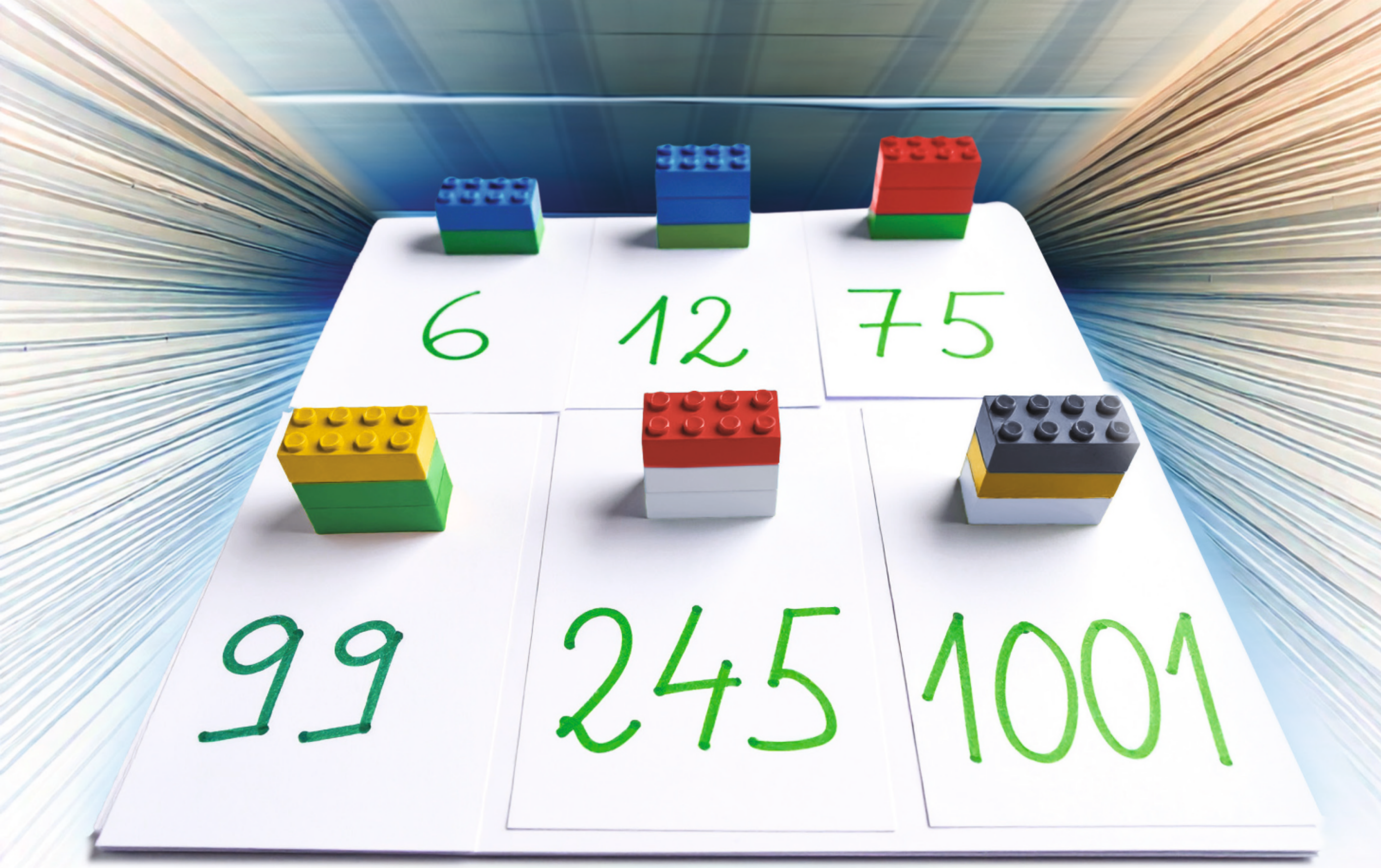


András Szilárd-Károly

Metode investigative în predarea matematicii
Teorii didactice și exemple

PRESA UNIVERSITARĂ CLUJEANĂ

CEAE
CENTRUL DE EVALUARE ȘI ANALIZE EDUCAȚIONALE

András Szilárd-Károly

Metode investigative în predarea matematicii

Teorii didactice și exemple

Ediție revizuită

Presa Universitară Clujeană
2026

Referenți științifici:

Prof. univ. dr. Zsoldos-Marchiș Julianna

Prof gr. I, dr. Nagy Örs

Coperta: **Sütő Ferenc**
Revizie lingvistică: **Koros-Fekete Sándor, Dénes Margit**
Tehnoredactare: **András Zsuzsanna**

Lucrarea a fost realizată în cadrul proiectului *Matematica Altfel*, derulat de Centrul de Evaluare și Analize Educaționale cu sprijinul ING Bank România.

ISBN 978-606-37-2974-4

Universitatea Babeș-Bolyai
Presa Universitară Clujeană
Director: Codruța Săcelean
Str. Hasdeu nr. 51
400371 Cluj-Napoca, România
Tel./fax: (+40)-264-597.401
E-mail: editura@ubbcluj.ro
http://www.editura.ubbcluj.ro

Cuprins

Predarea matematicii prin metode investigative

1 Metode investigative

Ce înseamnă metoda investigației la orele de matematică?

Interesul pentru abordările educaționale care leagă cunoștințele de aplicațiile lor a crescut începând cu anii 1980. Recomandările mai multor organizații au subliniat necesitatea de a sprijini competențele secolului XXI prin utilizarea în predare a metodelor investigative, prin aplicațiile cunoștințelor în viața cotidiană și profesională și rezolvarea problemelor. Concluziile cercetărilor au fost incluse atât în rapoarte și recomandări naționale ([34]), cât și în rapoarte ale Comisiei Europene, precum raportul Gago ([38]) în 2004 și raportul Rocard ([86]) în 2007.

„Îmbunătățirile în predarea științelor ar trebui să fie aduse prin noi forme de pedagogie: introducerea în școli a abordărilor bazate pe investigație, acțiuni de formare a profesorilor pentru IBSE[1] și dezvoltarea rețelelor de profesori ar trebui să fie promovate și sprijinite în mod activ”, se arată în raportul Rocard.

Cercetările privind aplicarea și eficacitatea metodelor investigative au demonstrat două aspecte ([34]):

1. Abordările investigative în grupuri mici pot fi extrem de benefice pentru învățare. Pentru a fi eficiente, acestea trebuie să fie ghidate de un curriculum bine gândit cu obiective de învățare clar definite, schele bine concepute, evaluare continuă și resurse informaționale bogate. Oportunitățile de dezvoltare profesională care pun accentul pe evaluarea muncii elevilor cresc probabilitatea ca profesorii să dobândească experiență în aplicarea acestor abordări.

2. Designul evaluărilor este o problemă critică pentru identificarea beneficiilor abordărilor investigative, atât în cazul în care elevii lucrează în echipe, cât și din perspectiva învățării individuale. Mai exact, dacă evaluăm rezultatele tradiționale ale învățării (prin exerciții formale de nivel mediu), atunci metodele investigative și cele tradiționale par să dea rezultate similare. Beneficiile metodelor investigative devin vizibile atunci când evaluările necesită aplicarea cunoașterii și măsoară și calitatea raționamentului.

Metodele investigative acoperă mai multe forme de învățare, respectiv mai multe abordări pedagogice ([105], [34]):

- Învățarea prin proiecte (Project-based Learning, PBL[2])
- Învățarea bazată pe design (Design-based Learning, DBL)
- Învățarea bazată pe probleme (Problem-based Learning, PBL)

[1] Inquiry Based Science Education.

[2] Acronimul PBL este folosit atât pentru Project-based Learning cât și pentru Problem-based Learning, dar de regulă se pot diferenția în contextul în care apar, aici vom folosi Problem-based Learning.

