțiunii, iar I_p este momentul de inerție polar al secțiunii (introdus în capitolul III).

Din relația de mai sus se observă că tensiunile tangențiale generate la torsiune variază într-o secțiune transversală, fiind zero în centrul secțiunii și maxime la periferie. În calculele de rezistență prezintă importanță în special valorile maxime ale tensiunii, care pentru barele drepte cu secțiune circulară se calculează cu relația:

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{W_p} \quad (4.9)$$

unde W_p este modulul de rezistență polar al secțiunii de calcul.

Rotirea relativă φ [rad] a două secțiuni transversale, situate la distanța l una față de cealaltă, este definită de relația:

$$\varphi = \frac{M_t \cdot l}{G \cdot I_p} \quad (4.10)$$

unde G este modulul de elasticitate transversal.

Dacă o bară este alcătuită din mai multe tronsoane cu rigiditate diferită ($G_i \cdot I_{p_i}$, $i = \overline{1 \dots n}$, supuse la momente de torsiune interioare distincte (M_{t_i} , $i = \overline{1 \dots n}$), rotirea relativă dintre secțiunile de capăt se poate calcula cu relația:

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \frac{M_{t_i} \cdot l_i}{G_i \cdot I_{p_i}} \quad (4.11)$$

Rotirea specifică θ [rad/m] definește gradul de deformare al unei bare, independent de distanța dintre două secțiuni:

$$\theta = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_t}{G \cdot I_p} \quad (4.12)$$

Aplicația A4.4. Un arbore drept cu secțiune inelară cu diametru exterior $D_1 = 160 \text{ mm}$ și diametru interior $d_1 = 120 \text{ mm}$ transmite o putere $P = 750 \text{ kW}$ la o turație $n = 300 \text{ rot/min}$. Arborele are lungimea $l = 900 \text{ mm}$ și este realizat din oțel aliat 20MnCr5 ($G = 79000 \text{ N/mm}^2$). Se cere:

- să se determine tensiunile tangențiale pe suprafața exterioară și pe suprafața interioară a arborelui, precum și rotirea relativă a suprafețelor de capăt (fără a lua în considerare efectul flanșelor de prindere);
- să se stabilească diametrul arborelui drept cu secțiune circulară plină d_2 , cu masă și lungime identice cu arborele din enunț și să se calculeze tensiunea tangențială maximă care apare la acest arbore (păstrând condițiile de solicitare din enunț).

Calculul analitic

Momentul de torsiune transmis se poate calcula în funcție de putere și turație:

$$M_t = 9,55 \cdot 10^6 \cdot \frac{P}{n} = 9,55 \cdot 10^6 \cdot \frac{750}{300} = 23875000 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

Momentul de inerție polar al secțiunii inelare va fi:

$$I_p = \frac{\pi \cdot (D_1^4 - d_1^4)}{32} = \frac{\pi \cdot (160^4 - 120^4)}{32} = 43982297,15 \text{ mm}^4$$

Tensiunile tangențiale de pe suprafața cilindrică exterioară și suprafața cilindrică interioară a arborelui corespund razelor $r_e = 80 \text{ mm}$ și $r_i = 60 \text{ mm}$, reprezentând valorile maxime și minime care apar în orice secțiune transversală:

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{I_p} \cdot r_e = \frac{23875000}{43982297,15} \cdot 80 = 43,42 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau_{\min} = \frac{M_t}{I_p} \cdot r_i = \frac{23875000}{43982297,15} \cdot 60 = 32,56 \text{ N/mm}^2$$

Rotirea relativă a suprafețelor de capăt (fără a lua în considerare efectul flanșelor de prindere) este:

$$\varphi = \frac{M_t \cdot l}{G \cdot I_p} = \frac{23875000 \cdot 900}{79000 \cdot 43982297,15} = 0,00618 \text{ rad}$$

Dacă arborele este realizat cu secțiune circulară plină, urmărindu-se păstrarea masei, diametrul său va fi obținut din egalitatea ariilor secțiunilor transversale:

$$\frac{\pi \cdot d_2^2}{4} = \frac{\pi \cdot (D_1^2 - d_1^2)}{4} \Rightarrow d_2 = \sqrt{D_1^2 - d_1^2} = \sqrt{160^2 - 140^2} = 105,8 \text{ mm}$$

Alegând valoarea rotunjită, $d_2 = 106 \text{ mm}$, se va obține tensiunea maximă:

$$\tau_{2 \max} = \frac{M_t}{I_{p2}} \cdot r_2 = \frac{M_t}{\frac{\pi \cdot d_2^4}{32}} \cdot r_2 = \frac{23875000}{\frac{\pi \cdot 106^4}{32}} \cdot 53 = 102,09 \text{ N/mm}^2$$

Se observă că tensiunea tangențială maximă în cazul folosirii arborelui cu secțiune plină cu diametrul $d_2 = 106 \text{ mm}$ este de 2.35 ori mai mare decât tensiunea maximă corespunzătoare arborelui cu secțiune inelară cu diametru exterior $D_1 = 160 \text{ mm}$ și diametru interior $d_1 = 120 \text{ mm}$.

Analiza FEM

Modelul 3D al arborelui cu secțiune inelară, va fi obținut prin extrudarea schiței secțiunii transversale, trasată în planul YZ. În pașii următori se va crea un nou studiu static și se vor atribui proprietățile de material (oțelul 20MnCr5).

Fiind modelat fără flanșele de legătură, constrângerea și încărcarea se vor aplica direct pe suprafețele frontale de capăt ale arborelui. La un capăt se va aplica încăstrare, iar la capătul opus se va aplica momentul de torsiune $M_t = 23875 \text{ N} \cdot \text{m}$, folosind comanda *Torque*, figura 4.23 (în zona *Axis, Cylindrical Face for Direction* se selectează o suprafață cilindrică pentru definirea axei momentului de torsiune).

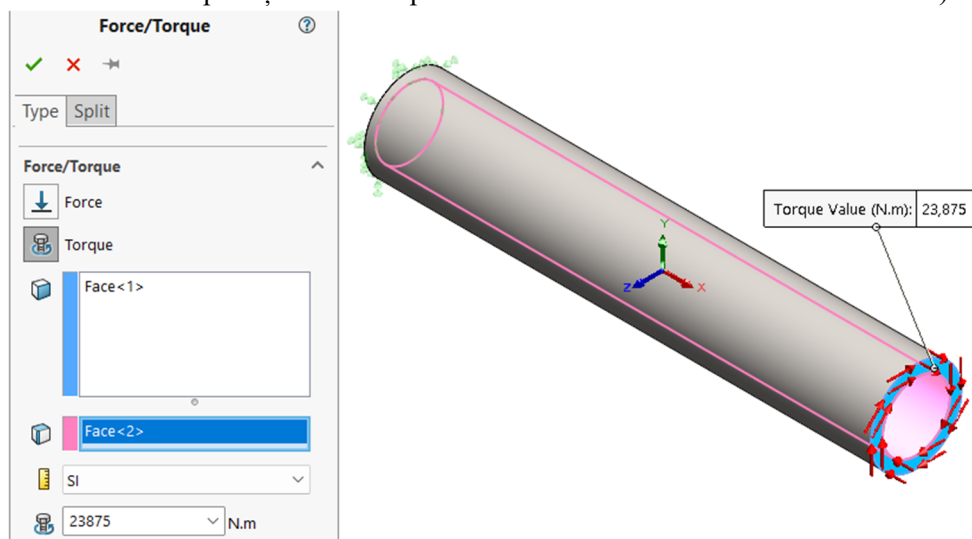


Fig. 4.23 A4.4 Definirea momentului de torsiune la arborele tubular

După crearea rețelei de elemente finite și rularea studiului, vor fi selectate componentele de tensiune și de deplasare de afișat (din meniul contextual al intrării *Results*).

În orice secțiune transversală a arborelui tensiunea tangențială variază liniar după toate direcțiile radiale care pornesc din centrul secțiunii. În SolidWorks pot fi vizualizate componentele de tensiune orientate după sistemul de referință $Oxyz$. Dacă x este axa arborelui, tensiunile τ_{xy} și τ_{xz} reprezintă proiecțiile pe axele y și z ale tensiunii tangențiale ($\tau = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2}$). Celelalte patru componente de tensiune (σ_x , σ_y , σ_z , τ_{yz}) sunt nule la torsiune. Dacă se analizează valorile pentru punctele de pe o axă a secțiunii transversale, o componentă a tensiunii tangențiale variază între maxim și minim, iar cealaltă va fi zero. Figura 4.24 prezintă variația tensiunilor tangențiale τ_{xy} și τ_{xz} într-o secțiunea transversală centrală a arborelui cu secțiune inelară (s-a ales o secțiune centrală pentru a evita variațiile locale din zona suprafețelor constrânse/încărcate). Se observă suprapunerea rezultatelor peste cele obținute analitic.

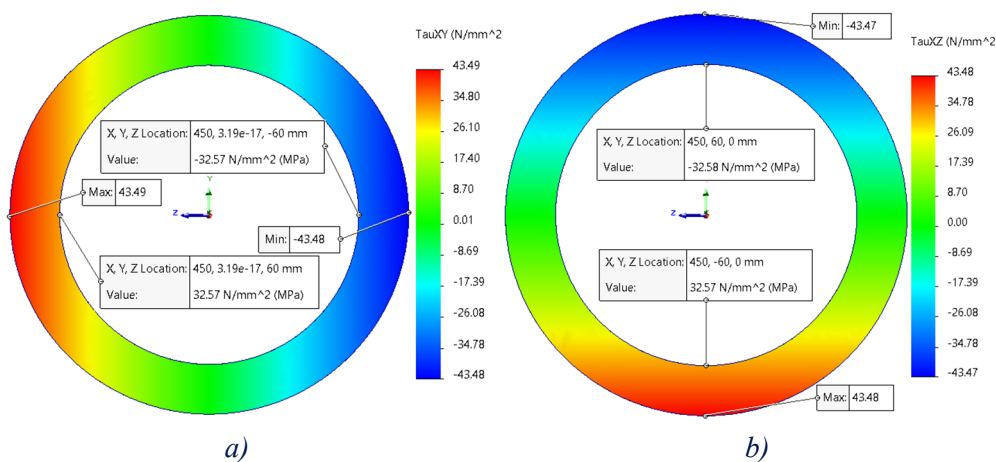


Fig. 4.24 A4.4 Distribuția tensiunilor tangențiale τ_{xy} și τ_{xz}

O imagine mai realistă a distribuției tensiunilor din secțiunea transversală centrală este dată de distribuția tensiunilor principale σ_1 (P1 în SolidWorks) (figura 4.25). Dacă în ecuațiile (1.4) – (1.7) se introduc valorile lui τ_{xy} și τ_{xz} , restul componentelor fiind nule, se obține ecuația tensiunilor principale: $\sigma^3 - (\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2)$, cu o soluție nulă și două soluții egale cu: $\sigma_{1,2} = \pm \sqrt{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2}$.

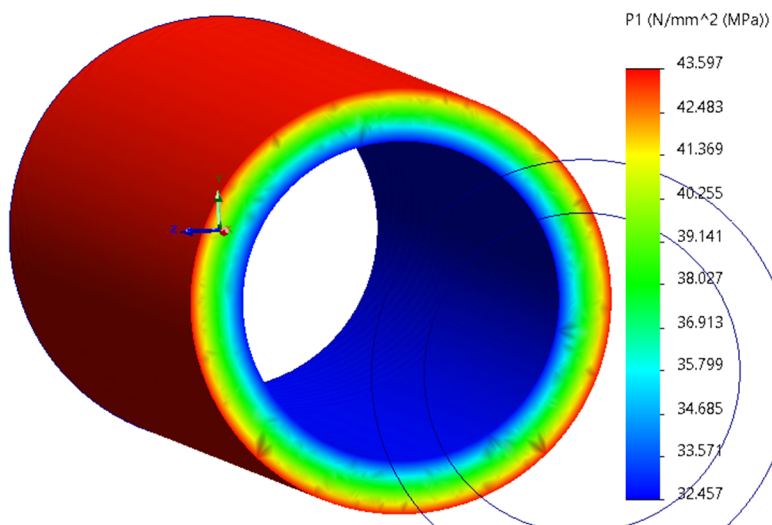


Fig. 4.25 A4.4 Distribuția tensiunii principale $P1$

Rotirea relativă a suprafeței pe care se aplică momentul de torsiune în raport cu suprafața încastrată poate fi determinată indirect, în funcție de deplasarea rezultantă – egală cu coarda unghiului de răsucire (figura 4.26) și raza exterioară:

$$\varphi = \frac{U_{res}}{r_e} = \frac{0,478}{80} = 0,00598 \text{ rad}$$

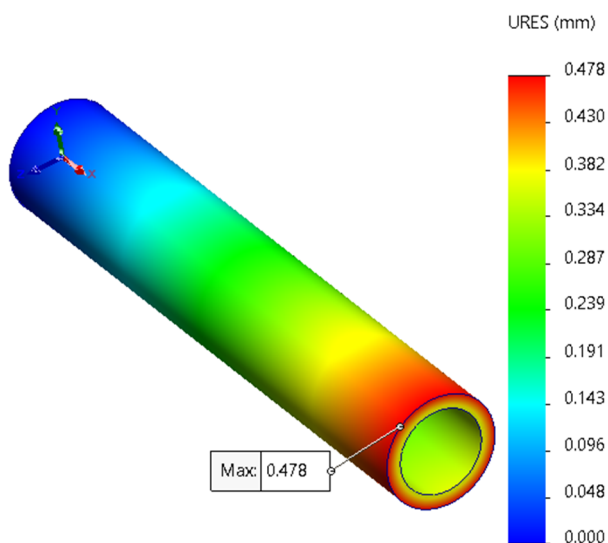


Fig. 4.26 A4.4 Distribuția deplasării rezultante U_{res}

Analiza arborelui cu secțiune circulară plină, cu diametru $d_2 = 106 \text{ mm}$, sollicitat în mod similar cu arborele tubular, arată valori maxime ale tensiunii tangențiale foarte apropiate de cele calculate analitic (figura 4.27).

Comparând tensiunile obținute la cele două soluții constructive, se observă că arborele cu secțiune inelară se comportă mai bine la torsiune.

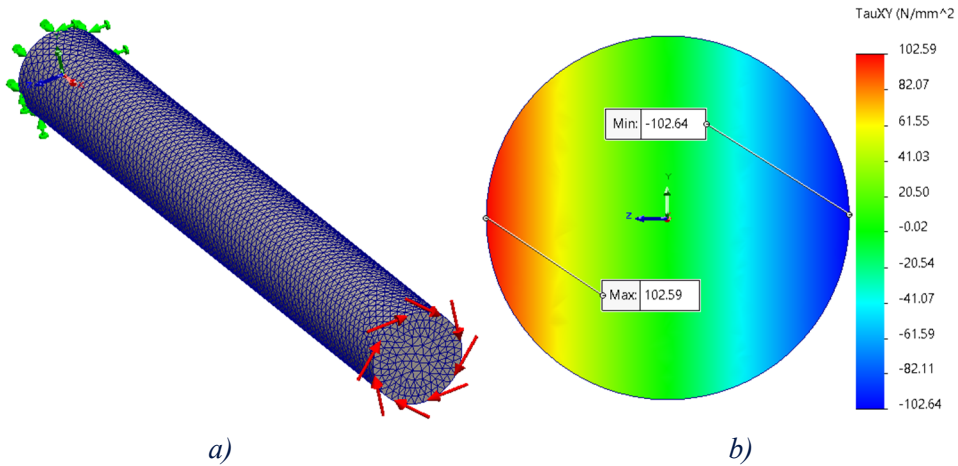


Fig. 4.27 A4.4 Arbore cu secțiune circulară plină ($d_2 = 106 \text{ mm}$): a) constrângeri, încărcări și discretizare; b) distribuția tensiunii tangențiale τ_{xy}

4.4 SISTEME STATIC NEDETERMINATE LA TORSIUNE

Un sistem este considerat static nedeterminat la torsiune atunci când reacțiunile de tip moment de torsiune nu pot fi determinate doar pe baza ecuațiilor de echilibru static. Rezolvarea acestor sisteme presupune scrierea unor condiții de corelare a deformațiilor (ecuații de continuitate). Nedeterminarea poate fi dată de modul de fixare, dar și de folosirea a două sau mai multe materiale cu elasticitate diferită. Algoritmul de rezolvare este exemplificat în continuare pentru un arbore dublu încastrat (situație care poate să apară la blocarea unor lagăre).

Aplicația A4.5. Arborele din figura 4.28, încastrat la ambele capete, este sollicitat de momentele de torsiune exterioare $M_{te2} = 700 \text{ N} \cdot \text{m}$ și $M_{te3} = 250 \text{ N} \cdot \text{m}$, prin intermediul roților din secțiunile 2 și 3. Să se calculeze tensiunile tangențiale maxime din zonele centrale ale celor trei tronsoane. Se cunosc: $d_1 = 32 \text{ mm}$, $d_2 = 42 \text{ mm}$, $d_3 = 28 \text{ mm}$, $l_1 = 100 \text{ mm}$, $l_2 = 80 \text{ mm}$, $l_3 = 60 \text{ mm}$. Arborele este realizat din oțel aliat 28Cr4.

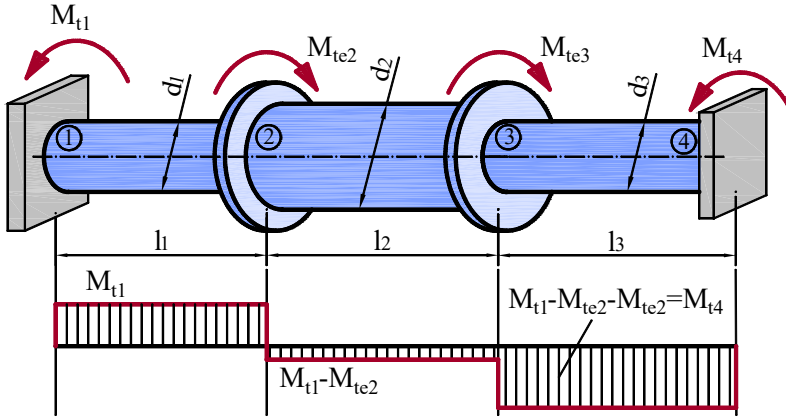


Fig. 4.28 Aplicația A4.5

Calculul analitic

În cele două încăstrări apar reacțiunile M_{t1} și M_{t4} . Ecuația de echilibru static al momentelor de torsiune este:

$$M_{t1} - M_{te2} - M_{te3} + M_{t4} = 0$$

Pe cele trei tronsoane ale barei acționează momentele de torsiune interioare: $M_{t12} = M_{t1}$, $M_{t23} = M_{t1} - M_{te2}$, respectiv $M_{t34} = M_{t1} - M_{te2} - M_{te3}$ (figura 4.28).