- Învățarea bazată pe cazuri (Case-based Learning, CBL)
- Învățarea bazată pe prelegere și rezolvări de probleme (Lecture-based Problem Solving)
- Învățarea bazată pe investigație și curiozitate[3] (Inquiry-based Learning, IBL)

Unele dintre acestea au fost concepute în diferite domenii de știință, de exemplu, în domeniul medicinii, învățarea bazată pe cazuri se poate aplica mult mai ușor decât în matematică, așa cum învățarea bazată pe design se aplică fără discuții în arhitectură. Există pe lângă aceste abordări și o serie de alte metode investigative, cum ar fi educația matematică complexă ([47]) fundamentată în anii ’60 în Ungaria (de Tamás Varga, [96]) sau metoda lui Pósa ([46]), sau tradițiile germane izvorâte din ideile lui Wilhelm von Humboldt din anii 1800.[4]

Din punctul de vedere al predării matematicii și al tradițiilor existente în România, ne vom focusa asupra abordării bazate pe probleme (PBL – Problem based Learning), asupra abordării bazate pe investigație și curiozitate (IBL – Inquiry based Learning) și vom discuta și unele aspecte legate de învățarea bazată pe prelegere și rezolvări de probleme. Pentru aceasta vom avea nevoie de clarificarea unor termeni care în literatura de specialitate au fost definiți (puțin sau complet) diferit față de ce s-ar putea înțelege/deduce din folosirea uzuală, cotidiană a termenilor respectivi (teoria nivelurilor Van Hiele proiectată asupra chestiunilor didactice ne va furniza o explicație a acestui fenomen, a se vedea capitolul 2.3). Cel mai bun exemplu este termenul „problem solving” care în mod natural se traduce ca „rezolvare de probleme”. Dar ce este o „problemă” din perspectiva didacticii și ce înțelegem prin „rezolvare de probleme”? Primul cadru conceptual și procedural de didactică matematică referitor la procesul de rezolvare a problemelor a fost cel al lui George Pólya (și acest cadru s-a dovedit unul fiabil, cărțile sale fundamentale fiind reeditate și în prezent). Pólya ([79]) a definit problema ca orice sarcină sau activitate pentru care elevii nu au reguli sau metode prescrise sau memorate și nicio percepție potrivit căreia ar exista o metodă specifică «corectă» de rezolvare, deci ca sarcină, un obiectiv care nu poate fi atins din cauza unui obstacol cu care elevul se confruntă. De aici avem două implicații fundamentale: 1. calitatea unei sarcini de a fi problemă sau nu depinde de cine încearcă să îndeplinească sarcina, 2. sarcinile care implică aplicarea unui algoritm, a unor procedee cunoscute de elevi nu se consideră a fi o problemă. Pólya a descris procesul de rezolvare în patru pași și a dat pentru fiecare pas un set de întrebări care pot stimula procesul de rezolvare. Bineînțeles, abordarea lui Pólya nu este una rigidă, ci mai degrabă un cadru flexibil pentru rezolvarea creativă a problemelor. Prin exersarea acestor euristici, rezolvitorii de probleme își pot dezvolta o intuiție mai bună și își pot îmbunătăți capacitatea de a aborda o varietate de provocări matematice și logice.

[3]Folosim această sintagmă pentru a putea diferenția între învățarea bazată pe metode investigative în general și pedagogia IBL – Inquiry-based Learning

[4]Conceptul de universitate humboldtiană este la baza organizării multor universități de azi.

1) Înțelegerea problemei - Înainte de a rezolva o problemă, trebuie să o înțelegem bine. Aceasta implică citirea cu atenție a problemei, identificarea a ceea ce este dat și determinarea a ceea ce trebuie găsit. Întrebări de pus:

- Ce solicită problema?
- Care sunt informațiile disponibile?
- Care este necunoscutul și care sunt cantitățile cunoscute?
- Există condiții sau constrângeri speciale?

2) Elaborarea unui plan - Odată ce am înțeles problema, următorul pas este să elaborăm un plan sau o strategie pentru rezolvarea acesteia. Aceasta implică alegerea metodelor, formulelor sau tehnicilor adecvate care ar putea conduce la o soluție. Întrebări de pus:

- Ce strategii sau instrumente ar putea fi utile? (De exemplu: manipulare algebrică, geometrie, modele etc.)
- Pot să descompun problema în părți mai mici?
- Am mai văzut o problemă similară? Ce a funcționat în acel caz?
- Pot rezolva problema folosind un raționament logic sau prin încercări repetate sau desenând diagrame?

3) Punerea în aplicare a planului - Să parcurgem pas cu pas planul pe care l-am conceput. Aceasta implică efectuarea calculelor, construcțiilor sau deducțiilor logice necesare. Întrebări de pus:

- Ce pași trebuie să urmez?
- Fac progrese în direcția soluției?
- Există greșeli sau erori în munca mea pe care trebuie să le corectez?
- Pot să-mi simplific munca sau să folosesc o scurtătură (idee, observație) pentru a economisi timp?

4) Analiza soluției - După obținerea unei soluții, este necesar să revizuim procesul și răspunsul pentru a ne asigura că acestea sunt corecte și au sens. Această etapă de reflecție este crucială pentru a verifica dacă soluția este valabilă și pentru a identifica eventuale greșeli sau posibile abordări alternative. Întrebări de pus:

- Are sens soluția obținută în contextul problemei?
- Am răspuns la întrebarea care a fost pusă?
- Îmi pot verifica răspunsul cu o metodă diferită sau prin utilizarea estimării?

- Există idei sau metode alternative care ar putea conduce la o soluție mai bună?
- Am făcut presupuneri care ar trebui clarificate sau justificate?

Câteva sfaturi suplimentare pentru aplicarea euristicii lui Pólya:

- Ghiciți și verificați: dacă sunteți blocat, formulați presupuneri întemeiate și testați-le.
- Căutați modele: multe probleme, în special în geometrie și teoria numerelor, implică modele identificabile care pot simplifica procesul de rezolvare.
- Procedaţi în sens invers: dacă problema pare a fi dificil de abordat prin metode directe, încercați să porniți de la rezultatul dorit spre punctul de pornire, bineînțeles verificând corectitudinea raționamentului final.

Comentariu. Cei patru pași pot fi concepuţi și ca un ciclu, de foarte multe ori înțelegem o proprietate la un alt nivel, după ce am demonstrat-o, putem trece la generalizări, la aplicații etc. Pentru a deveni rezolvitori mai buni, mai eficienți, trebuie să parcurgem fiecare pas.

Câteodată, pentru rezolvarea unei probleme este nevoie de schimbarea contextului în care problema a fost formulată, de găsirea unei perspective potrivite sau de un proces de modelare. Modelarea este la fel de importantă din punctul de vedere al metodelor investigative ca și rezolvarea problemelor. Ciclul de modelare este descris de Blum ([15]) și evidențiază natura iterativă a modelării matematice, în care soluțiile și aproximările sunt continuu îmbunătățite și testate pe baza datelor din lumea reală sau pe baza unei analize matematice suplimentare. Ciclul este alcătuit din șase etape:

1) Reprezentarea problemei: primul pas este înțelegerea și reprezentarea problemei din lumea reală în termeni matematici, deci implicit și ignorarea unei serii întregi de aspecte. Aceasta implică simplificarea, abstractizarea și structurarea problemei într-o formă care poate fi analizată matematic. În această etapă are loc identificarea variabilelor, ipotezelor, constrângerilor și relațiilor dintre elementele sistemului sau contextului pe care încercăm să îl modelăm.

2) Modelarea: în această etapă traducem problema într-un model matematic formal, folosind adesea ecuații, grafice, algoritmi sau alte structuri matematice. Modelul surprinde principalele variabile ale problemei și relațiile dintre acestea. De exemplu, utilizarea ecuațiilor pentru a rezolva probleme textuale presupune un proces de modelare. Această etapă implică formularea de ipoteze pentru a simplifica procesele complexe din lumea reală într-un mod gestionabil din punct de vedere matematic.

3) Rezolvarea modelului matematic: după ce avem un model matematic, următorul pas este rezolvarea acestuia. Aceasta poate implica metode analitice (rezolvarea ecuațiilor) sau metode numerice (simulări, aproximări etc.). Scopul este de a obține soluții care pot fi interpretate, validate și aplicate în contextul problemei inițiale.

4) Verificarea/validarea: După obținerea unei soluții din modelul matematic, trebuie să verificăm dacă aceasta este corectă și dacă are sens în situația inițială. Verificarea asigură coerența internă a modelului, în timp ce validarea verifică aplicabilitatea acestuia la datele sau condițiile din lumea reală.

5) Rafinarea: Pe baza rezultatelor etapelor de verificare și validare, rafinăm modelul. Aceasta implică ajustarea ipotezelor, revizuirea ecuațiilor sau îmbunătățirea aproximărilor pentru a spori precizia sau eficiența modelului. Sau din contră, dacă modelul este prea complex, atunci putem simplifica modelul inițial.

6) Reevaluarea: Etapa finală constă în reevaluarea modelului după rafinare, pentru a se asigura că acesta este în continuare în concordanță cu obiectivele problemei inițiale. În această etapă putem reveni la etapele anterioare, pe măsură ce reconsiderăm aspecte ale problemei, actualizăm modelul și testăm noi ipoteze sau scenarii. Această etapă conduce adesea înapoi la faza de modelare sau chiar la regândirea reprezentării problemei în sine.