Pentru a rezolva nedeterminarea se scrie expresia rotirii relative φ_{41} , folosind relația (4.11). Deoarece secțiunile 1 și 4 sunt fixe (încastate), rezultă că $\varphi_{41} = 0$.

$$\varphi_{41} = \frac{M_{t12} \cdot l_1}{G \cdot I_{p1}} + \frac{M_{t23} \cdot l_2}{G \cdot I_{p2}} + \frac{M_{t34} \cdot l_3}{G \cdot I_{p3}} = 0$$

$$\frac{M_{t1} \cdot l_1}{G \cdot I_{p1}} + \frac{(M_{t1} - M_{te2}) \cdot l_2}{G \cdot I_{p2}} + \frac{(M_{t1} - M_{te2} - M_{te3}) \cdot l_3}{G \cdot I_{p3}} = 0$$

Din această ultimă ecuație se poate determina M_{t1} :

$$M_{t1} = \frac{\frac{M_{te2} \cdot l_2}{I_{p2}} + \frac{(M_{te2} + M_{te3}) \cdot l_3}{I_{p3}}}{\frac{l_1}{I_{p1}} + \frac{l_2}{I_{p2}} + \frac{l_3}{I_{p3}}}$$

Explicitând expresiile momentelor de inerție polare I_{p1} , I_{p2} și I_{p3} și simplificând fracția cu $\pi/32$ se obține:

$$M_{t1} = \frac{\frac{M_{te2} \cdot l_2}{d_2^4} + \frac{(M_{te2} + M_{te3}) \cdot l_3}{d_3^4}}{\frac{l_1}{d_1^4} + \frac{l_2}{d_2^4} + \frac{l_3}{d_3^4}} = \frac{\frac{700000 \cdot 80}{42^4} + \frac{950000 \cdot 60}{28^4}}{\frac{100}{32^4} + \frac{80}{42^4} + \frac{60}{28^4}} = 506333,9 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

Din ecuația de echilibru al momentelor se obține $M_{t4} = 443666,1 \text{ N} \cdot \text{mm}$.

Tensiunile tangențiale maxime pe cele trei tronsoane, fără a considera efectul concentratorilor de tensiune din zonele de trecere, vor fi:

$$\tau_{12max} = \frac{M_{t12}}{W_{p1}} = \frac{M_{t1}}{\frac{\pi \cdot d_1^3}{16}} = \frac{506333,94}{\frac{\pi \cdot 32^3}{16}} = 78,70 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau_{23max} = \frac{M_{t23}}{W_{p2}} = \frac{M_{t1} - M_{te2}}{\frac{\pi \cdot d_2^3}{16}} = \frac{506333,94 - 70000}{\frac{\pi \cdot 42^3}{16}} = -13,31 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau_{34max} = \frac{M_{t34}}{W_{p3}} = \frac{M_{t4}}{\frac{\pi \cdot d_3^3}{16}} = \frac{443666,1}{\frac{\pi \cdot 28^3}{16}} = -102,93 \text{ N/mm}^2$$

Analiza FEM

Modelul 3D va fi realizat într-un fișier de tip *Part*, generându-se trei solide distincte (la generarea celor două roți se va dezactiva opțiunea *Merge Result*). Tronsoanele arborelui vor fi realizate astfel încât lungimile libere (fără suprapunere cu roțile) să fie identice cu cele din enunț (figura 4.29).

În pașii următori se va crea studiu de analiză statică, se vor considera roțile infinit rigide (opțiunea *Make rigid* din meniul contextual – click dreapta pe solidele aferente, în arborele simulării) și se va asocia arborelui oțelul 28Cr4.

Zonele de trecere dintre tronsoane și conexiunile arbore – roți nu reprezintă o cerință a acestui studiu, astfel că componente vor fi solidarizate între ele. În acest scop se va lansa comanda *Component Interaction* din zona *Connections* a benzii *Simulation* și se va selecta tipul *Bonded* pentru toate contactele (*Global Interaction*).

Suprafețele frontale de capăt ale arborelui vor fi încăstrate (constrângere de tip *Fixed Geometry*), iar momentele de torsiune exterioare $M_{te2} = 700 \text{ N} \cdot \text{m}$ și $M_{te3} = 250 \text{ N} \cdot \text{m}$ vor fi aplicate pe suprafețele cilindrice exterioare ale celor două roți (figura 4.30).

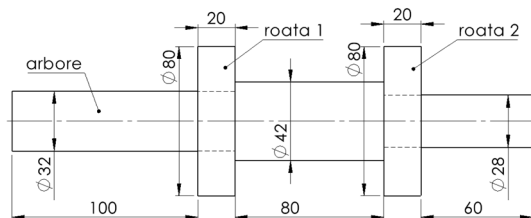


Fig. 4.29 A4.5 Dimensiunile componentelor în ansamblului 3D arbore-roți

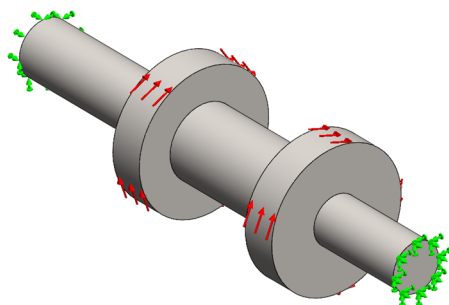


Fig. 4.30 A4.5 Constrângeri și încărcări

Densitatea rețelei de elemente finite nu influențează semnificativ valorile maxime ale tensiunilor tangențiale din zona centrală a fiecărui tronson, dar influențează zonele de concentrare a tensiunilor, la trecerile dintre tronsoane.

După rularea studiului vor fi afișate componentele de tensiune τ_{xy} și τ_{xz} , proiecțiile pe axele y și z ale tensiunii tangențiale $\tau = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2}$. Valorile maxime ale tensiunii tangențiale din zonele centrale ale celor trei tronsoane ale arborelui sunt evidențiate în figura 4.31. Se observă suprapunerea foarte bună dintre rezultatele obținute în calcul cu cele din simularea numerică.

Valorile maxime din legendă corespund muchiilor de delimitare a tronsoanelor, zone care trebuie prevăzute cu raze de racordare.

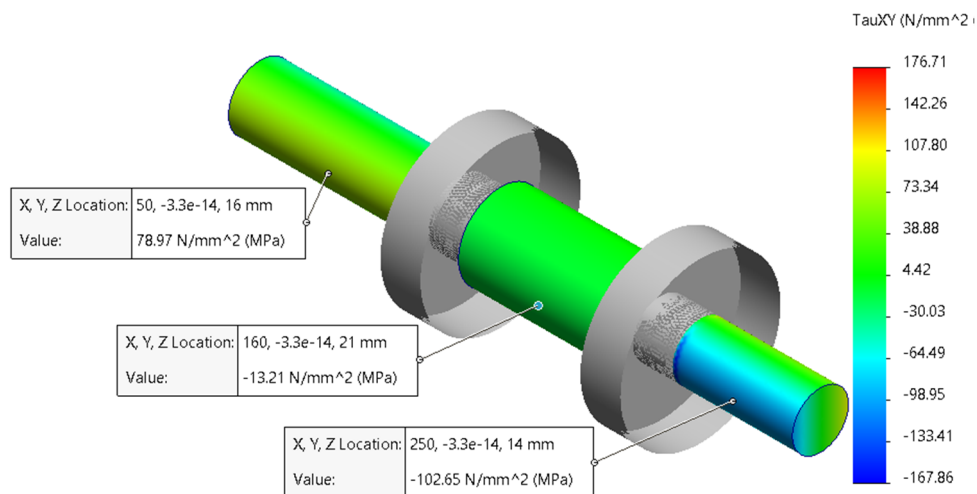


Fig. 4.31 A4.5 Distribuția tensiunilor tangențiale τ_{xy}

4.5 CALCULUL TENSIUNILOR LA ÎNCOVOIERE

Un tronson de grindă este solicitat la încovoiere atunci când în secțiunile sale transversale acționează momentul de încovoiere interior M_{iz} sau/și M_{iy} . Acesta determină apariția unor tensiuni axiale σ_x . În cazul în care pe același tronson acționează și forțe tăietoare T_y sau/și T_z , vor apărea și tensiuni tangențiale τ_{xy} sau/și τ_{xz} .

În funcție de modul de solicitare, se disting următoarele cazuri:

- încovoierea pură, corespunzătoare unui tronson de grindă pe care momentul de încovoiere interior este constant, iar forța tăietoare este nulă;
- încovoierea simplă, corespunzătoare unui tronson de grindă pe care atât momentul de încovoiere interior, cât și forța tăietoare sunt nule;
- încovoierea plană, corespunzătoare unui tronson de grindă pe care apare o singură componentă de moment de încovoiere interior, orientată după o axă principală de inerție;
- încovoierea oblică, corespunzătoare unui tronson de grindă pe care apar ambele componente de moment de încovoiere interior (după ambele axe principale) sau o singură componentă de moment de încovoiere interior, dar orientată după o direcție care nu este axă principală de inerție.

Se consideră o secțiunea transversală a unei grinzi, în care acționează momentul de încovoiere interior M_{iz} și forța tăietoare T_y . Tensiunile axiale la încovoiere dintr-un punct oarecare P, situat la distanța y față de axa principală de inerție Oz (figura 4.32), se calculează cu relația lui Navier:

$$\sigma = \frac{M_{iz}}{I_z} \cdot y \quad (4.13)$$

unde: I_z – moment de inerție axial în raport cu axa z ;

În secțiunea transversală momentul de încovoiere M_{iz} și momentul de inerție axial I_z sunt constante, astfel că variația tensiunii axiale este dată doar de coordonata y (variație de gradul I). Punctele din secțiune cu $y = 0$ definesc axa neutră a secțiunii (pentru care tensiunile axiale sunt nule), iar tensiunea axială maximă corespunde valorilor maxime ale coordonatelor y :

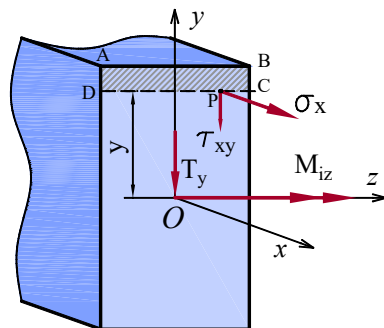


Fig. 4.32 Tensiuni la încovoiere

$$\sigma_{max} = \frac{M_{iz}}{I_z} \cdot y_{max} = \frac{M_{iz}}{W_{zmin}} \quad (4.14)$$

unde $W_{zmin} = I_z / |y_{max}|$ este modulul de rezistență axial minim după axa z .

Tensiunea tangențială pentru punctul P se calculează cu relația lui Juravski:

$$\tau = \frac{T_y \cdot S_z}{I_z \cdot b} \quad (4.15)$$

unde: T_y – forța tăietoare din secțiunea de calcul, b – lățimea secțiunii de calcul corespunzătoare punctului P (măsurată pe direcția axei principale/neutre Oz), iar $S_z = \int_{\Omega} y_{G1} \cdot d\Omega$ – momentul static al suprafeței $ABCD$, calculat în funcție de aria acestei suprafețe (Ω) și de distanța y_1 de la centrul său de greutate la axa Oz .

Distanța y_{G1} și aria Ω din relația momentului static sunt influențate de distanța de la punctul P la axa principală Oz , rezultând o variație parabolică $S_z = f(y)$ de gradul II. Rezultă că, într-o secțiune transversală cu lățime constantă, tensiunea tangențială variază după o funcție de gradul II, dată de variația momentului static (forța tăietoare și momentul de încovoiere axial sunt constante). Valorile maxime ale tensiunii tangențiale corespund axei neutre a grinzii, acolo unde momentul static este maxim, iar valorile minime (zero) corespund fibrelor extreme, paralele cu axa Oz .

4.6 CALCULUL DEFORMAȚIILOR LA ÎNCOVOIERE

O grindă supusă la încovoiere suferă deformații caracterizate prin deplasări și rotiri. Deplasările și rotirile sunt raportate uzual la poziția inițială a axei grinzii. În figura 4.33 sunt evidențiate deplasarea (δ_2) și rotirea (φ_2) corespunzătoare secțiunii de capăt a unei grinzi încastrate supuse la încovoiere.

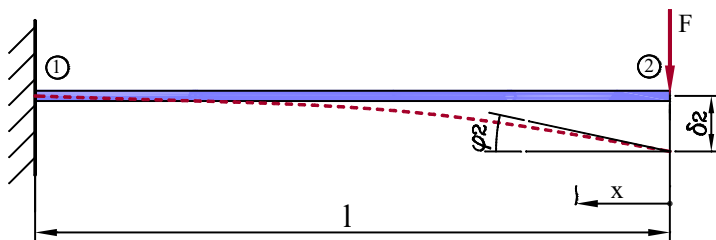


Fig. 4.33 Deplasarea și rotirea secțiunii de capăt a unei grinzi încastrate

Pentru determinarea deplasărilor și rotirilor la încovoiere se pot folosi mai multe metode, în cele ce urmează prezentându-se metoda forței unitare (Mohr – Maxwell). Considerând o grindă solicitată de un moment de încovoiere interior M_{iz} , pentru calculul deplasării și rotirii unei secțiuni K se vor parcurge următoarele etape:

- scrierea funcțiilor de variație ale momentului încovoietor interior M_{iz} pentru grinda cu încărcările exterioare date;
- eliberarea grinzii de încărcările exterioare;
- aplicarea pe grinda fără încărcări exterioare a unei forțe unitare în secțiunea K , direcția forței unitare fiind cea după care se dorește calculul deplasării;
- scrierea funcțiilor de variație ale momentului încovoietor interior m pentru grinda încărcată cu forța unitară;
- calculul deplasării secțiunii K cu relația:

$$\delta_K = \int_0^l \frac{M_{iz} \cdot m}{E \cdot I_z} \cdot dx \quad (4.16)$$

- aplicarea pe bara fără încărcări exterioare a unui moment unitar în secțiunea K , cu sens de rotire ales conform tendinței de deformare a grinzii;
- scrierea funcțiilor de variație ale momentului încovoietor interior m' pentru grinda încărcată cu moment unitar;
- calculul rotirii secțiunii K cu relația:

$$\varphi_K = \int_0^l \frac{M_{iz} \cdot m'}{E \cdot I_z} \cdot dx \quad (4.17)$$

Metoda este detaliată în cele ce urmează prin exemple de calcul.

Aplicația A4.6. Se consideră o grinda încastrată de lungime $l = 2 \text{ m}$, asupra căreia acționează la capătul liber un moment $M_e = 2 \text{ kN} \cdot \text{m}$ și o forță $F = 3,5 \text{ kN}$ (figura 4.34). Grinda are secțiune IPE140 ($I_z = 541,224 \cdot 10^4 \text{ mm}^4$, $A = 1642,6 \text{ mm}^2$) și este realizată din oțel E360 ($E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$). Se cere determinarea valorilor maxime ale tensiunilor axiale și tangențiale pentru întreaga grindă, determinarea valorilor maxime ale tensiunilor axiale și tangențiale din secțiunea de mijloc a grinzii, determinarea deplasării și rotirii secțiunii 2.

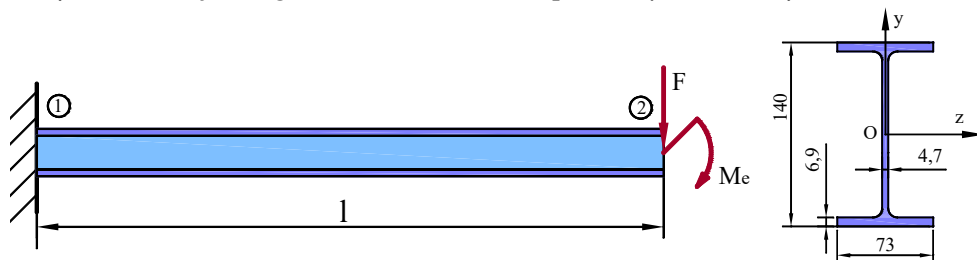


Fig. 4.34 Aplicația A4.6

Calculul analitic

Grinda are un singur tronson $[1 \div 2]$. Acesta poate fi parcurs de la dreapta la stânga, funcția care definește variația momentului încovoietor interior fiind:

$$M_{21} = -F \cdot x - M_e$$

În secțiunile 1 și 2 ale grinzii momentul încovoietor va avea valorile:

$$M_2 = -F \cdot 0 - M_e = -2 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_1 = -F \cdot 1 - M_e = -3,5 \cdot 2 - 2 = -9 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

iar în secțiunea de mijloc (notată cu 3):

$$M_3 = -F \cdot 0,5 \cdot 1 - M_e = -3,5 \cdot 1 - 2 = -5,5 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Forța tăietoare va fi constantă pentru toată lungimea grinzii:

$$T_{21} = F = 3,5 \text{ kN}$$

Valoarea maximă a tensiunii axiale corespunde secțiunii 1 a grinzii, acolo unde momentul de încovoiere interior este maxim:

$$\sigma_{max} = \sigma_1 = \frac{M_1}{I_z} \cdot y_{max} = -\frac{9 \cdot 10^6}{541,224 \cdot 10^4} \cdot 70 = -116,40 \text{ N/mm}^2$$

Tensiunea tangențială maximă din secțiunea de mijloc a grinzii va fi:

$$\sigma_3 = \frac{M_3}{I_z} \cdot y_{max} = -\frac{5,5 \cdot 10^6}{541,224 \cdot 10^4} \cdot 70 = -71,13 \text{ N/mm}^2$$

Tensiunea axială la încovoiere variază liniar într-o secțiune transversală, valorile maxime negative corespunzând fibrelor extreme comprimate, iar valorile maxime pozitive fibrelor extreme întinse.

Tensiunea tangențială va fi constantă pentru toată lungimea grinzii (T_{21} fiind constant), valoarea maximă din secțiunea transversală apărând pe fibrele medii corespunzătoare axei neutre Oz (momentul static a fost calculat divizând jumătate din suprafața profilului în două dreptunghiuri și folosind relația $S_z = \sum(y_{G1} \cdot d\Omega)$).

$$\tau_{max} = \frac{T_1 \cdot S_z}{I_z \cdot b} = \frac{3500 \cdot 42878,01}{541,224 \cdot 10^4 \cdot 4,7} = 5,89 \text{ N/mm}^2$$

Pentru determinarea deplasării verticale a capătului liber se eliberează grinda de încărcările exterioare (F și M) și se aplică în secțiunea 2 o forță unitară (figura 4.35). Sensul forței unitare este ales în funcție de sensul de deformare a grinzii.

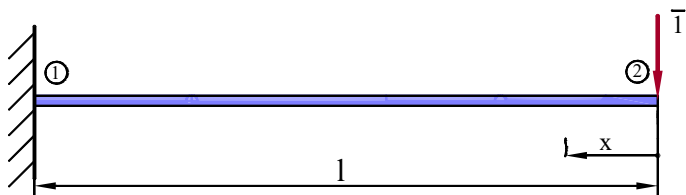


Fig. 4.35 A4.6. Aplicarea forței unitare

Funcția care definește variația momentului încovoiator interior pentru grinda încărcată cu forță unitară este:

$$m_{21} = -1 \cdot x$$

Deplasarea δ_2 va fi:

$$\begin{aligned} \delta_2 &= \int_0^l \frac{M_{21} \cdot m_{21}}{E \cdot I_z} \cdot dx = \frac{1}{E \cdot I_z} \int_0^l (-F \cdot x - M_e) \cdot (-1 \cdot x) \cdot dx \\ \delta_2 &= \frac{1}{E \cdot I_z} \left(\int_0^l F \cdot x^2 \cdot dx + \int_0^l M_e \cdot x \cdot dx \right) = \frac{F}{E \cdot I_z} \cdot \left(\frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^l + \frac{M_e}{E \cdot I_z} \cdot \left(\frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^l \\ \delta_2 &= \frac{F \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot I_z} + \frac{M_e \cdot l^2}{2 \cdot E \cdot I_z} \end{aligned}$$

$$\delta_2 = \frac{3500 \cdot 2000^3}{3 \cdot 2,1 \cdot 10^5 \cdot 541,224 \cdot 10^4} + \frac{2 \cdot 10^6 \cdot 2000^2}{2 \cdot 2,1 \cdot 10^5 \cdot 541,224 \cdot 10^4} = 11,91 \text{ mm}$$

În mod similar, se poate determina rotirea secțiunii 2, aplicând un moment de încovoiere unitar în această secțiune, cu sens orar de rotație. Se va obține:

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= \int_0^l \frac{M_{21} \cdot m'_{21}}{E \cdot I_z} \cdot dx = \frac{1}{E \cdot I_z} \int_0^l (-F \cdot x - M_e) \cdot (-1) \cdot dx \\ \varphi_2 &= \frac{1}{E \cdot I_z} \left(\int_0^l F \cdot x \cdot dx + \int_0^l M_e \cdot dx \right) = \frac{F}{E \cdot I_z} \cdot \left(\frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^l + \frac{M_e}{E \cdot I_z} \cdot (x) \Big|_0^l \\ \varphi_2 &= \frac{F \cdot l^2}{2 \cdot E \cdot I_z} + \frac{M_e \cdot l}{E \cdot I_z} \end{aligned}$$

$$\varphi_2 = \frac{3500 \cdot 2000^2}{2 \cdot 2,1 \cdot 10^5 \cdot 541,224 \cdot 10^4} + \frac{2 \cdot 10^6 \cdot 2000}{2,1 \cdot 10^5 \cdot 541,224 \cdot 10^4} = 0,0098 \text{ rad}$$

Analiza FEM

Geometria grinzii cu secțiune IPE140 va fi generată folosind comanda *Primary member* din zona *Structure System*, pornind de la schița suport în care este definită axa longitudinală. Schița va fi trasată în planul *YZ*, iar profilul va fi dispus cu înălțimea sa ($h = 140 \text{ mm}$) orientată după axa *OY*, pentru a avea același sistem de axe precum în calculul analitic. Va fi generat un singur solid (tronson) pentru toată lungimea $l = 2000 \text{ mm}$, iar în secțiunea de mijloc (1000 mm) va fi creată o linie de divizare (*Insert* → *Curve* → *Split line*), pentru a putea plasa cu precizie punctele de măsurare a valorilor locale, la diagramele de tensiuni și deplasări.

Simularea va fi realizată în două scenarii distincte: geometrie de tip grindă (opțiunea *Treat as Beam* din meniul contextual accesat prin click-dreapta pe numele geometriei în arborele simulării), respectiv geometrie de tip solid. În acest scop, se vor crea două studii de tip static, cu aceleași proprietăți de material (oțelul E360), constrângeri și încărcări, dar aplicate în mod specific fiecărei tip de geometrie.

La studiul pe geometrie de tip grindă încastrarea secțiunii 1, forța $F = 3500 \text{ N}$ și momentul de încovoiere $M_e = 2000 \text{ N} \cdot \text{m}$ (figura 4.36) vor fi aplicate în noduri (*joint*), după direcțiile corespunzătoare.

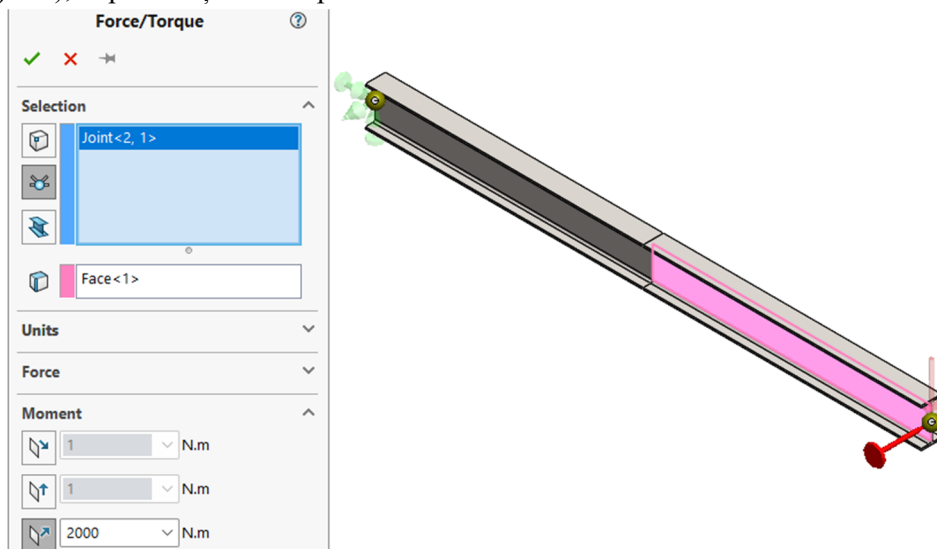


Fig. 4.36 A4.6. Aplicarea momentului de încovoiere $M_e = 2000 \text{ N} \cdot \text{m}$

4. Sollicitări simple

După crearea discretizării și rularea studiului vor fi afișate următoarele diagrame de rezultat (figurile 4.37-4.40): tensiuni axiale maxime (*Upper bound bending in DIR2*), tensiuni tangențiale maxime (*Shear in DIR1*), deplasare verticală (*UY Displacement*), rotire (*RZ: Rotation in Z Direction*). Fiind o analiză realizată pe geometrie de tip grindă, toate aceste diagrame vor indica valori unice (maxime) pentru fiecare secțiune transversală. Semnele acestor valori, precum și orientările Y/Z și DIR1/DIR2, sunt date de sistemul de referință și dimensiunile secțiunii.

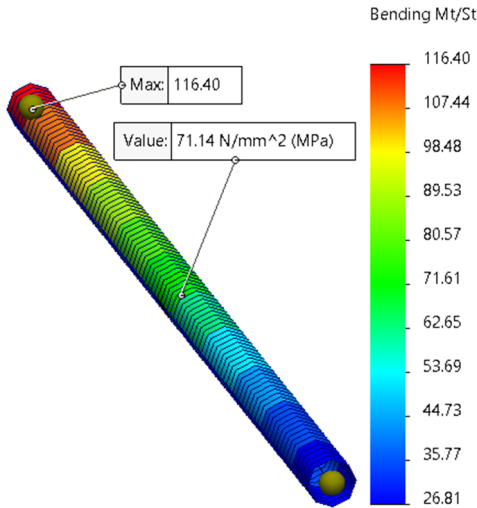


Fig. 4.37 A4.6. Tensiuni axiale

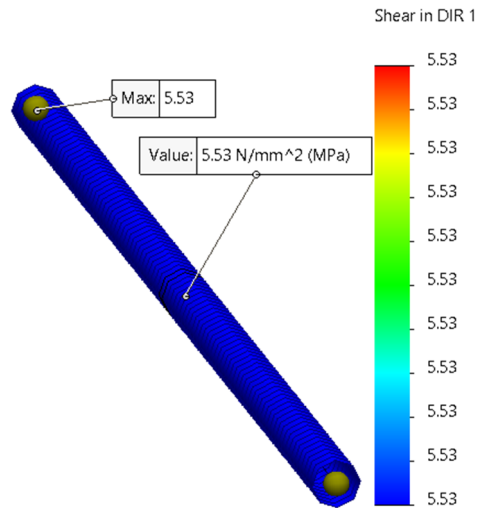


Fig. 4.38 A4.6. Tensiuni tangențiale

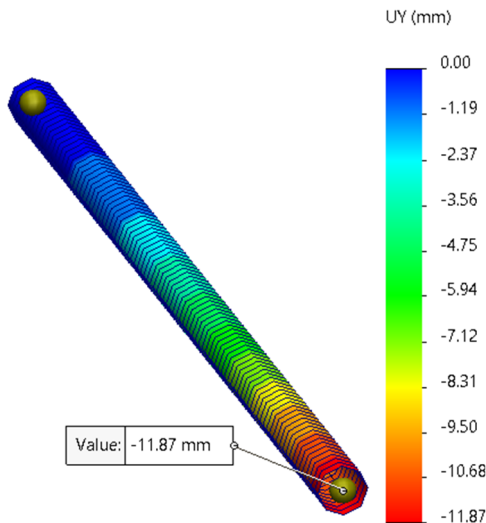


Fig. 4.39 A4.6. Deplasări verticale

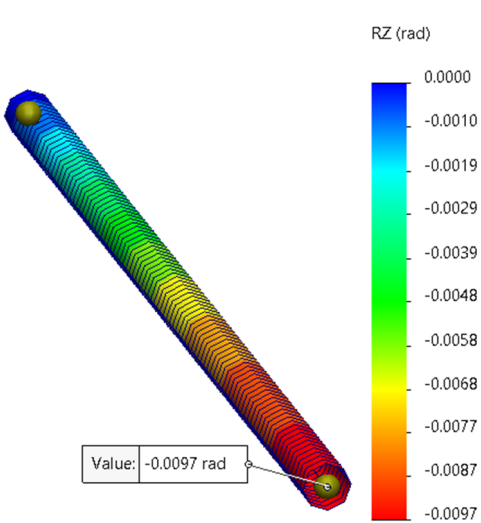


Fig. 4.40 A4.6. Rotiri

Se observă că valorile obținute în simularea pe geometrie de tip grindă sunt foarte apropiate de cele calculate analitic, dar acest tip de simulare nu redă variațiile tensiunilor și deplasărilor din secțiunea transversală.

La simularea pe geometrie de tip solid, încastrarea și cele două încărcări vor fi aplicate pe suprafețele frontale de capăt ale grinzii. La aplicarea momentului de încovoiere (figura 4.41) este necesară realizarea, în prealabil, a axei de referință în jurul căreia acționează. Axa va fi definită folosind comanda *Axis* din zona *Reference Geometry* a benzii *Features*, la intersecția suprafeței frontale de capăt cu planul *Top*.

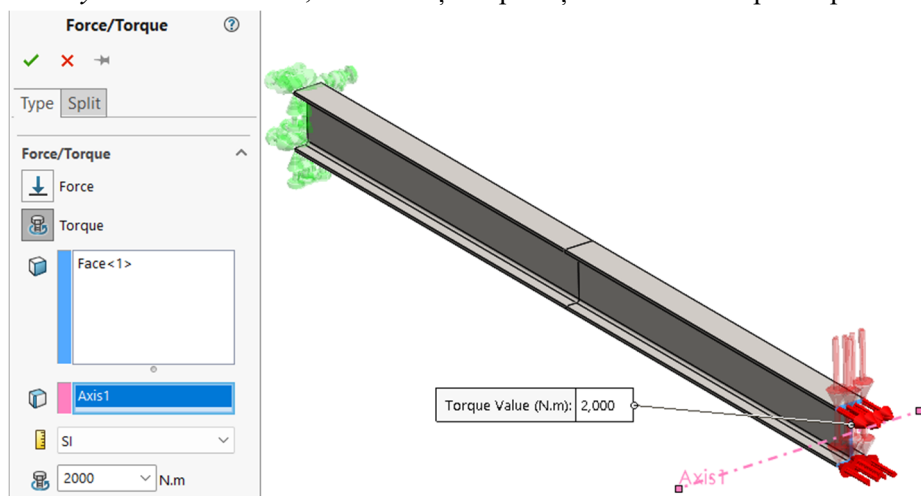


Fig. 4.41 A.4.6 Aplicarea momentului de încovoiere

În acest tip de simulare, la diagramele tensiunii axiale (SX) și tensiunii tangențiale (TXY) vor apărea, în zona încastrării, vârfuri de tensiune mai mari decât valorile calculate analitic. Dacă sunt analizate tensiunile din secțiunea transversală de mijloc a grinzii, se observă apropierea bună a rezultatelor. Totodată se va putea vizualiza distribuția tensiunilor în secțiune, cu valori maxime pentru σ pe fibrele extreme și valori maxime pentru τ pe axa OZ (figurile 4.42-4.43).

Distribuția deplasărilor verticale la analiza pe geometrie de tip solid nu relevă, în acest caz, diferențe semnificative în raport cu simularea pe geometrie de tip grindă (practic, deplasările sunt identice pentru orice punct din secțiunea transversală 2). Trebuie reținut că pot să apară diferențe între valorile deplasărilor din diferite puncte ale unei secțiuni transversale, atunci când modul de aplicare al încărcărilor determină modificarea formei secțiunii (spre exemplu, acțiunea unei forțe distribuite aplicate pe o latură a unui profil L, poate deforma local profilul). Rotirea φ nu poate fi obținută direct din simularea încovoierii pe geometrii de tip solid, putând fi însă calculată pe baza deplasărilor și dimensiunilor secțiunii.

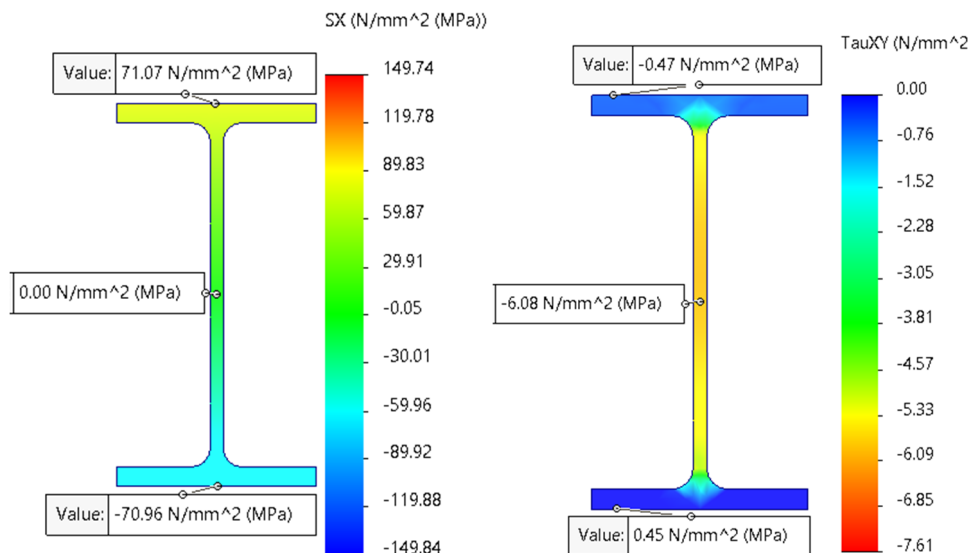


Fig. 4.42 A4.6. Distribuția tensiunilor axiale și tangențiale în secțiune de mijloc

Aplicația A4.7. Pentru grinda din figura 4.43, la care s-au trasat diagramele de variație ale forțelor interioare în capitolul 2, să se determine tensiunea axială maximă, tensiunea tangențială maximă, deplasarea verticală și rotirea secțiunii 3. Se cunosc: $p = 8500 \text{ N/m}$, $a = 0,3 \text{ m}$. Grinda are secțiune dreptunghiulară $90 \text{ mm} \times 60 \text{ mm}$ și este realizată din oțel S275JR.

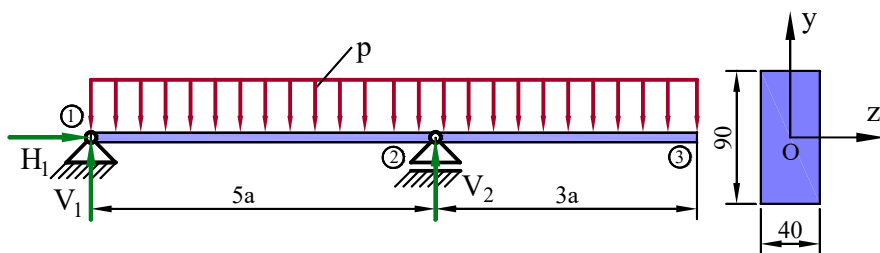


Fig. 4.43 Aplicația A4.7

Calculul analitic

Din ecuațiile de echilibru static se pot determina expresiile reacțiunilor din reazeme: $V_1 = 8p \cdot a/5$, $V_2 = 32p \cdot a/5$ și $H_1 = 0$. Grinda are două tronsoane. Pentru simplificare, funcțiile de variație ale momentului încovoietor interior vor fi scrise de la stânga la dreapta pentru intervalul $[1 \div 2)$, respectiv de la dreapta la stânga pentru intervalul $(2 \div 3]$:

$$M_{12} = \frac{8p \cdot a}{5} \cdot x_1 - \frac{p \cdot x_1^2}{2}$$

$$M_{32} = -\frac{p \cdot x_2^2}{2}$$

Dând valori lui x_1 în intervalul $[0 \div 5a]$ și lui x_2 în intervalul $[2 \div 3]$ se poate trasa variația momentului încovoietor. Analizând figura 2.23 se poate identifica valoarea maximă $M_2 = -3442,5 \text{ N} \cdot \text{m}$, corespunzătoare secțiunii 2. În aceeași secțiune (pe partea stângă) apare și valoarea maximă a forței tăietoare $T_2 = 8670 \text{ N}$.

Valoarea maximă a tensiunii axiale va fi:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_2}{I_z} \cdot y_{\max} = -\frac{3442,5 \cdot 10^3}{243 \cdot 10^4} \cdot 45 = -63,75 \text{ N/mm}^2$$

Tensiunea tangențială maximă va fi:

$$\tau_{\max} = \frac{T_2 \cdot S_z}{I_z \cdot b} = \frac{8670 \cdot 40500}{243 \cdot 10^4 \cdot 40} = 3,61 \text{ N/mm}^2$$

În relațiile de mai sus s-au folosit valorile caracteristicilor geometrice ale secțiunii dreptunghiulare $90 \text{ mm} \times 40 \text{ mm}$: $y_{\max} = 45 \text{ mm}$, $I_z = b \cdot h^3/12 = 40 \cdot 90^3/12 = 2430000 \text{ mm}^4$, $S_z = \Omega \cdot y_{G1} = (45 \cdot 40) \cdot 42,5 = 8670 \text{ mm}^3$, $b = 40 \text{ mm}$.

Pentru determinarea deplasării verticale a secțiunii 3 se eliberează grinda de încărcările exterioare (F și M) și se aplică în 3 o forță egală cu unitatea (figura 4.44).