Uneori aceste etape nu sunt ciclice, ci mai degrabă ele se interconectează și se influențează reciproc pe măsură ce progresăm către o mai bună înțelegere sau un model mai precis. La orele/activitățile bazate pe metode investigative este nevoie de foarte multe ori de modelare, câteodată, chiar dacă problema inițială este una abstractă, o vom remodela într-un alt context (de exemplu, rezolvăm o problemă de geometrie prin metode algebrice sau invers).

Comentariu. Din perspectiva celor două modele anterioare (Pólya și Blum), activitățile matematice bazate pe investigare se deosebesc de lecțiile tradiționale la care elevii rezolvă exerciții și probleme și prin faptul că la activitățile investigative elevii trebuie să parcurgă fiecare etapă.

Modelul lui Pólya a fost rafinat de Schoenfeld ([90], [91]) mai ales din punct de vedere pragmatic și există multe studii despre cum putem preda matematica astfel încât elevii să devină rezolvitori mai buni și nu doar să învețe, să memoreze conținuturi matematice. În articolul recent [87], autorul realizează o sinteză a ideilor emergente și a trendurilor recente privind rezolvarea de probleme. O caracteristică persistentă tuturor abordărilor de rezolvare a problemelor este conceptualizarea disciplinei, care privilegiază și sporește dezvoltarea de către elevi a unor obiceiuri legate de gândirea matematică, crearea raționamentelor. În acest context, elevii trebuie să conceptualizeze, și să se gândească la procesul lor de învățare ca la un set de dileme reprezentate, explorate și rezolvate în termeni de resurse și strategii matematice. În plus, experiențele și comportamentele elevilor legate de rezolvarea problemelor reflectă și devin un mod de gândire corespunzător practicilor matematice, care se acumulează pe parcursul activităților în care elevii trec prin toate etapele rezolvării de probleme. Astfel, ei privilegiază dezvoltarea de obiceiuri matematice, cum ar fi căutarea permanentă a abordărilor alternative privind modelarea și explorarea problemelor matematice, formularea de conjecturi și căutarea argumentelor pentru a susține aceste conjecturi, împărtășirea de soluții la probleme, susținerea propriilor idei și dezvoltarea unui limbaj adecvat pentru a comunica rezultatele.

După clarificarea aspectelor legate de definiția problemelor și a procesului de rezolvare a problemelor, putem schița și abordările investigative.

1.1 Învățarea bazată pe probleme în matematică

Învățarea bazată pe probleme (PBL) este o abordare educațională în care elevii învață prin implicarea în rezolvarea unor probleme relevante, complexe, de regulă legate de lumea reală. În contextul matematicii, PBL deplasează accentul de la metodele tradiționale de predare – în care cunoștințele sunt transmise în principal prin prelegeri și exerciții – la o abordare mai centrată pe elev, în care învățarea are loc ca rezultat al abordării active a unei probleme matematice. În PBL, elevii lucrează de obicei în grupuri mici pentru a explora o problemă, a formula ipoteze explicative, a aplica concepte matematice și a reflecta asupra rezultatelor lor. Această metodă promovează o înțelegere mai profundă, gândirea critică și dezvoltarea abilităților de rezolvare a problemelor care sunt direct transferabile în situații cotidiene ([50]).

Caracteristicile principale ale abordării PBL în matematică:

În lucrarea de meta-analiză [31] este evidențiat faptul că majoritatea cercetărilor raportează îmbunătățirea competențelor elevilor. Există și cazuri în care abordarea PBL a avut efect pozitiv asupra rezultatelor învățării din punctul de vedere al cunoștințelor și al atitudinii față de matematică ([52]), cazuri când PBL combinat cu metodele euristice a avut un impact pozitiv asupra nivelului de cunoștințe ([13]); de asemenea este important faptul că folosirea unor materiale didactice manipulabile poate crește interesul elevilor ([63]). Caracteristicile principale ale PBL sunt:

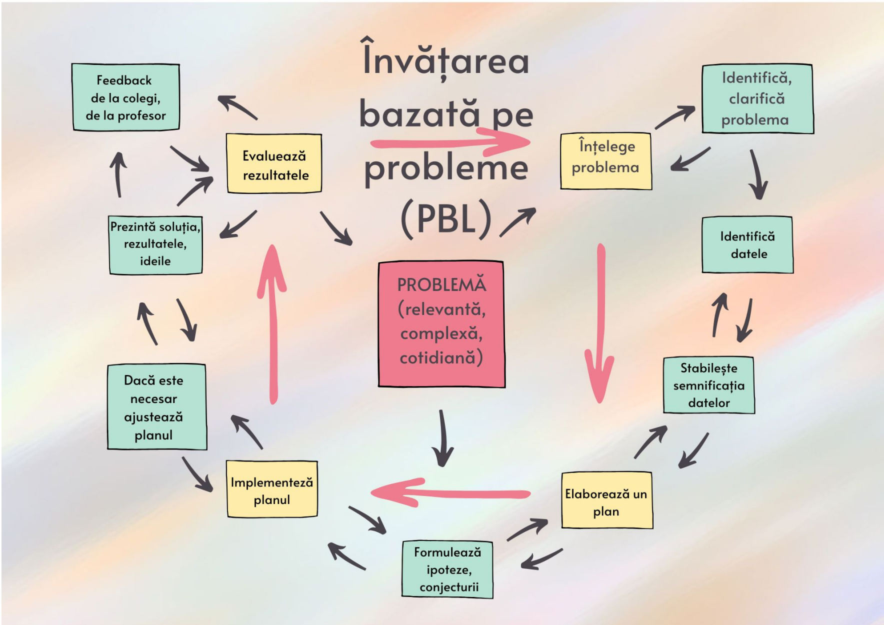
1) **Învățarea activă:** elevii își asumă responsabilitatea învățarii lor prin abordarea unor probleme dificile.

2) **Munca în colaborare:** accentul pus pe munca în echipă permite elevilor să facă schimb de idei, să critice abordările problemelor și să învețe unii de la alții.

3) **Probleme din lumea reală:** problemele sunt de obicei extrase din scenarii din viața reală, ceea ce face matematica mai relevantă și mai atractivă.

4) **Conexiuni interdisciplinare:** PBL încorporează adesea concepte din diferite domenii, cum ar fi fizica, economia sau ingineria, demonstrând aplicabilitatea largă a matematicii.

5) **Învățarea autodirijată:** elevii sunt încurajați să caute informații și resurse, promovând învățarea independentă și abilitățile de investigare/cercetare.



Procesul învățării bazate pe probleme, evidențiind și ciclul rezolvării

Beneficiile posibile ale abordării PBL în matematică:

1) **Îmbunătățirea abilităților de rezolvare a problemelor:** elevii își dezvoltă gândirea critică și abilitățile analitice prin abordarea problemelor deschise care nu au doar o singură soluție.
2) **Îmbunătățirea înțelegerii conceptuale:** prin aplicarea teoriilor matematice la probleme din lumea reală, elevii dobândesc o înțelegere mai profundă a conceptelor matematice.
3) **Implicare şi motivaţie:** PBL implică elevii, arătându-le relevanța matematicii în contexte practice, ceea ce poate crește motivația.
4) **Colaborare și comunicare:** lucrul în grup îi ajută pe elevi să își dezvolte abilitățile de lucru în echipă, de discuții și de prezentare.

1.2 Învățarea bazată pe investigație în matematică

Învățarea bazată pe investigație (IBL) este o abordare educațională care pune accentul pe investigarea, explorarea unor contexte sau probleme relevante în care descoperirea conținuturilor noi se realizează de către elevi. În contextul matematicii, IBL încurajează elevii să se implice în formularea de probleme, să pună întrebări și să investigheze concepte, mai degrabă decât să primească doar informații sau instrucțiuni de la profesor. Procesul de investigare implică formularea de ipoteze, testarea ideilor și formularea de concluzii, toate bazate pe argumente, raționamente, idei, calcule etc., ceea ce favorizează o înțelegere mai profundă a conceptelor matematice. În abordările IBL, elevii explorează de obicei probleme deschise sau situații din lumea reală în care răspunsul nu este imediat evident. Acest lucru stârnește curiozitatea și încurajează elevii să își asume învățarea. Profesorii acționează mai mult ca facilitatori sau ghizi, ajutându-i pe elevi să se orienteze în investigațiile lor matematice. La un nivel mai avansat, investigațiile pot fi efectuate și în contexte mai formale.