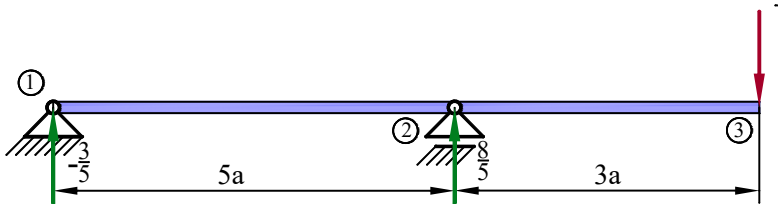


Fig. 4.44 A4.7. Aplicarea forței unitare

După determinarea reacțiunilor din reazeme, se pot scrie funcțiile care definesc variația momentului încovoietor pentru grinda încărcată cu forță unitară:

$$m_{12} = -\frac{3}{5} \cdot x_1$$

$$m_{32} = -1 \cdot x_2$$

Deplasarea δ_3 va fi:

$$\delta_3 = \int_0^{5a} \frac{M_{12} \cdot m_{12}}{E \cdot I_z} \cdot dx_1 + \int_0^{3a} \frac{M_{32} \cdot m_{32}}{E \cdot I_z} \cdot dx_2$$

$$\delta_3 = \frac{1}{E \cdot I_z} \cdot \left[\int_0^{5a} \left(\frac{8p \cdot a}{5} \cdot x_1 - \frac{p \cdot x_1^2}{2} \right) \cdot \left(-\frac{3}{5} \cdot x_1 \right) \cdot dx_1 + \int_0^{3a} \left(-\frac{p \cdot x_2^2}{2} \right) \cdot (-1 \cdot x_2) \cdot dx_2 \right]$$

$$\delta_3 = \frac{17p \cdot a^4}{E \cdot I_z} = \frac{17 \cdot 8,5 \cdot 300^4}{2,1 \cdot 10^5 \cdot 243 \cdot 10^4} = 2,29 \text{ mm}$$

Pentru calculul rotirii secțiunii 3, se va aplica un moment de încovoiere unitar în această secțiune, cu sens orar de rotație.

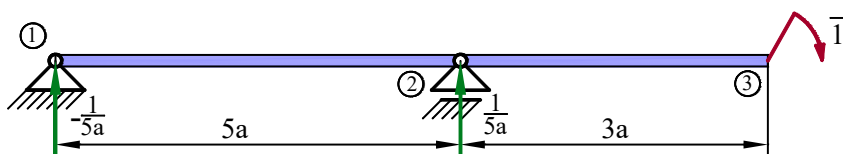


Fig. 4.45 A4.7. Aplicarea momentului unitar

Se vor determina reacțiunile din reazeme și se vor scrie funcțiile care definesc variația momentului încovoiător pentru grindă încărcată cu moment unitar:

$$m'_{12} = -\frac{1}{5a} \cdot x_1 \qquad m'_{32} = -1$$

Se va obține:

$$\varphi_3 = \int_0^{5a} \frac{M_{12} \cdot m'_{12}}{E \cdot I_z} \cdot dx_1 + \int_0^{3a} \frac{M_{32} \cdot m'_{32}}{E \cdot I_z} \cdot dx_2$$

$$\varphi_3 = \frac{1}{E \cdot I_z} \cdot \left[\int_0^{5a} \left(\frac{8p \cdot a}{5} \cdot x_1 - \frac{p \cdot x_1^2}{2} \right) \cdot \left(-\frac{1}{5a} \cdot x_1 \right) \cdot dx_1 + \int_0^{3a} \left(-\frac{p \cdot x_2^2}{2} \right) \cdot (-1) \cdot dx_2 \right]$$

$$\varphi_3 = \frac{163 \cdot p \cdot a^3}{24 \cdot E \cdot I_z} = \frac{163 \cdot 8,5 \cdot 300^3}{24 \cdot 2,1 \cdot 10^5 \cdot 243 \cdot 10^4} = 0,00302 \text{ rad}$$

Analiza FEM

Tronsoanele grinzii vor fi modelate sub formă de corpuri distincte, prin două operații de extrudare (la a doua extrudare se va dezactiva opțiunea *Merge result*). Studiul va fi de tip static, cele două tronsoane vor fi tratate ca și grinzi, iar materialul asociat acestora va fi oțelul de uz structural S235JR.

Constrângerile vor fi aplicate folosind comanda *Fixed Geometry*, opțiunea *Use Reference Geometry*. Pentru reazemul fix (nodul aferent secțiunii 1) se vor bloca translațiile după direcția verticală și după direcția axei longitudinale a grinzii. Pentru reazemul mobil (secțiunea 2) se va bloca doar translația pe direcția verticală. Forța distribuită va fi aplicată în N/m (prin bifarea opțiunii *Per unit length* din comanda *Force* – figura 4.46).

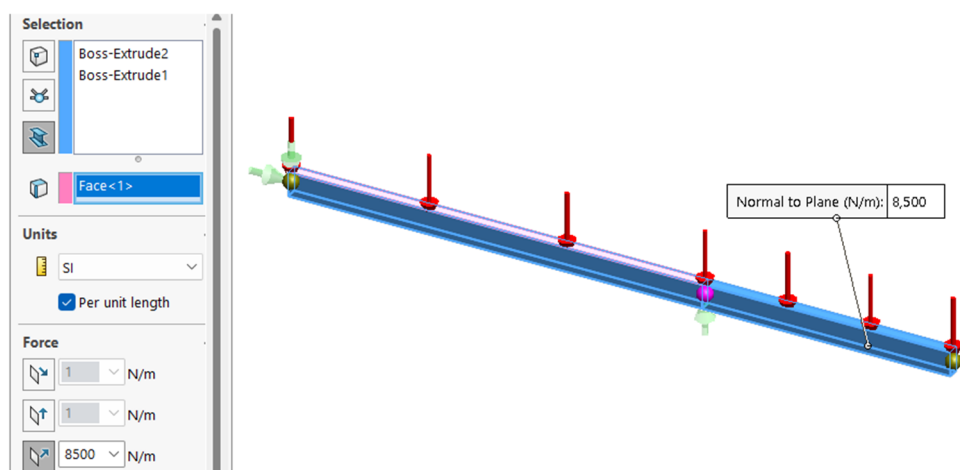


Fig. 4.46 A4.7 Aplicarea forței uniform distribuite

După crearea discretizării și rularea studiului vor fi afișate următoarele diagrame de rezultat (figurile 4.47 – 4.50): tensiuni axiale maxime (*Upper bound bending in DIR2*), tensiuni tangențiale maxime (*Shear in DIR1*), deplasări verticale (*UY Displacement*), rotații (*RZ: Rotation in Z Direction*). Direcția 1 corespunde cotei maxime a secțiunii transversale ($h = 90 \text{ mm}$).

Rezultatele simulărilor din aplicațiile A.4.6 și A.4.7 și exemplele din capitolul 2 arată că realizarea analizelor FEM pe geometrii tratate ca și grindă, conduce la o bună corelare a rezultatelor cu cele obținute analitic. Pentru a nu fi afectată precizia rezultatelor (în special la tensiuni și deformații), este necesar ca la fiecare tronson de grindă lungimea să fie de cel puțin 10 ori mai mare decât cea mai mare dimensiune a secțiunii transversale. Acest tip de analiză nu permite redarea variației tensiunilor în secțiunea transversală, nefiind recomandată la grinzi cu alezaje, raze etc.

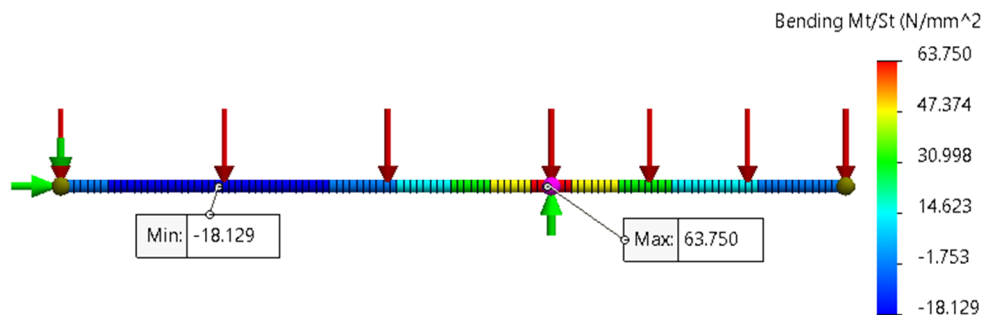


Fig. 4.47 A4.7. Distribuția tensiunilor axiale maxime din secțiunile transversale

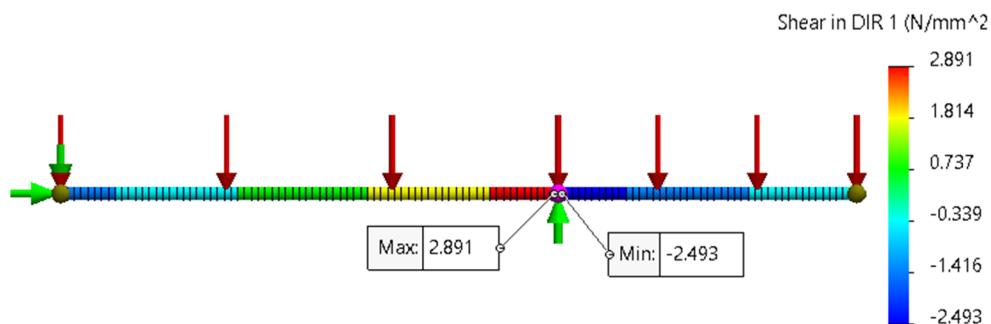


Fig. 4.48 A4.7. Distribuția tensiunilor tangențiale maxime

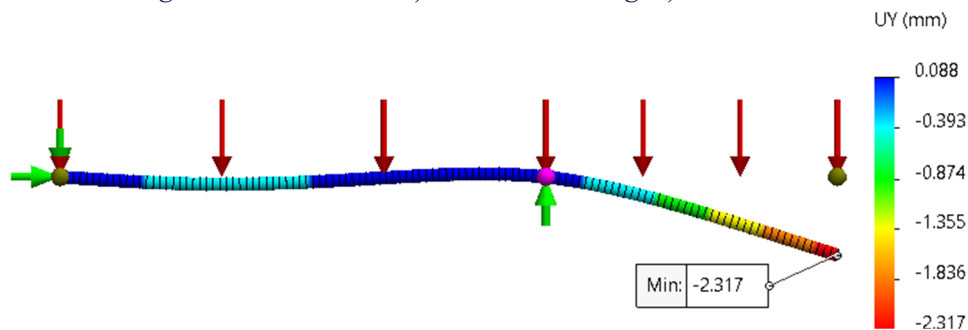


Fig. 4.49 A4.7. Distribuția deplasărilor verticale

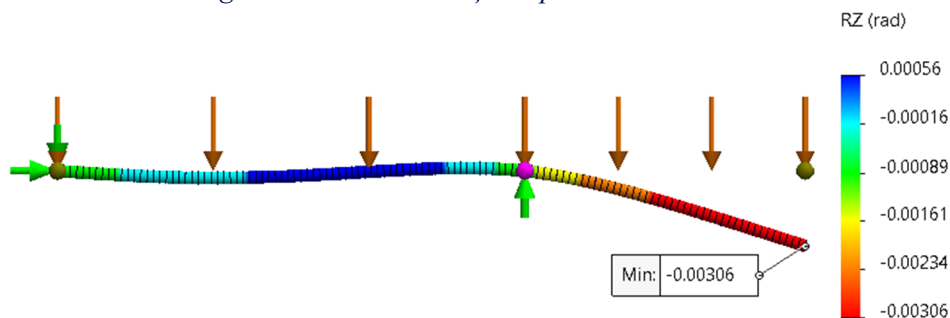


Fig. 4.50 A4.7. Distribuția rotirilor

Aplicația A4.8. Pentru grinda static nedeterminată din figura 4.51, să se determine reacțiunile, diagramele de variație ale funcțiilor T și M și tensiunea axială maximă. Se cunosc: $p = 4000 \text{ N/m}$, $a = 0,8 \text{ m}$. Grinda este realizată din profil SB 80x6 ($I_z = 775549,83 \text{ mm}^4$), oțel E360 ($E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$).

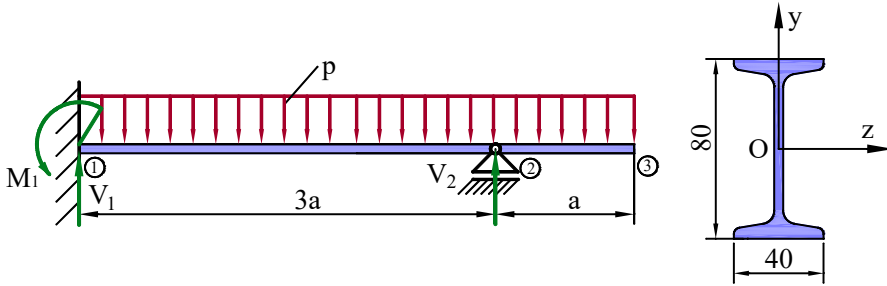


Fig. 4.51 Aplicația A4.8

Calculul analitic

În încastrare apar trei reacțiuni (din care două nenule), iar în reazemul mobil apare o reacțiune. Rezultă gradul de nedeterminare $n = 4 - 3 = 1$. Reacțiunea V_2 va fi înlocuită cu forța necunoscută X_1 . Figura 4.52 prezintă sistemul echivalent rezultat în urma acestei substituții.

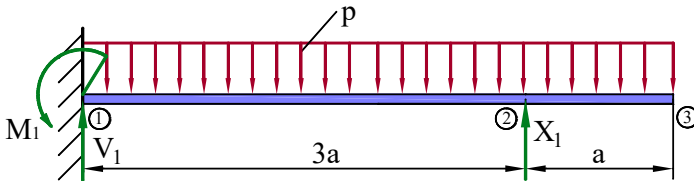


Fig. 4.52 A4.8. Sistem echivalent

Grinda static determinată din figura 4.52 va fi descărcată de forța distribuită p și de forța X_1 rezultând sistemul de bază.

Funcțiile de variație ale momentului încovoietor m_0 , corespunzător sistemului de bază, încărcat doar cu forța uniform distribuită vor fi:

$$m_{0_{32}} = -\frac{p \cdot x_1^2}{2} \qquad m_{0_{21}} = -\frac{p \cdot (a + x_2)^2}{2}$$

Funcțiile de variație ale momentului încovoietor m_1 , corespunzător sistemului de bază, încărcat doar cu forța unitară $X_1 = \vec{1}$ vor fi:

$$m_{1_{32}} = 0 \qquad m_{1_{21}} = 1 \cdot x_2$$

Necunoscuta X_1 se obține din ecuația:

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{10} = 0$$

unde:

$$\begin{aligned} \delta_{10} &= \int \frac{m_0 \cdot m_1}{E \cdot I_z} \cdot dx = \int_0^a \frac{m_{0_{32}} \cdot m_{1_{32}}}{E \cdot I_z} \cdot dx_1 + \int_0^{3a} \frac{m_{0_{21}} \cdot m_{1_{21}}}{E \cdot I_z} \cdot dx_2 \\ &= -\frac{1}{E \cdot I_z} \cdot \int_0^{3a} \frac{p \cdot (a + x_2)^2}{2} \cdot x_2 \cdot dx_2 = -\frac{171 p \cdot a^4}{8 \cdot E \cdot I_z} \\ \delta_{11} &= \int_0^{3a} \frac{m_{1_{21}} \cdot m_{1_{21}}}{E \cdot I_z} \cdot dx = \frac{1}{E \cdot I_z} \cdot \int_0^{3a} x_2 \cdot x_2 \cdot dx = \frac{9 a^3}{E \cdot I_z} \end{aligned}$$

Se va obține astfel necunoscuta X_1 , reacțiunea V_2 fiind egală cu aceasta:

$$\frac{9 a^3}{E \cdot I_z} \cdot X_1 - \frac{171 p \cdot a^4}{8 \cdot E \cdot I_z} = 0 \Rightarrow X_1 = \frac{19 p \cdot a}{8} = \frac{19 \cdot 4000 \cdot 0,8}{8} = 7600 \text{ N}$$

Reacțiunile V_1 și M_1 se determină din ecuațiile de echilibru static:

$$(\sum F)_y = 0; \quad V_1 + V_2 - p \cdot 4a = 0$$

$$(\sum M)_1 = 0; \quad -M_1 + p \cdot 4a \cdot 2a - V_2 \cdot 3a = 0$$

Se vor obține valorile:

$$V_1 = \frac{13 p \cdot a}{8} = \frac{13 \cdot 4000 \cdot 0,8}{8} = 5200 \text{ N}$$

$$M_1 = \frac{7 p \cdot a^2}{8} = \frac{7 \cdot 4000 \cdot 0,8^2}{8} = 2240 \text{ N} \cdot \text{m}$$

În continuare, se pot scrie funcțiile de variație ale forței tăietoare T și momentului încovoietor M pentru grinda reală, pentru intervalele $[3 \div 2)$, $x_1 \in [0; a)$ și $(2 \div 1]$, $x_2 \in (0; 3a]$:

$$T_{32} = p \cdot x_1 \qquad M_{32} = -\frac{p}{2} \cdot x_1^2$$

Dând valori acestor două funcții, la capete de interval se vor obține valorile:

$$T_3 = 0 \text{ N}, T_2 = 3200 \text{ N}, M_3 = 0 \text{ N} \cdot \text{m}, M_2 = -1280 \text{ N} \cdot \text{m}.$$

$$T_{21} = p \cdot (a + x_2) - V_2 \qquad M_{21} = V_2 \cdot x_2 - \frac{p}{2} \cdot (a + x_2)^2$$

Dând valori acestor funcții, la capete de interval se vor obține valorile: $T_2 = -4400 \text{ N}$, $T_1 = 5200 \text{ N}$, $M_2 = -1280 \text{ N} \cdot \text{m}$, $M_1 = -2240 \text{ N} \cdot \text{m}$. Forța tăietoare se anulează pentru $x_{2k} = 1,1 \text{ m}$, secțiune în care momentul încovoietor prezintă un maxim local $M_k = 1140 \text{ N} \cdot \text{m}$.

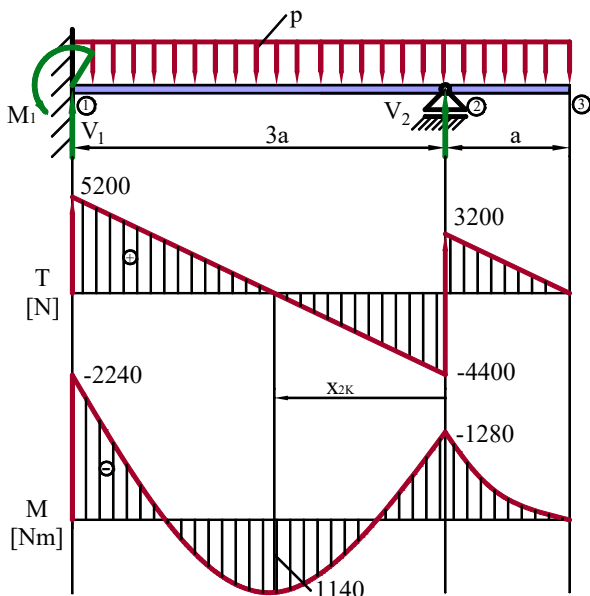


Fig. 4.53 A4.8. Diagramele funcțiilor T și M trasate analitic

Valoarea maximă a tensiunii axiale va fi cea corespunzătoare secțiunii 1:

$$\sigma_{max} = \frac{M_1}{I_z} \cdot y_{max} = -\frac{2240 \cdot 10^3}{775549,83} \cdot 40 = -115,53 \text{ N/mm}^2$$

Analiza FEM

Cele două tronsoane al grinzii vor fi modelate folosind comanda *Primary Member* din *Structure System*, secțiunea fiind SB 80x6 (conform ISO). Studiul va fi de tip static, materialul asociat – oțelul E360, iar geometriile vor fi tratate ca grinzi.

La nodul aferent secțiunii 1 va fi aplicată o constrângere de tip încastrare (*Fixed Geometry*), iar la cel corespunzător secțiunii 2 se va bloca translația pe direcție verticală (utilizând *Use reference geometry*). Forța distribuită va fi aplicată pe ambele tronsoane ale grinzii (figura 4.54).

Diagramele forței tăietoare (*Shear Force in Dir1* – figura 4.55) și momentului încovoietor (*Moment about Dir2* – figura 4.56), afișate după crearea discretizării și

rulara studiului, prezintă valori foarte apropiate de cele calculate analitic. Totodată, distribuția tensiunilor axiale maxime (*Upper bound bending in DIR2* – figura 4.57) indică valoarea limită $\sigma_{max} = -115,36 \text{ N/mm}^2$, corespunzătoare încăstrării.

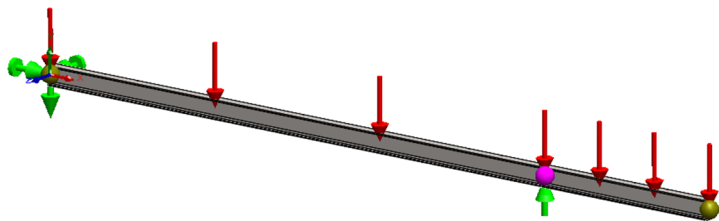


Fig. 4.54 A4.8 Constrângeri și încărcări

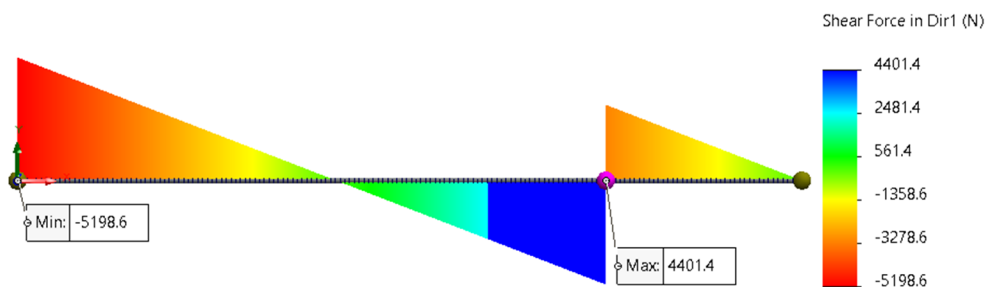


Fig. 4.55 A4.8. Diagrama de variației a forței tăietoare

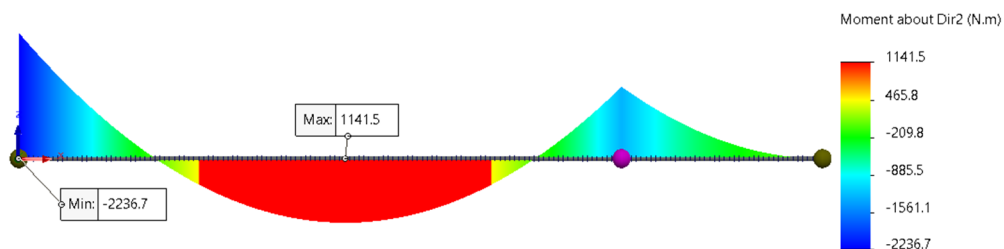


Fig. 4.56 A4.8. Diagrama de variației a momentului încovoietor

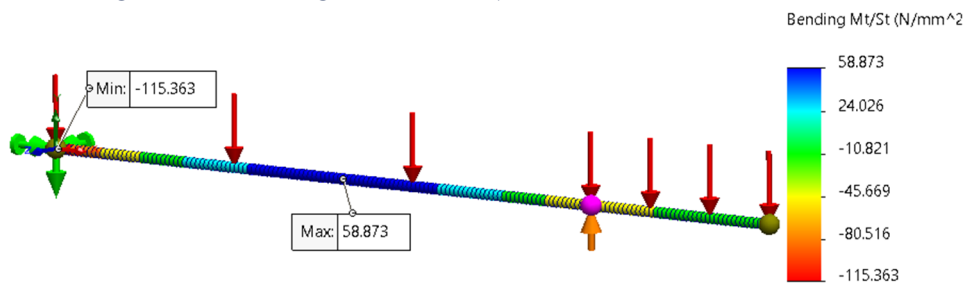


Fig. 4.57 A4.8. Distribuția tensiunilor axiale maxime

5. Solicitări compuse

În practica inginerescă se întâlnesc multe elemente de rezistență care sunt supuse simultan acțiunii mai multor tipuri de forțe interioare. Apar astfel solicitări compuse. În funcție de natura tensiunilor generate, se diferențiază solicitări compuse de categoria I (la care se combină tensiuni de același fel, axiale sau tangențiale) și solicitări compuse de categoria a II-a (la care se combină tensiuni axiale cu tensiuni tangențiale).

La solicitările compuse de categoria I efectele tensiunilor se pot cumula prin însumare algebrică, luând în considerare semnul acestora (la tensiunile axiale) sau sub forma rezultantei (la tensiunile tangențiale dispuse în plane diferite).

La solicitările compuse de categoria a II, efectul cumulat al tensiunilor este estimat pe baza unor teorii de rezistență. În acest capitol sunt prezentate cele cinci teorii clasice de rezistență, evidențiindu-se că la materialele ductile se aplică în special teoria a III-a (criteriul tensiunii tangențiale maxime, Tresca – Coulomb) și teoria a V-a (criteriul energiei de variație a formei, Huber – Hencky – von Mises). Simulările numerice prezentate în acest capitol sunt realizate pe modele solide, mod de lucru care permite vizualizarea tensiunilor echivalente după cele două teorii menționate anterior.

Structura capitolului este următoarea:

5.1 *Solicitări compuse de categoria I*

5.2 *Solicitări compuse de categoria II*

5.1 SOLICITĂRI COMPUSE DE CATEGORIA I

Un tronson de bară în secțiunile căruia acționează forțe interioare (eforturi) de natură diferită, este supus la o solicitare compusă. În practică, majoritatea elementelor de rezistență au zone supuse la solicitări compuse. În funcție de tipul tensiunilor care apar simultan într-o secțiune transversală, se deosebesc:

- solicitări compuse de categoria I, determinate de forțe interioare care generează același tip de tensiune: axială σ (încovoiere + solicitare axială) sau tangențială τ (torsiune + forfecare);
- solicitări compuse de categoria II, determinate de forțe interioare care generează tensiuni de natură diferită: axială σ și tangențială τ ;

La solicitările compuse de categoria I de încovoiere cu întindere/compresiune tensiunile axiale σ se adună algebric. Pentru cazul general în care în secțiunile unui tronson de grindă apar simultan forțele interioare N , M_{iz} și M_{iy} (întindere/compresiune și încovoiere în raport cu ambele axe principale), tensiunea axială rezultantă dintr-un punct P va fi calculată cu relația:

$$\sigma_{rez P} = \pm \sigma_N + \sigma_{M_{iz}} \pm \sigma_{M_{iy}} = \pm \frac{N}{A} \pm \frac{M_{iz}}{I_z} \cdot y_P \pm \frac{M_{iy}}{I_y} \cdot z_P \quad (5.1)$$

La solicitările compuse de categoria I de torsiune și forfecare, tensiunea tangențială rezultantă va fi:

$$\vec{\tau}_{rez P} = \vec{\tau}_{Mt} + \vec{\tau}_{Ty} + \vec{\tau}_{Tz} \quad (5.2)$$

La elementele de rezistență cu arie transversală mare, tensiunile tangențiale generate de forțele tăietoare T_y și T_z sunt mult mai mici decât tensiunile tangențiale generate la torsiune, astfel că la solicitarea de torsiune + forfecare se poate realiza calculul doar la torsiune.

În cele ce urmează se prezintă exemple de calcul la solicitarea simplă de încovoiere + întindere/compresiune.

Aplicația A5.1. Sistemul din figura 5.1 este format dintr-o grindă cu secțiune 100 mm x 60 mm, lungime $l=600$ mm și o placă de rigiditate mare. Forța $F = 22000$ N acționează pe placă, având centrul de aplicare situat la distanțele 130 mm, respectiv 80 mm de axa z și y ale secțiunii grinzii. Să se determine tensiuni axiale rezultante, pe muchiile grinzii (material: 28Cr4).

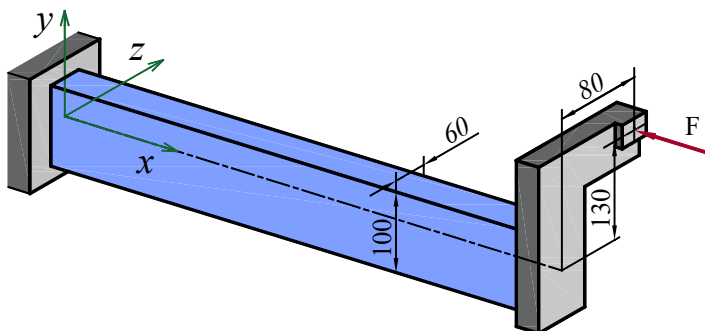


Fig. 5.1 Aplicația A5.1

Calculul analitic

Forța F este aplicată excentric în raport cu centrul de greutate al secțiunii grinzii, atât după axa z , cât și după axa y . Reducerea forței în raport cu centrul de greutate va genera o componentă axială, de aceeași valoare cu forța dată, și două componente de tip moment (figura 5.2):

$$M_z = F \cdot 130 = 2860 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot \text{mm} \quad M_y = F \cdot 80 = 1760 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

Aceste trei încărcări vor determina trei componente de forță interioară, constante pe toată lungimea grinzii:

$$N_{21} = -F \quad M_{iz_{21}} = M_z \quad M_{iy_{21}} = M_y$$

Tensiunea rezultantă se va calcula cu relația (5.1), ținând cont de semnul celor trei componente, în fiecare cadran al secțiunii (se va analiza dacă $F / M_z / M_y$ determina comprimarea sau întinderea fibrelor din cadranul respectiv – figura 5.3).

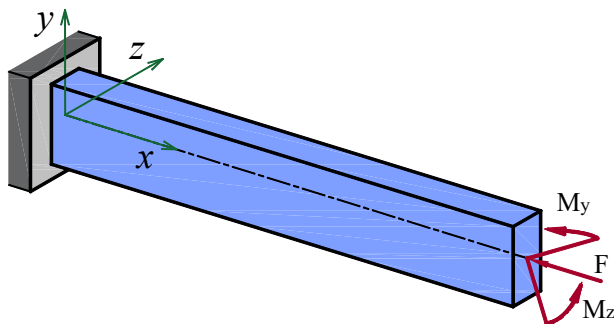


Fig. 5.2 A5.1 Reducerea forței F în centrul secțiunii

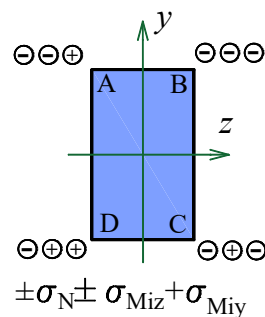


Fig. 5.3 A5.1 Tensiuni

Momentele de inerție axiale ale secțiunii grinzii sunt:

$$I_z = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{60 \cdot 100^3}{12} = 5 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_y = \frac{b^3 \cdot h}{12} = \frac{60^3 \cdot 100}{12} = 1,8 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

În punctele A, B, C, D ale unei secțiuni transversale oarecare (figura 5.3) se vor obține următoarele valori ale tensiunii rezultante:

$$\begin{aligned} \sigma_{rez A} &= -\frac{N}{A} - \frac{M_{iz}}{I_z} \cdot y_A + \frac{M_{iy}}{I_y} \cdot z_A \\ &= -\frac{22000}{6000} - \frac{2860 \cdot 10^3}{5 \cdot 10^6} \cdot 50 + \frac{1760 \cdot 10^3}{1,8 \cdot 10^6} \cdot 30 = -2,93 \frac{N}{\text{mm}^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{rez B} &= -\frac{N}{A} - \frac{M_{iz}}{I_z} \cdot y_B - \frac{M_{iy}}{I_y} \cdot z_B = \\ &= -\frac{22000}{6000} - \frac{2860 \cdot 10^3}{5 \cdot 10^6} \cdot 50 - \frac{1760 \cdot 10^3}{1,8 \cdot 10^6} \cdot 30 = -61,60 \frac{N}{\text{mm}^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{rez C} &= -\frac{N}{A} + \frac{M_{iz}}{I_z} \cdot y_C - \frac{M_{iy}}{I_y} \cdot z_C \\ &= -\frac{22000}{6000} + \frac{2860 \cdot 10^3}{5 \cdot 10^6} \cdot 50 - \frac{1760 \cdot 10^3}{1,8 \cdot 10^6} \cdot 30 = -4,40 \frac{N}{\text{mm}^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{rez D} &= -\frac{N}{A} + \frac{M_{iz}}{I_z} \cdot y_D + \frac{M_{iy}}{I_y} \cdot z_D \\ &= -\frac{22000}{6000} + \frac{2860 \cdot 10^3}{5 \cdot 10^6} \cdot 50 + \frac{1760 \cdot 10^3}{1,8 \cdot 10^6} \cdot 30 = 54,26 \frac{N}{\text{mm}^2} \end{aligned}$$

Analiza FEM

Cele două componente ale sistemului pot să fie modelate într-un singur fișier *Part*, ca solide distincte (la extrudarea celui de-al doilea solid se va dezactiva opțiunea *Merge result*). Figura 5.4 prezintă dimensiunile componentelor sistemului.

Analiza va fi efectuată pe geometrii de tip solid, pentru a putea vizualiza variația tensiunii axiale în secțiune transversală. După crearea studiului, va fi selectată opțiunea de rigiditate ridicată a plăcii (opțiunea *Make Rigid* din meniul

contextual, accesat prin click dreapta pe numele plăcii în arborele simulării). Materialul asociat grinzii va fi oțelul 42Cr4. Contactul dintre suprafața frontală dreapta și placă va fi de tip *bonded*, selectat în comanda *Component Interaction*.

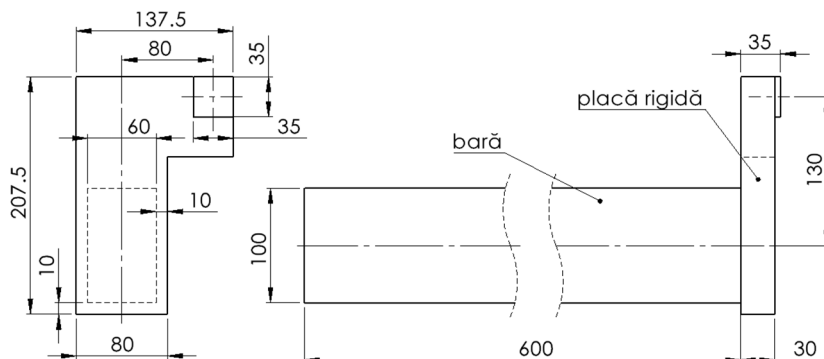


Fig. 5.4 A5.1 Dimensiunile ansamblului grindă – placă rigidă

Suprafața frontală stânga a grinzii va fi încăstrată (condiție *Fixed Geometry*), iar forța $F = 22000\text{ N}$ va fi aplicată pe suprafața pătrată 35x35 a plăcii. Densitatea rețelei de elemente finite (figura 5.5) influențează semnificativ valorile vârfurilor de tensiune din zonele de capăt ale grinzii, dar are o influență neglijabilă asupra valorilor din zona centrală.

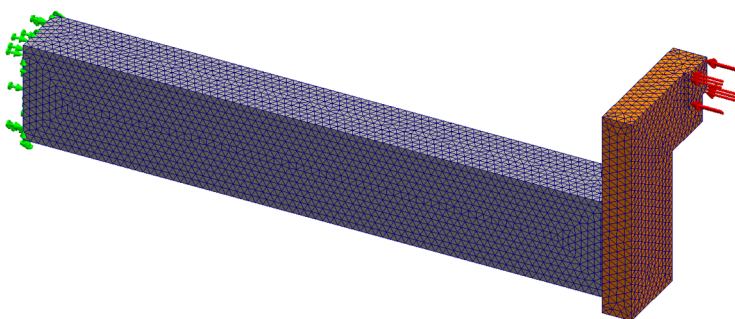


Fig. 5.5 Fixarea, încărcarea și discretizarea sistemului A5.1

După rularea studiului se vor afișa diagrama distribuției tensiunii axiale σ_x (opțiunea *SX Normal Stress* din comanda *Define Stress Plot*) – figura 5.5. Se observă că tensiunile sunt constante de-a lungul unei fibre longitudinale (cu excepția zonelor de capăt supuse încăstrării și contactului grindă – placă). Valorile obținute sunt practic identice cu cele calculate analitic. Pe fibra extremă corespunzătoare punctului B din figura 5.3 apare cea mai mare valoare a tensiunii axiale la compresiune ($\sigma_{rez\ B} = -61,60\text{ N/mm}^2$), iar pe fibra extremă corespunzătoare punctului D apare cea mai mare valoare a tensiunii la întindere ($\sigma_{rez\ B} = 54,26\text{ N/mm}^2$).

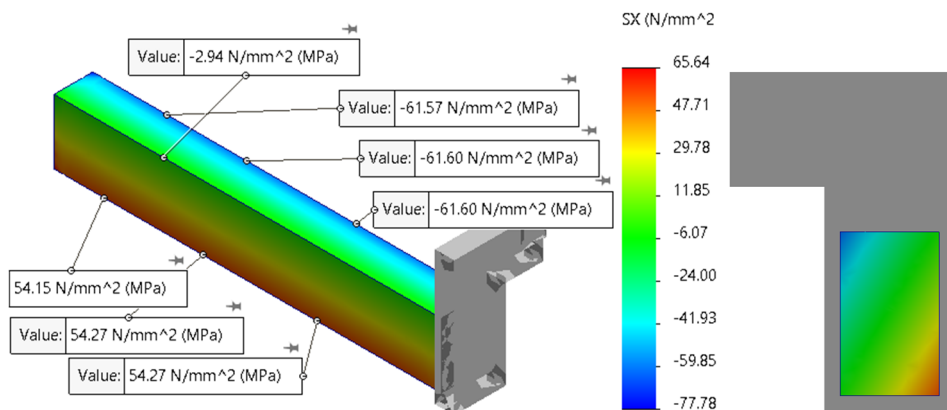


Fig. 5.6 A5.1 Distribuția tensiunii axiale σ_x

Aplicația A5.2. Grinda din figura 5.7, solicitată de forța $F = 140 \text{ kN}$, prezintă o decupare $30 \text{ mm} \times 50 \text{ mm} \times 200 \text{ mm}$ în partea superioară, la 200 mm distanță de încadrare. Să se determine tensiunea axială maximă din grindă, fără a lua în considerare concentratorii de tensiune (materialul este oțelul 17Cr3).