Principalele caracteristici ale abordării IBL în matematică:

1) **Învățarea centrată pe elev:** elevii joacă un rol activ în procesul lor de învățare, punând întrebări, formulând ipoteze și explorând soluții/abordări alternative.
2) **Explorarea problemelor:** accentul se pune pe explorarea problemelor mai degrabă decât pe memorarea procedurilor, cu accent pe înțelegerea principiilor de bază.
3) **Colaborare și discuții:** elevii lucrează adesea în grupuri, schimbând idei, apărându-și raționamentul prin argumente logice și învățând unii de la alții.
4) **Contexte din lumea reală:** IBL în matematică implică frecvent probleme din lumea reală, ajutând elevii să vadă relevanța și punerea în aplicare a conceptelor matematice.
5) **Gândire critică și reflecție:** elevii sunt încurajați să gândească critic, să reflecteze asupra propriului raționament și să își rafineze înțelegerea.

Beneficiile abordării IBL în predarea matematicii:

1) **Aprofundarea înțelegerii conceptuale:** prin implicarea activă în procesul de investigare, elevii pot dobândi o înțelegere mai puternică și mai intuitivă a conceptelor, noțiunilor, proprietăților, principiilor matematice.
2) **Îmbunătățirea abilităților de rezolvare a problemelor:** abordările bazate pe investigație îi ajută pe elevi să-și dezvolte gândirea critică și strategiile de rezolvare a problemelor.
3) **Motivație și implicare:** natura deschisă a problemelor, împreună cu accentul pus pe investigație pe explorare și descoperire, crește adesea motivația și implicarea elevilor.
4) **Dezvoltarea unei autonomii profesionale la elevi:** IBL dezvoltă abilități precum învățarea autodirijată, creativitatea și perseverența, abilități utile și în afara școlii.

Concluzie: Învățarea bazată pe investigație (IBL) în matematică este o abordare eficientă pentru promovarea unei înțelegeri mai profunde și a gândirii critice. Prin încurajarea elevilor să investigheze, să pună întrebări și să exploreze concepte matematice, IBL contribuie la dezvoltarea abilităților de rezolvare a problemelor și a unei curiozități matematice mai puternice. Accentul pus pe implicarea elevilor, pe colaborare și pe conexiunile cu lumea reală face din IBL o metodă puternică de pregătire a elevilor pentru a aborda probleme matematice complexe și pentru a-și pune în aplicare cunoștințele în moduri semnificative.

1.3 Învățarea bazată pe prelegere și rezolvarea problemelor

Abordarea aceasta în matematică se referă la metoda de predare și învățare în care elevii sunt introduși în tehnicile de rezolvare a problemelor la începutul unității de învățare sau lecției, înainte de a acoperi complet conținutul formal al prelegerii. Această abordare poate pune accentul pe învățarea activă și angajează elevii prin probleme sau scenarii matematice la începutul activității. Iată o defalcare a modului în care funcționează de obicei această metodă:

Principalele caracteristici ale învățării bazate pe prelegere și rezolvarea problemelor:

1) **Prezentarea unor probleme la început:**

   - În loc să se prezinte explicații sau definiții teoretice formale, elevilor li se prezintă la început o problemă dificilă, un context general complex, noțiunile teoretice fiind prezentate din perspectiva acestui context.
   - Ideea este de a permite elevilor să se implice în problemă, să gândească critic și să încerce să găsească o soluție.

2) **Învățare activă**:

   - Elevii se implică activ în studiul problemei, încercând să o rezolve, lucrând în grupuri sau discutând posibile strategii.
   - Acest lucru încurajează explorarea și dezvoltă gândirea critică și abilitățile de rezolvare de probleme.

3) **Instruire ghidată**:

   - După ce elevii au petrecut câtva timp încercând să rezolve problema, instructorul oferă îndrumare, fie abordând concepțiile greșite, fie prezentând strategii de rezolvare a problemei sau explicând conceptele de bază.
   - Datorită acestei îndrumări, elevii nu rămân confuzi și conținutul prelegerii decurge în mod natural din procesul de rezolvare a problemelor.

4) **Conectarea teoriei la practică**:

- Pe măsură ce sesiunea de rezolvare a problemei progresează, instructorul introduce teoria matematică, teoremele sau formulele relevante care sunt necesare pentru a rezolva problema sau pentru a înțelege mai bine procesul de rezolvare.
- Prin introducerea teoriei în acest mod, elevii pot vedea aplicarea directă a acesteia la problema pe care au întâlnit-o deja, astfel conținutul devine mai semnificativ.

5) **Învățarea colaborativă**:

- Adesea, elevii lucrează împreună în grupuri mici pentru a rezolva problemele, încurajând colaborarea și schimbul de strategii. Acest aspect social poate contribui la aprofundarea înțelegerii și la promovarea diferitelor perspective cu privire la modul de rezolvare a problemei.

6) **Reflecție și discuții**:

- După rezolvarea problemei, există de obicei o perioadă de reflecție în care clasa discută diferite abordări ale problemei și învățăminte/concluzii care pot fi formulate. Instructorul poate, de asemenea, să pună întrebări pentru a consolida și a aprofunda înțelegerea.

Beneficiile acestei abordări (comparativ cu o abordare clasică):

1) **Angajament sporit**: a începe cu o problemă poate fi mai atractiv pentru elevi decât a asculta mai întâi o prelegere. În acest fel oferă o aplicare imediată a conceptelor care urmează să fie învățate.
2) **Aprofundează înțelegerea**: prin abordarea problemelor înainte de teorie, elevii rețin adesea mai bine conceptele, deoarece observă cum este utilizată teoria în practică.
3) **Încurajează gândirea critică**: elevii sunt forțați să gândească critic și să rezolve probleme, mai degrabă decât să primească informații în mod pasiv.
4) **Centrată pe cursant**: această abordare face din elevi personajele centrale ale procesului de învățare, promovând o mai mare asumare a învățării.

Această metodă transferă parțial rolul profesorului de la cel de unic furnizor de conținut la cel de facilitator care îi ghidează pe elevi în călătoria lor de învățare. De asemenea, oferă elevilor oportunități de a se implica activ în problemele studiate, ceea ce îi poate ajuta să înțeleagă conceptele la un nivel mai profund.

Această metodă face parte dintr-o tendință mai largă în educație, cea a strategiilor de învățare mai interactive, centrate pe elev, care urmăresc să promoveze abilități de gândire de ordin superior și continuarea studiilor pe termen lung.

1.4 Diferențe între învățarea bazată pe probleme (PBL), învățarea bazată pe investigație (IBL) și învățarea bazată pe prelegere și rezolvare de probleme în predarea matematicii

În cele ce urmează prezentăm o comparație a celor trei abordări menționate anterior, plecând de la caracteristicile, punctele tari și punctele slabe. Menționăm că dintre cele trei metode învățarea bazată pe prelegere și rezolvarea problemelor este cea mai apropiată de metodele tradiționale și tocmai din acest motiv riscul major este de a le confunda. Dacă profesorul nu insistă asupra aspectelor care țin de modul de organizare (prezentarea problemei sau a contextului, implicarea activă a elevilor, discuțiile și abordările colaborative), atunci cel mai probabil din perspectiva elevilor activitățile nu vor diferi de cele frontale organizate în mod tradițional pentru că majoritatea conceptelor și a noțiunilor vor fi prezentate de profesor fără ca elevii să înțeleagă în prealabil necesitatea introducerii acestora, fără a crea o stare de disonanță cognitivă necesară implicării active. Putem spune că distincția dintre metodele tradiționale și cea bazată pe prelegere și rezolvare de probleme este mai mult o chestiune de organizare și echilibru pentru că pașii sunt aproape aceleași, diferă doar ordinea, ponderea și rolul acestora în procesul de învățare. Diferența esențială dintre învățarea bazată pe probleme și învățarea bazată pe prelegere și rezolvarea problemelor este ordinea și rolul problemelor abordate și procesele care conduc la obținerea rezultatelor. În cadrul activităților PBL înțelegerea și rezolvarea problemelor are și scopul de a explora unele proprietăți, fenomene matematice pe care ulterior elevii le vor descrie și în mod formal (folosind diferite surse de informare, sau cu ajutorul profesorului). Fixarea cunoștințelor, dezvoltarea unor competențe legate de aplicarea algoritmilor, a metodelor universale (cum ar fi rezolvarea ecuației de gradul doi, sau a sistemelor liniare, etc.) prin exerciții (deci o parte foarte consistentă în abordarea tradițională) va urma numai după ce noțiunile, proprietățile, teoremele au fost intuite și formulate corect și formal. E important de menționat că nu se poate trece peste acest pas nici în această abordare pentru că dezvoltarea abilităților presupune exersare repetată, feedback, corecție, adaptare, automatizare și aplicații diverse. Acești pași trebuie cuprinse în procesul de învățare, altfel abilitățile nu se vor dezvolta corespunzător și lipsa lor va crea bariere de netrecut în dezvoltarea viitoare a elevilor. Metoda bazată pe investigații este foarte similară cu învățarea bazată pe probleme din punct de vedere al organizării activităților de învățare doar că elementele centrale nu sunt problemele ci investigațiile, raționamentele (care bineînțeles pot duce la rezolvarea unor probleme). Acest aspect este crucial pentru că scoate în evidență diferența de perspectivă dintre științele aplicative și matematica și este strâns legată de cei doi piloni fundamentali care au dus la dezvoltarea matematicii: necesitatea de a rezolva diverse probleme apărute în contexte variate și necesitatea de abstractizare, de dezvoltare interioară a matematicii. Activitățile IBL pot porni pur și simplu de la analiza unui raționament cu intenția de a generaliza, a formaliza proprietăți matematice dar fără a formula în prealabil probleme bine conturate (ca în cazul PBL). Bineînțeles că pot porni și din probleme formulate în mod tradițional doar că rezolvarea problemelor formulate nu este singurul scop în sine al activității, este important și investigarea abordărilor alternative, al posibilelor generalizări, al limitărilor metodelor aplicate etc. Analizând aspecte tehnice putem formula următoarele caracteristici, puncte slabe și puncte tari pentru cele trei abordări.