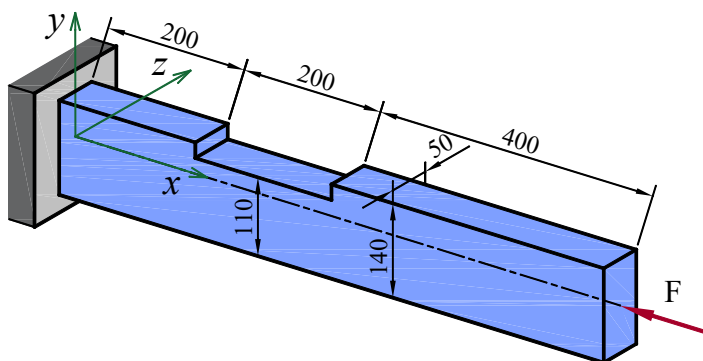


Fig. 5.7 Aplicația A5.2

Calculul analitic

Pentru grinda A5.2 se pot identifica două secțiuni de arii diferite: $A_1 = 110 \cdot 50 = 5500 \text{ mm}^2$ (în zona decupării), respectiv $A_2 = 140 \cdot 50 = 7000 \text{ mm}^2$ (restul grinzii). În secțiunile caracterizate de aria A_2 apare solicitare de compresiune, caracterizată de forța interioară axială $N = -F$, tensiunea axială fiind:

$$\sigma_2 = \frac{N}{A_2} = -\frac{140 \cdot 10^3}{7000} = -20 \text{ N/mm}^2$$

În zona decupării apare o solicitare de compresiune excentrică, suprapunându-se compresiunea cu un moment de încovoiere $M_z = F \cdot 15 = 2100 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot \text{mm}$, generat de poziționarea forței în raport cu centrul secțiunii A_1 . Tensiunea axială pe fibrele superioare ale secțiunii decupate va fi:

$$\sigma_{rez1s} = -\frac{N}{A_1} - \frac{M_{iz}}{I_z} \cdot y_A = -\frac{140 \cdot 10^3}{5500} - \frac{2100 \cdot 10^3}{5,545 \cdot 10^6} \cdot 55 = -46,28 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

unde $I_{z1} = 50 \cdot 110^3 / 12 = 5,545 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$ este momentul de inerție axial al secțiunii A_1 .

Tensiunea axială pe fibrele inferioare ale secțiunii decupate va fi:

$$\sigma_{rez1l} = -\frac{N}{A} + \frac{M_{iz}}{I_z} \cdot y_A = -\frac{140 \cdot 10^3}{5500} + \frac{2100 \cdot 10^3}{5,545 \cdot 10^6} \cdot 55 = -4,62 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Analiza FEM

Analiza se va efectua pe o geometrie de tip solid, parcurgându-se etapele cunoscute: generarea modelului, definirea studiului static, asocierea materialului 17Cr3, aplicarea fixării, aplicarea forței F pe suprafața de capăt dreapta, generarea rețelei de elemente finite (figura 5.8).

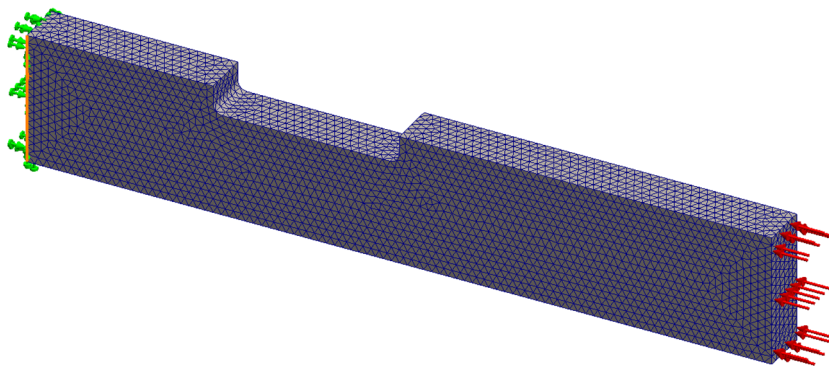


Fig. 5.8 Fixarea, încărcarea și discretizarea grinzii A5.2

Diagrama distribuției tensiunii axiale este prezentată în figura 5.9, evidențiindu-se valorile limită din zona decupării, precum și valoarea medie din corpul grinzii. În zona de trecere dintre secțiuni apar tensiuni mai mari, datorită efectului de concentrare a tensiunilor (în modelul 3D s-au aplicat raze de racordare, pentru reducerea valorilor din aceste zone).

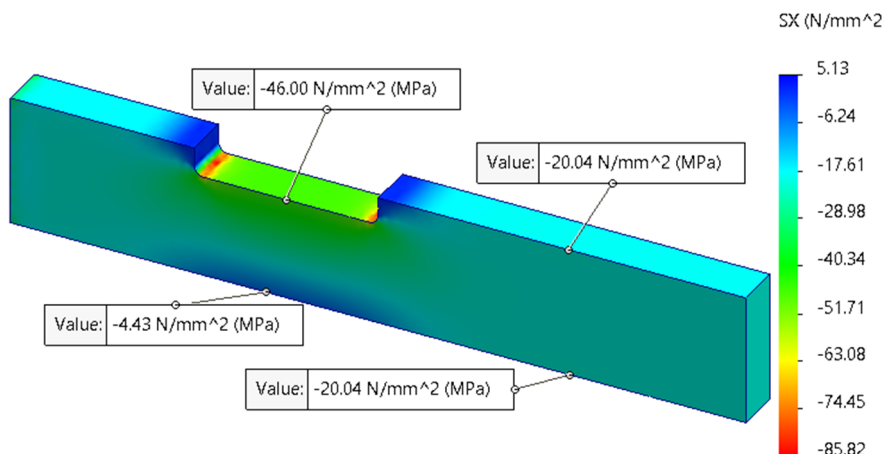


Fig. 5.9 A5.2 Distribuția tensiunilor axiale

Aplicația A5.3. Brațul din figura 5.10 este solicitat de forța $F = 8000 \text{ N}$. În secțiunea sa centrală $P_1 - P_2$, pe suprafața plană situată la distanța $t = 20 \text{ mm}$ de axa forței, este aplicată o marcă tensometrică pentru evaluarea deformației specifice liniare ε_x . Să se determine variația tensiunii axiale în secțiunea $P_1 - P_2$ și valoarea deformației specifice ε_x . Brațul este realizat din oțel inoxidabil X5CrNi18-10 ($E = 2 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$) și are în zona centrală secțiune dreptunghiulară $30 \text{ mm} \times 20 \text{ mm}$.

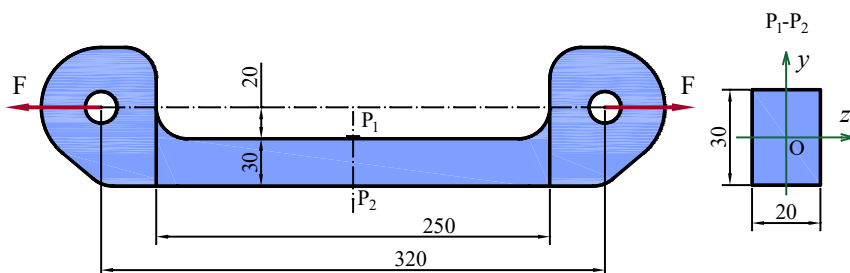


Fig. 5.10 Aplicația A5.3

Calculul analitic

Excentricitatea forței în raport cu secțiunea centrală a brațului, determină apariția unui moment de încovoiere în această zonă, $M_z = F \cdot 35 = 280000 \text{ N} \cdot \text{mm}$, cota de 35 mm reprezentând distanța dintre axa forței și axa x a corpului brațului. Astfel, în secțiunea $P_1 - P_2$ vor fi generate tensiuni axiale din solicitarea de întindere ($N = F$) și din cea de încovoiere ($M_{iz} = M_z$). Pe fibrele extreme din secțiune vor apărea valorile limită ale tensiunii axiale:

$$\sigma_{rez P_1} = \frac{N}{A} + \frac{M_{iz}}{I_z} \cdot y_{P1} = \frac{8000}{600} + \frac{280000}{45000} \cdot 15 = 106,67 \frac{N}{mm^2}$$

$$\sigma_{rez P_2} = \frac{N}{A} - \frac{M_{iz}}{I_z} \cdot y_{P2} = \frac{8000}{600} - \frac{280000}{45000} \cdot 15 = -80 \frac{N}{mm^2}$$

unde $I_{z1} = 20 \cdot 30^3 / 12 = 45000 \text{ mm}^4$ este momentul de inerție axial al secțiunii $P_1 - P_2$.

Tensiunea axială minimă (în valoare absolută) apare pe axa principală x a corpului brațului:

$$\sigma_{rez O} = \frac{N}{A} = \frac{8000}{600} = 13,33 \frac{N}{mm^2}$$

Deformația specifică axială în punctul P_1 poate fi calculată din legea lui Hooke:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_{rez P_1}}{E} = \frac{106,67}{2 \cdot 10^5} = 5,33 \cdot 10^{-4}$$

Analiza FEM

Dimensiunile care influențează tensiunile din secțiunea centrală sunt cele prezentate în figura 5.10. Celelalte dimensiuni care definesc modelul 3D sunt prezentate în figura 5.11. Suprafețele alezajelor $\varnothing 20$ au fost divizate în raport cu linii verticale în câte două suprafețe semicilindrice (liniile de divizare se trasează într-o schiță suport, ulterior aplicându-se comanda *SplitLine*).

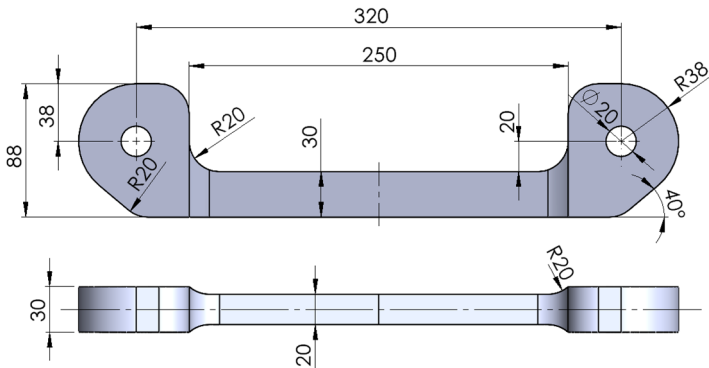


Fig. 5.11 Dimensiunile brațului A5.3

Analiza FEM va fi efectuată pe geometrie de tip solid. Vor fi parcurse etapele cunoscute: definirea studiului static, asocierea proprietăților de material, aplicarea

încăstrării și a forței pe suprafațele semicilindrice Ø20 (figura 5.12), astfel încât componenta să fie solicitată la întindere. Așa cum s-a arătat în capitoul 1, încărcarea unui lagăr poate fi aplicată prin forțe distribuite sinusoidal sau parabolic, folosind comanda *Bearing Load*. Deoarece în acest exemplu nu s-a urmărit analiza tensiunilor din zona capetelor brațului, încărcarea a fost aplicată sub forma unei forțe distribuite uniforme pe suprafața semicilindrică.

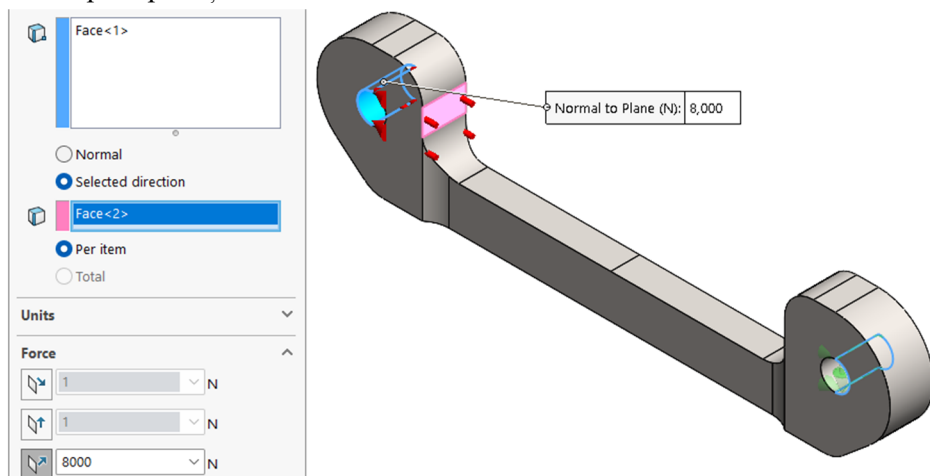


Fig. 5.12 Fixarea, încărcarea brațului A5.3

Diagrama distribuției tensiunii axiale, afișată după crearea rețelei de elemente finite și rularea studiului este prezentată în figura 5.13. Se observă suprapunerea rezultatelor obținute în simulare cu cele calculate analitic.

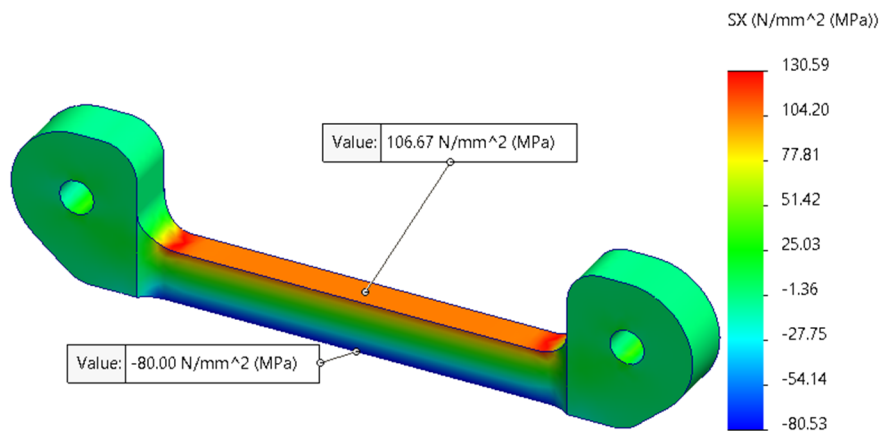


Fig. 5.13 Tensiuni axiale în secțiunea centrală a brațului A5.3

Distribuția deformației specifice liniare ε_x (figura 5.14) arată o diferență semnificativă a valorii din punctul P_1 în raport cu cea calculată analitic. Trebuie

reținut că în simulările FEM deformațiile specifice se calculează pe baza deplasărilor nodurilor rețelei de elemente finite. În acest caz, geometria zonelor cuprinse între alezaje și corpul brațului prezintă deplasări mai mici (dimensiunile secțiunii sunt mai mari), ceea ce influențează deplasările și din zona centrală. Dacă se analizează deformația specifică a unei grinzi cu secțiune constantă, valoarea calculată analitic cu legea lui Hooke se suprapune peste valoarea obținută prin simulare.

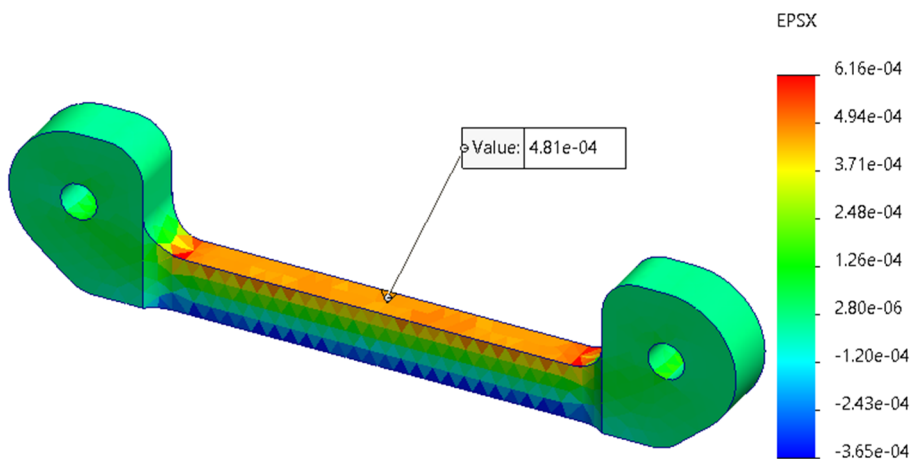


Fig. 5.14 Tensiuni axiale în secțiunea centrală a brațului A5.3

5.2 SOLICITĂRI COMPUSE DE CATEGORIA II

La solicitările compuse de categoria a II-a apar tensiuni de natură diferită: axiale σ și tangențiale τ . Calculul tensiunilor echivalente se face folosind teorii de rezistență (sau criterii de rezistență) care “integrează” efectul tensiunilor axiale și tangențiale. Cele cinci teorii clasice de rezistență sunt prezentate în continuare [10].

Teoria I (criteriul tensiunii axiale maxime, Rankine): starea limită a unui material izotrop, supus unei stări de solicitare complexă, survine atunci când valoarea tensiunii principale maxime (σ_1) atinge valoarea tensiunii axiale corespunzătoare stării limită de la solicitarea de întindere simplă. Această teorie este adecvată pentru materiale cu comportament fragil, tensiunea echivalentă fiind:

$$\sigma_{ech I} = \sigma_1 \quad (5.3)$$

Teoria a II-a (criteriul deformației liniare specifice maxime, Saint – Venant): starea limită a unui material izotrop este atinsă în momentul în care deformația specifică liniară principală maximă (ϵ_1) atinge valoarea deformației

specifice corespunzătoare stării limită de la solicitarea de întindere simplă. Este folosită tot pentru materiale fragile, tensiunea echivalentă fiind:

$$\sigma_{ech II} = \sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) \quad (5.4)$$

Teoria a III-a (Criteriul tensiunii tangențiale maxime, Tresca - Coulomb): starea limită a unui material izotrop și tenace se atinge atunci când tensiunea tangențială maximă (τ_{max}) din corpul solicitat devine egală cu tensiunea tangențială corespunzătoare stării limită de la solicitarea de întindere simplă. Este foarte utilizată pentru materiale cu comportament tenace/ductil, tensiunea echivalentă fiind calculată cu relația:

$$\sigma_{ech III} = \sigma_1 - \sigma_3 \quad (5.5)$$

Teoria a IV-a (Criteriul energiei totale de deformare, Beltrami – Haigh): starea limită se atinge într-un corp atunci când energia specifică de deformare atinge valoarea energiei specifice corespunzătoare stării limită de la solicitarea de întindere simplă. Tensiunea echivalentă va fi:

$$\sigma_{ech IV} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu \cdot (\sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2 \cdot \sigma_3 + \sigma_3 \cdot \sigma_1)} \quad (5.6)$$

Teoria a V-a (Criteriul energiei de variație a formei, Huber – Hencky – von Mises): starea limită a unui material izotrop și tenace se atinge atunci când energia potențială specifică de modificare a formei devine egală cu energia de modificare a formei corespunzătoare stării limită de la solicitarea de întindere simplă. Este cea mai utilizată teorie pentru materialele ductile în ingineria modernă, tensiunea echivalentă fiind:

$$\sigma_{ech V} = \sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2}{2}} \quad (5.7)$$

În cazul particular al barelor la care apar numai tensiuni σ_x și τ_{xy} , tensiunea echivalentă conform celor cinci teorii de rezistență se poate calcula cu relațiile:

$$\sigma_{ech I} = \frac{\sigma_x}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\sigma_x^2 + 4 \cdot \tau_{xy}^2} \quad (5.8)$$

$$\sigma_{ech II} = 0,35 \cdot \sigma_x + 0,65 \cdot \sqrt{\sigma_x^2 + 4 \cdot \tau_{xy}^2} \quad (5.9)$$

$$\sigma_{ech III} = \sqrt{\sigma_x^2 + 4 \cdot \tau_{xy}^2} \quad (5.10)$$

$$\sigma_{ech IV} = \sqrt{\sigma_x^2 + 2,6 \cdot \tau_{xy}^2} \quad (5.11)$$

$$\sigma_{ech V} = \sqrt{\sigma_x^2 + 3 \cdot \tau_{xy}^2} \quad (5.12)$$

Analizând comparativ tensiunile echivalente calculate pentru materiale tenace cu teoria a V-a, respectiv teoria a III-a, se observă că aceasta din urmă conduce la un coeficient de siguranță mai mare, fiind mai des folosită în calcule analitice.