1. Învățarea bazată pe prelegere și rezolvare de probleme
Caracteristici:

1) **Centrată mai mult pe profesor**: în sensul că profesorul furnizează o mare parte a conținuturilor, adesea începând cu o prelegere sau o explicație a unor concepte cheie, urmată de introducerea problemelor și completarea raționamentelor, fixarea ideilor, detalierea pașilor la sfârșit.
2) **Rezolvarea problemelor după teorie**: de obicei, majoritatea problemelor sunt introduse după o prelegere în care se explică bazele teoretice, teoremele și formulele.
3) **Aplicație ghidată**: elevii aplică teoria învățată în timpul prelegerii prin rezolvarea de probleme care consolidează conceptele.
4) **Învățare structurată**: abordarea este în general structurată, cu o secvență clară de conținuturi și tipuri de probleme care se pot baza unele pe altele.

Puncte tari:

1) **Explicații clare**: profesorii pot explica direct conceptele cheie, oferind claritate și reducând confuzia.
2) **Eficiență**: această metodă permite profesorilor să parcurgă conținuturile într-un timp relativ scurt.
3) **Bazele solide**: abordarea asigură faptul că elevii pot înțelege teoria înainte de a o aplica, ceea ce poate contribui la construirea unei baze solide.
4) **Gestionarea timpului**: profesorii pot gestiona mai ușor timpul pe parcursul activităților, asigurându-se că în intervalul de timp dat conținuturile cheie sunt acoperite.

Puncte slabe:

1) **Învățarea pasivă**: elevii pot fi în mare parte receptori pasivi de informații, ceea ce poate limita implicarea și reținerea.
2) **Gândire critică limitată**: deoarece se pune un accent mai mare pe rezolvarea problemelor folosind noțiunile, teoremele, metodele prezentate decât pe dezvoltarea în sine a conceptelor, este posibil ca elevii să nu aibă ocazia de a se angaja într-o gândire de ordin superior sau de a explora abordări alternative.

3) **Colaborare limitată**: este posibil să se pună mai puțin accent pe învățarea colaborativă sau în grup, deoarece în prima parte elevii nu trebuie să colaboreze și în a doua parte unele probleme pot fi rezolvate și individual.

2. Învățarea bazată pe probleme (PBL)
Caracteristici:

1) **Centrată pe elev**: elevilor li se prezintă o problemă complexă (sau o situație problemă), din lumea reală, la începutul procesului de învățare, iar rolul profesorului este de a facilita, a ghida și spriji elevii.
2) **Învățare activă**: elevii lucrează în grupuri pentru a rezolva problema, folosind cunoștințele lor anterioare, investigarea posibilităților de abordare și explorarea conceptelor matematice.
3) **Interdisciplinaritate**: PBL implică adesea probleme care conectează matematica cu alte discipline sau contexte din lumea reală, solicitând elevilor să integreze perspective multiple.
4) **Accent pe colaborare**: elevii lucrează de obicei în grupuri, promovând munca în echipă și comunicarea.

Puncte tari:

1) **Implicare**: elevii sunt foarte implicați deoarece lucrează la probleme relevante, semnificative, unele din viața cotidiană sau profesională.
2) **Gândire critică și abilități de rezolvare a problemelor**: PBL încurajează elevii să gândească critic, să exploreze diverse soluții și să își justifice raționamentul.
3) **Colaborare**: aspectul de lucru în grup favorizează colaborarea, învățarea reciprocă și dezvoltarea de competențe transversale precum lucrul în echipă și comunicarea.
4) **Învățare profundă**: PBL promovează o înțelegere mai profundă, deoarece elevii construiesc cunoștințe în mod activ, prin explorare și investigare.

Puncte slabe:

1) **Consumă mult timp**: PBL poate fi consumatoare de timp, deoarece elevii au nevoie de mult timp pentru a se implica în problemă, pentru a cerceta și pentru a-și prezenta concluziile.
2) **Posibilitatea neglijării conceptelor de bază**: în unele cazuri, elevii se pot concentra mai mult pe găsirea unei soluții la problemă, fără a înțelege pe deplin conceptele matematice de bază.
3) **Rolul profesorului**: profesorii trebuie să fie foarte pricepuți în facilitarea și îndrumarea procesului, ceea ce poate fi o provocare dacă nu au o formare adecvată.

3. Învățarea bazată pe investigație (IBL)
Caracteristici:

1) **Explorare și descoperire**: IBL pune accentul pe explorare și pe investigație, unde elevii pun întrebări, formulează ipoteze explicative și explorează concepte matematice prin investigație.
2) **Profesorul ca facilitator**: profesorul acționează ca un ghid sau antrenor, ajutând elevii să navigheze în procesul lor de investigare, fără a oferi răspunsuri în mod direct.
3) **Centrată pe elev**: elevii iau inițiativa în învățarea lor, cu mai puține indicații decât în PBL sau în abordarea bazată pe prelegere.
4) **Probleme deschise**: sarcinile de investigare sunt adesea deschise, permițând elevilor să exploreze diferite idei, modele și conexiuni matematice.

Puncte tari:

1) **Înțelegere conceptuală profundă**: descoperind ei înșiși ideile matematice, elevii dezvoltă o înțelegere profundă a conținuturilor.
2) **Încurajează curiozitatea**: IBL stimulează curiozitatea elevilor și promovează gândirea independentă, deoarece aceștia sunt încurajați să pună întrebări și să exploreze propriile răspunsuri.
3) **Flexibilă și adaptabilă**: IBL poate fi adaptat pentru a se potrivi diferitelor stiluri de învățare și niveluri de complexitate, oferind o experiență de învățare personalizată.
4) **Metacogniție**: încurajează elevii să reflecteze asupra propriilor procese de gândire și învățare.

Puncte slabe:

1) **Consumatoare de timp**: Ca și PBL, IBL necesită mult timp pentru explorare și descoperire, ceea ce nu este întotdeauna posibil în cadrul curriculumului existent.
2) **Poate fi frustrantă**: Unii elevi se pot confrunta cu natura deschisă a sarcinilor, ceea ce poate duce la frustrare sau lipsă de orientare în lipsa unui sprijin adecvat.
3) **Necesită o facilitare calificată**: Profesorii trebuie să fie foarte pricepuți în a ghida cercetarea elevilor fără a-i conduce direct la soluție, ceea ce poate fi dificil în practică.

Pentru o comparație mai coerentă, am organizat aceste caracteristici și sub formă tabelară. Din acest tabel putem observa că, în practică, trecerea de la metode tradiționale la metode investigative este un proces gradual în care profesorii au șansa de a face tranziția de la un stil de predare tradițional la un stil mai deschis, folosind mai întâi abordarea bazată pe prelegere și rezolvarea problemelor după care abordarea bazată pe probleme și în final investigații dirijate sau chiar investigații deschise. Bineînțeles, activitatea propriuzisă va arăta complet diferit în funcție de metoda de abordare, chiar dacă încercăm să ajungem la aceleași conținuturi.

Caracteristică	**Învățarea bazată pe prelegere și rezolvarea problemelor**	**Învățarea bazată pe probleme (PBL)**	**Învățarea bazată pe investigație (IBL)**
Rolul profesorului	Oferă explicații, ghidează rezolvarea problemelor.	Facilitator care sprijină explorarea condusă de elev.	Facilitator care sprijină explorarea deschisă și chestionarea.
Implicarea elevilor	Pasivă până la moderată; elevii rezolvă problemele după teorie.	Activă, elevii lucrează la probleme complexe, din lumea reală.	Foarte activă; elevii explorează și formulează singuri probleme, ipoteze, soluții.
Concentrare	Concentrare pe însușirea teoriei și aplicarea acesteia la rezolvarea problemelor.	Concentrare pe rezolvarea problemelor din lumea reală, integrarea cunoștințelor.	Accent pe explorare, descoperire și învățare autodirijată.
Colaborare	Colaborare limitată (lucru individual sau în grupuri mici).	Accent puternic pe colaborarea în grup.	Variază, ar putea fi individuală sau de grup, dar de natură foarte colaborativă.
Dezvoltarea gândirii critice	Moderată - elevii aplică metode cunoscute.	Elevată - elevii analizează și justifică soluțiile.	Foarte ridicată - elevii formulează probleme, ipoteze și explorează diverse soluții.
Cerințe privind timpul și resursele	Relativ eficientă; axată pe furnizarea de conținut.	Consumatoare de timp, necesită cercetare aprofundată și rezolvarea problemelor.	Consumatoare de timp, elevii se angajează într-o explorare profundă fără răspunsuri clare.
Controlul profesorului	Control ridicat asupra conținutului și structurii.	Control moderat, profesorul ghidează procesul.	Control scăzut, profesorul facilitează investigația.
Rezultat	Înțelegerea clară a conceptelor și metodelor.	Rezolvarea problemelor din lumea reală și conexiuni interdisciplinare, atitudini pozitive.	Înțelegerea conceptuală profundă prin descoperire, atitudini pozitive.

1.4.1 Un exemplu scurt

Considerăm următoarea problemă formulată în mod tradițional în clasa a 6-a sau a 7-a:

Un cub $9 \times 9 \times 9$ este alcătuit din 729 cuburi cu latura de 1 cm. Dacă vopsim fețele cubului mare, atunci câte cuburi unitate vor avea cel puțin o față vopsită? Câte din acestea vor avea exact o față și câte vor avea exact două fețe vopsite?

Problema dată elevilor de clasa a 6-a sau a 7-a ne dă ocazia de a introduce noțiunea de muchie și față a unui corp geometric pentru a pregăti folosirea acestor noțiuni în clasa a 8-a.

Pentru a exemplifica cum putem transforma conținuturile tradiționale în funcție de abordarea didactică și obiectivele propuse la nivelul operațiilor de gândire, al raționamentului, vom prezenta câte o posibilitate de abordare în conformitate cu cele trei modele.

Varianta abordării prin rezolvare bazată pe prelegere

La această abordare prezentăm noțiunile de vârf, muchie, față în cazul mai multor corpuri (piramidă, cub, prismă) și vom da elevilor problema în forma tradițională.

Varianta PBL

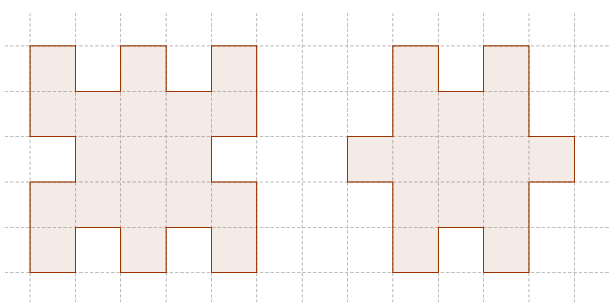
În această variantă problema centrală ar fi următoarea:

Construim un cub mare din 729 de zaruri. Cât poate fi suma numerelor vizibile pe fețele cubului?

La această problemă elevii ar lucra în perechi sau în echipe de 2-3 și am investiga odată proprietățile unui zar (suma punctelor de pe fețele opuse este 7), după care elevii ar trebui să elaboreze un plan. Vom trece la rezolvarea propriuzisă numai după ce echipele au prezentat planul lor (fără calculul efectiv) și după ce fiecare echipă are un plan (care poate fi cel inițial propus de echipă sau unul modificat folosind ideile celorlalți). La sfârșit vom discuta rezultatele și vom încerca să obținem o formă compactă a raționamentului.

Varianta IBL

Considerăm bucățile de Happy Cube din figura alăturată. Din fiecare bucată avem la dispoziție 24 de bucăți. Se poate construi un cub care să aibă pe fiecare față patru dintre aceste bucăți? Din bucățile date ar trebui să construim o cutie de forma unui paralelipiped dreptunghic. Ce dimensiuni poate avea un astfel de paralelipiped?



Detalii legate de ultima abordare pot fi consultate în lucrarea [2].

Exemplul acesta ilustrează o problemă fundamentală, și anume faptul că abordarea didactică influențează contextul în care elevul se va confrunta cu conținutul matematic ales de profesor. Bineînțeles, prima variantă ne va lua mult mai puțin timp, dar pe partea de rezultate ale învățării va fi mult mai săracă. A doua variantă este mai bogată în conținuturi, elevii vor avea de investigat, pe lângă numărul zarurilor cu 0,1,2,3 fețe spre exterior, și configurațiile de puncte care pot apărea și vor avea nevoie și de un argument pentru a realiza că, practic, între numărul minim și cel maxim, putem obține orice număr de puncte. În varianta a treia, nici nu este scoasă în evidență proprietatea formală care poate fi de folos; obiectivul pare să fie altul. Elevii pot realiza numărarea cuburilor mici printr-un proces de modelare. Un avantaj imens al ultimei abordări este acela că, după rezolvarea acestei probleme, elevii nu vor mai pune întrebarea „Unde aplicăm toate astea?". Pentru a înțelege și mai bine mecanismele din spatele abordărilor investigative, vom trece în revistă câteva teorii didactice mai generale care au un impact asupra proiectării și realizării activităților investigative la orele de matematică. Înainte de aceasta însă vom trece în revistă câteva studii legate de aplicațiile metodelor investigative.

1.5 Studii din literatura didactică legate de diferite aspecte ale metodelor investigative

1. În lucrarea [108] autorii prezintă rezultatele unei cercetări care implică 4531 elevi de clasa a VII-a care în 2021 învățau în 166 școli din China. Cele trei ipoteze de cercetare au fost:

1. Competențele de modelare matematică au un impact pozitiv asupra creativității elevilor.

2. Curiozitatea este componenta catalizatoare a efectului competențelor de modelare matematică asupra creativității.

3. Folosirea metodelor investigative determină efectul competențelor de modelare asupra creativității, în sensul că impactul va fi cu atât mai mare cu cât elevii au parte de o instruire cu mai multe activități investigative.

Testele efectuate și analizele statistice ale rezultatelor au confirmat toate cele trei ipoteze.

2. Studiul [39] s-a concentrat pe schimbările în atitudinea elevilor pe parcursul unei intervenții bazate pe aplicarea metodelor investigative la orele de matematică la 304 elevi din Spania. Este important de menționat faptul că elevii care au participat învață după metode tradiționale la școală. Concluziile principale sunt următoarele:

– există o evoluție pozitivă în percepția utilității a matematicii

– există o evoluție pozitivă în percepția eficacității din perspectiva abilităților matematice, a interesului pentru matematică și a performanței matematice percepute.

3. Articolul [52] prezintă o serie de intervenții în predarea conceptelor de cel mai mare divizor comun și cel mai mic multiplu comun la două clase din Taiwan și analizează pe lângă cunoștințele matematice și schimbările în atitudinea elevilor. Rezultatele elevilor clasei experimentale au fost semnificativ mai mari în ceea ce privește motivația, plăcerea cu care au lucrat, încrederea în sine și aprecierea conținuturilor.

4. Articolul [77] prezintă rezultatele unui studiu la care au participat 248 elevi norvegieni cu vârste cuprinse între 11 și 16 ani. Una dintre concluziile formulate este următoarea: deși corelațiile nu sunt puternice, ele totuși indică faptul că elevii care la orele de matematică aplică metode investigative într-o măsură mai mare văd matematica ca o disciplină creativă care va fi utilă pentru ei în viitor. Ei consideră matematica o disciplină interesantă și plăcută, fiind convinși că abilitățile matematice sunt mai degrabă rezultatul efortului, decât ceva înnăscut.

5. Articolul de sinteză [75] prezintă rezultatele a 17 studii privind rezultatele aplicării metodelor PBL, și concluzia finală este că învățarea bazată pe probleme are un efect pozitiv asupra competențelor matematice ale elevilor. Ea oferă o înțelegere conceptuală mai bună, contribuie la dezvoltarea abilităților de rezolvitor și la competențele de comunicare profesională.