Aplicația A5.4. Arborele unei turbine hidraulice cu axă verticală este solicitat la torsiune și întindere (figura 5.15). Arborele, realizat din oțel 34CrNiMo6, transmite o putere $P = 3 \text{ MW}$, la o turație nominală $n = 250 \text{ rot/min}$, iar forța axială preluată de arbore este dată de greutatea rotorului $G_R = 180 \text{ kN}$. Cunoșcând dimensiunile principale: $d_e = 220 \text{ mm}$, $d_i = 140 \text{ mm}$, $l = 1480 \text{ mm}$, să se calculeze tensiunea echivalentă maximă conform teoriei a III-a de rezistență și conform teoriei a V-a de rezistență.

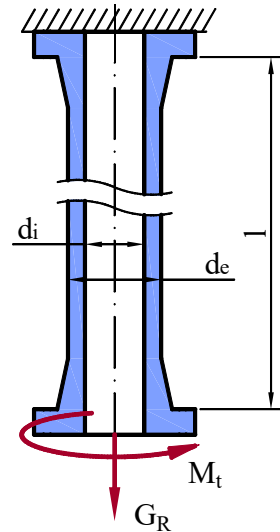


Fig. 5.15 Aplicația A5.4

Calculul analitic

Arborele este supus la torsiune de momentul $M_t \text{ [N} \cdot \text{mm]}$, care se poate calcula în funcție de putere $P \text{ [kW]}$ și turație $n \text{ [rot/min]}$:

$$M_t = 9,55 \cdot 10^6 \cdot \frac{P}{n} = 9,55 \cdot 10^6 \cdot \frac{3000}{250} = 114,6 \cdot 10^6 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

Forța axială interioară $N = G_R$ și momentul de torsiune interior sunt constante pe toată lungimea arborelui cuprinsă între flanșe. Tensiunea axială maximă va fi:

$$\sigma_{max} = \frac{N}{A} = \frac{4 \cdot N}{\pi \cdot (d_e^2 - d_i^2)} = \frac{4 \cdot 180 \cdot 10^3}{\pi \cdot (220^2 - 140^2)} = 7,96 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Tensiunea tangențială maximă apare pe suprafața exterioară a arborelui:

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{W_p} = \frac{114,6 \cdot 10^6}{1747867,91} = 65,57 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

unde $W_p = \pi \cdot (d_e^4 - d_i^4) / (16 \cdot d_e) = 1747867,91 \text{ mm}^3$ reprezintă modulul de rezistență polar al secțiunii arborelui.

Tensiunea echivalentă maximă conform teoriei a III-a de rezistență va fi:

$$\sigma_{ech III \max} = \sqrt{\sigma_{\max}^2 + 4 \cdot \tau_{\max}^2} = \sqrt{7,96^2 + 4 \cdot 65,57^2} = 131,37 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

iar tensiunea echivalentă maximă calculată conform teoriei a V-a de rezistență:

$$\sigma_{ech V} = \sqrt{\sigma_{\max}^2 + 3 \cdot \tau_{\max}^2} = \sqrt{7,96^2 + 3 \cdot 65,57^2} = 113,84 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Analiza FEM

Dimensiunile arborelui sunt indicate în figura 5.16 (flanșele de capăt sunt identice). Analiza va fi efectuată pe geometrie de tip solid, la simulările pe geometrii de tip grindă neputând fi obținute direct distribuțiile tensiunilor echivalente.

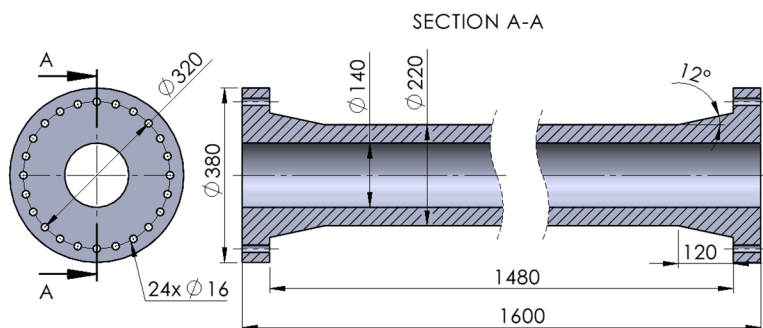


Fig. 5.16 Dimensiunile arborelui A5.4 (arbore cu axă verticală, imagine rotită)

După generarea studiului static și aplicarea proprietăților de material (oțelul 34CrNiMo6), se va fixa suprafața frontală a flanșei superioare (condiție *Fixed geometry*). Pe suprafața frontală a flanșei inferioare se vor aplica forța verticală aferentă greutateii rotorului (figura 5.17) și momentul de torsiune (figura 5.18).

Figurile 5.19 și 5.20 prezintă distribuțiile tensiunii axiale σ_y și tensiunii tangențiale τ_{xy} , Y fiind axa arborelui. Se observă că valorile de pe suprafața cilindrică exterioră a corpului arborelui sunt foarte apropiate de cele calculate analitic. Tensiunea tangențială τ_{zy} are o distribuție similară cu τ_{xy} (cele două componente reprezintă proiecția tensiunii tangențiale $\tau = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \tau_{zy}^2}$, generată la torsiune). Celelalte trei componente de tensiune (σ_x , σ_z , τ_{xz}) sunt nule.

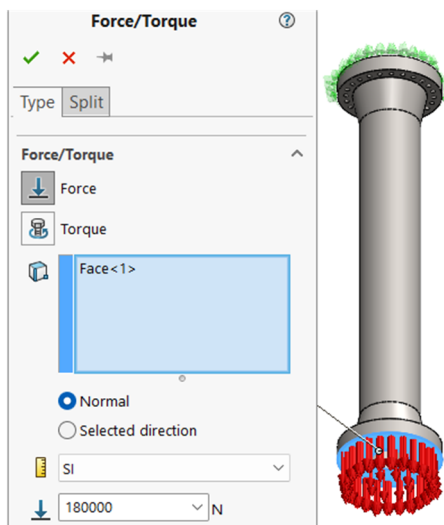


Fig. 5.17 A5.4 Aplicarea forței G_R

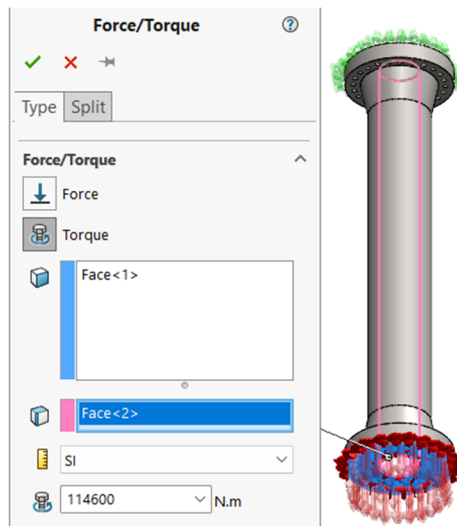


Fig. 5.18 A5.4 Aplicarea momentului

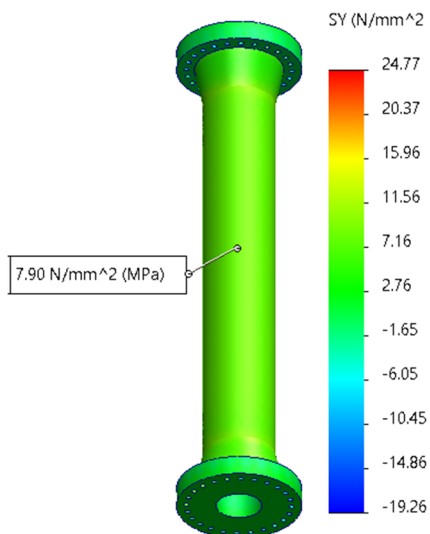


Fig. 5.19 A5.4 Tensiuni axiale

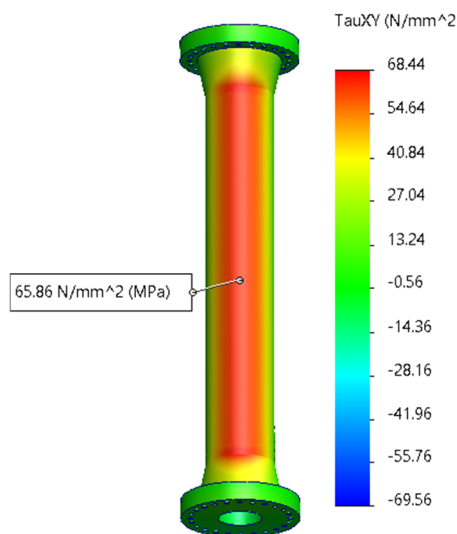
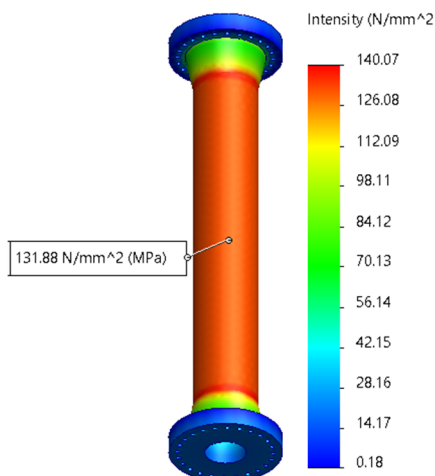
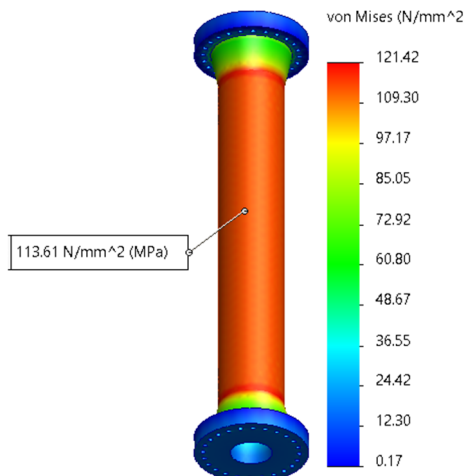


Fig. 5.20 A5.4 Tensiuni tangențiale

Tensiunea echivalentă $\sigma_{ech III}$ este definită în *SolidWorks Simulation* ca *StressIntensity (P1-P3)*, unde P1 și P3 sunt tensiuni principale, iar tensiunea echivalentă $\sigma_{ech V}$ este definită ca *von Mises Stress*. Valorile celor două tensiuni echivalente (figurile 5.21-5.22) sunt similare cu cele obținute în calculul analitic.


 Fig. 5.21 A5.4 Tensiuni $\sigma_{ech III}$

 Fig. 5.22 A5.4 Tensiuni $\sigma_{ech V}$

Aplicația A5.5. Asupra tijei cu secțiune inelară (constantă pe toată lungimea) din figura 5.23 se acționează cu o pârghie de rigiditate ridicată. Cunoscând dimensiunile: $d_e = 80 \text{ mm}$, $d_i = 50 \text{ mm}$, $l_1 = 480 \text{ mm}$, $l_2 = 400 \text{ mm}$ și forța $F = 4000 \text{ N}$, să se calculeze tensiunea echivalentă maximă din secțiunea B-B, utilizând teoria a III-a de rezistență și teoria a V-a de rezistență. Tija este realizată din oțel 51CrV4.

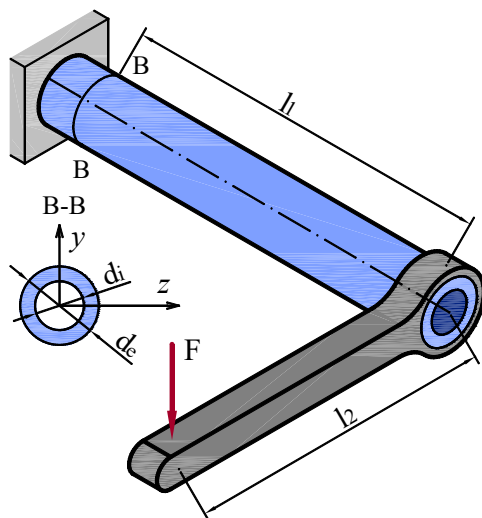


Fig. 5.23 Aplicația A5.5

Calculul analitic

Forța F se reduce în centrul secțiunii dreapta a tijei la un moment de torsiune M_t și o forță verticală F (care va determina o forță tăietoare interioară și un moment de încovoiere interior). În secțiunea B-B apar tensiuni tangențiale generate de momentul de torsiune, tensiuni axiale generate de momentul de încovoiere și tensiuni tangențiale generate de forța tăietoare. Acestea din urmă sunt nule în punctele cele mai îndepărtate de axa z a secțiunii (acolo unde tensiunile axiale sunt maxime), motiv pentru care nu vor fi luate în calcul în acest exemplu.

Momentul de torsiune este:

$$M_t = F \cdot l_2 = 4000 \cdot 400 = 1,6 \cdot 10^6 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

Acestui moment i se opune reacțiunea de tip moment de torsiune din secțiunea încastrată. Momentul de torsiune interior va fi constant pe toată lungimea tijei.

Momentul de încovoiere interior generat de forța F are o variație de gradul I pe intervalul $[1 \div 2]$, $M_{i_{21}} = F \cdot x$, valoarea din secțiunea B – B fiind:

$$M_{i_{BB}} = F \cdot l_1 = 4000 \cdot 480 = 1,92 \cdot 10^6 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

Tensiunea axială maximă din secțiunea B-B apare în punctele cele mai îndepărtate de axa z a secțiunii:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{i_{BB}}}{I_z} \cdot y_{max} = \frac{1,92 \cdot 10^6}{1703823,1} \cdot 40 = 45,08 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

unde $I_z = \pi \cdot (d_e^4 - d_i^4)/64 = 1703823,1 \text{ mm}^4$ reprezintă momentul de inerție axial al secțiunii tijei (după axa z).

Tensiunea tangențială maximă generată de momentul de torsiune apare pe suprafața exterioară a tijei:

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{W_p} = \frac{1,6 \cdot 10^6}{85191,1} = 18,78 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

modulul de rezistență polar fiind $W_p = \pi \cdot (d_e^4 - d_i^4)/(16 \cdot d_e) = 85191,1 \text{ mm}^3$.

Tensiunea echivalentă maximă din secțiunea B-B, calculată conform teoriei a III-a de rezistență, va fi:

$$\sigma_{ech \text{ III } B-B \text{ max}} = \sqrt{\sigma_{max}^2 + 4 \cdot \tau_{max}^2} = \sqrt{45,08^2 + 4 \cdot 18,78^2} = 58,67 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

iar tensiunea echivalentă maximă calculată conform teoriei a V-a de rezistență:

$$\sigma_{ech \text{ V } B-B \text{ max}} = \sqrt{\sigma_{max}^2 + 3 \cdot \tau_{max}^2} = \sqrt{45,08^2 + 3 \cdot 18,78^2} = 55,58 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Analiza FEM

Având în vedere cerința de determinare a tensiunilor doar pentru tijă, în simulare se poate opta pentru aplicarea unei încărcări la distanță (*Remote load*), nefiind necesară modelarea pârgheiei. Figura 5.24 prezintă geometria tijei. Secțiunea de calcul a tensiunilor (B-B) și suprafața de contact tije-pârghie vor fi delimitate prin

linii de divizare – *Split Line* (după generarea modelului tijei se va crea o schiță care conține aceste linii, distanțate la 50 mm, respectiv 40 mm în raport cu capete).

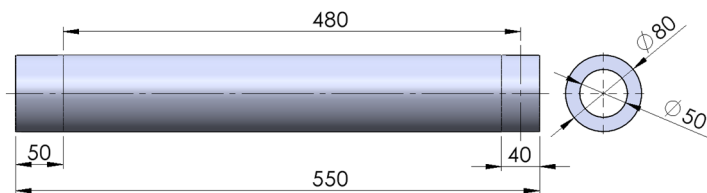


Fig. 5.24 Dimensiunile tijei A5.5

Studiul va fi de tip static, aplicat pe geometrie de tip solid. Modelului i se vor asocia proprietățile oțelului 51CrV4.

Suprafața frontală stânga a tijei va fi încastrată (condiție *Fixed Geometry*), iar forța va fi aplicată folosind comanda *Remote Loads/Mass*. Comanda presupune: selecția suprafeței pe care se transpune efectul forței (suprafața de contact tijă-pârghie), alegerea sistemului de referință folosit pentru definirea poziției forței (în cazul dat s-a folosit sistemul de referință universal, poziționat în centrul secțiunii de capăt stânga a tijei), definirea coordonatelor locației forței și definirea componentelor forței după axe x , y și z (figura 2.25). Utilizatorul poate alege tipul conexiunii din zona de contact dintre *Rigid* (zona conexiunii nu se deformează) sau *Distributed* (zona conexiunii se deformează, opțiune folosită în acest exemplu).

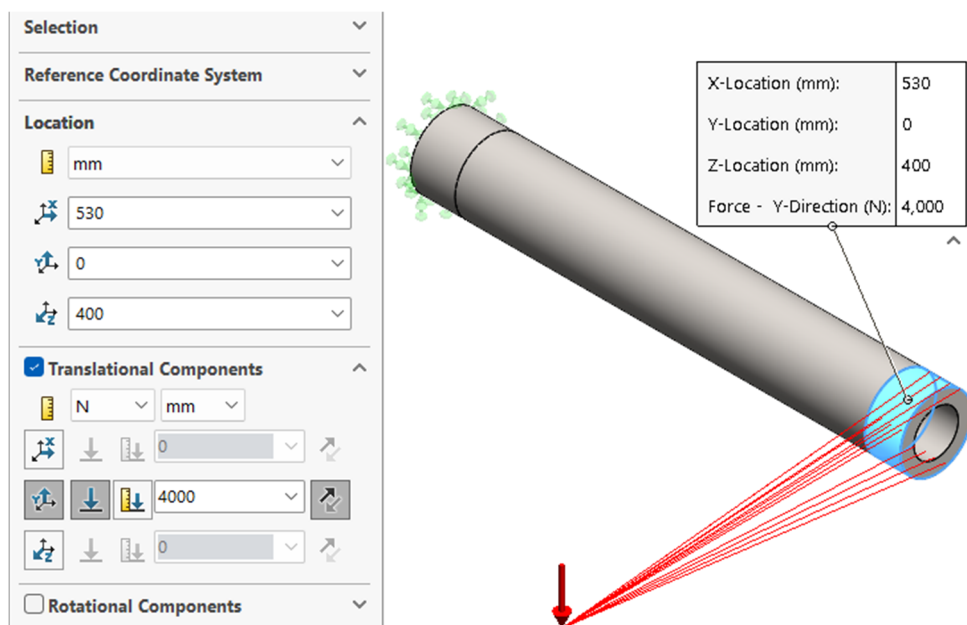


Fig. 5.25 A5.5 Aplicarea încărcării la distanță

Figurile 5.26 și 5.27 prezintă distribuția tensiunilor echivalente $\sigma_{ech III}$ (*StressIntensity P1-P3*), respectiv $\sigma_{ech V}$ (*von Mises Stress*), evidențiindu-se valorile maxime din secțiunea B-B. Valorile maxime apar pe fibrele extreme cele mai îndepărtate de axa z a secțiunii (sunt indicate coordonatele punctului în care se evaluează proba: X=50 mm, Y=40 mm, Z=0 mm în raport cu sistemul de referință universal, poziționate în centrul suprafeței frontale stânga).