2 Teorii didactice și implicațiile lor privind metodele investigative

2.1 Teoria antropologică a didacticii – ATD

Teoria antropologică a didacticii (ATD), dezvoltată de didacticianul francez Yves Chevallard și colaboratorii săi în anii 1980, este un cadru cuprinzător care își propune să înțeleagă și să îmbunătățească procesul de predare și învățare prin prisma antropologiei. Acesta propune o teorie care privește educația ca pe un fenomen cultural și social, nu doar ca pe o simplă transmitere a cunoștințelor. Un concept central al acestei teorii este „transpunerea didactică” care se referă la procesul prin care cunoștințele sunt transformate din forma lor „academică” (modul în care există în cercetare, teorie sau domenii avansate) în forma în care pot fi predate în școli și sunt accesibile elevilor. Acest proces presupune adaptarea conținutului astfel încât să poată fi comunicat eficient la diferite niveluri educaționale, păstrându-și totuși integritatea și esența. Chevallard și cercetătorii care au studiat această problematică au arătat că deficiențele interne în transpunerea didactică se datorează unor constrângeri mai generale. Pentru a explica aceste constrângeri au propus studierea acestora pe 9 niveluri diferite:

- Nivelul civilizației – determină o serie de contexte cu care elevii sunt familiarizați. De exemplu, la predarea probabilităților putem explica o serie de modele folosind zarurile. În cultura arabă acest lucru nu este posibil întrucât zarurile sunt asociate cu jocurile de noroc care sunt interzise prin religie.

- Nivelul societății se referă la organizarea existentă în țară, dar cuprinde și tradiția învățământului, paradigmele care au condus la forma actuală de organizare, viziunea societății asupra rolului și rezultatului procesului educațional. În unele țări, școlile și implicit profesorii au o autonomie profesională puternică, asta însemnând chiar o pedagogie proprie, un curriculum propriu etc.

- Nivelul școlii, care vizează efectiv instituția de învățământ în care se realizează procesul educațional. Este clar că în liceele teoretice există o altă viziune asupra desfășurării și rezultatelor procesului educațional decât într-un liceu tehnologic sau militar sau pedagogic. Dar pot exista diferențe enorme chiar și între două instituții de același tip datorită unor specificități locale sau unor tradiții.

- Nivelul pedagogiei înglobează principiile pedagogice pe baza cărora se realizează procesul educațional.

- Nivelul disciplinei, de exemplu matematica, cuprinde, pe de o parte criteriile profesionale proprii ale domeniului de știință de care aparține disciplina, dar și conținuturile științifice, curriculumul școlar.

- Nivelul domeniului se referă la o ramură mai mare al disciplinei, de exemplu analiza matematică sau algebra.

- Nivelul capitolului este o parte bine conturată al domeniului, de exemplu integrarea funcțiilor sau calculul algebric.

- Nivelul temei este o temă în cadrul capitolului, de exemplu schimbarea de variabilă în integrală sau formulele prescurtate de calcul.

- Nivelul unității de învățare, de exemplu integrarea funcțiilor raționale sau pătratul binomului.

În unele cazuri, nivelurile acestea au fost formulate mai compact: nivelul socio-cultural (factorii culturali, istorici și de factură socială care influențează educația), nivelul instituției (regulile, normele și structurile instituției de învățământ), nivelul practicilor de predare (metodele, tehnicile și activitățile utilizate de profesori în sala de clasă pentru a facilita învățarea), nivelul contractului didactic (acordurile nescrise între profesori și elevi cu privire la roluri, responsabilități și așteptări), nivelul sistemului didactic (relațiile dintre cunoștințe, profesor, elevi și resursele din clasă), nivelul de cunoștințe (conținuturile și modul în care acestea sunt transformate pentru predare).

Nivelurile superioare determină transpunerea didactică la nivelurile inferioare, astfel, când preluăm un material didactic, nu putem face abstracție de toate nivelurile superioare pentru că o diferență la un nivel superior care pare irelevantă din perspectiva predării matematicii poate schimba complet succesul/rezultatele procesului de învățare. Acest aspect nu este foarte vizibil la orele tradiționale unde abordăm probleme formale, dar diferențele totuși există. Unui profesor de matematică dintr-o țară unde folosirea calculatoarelor științifice are o tradiție lungă (Anglia sau Austria) pot părea irelevante capitole întregi din programa noastră de clasa a XI-a, pentru că studiul funcțiilor înseamnă ceva diferit în sistemul lor (mai puțin formal, mai mult conceptual și bazat pe tehnologie). Activitățile investigative sunt mult mai sensibile la toate aceste aspecte. Un exemplu poate fi un material didactic elaborat în Spania pentru proiectul Mascil ([33]) și aplicat cu succes în mai multe țări, care a condus la activități investigative complet diferite în Bulgaria. Problema inițială de a proiecta o parcare subterană cu un număr dat de locuri de parcare, luând în considerare rampa de intrare/ieșire și amplasarea unor stâlpi de susținere existente, a fost transformată de elevi în investigarea pantei maximale pe care pot coborî/ieși mașinile și s-a ajuns la o problemă mult mai complexă, care practic nu avea nimic în comun cu problema inițială. Practic, transmiterea materialelor didactice netradiționale, care are loc la nivelul unității de învățare sau cel mult al capitolului, este determinată puternic de nivelurile superioare, este influențată de cunoștințele anterioare ale celor care le vor folosi, de perspectiva lor pedagogică, de ceea ce cred ei despre predarea matematicii etc. Din acest motiv, pentru o înțelegere suficient de profundă a motivațiilor care conduc la alegerea unor abordări privind organizarea activităților investigative la orele de matematică, este nevoie de o perspectivă didactică mai amplă privind predarea și învățarea matematicii.

2.2 Teoria situațiilor didactice în matematică

Teoria situațiilor didactice (TDS) este un cadru pentru înțelegerea modului în care matematica este predată și învățată. Ea a fost concepută de matematicianul și educatorul francez Gérard Vergnaud în anii 1980 și ulterior dezvoltată de Guy Brousseau ([16]). Această teorie se concentrează pe interacțiunea dintre profesori, elevi și sarcinile matematice, cu scopul de a explica modul în care învățarea și înțelegerea au loc într-un context pedagogic specific. Lucrarea lui Brousseau se bazează pe ideile inițiale ale lui Vergnaud și explorează modul în care sarcinile matematice pot fi concepute pentru a stimula învățarea în cadrul unei clase.

Versiunea lui Brousseau a TDS se concentrează pe rolul „contractelor didactice", al „situațiilor pragmatice" și al „obstacolelor epistemologice" în procesul de predare și învățare. Contribuția lui Brousseau evidențiază dimensiunile sociale și cognitive ale învățării și subliniază faptul că învățarea matematicii nu constă doar în dobândirea de cunoștințe, ci și în implicarea în activități semnificative de rezolvare a problemelor care construiesc înțelegerea. În paragrafele care urmează vom detalia acești termeni pentru a fixa câteva aspecte importante.

2.2.1 Contractul didactic

„Contractul didactic" este un acord social nescris și neformulat explicit între profesor și elev sau, mai general, între toți cei implicați în procesul educațional. Contractul modelează interacțiunea în clasă și influențează modul în care sarcinile sunt prezentate, înțelese și abordate de către elev. Acesta specifică regulile și așteptările pentru ambele părți. De exemplu, profesorul se poate aștepta ca elevii să abordeze problemele în mod analitic, în timp ce elevii se pot aștepta ca profesorul să ofere explicații dacă ei întâmpină dificultăți. Contractul didactic poate evolua în timp și poate fi renegociat în funcție de nevoile elevilor sau schimbarea de paradigmă la nivel educațional. Această renegociere însă de regulă se realizează în mod informal prin interacțiuni multiple între participanții actului educațional. Este foarte important faptul că nu este posibilă o modificare unilaterală a contractului. De exemplu, dacă un profesor vrea să schimbe metoda de lucru la o clasă și să treacă de la o predare tradițională frontală la una investigativă, atunci nu o poate face doar la nivelul de formulare a sarcinilor, pentru că acesta ar însemna o schimbare unilaterală. Tehnica propusă de Brousseau pentru aceste tipuri de schimbări se bazează pe schimbarea contextului, pe introducerea unor elemente adiționale în mediul de desfășurare (termenul inițial folosit de Brousseau fiind „milieu"). Fără a schimba mediul/anturajul/contextul nu ne putem aștepta la schimbări în modul de abordare, în modul de implicare al elevilor etc. și astfel activitățile investigative pot să eșueze sau să nu aibă efectul scontat la nivelul înțelegerii. Pe de altă parte, este important să conștientizăm rolul acestor schimbări. De exemplu, la activitățile investigative, care se bazează pe utilizarea unor seturi special concepute sau al unor jocuri, elevii (și chiar părinții) ar putea avea senzația că nu se face matematică sau că nu se face o treabă serioasă. Datorită acestui aspect, este foarte important să contrabalansăm, să prevenim aceste reacții posibile prin evidențierea unor rezultate importante, prin conștientizarea modului de lucru etc.