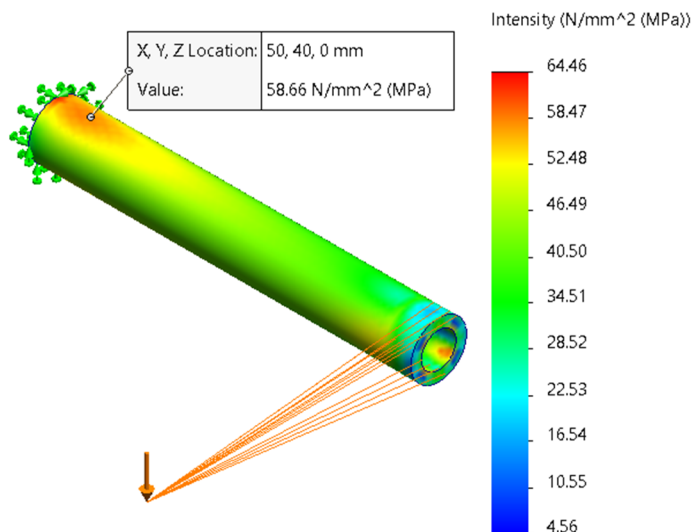


Fig. 5.26 A5.5 Tensiuni $\sigma_{ech III}$. Evidențierea valorii maxime în secțiunea B-B

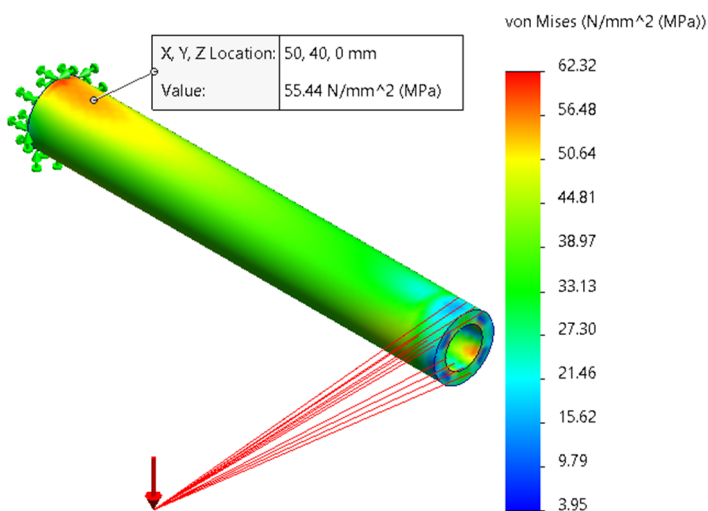


Fig. 5.27 A5.5 Tensiuni $\sigma_{ech V}$. Evidențierea valorii maxime în secțiunea B-B

Aplicația A5.6. Componenta din figura 5.28 este solicitată de forța F poziționată în planul secțiunii de capăt, la un unghi de 60° în raport cu axa orizontală. Să se determine tensiunea echivalentă conform teoriei a V-a de rezistență, în punctele caracteristice A, B, C, D ale secțiunii K-K. Se cunosc: $d = 50 \text{ mm}$, $l_1 = 700 \text{ mm}$, $l_2 = 500 \text{ mm}$, $l_3 = 500 \text{ mm}$ și forța $F = 2500 \text{ N}$, material: 34Cr4.

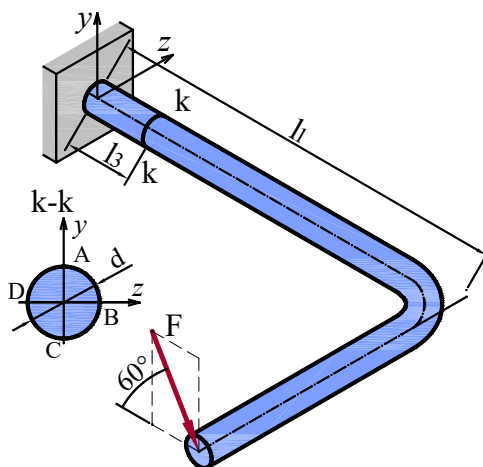


Fig. 5.28 Aplicația A5.6

Calculul analitic

Forța F va descompusă după axele x și y ale sistemului de referință. Cele două proiecții pot fi reduse în raport cu centrul secțiunii de capăt a primului tronson la următoarele componente (figura 5.29): forța axială F_x , forța tăietoare F_y , momentul de torsiune M_t și momentul de încovoiere M_y :

$$F_y = F \cdot \sin(60^\circ)$$

$$F_x = F \cdot \cos(60^\circ)$$

$$M_t = F_y \cdot l_2 = F \cdot l_2 \cdot \sin(60^\circ)$$

$$M_y = F_x \cdot l_2 = F \cdot l_2 \cdot \cos(60^\circ)$$

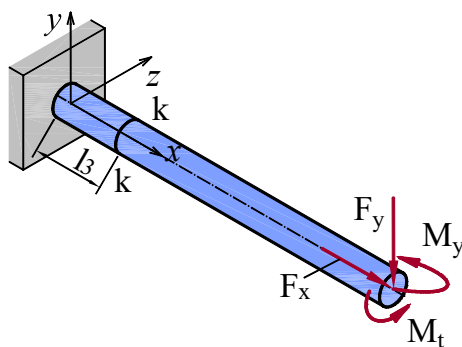


Fig. 5.29 A5.6 Reducerea forței F

În secțiunea K-K vor apărea următoarele forțe interioare:

$$N_K = F_x$$

$$M_{iyK} = M_y$$

$$M_{izK} = F_y \cdot (l_1 - l_3)$$

$$M_{tK} = M_t$$

$$T_{yK} = F_y$$

Tensiunea axială într-un punct P al secțiunii $K - K$ se calculează cu relația:

$$\sigma_P = \frac{N_K}{A} \pm \frac{M_{iyK}}{I_y} \cdot z_P \pm \frac{M_{izK}}{I_z} \cdot y_P$$

unde $A = \pi \cdot d^2/4 = 1963,5 \text{ mm}^2$ – aria secțiunii, $I_y = I_z = \pi \cdot d^4/64 = 306796 \text{ mm}^4$ – momentele de inerție axiale, $z_A = 0 \text{ mm}$, $y_A = 25 \text{ mm}$ – coordonatele punctului P în raport cu sistemul de referință zOy .

Momentul de încovoiere interior M_{iyK} generează tensiunea axială cu valoare maximă pozitivă în punctul D, valoare maximă negativă în punctul B și valori zero în punctele A și C. Momentul de încovoiere interior M_{izK} generează tensiunea axială cu valoare maximă pozitivă în punctul A, valoare maximă negativă în punctul C și valori zero în punctele B și D.

După realizarea calculelor se obțin următoarele tensiuni axiale: $\sigma_A = 106,49 \text{ MPa}$, $\sigma_B = -50,29 \text{ MPa}$, $\sigma_C = -105,21 \text{ MPa}$, $\sigma_D = 51,57 \text{ MPa}$.

Tensiunea tangențială generată de momentul de torsiune este maximă pe conturul exterior al secțiunii $\tau_{max} = M_{tK}/W_p$. Tensiunea tangențială generată de forța tăietoare (relația lui Juravski) este maximă pe linia DB (unde $S_z = 2R^3/3$ și $b = 50 \text{ mm}$) și zero în punctele A și C. Vor rezulta următoarele valori: $\tau_A = 44,10 \text{ MPa}$, $\tau_B = 42,63 \text{ MPa}$, $\tau_C = 44,10 \text{ MPa}$, $\tau_D = 45,57 \text{ MPa}$.

Introducând valorile tensiunilor axiale și tangențiale în expresia teoriei a V-a:

$$\sigma_{echV} = \sqrt{\sigma^2 + 3 \cdot \tau^2}$$

se vor obține următoarele valori ale tensiunii echivalente: $\sigma_{echVA} = 131,06 \text{ MPa}$, $\sigma_{echVB} = 89,347 \text{ MPa}$, $\sigma_{echVC} = 130,02 \text{ MPa}$, $\sigma_{echVD} = 94,29 \text{ MPa}$.

Valorile de mai sus nu reprezintă maximul din secțiunea K-K. Tensiunea axială maximă se obține după o direcție caracterizată de unghiul $\beta = \arctan(M_{izK}/M_{iyK}) = 64,30^\circ$, măsurat în raport cu axa Oz a secțiunii și are valoarea:

$$\sigma_P = \frac{N_K}{A} + \frac{\sqrt{M_{izK}^2 + M_{iyK}^2}}{W_z} = \frac{1250}{1963,5} + \frac{\sqrt{1299038^2 + 625000^2}}{12271,8} = 118,10 \text{ MPa}$$

Va rezulta tensiunea echivalentă maximă conform teoriei a V-a, $\sigma_{echVmaxKK} = 140,66 \text{ MPa}$.

Analiza FEM

Geometria 3D a piesei poate fi realizată folosind comanda *Sweep*, raza de racordare dintre cele două tronsoane fiind de 100 mm. Studiul va fi de tip static, analiza realizându-se pe model solid. După asocierea proprietăților de material și fixarea suprafeței de capăt stânga, se va aplica forța înclinată. Direcția forței va fi

indicată printr-o dreaptă trasată într-o schiță suport (această dreapta se selectează în câmpul *Face, Edge, Plane for Direction* din zona *Selected Direction* – figura 5.30).

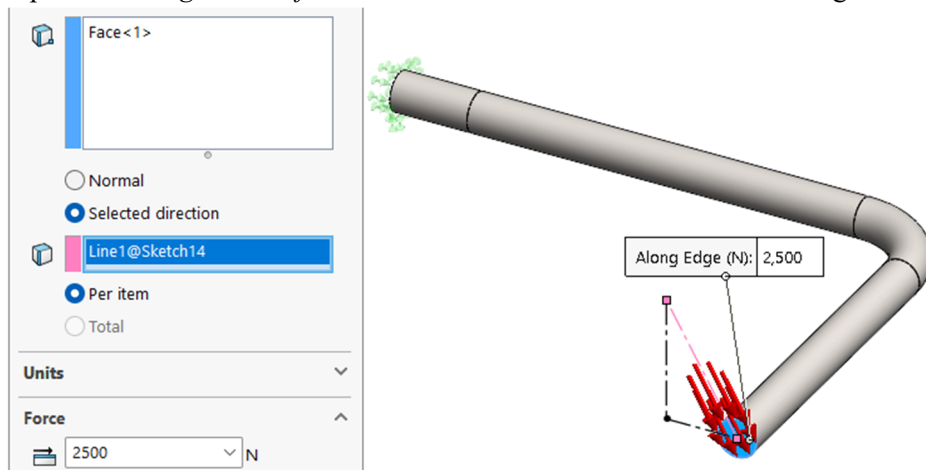


Fig. 5.30 A5.6 Aplicarea forței înclinate

Figura 5.31 prezintă distribuția tensiunii echivalente von Mises (teoria a V-a de rezistență) în secțiunea K-K. Sunt evidențiate valorile din punctele A, B, C și D (se observă coordonatele punctelor în care se fac probe) și valoarea maximă. Se observă apropierea foarte bună dintre rezultatele obținute prin calcul și cele obținute din simulare.

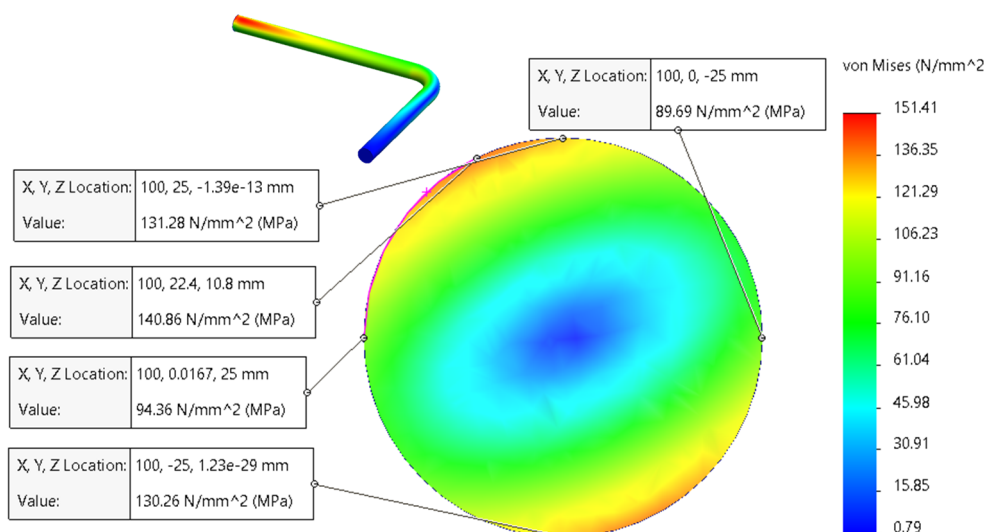


Fig. 5.31 A5.6 Distribuția tensiunilor $\sigma_{ech\ v}$ în secțiunea K-K

Bibliografie

1. Ashby, M.F., Jones, D., *Engineering Materials I. An introduction to Properties, Applications and Design*, 4th ed., Butterworth-Heinemann, 2012.
2. Ashby, M.F., *Materials Selection in Mechanical Design*, 2nd ed., Butterworth-Heinemann, 1999.
3. Alămoreanu, E., Buzdugan, Gh., Iliescu, N., Mincă, I., Sandu, M., *Îndrumar de calcul în ingineria mecanică*, Editura Tehnică, București, 1996.
4. Atanasiu, C., Dinu, G., Anghel, V., *Elemente de rezistența materialelor*, Editura Printech, 2004.
5. Babeu, T., *Teoria elementară a rezistenței materialelor*, Editura Mirton, Timișoara, 1998.
6. Beer, F., s.a., *Mecanics of Materials*, 6th ed., McGraw-Hill, 2012.
7. Bejan, M., ș.a., *Rezistența materialelor*, vol. 1 și vol. 2, Editura AGIR București, 2007.
8. Buchanan, G., *Schaum's Outline of Finite Element Analysis*, 1st ed., McGraw Hill, 1994.
9. Buzdugan, Ghe., Blumenfeld, M., *Calculul de rezistență al pieselor de mașini*, Editura Tehnică, București, 1979.
10. Buzdugan, Ghe., *Rezistența materialelor*, ediția a XII-a, Editura Academiei, București, 1986.
11. Buzdugan, Ghe., ș.a., *Rezistența materialelor. Aplicații*, Editura Academiei Române, București, 1991.
12. Cojocaru, V., *Rezistența materialelor. Vol. I*. Editura Eftimie Murgu, Reșița, 2018.
13. Cojocaru, V., *Modelarea geometriilor 3D în ingineria mecanică*, Editura Presa Universitară Clujeană, Cluj-Napoca, 2024.
14. Craig R.R., *Mechanics of Materials*, Second Edition, Wiley, 1999.
15. Deutsch, I., ș.a., *Probleme de rezistența materialelor*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1983.
16. Dudescu M.C., *Rezistența materialelor. Noțiuni fundamentale. Solicitări simple*, Editura U.T.Press, Cluj-Napoca, 2013.
17. Dumitru I., Faur, N. *Elemente de calcul și aplicații în rezistența materialelor*, Editura Politehnica, Timișoara, 1997.
18. Faur, N., *Mecanica materialelor. Noțiuni fundamentale, Statică, Solicitări simple*, Editura Politehnica, Timișoara, 2005.
19. Faur, N., *Elemente finite: fundamente*, Editura Politehnica, Timișoara, 2002.
20. Gere, J., Goodno, B., *Mechanics of Materials*, 7th ed. in SI units, Cengage Learning, 2009.

21. Goia, I., *Rezistența materialelor și elemente de teoria elasticității*, volumul 1 și volumul 2, Editura Universității Transilvania, Brașov, 2002.
22. Hibbeler, R.C., *Mechanics of Materials*, 8th. ed., Pretince Hall, 2011.
23. Hărdău M., Șomotecan M., Dudescu M.C., *Metoda Elementelor Finite, vol. I – Structuri formate din bare*. Editura U.T.Press, Cluj-Napoca, 2002.
24. Kurowski, P.M., *Finite Element Analysis for Design Engineers*, SAE, 2022.
25. Marșavina, L., *Metode numerice în mecanica ruperii*, Ed. Mirton, Timișoara, 1998
26. Mănescu, T.Șt., Nedelcu, D., *Analiză structurală prin metoda elementului finit*, Editura Orizonturi Universitare Timișoara, 2005.
27. Mănescu, T.Șt., ș.a., *Noțiuni fundamentale de rezistența materialelor*, Editura Eftimie Murgu Reșița, 2008.
28. Nash, W.A., *Schaum's Outline of Theory and Problems of Strength of Materials*, 4th edition, McGraw-Hill, New York, 1998.
29. Nedelcu D., *Proiectare și simulare numerică cu SolidWorks*, Editura Eurostampa, Timișoara, 2011;
30. Nedelcu D., Mănescu T., *Aplicații de rezistența materialelor calculate cu SolidWorks*, Editura Eftimie Murgu, Reșița, 2018.
31. Negru R., Marșavina, L., *Metode moderne de evaluare a integrității și durabilității*, Editura Politehnica, Timișoara, 2019.
32. Pytel, A., Kiusalaas, J., *Mechanics of Materials*, second edition, Cengage Learning, Stamford, 2012.
33. Roesler, J., Harders, H., Baeker, M., *Mechanical Behaviour of Engineering Materials*, Springer, 2007.
34. Shih, R., *Introduction to Finite Element Analysis Using SolidWorks Simulation 2023*, SDC Publications, 2023.
35. Sofonea, G., Pascu A.M., *Rezistența materialelor*, volumul 1 și volumul 2, Editura Universității Lucian Blaga, Sibiu, 2007.
36. Timoshenko, S., Gere, I., *Mechanics of Materials*, Third SI edition, Chapman & Hall, 1992.
37. Timoshenko, S., *Strength of Materials, Part I, Elementary Theory and Problems*, 2nd ed., D.Van Nostrand Company, Inc., New York, 1948.
38. Tripa P, Hlușcu M., *Rezistența Materialelor*, volumul 1 și volumul 2, Editura Mirton, Timișoara, 2006, 2007.
39. Tudose, I., Atanasiu C., Iliescu, N., *Rezistența materialelor*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1981.
40. *** Dassault Systèmes SolidWorks Corp., *SOLIDWORKS Simulation Reference - 2025*, (online). Disponibil la: <https://help.solidworks.com/>.



ISBN 978-606-37-2758-0