2.2.2 Situațiile pragmatice

Situațiile pragmatice sunt contexte în care elevii se confruntă cu probleme care le impun să aplice și să organizeze cunoștințele matematice în moduri care sunt semnificative pentru ei. Aceste situații implică contexte din viața reală, cum ar fi sarcini de rezolvare a problemelor și încurajează elevii să se ocupe de probleme care sunt atât provocatoare din punct de vedere intelectual, cât și fundamentate practic.

2.2.3 Obstacolele epistemologice

Obstacole epistemologice sunt dificultățile cognitive pe care le întâmpină elevii când învață matematica și care apar din cauza naturii conceptelor matematice, a modului în care sunt structurate în curriculum sau a modurilor specifice în care elevii înțeleg greșit sau nu reușesc să relaționeze conceptele. Teoria își propune să înțeleagă aceste obstacole și să propună modalități de proiectare a sarcinilor care să-i ajute pe elevi să le depășească.

Brousseau consideră că o parte a rolului profesorului este să identifice aceste obstacole și să ofere sarcini adecvate care vor duce la eliminarea lor. Interacțiunea dintre elev și sarcina matematică într-o situație didactică bine concepută este crucială pentru procesul de învățare.

2.2.4 Situații didactice și adidactice

Concepția constructivistă de predare cere profesorului să provoace adaptarea așteptată în rândul elevilor săi printr-o alegere judicioasă a „problemelor" pe care le pune în fața lor. Aceste probleme trebuie să-i facă pe elevi să acționeze, să vorbească, să gândească și să evolueze prin propria lor motivație. Între momentul în care elevul acceptă problema ca și cum ar fi a sa proprie și momentul în care produce răspunsul la problemă, profesorul se abține să intervină și să sugereze cunoștințele pe care dorește ca elevii să le descopere. Pe de altă parte, elevul știe foarte bine că problema a fost aleasă pentru a-l ajuta să dobândească o nouă cunoaștere, dar trebuie să știe, de asemenea, că această cunoaștere este în întregime justificată de logica internă a situației și că el o poate construi. Nu numai că o poate face, dar și trebuie să o facă, pentru că va dobândi cu adevărat aceste cunoștințe doar atunci când va fi capabil să le folosească în situații pe care le va întâlni în afara oricărui context de predare. O astfel de situație se numește o situație adidactică.

Fiecare element de cunoaștere poate fi abordat prin câteva situații adidactice care nu alterează trăsăturile esențiale, vom numi o astfel de situație „o situație fundamentală". Elevul însă, de foarte multe ori, nu poate gestiona situațiile fundamentale (de exemplu construirea funcției logaritmice sau a funcției exponențiale) și, din acest motiv profesorul alege/creează una pe care elevul o poate gestiona. Aceste situații adidactice, care sunt situații aranjate cu scop didactic, vor altera unele trăsături ale elementelor de cunoaștere. În acest context, profesorul fie comunică, fie se abține să comunice informații, întrebări, metode de predare, euristici etc, implicându-se astfel într-un joc cu sistemul de interacțiune al elevului cu problemele pe care i le dă. Acest joc sau situație mai largă este situația didactică.

2.2.5 Implicații asupra activităților investigative

Din perspectiva acestei teorii, organizarea activităților investigative presupune alegerea sau crearea unor contexte (situații adidactice) în cadrul cărora putem – noi sau elevii – formula probleme relevante care se pot rezolva la nivelul elevilor. Aceste contexte trebuie să aibă și elemente pragmatice, să elimine pe cât posibil obstacolele epistemologice și să nu modifice unilateral contractul didactic, dar să faciliteze evoluția acestui contract în vederea trecerii la investigații mai complexe, la conținuturi mai profunde, mai avansate.

2.3 Teoria nivelurilor Van Hiele

Teoria nivelurilor Van Hiele ([44]) a fost elaborată de către Dina van Hiele-Geldof și Pierre Marie van Hiele în anii ’50 în Olanda (sub conducerea lui Hans Freudenthal) și a avut ca scop conceptualizarea procesului de dobândire a cunoștințelor de geometrie. Teoria a fost aplicată la nivel curricular pentru a reforma predarea geometriei în Olanda și în Uniunea Sovietică, dar a avut o influență puternică și în Statele Unite ale Americii ([107]). Deși a primit și o serie de critici, teoria a fost extinsă de mai mulți autori la diferite alte ramuri ale matematicii și este folosită atât la nivel de cercetare, cât și la nivelul elaborării politicilor educaționale – la Universitatea din Chicago există și în prezent un grup de cercetare care a actualizat recent testele de diagnoză corespunzătoare ([22]). În paragrafele care urmează, voi descrie nivelurile dintr-o perspectivă mai generală, nu numai din perspectiva geometriei. Aceste niveluri au următoarele proprietăți importante:

- Nivelurile pot fi parcurse numai în ordinea descrisă (de la 1 la 5, de la nivelul intuitiv la cel al rigurozității), fără posibilitatea de a omite vreun nivel.

- Fiecare nivel are un limbaj propriu, limbajele corespunzătoare la niveluri diferite pot folosi aceleași cuvinte, dar înțelesul atribuit acelui cuvânt va fi diferit.

- Trecerea de la un nivel la următorul presupune cinci faze (acestea pot fi parcurse în orice ordine): investigație, orientare dirijată, orientare liberă, explicație, integrare.

În trecerea de la un nivel la nivelul următor intervine procesul de învățare, dar acest proces este de regulă unul foarte lent. De exemplu, în 1957, Dina van Hiele-Geldof a raportat 20 de ore pentru a trece de la nivelul 1 la nivelul 2 și 50 de ore pentru a ajunge la nivelul 3 în studiul geometriei cu o clasă de copii cu vârsta de 12 ani.

Aceste proprietăți și descrierea nivelurilor implică o explicație foarte simplă pentru starea de fapt în care copiii nu înțeleg explicațiile profesorului pentru că limbajul este diferit chiar dacă folosesc aceleași cuvinte.

2.3.1 Nivelul intuitiv

La nivelul intuitiv, numit și nivelul vizual sau nivelul recunoașterii globale, noțiunile, proprietățile matematice sunt recunoscute intuitiv pe baza unei descrieri la nivelul limbajului cotidian sau vizual, pe baza experiențelor și a exemplelor anterioare. Exemple: un pătrat nu este recunoscut ca un dreptunghi; la rezolvarea unor probleme de numărare pur și simplu elevul a enumerat cazurile pe care le-a observat; la calculul probabilităților se folosește formula cu numărul cazurilor favorabile și numărul cazurilor posibile, dar nu se verifică dacă aceste cazuri sunt egal probabile, etc. Din aceste exemple putem vedea că un elev poate fi la nivelul intuitiv relativ la o ramură, un capitol sau o tematică a matematicii, fără a fi la nivel intuitiv la toate celelalte (poate fi la nivel intuitiv la probabilități, fiind totodată foarte bun la geometrie).

2.3.2 Nivelul analizei

La nivelul analizei sau al descrierii, obiectele sunt recunoscute datorită proprietăților lor, folosind descrieri sau definiții corecte, dar proprietățile nu sunt organizate ierarhic. De obicei, nu sunt evidențiate relațiile dintre diferite obiecte și categoriile de care aparțin. La acest nivel, figurile geometrice sunt recunoscute datorită definiției, de exemplu, pătratul fiind un romb cu un unghi drept, este deja recunoscut ca și dreptunghi. La problemele de numărare elevii încearcă să identifice caracteristici combinatoriale în probleme, folosesc termenii de ordonare, repetiție, numărare dublă, etc. În probleme de probabilități se încearcă identificarea unui model și aplicarea unei formule.

2.3.3 Nivelul deducțiilor informale

La acest nivel – numit și nivelul abstracției – proprietățile sunt organizate într-o ierarhie, sunt recunoscute relațiile dintre diferite obiecte, proprietăți și categorii. Argumentarea la acest nivel depinde adesea de percepție, de figuri, reprezentări, diagrame concrete. Există un anumit tip de argumentare, de raționament bazat pe pași, dar, în general, nu sunt construite demonstrații complete, corecte și verificate. De exemplu, în geometrie apar secvențe corecte de calcul sau de raționament, însă aceste secvențe pot fi necorelate. La geometria în spațiu, elevii calculează distanțe folosind teorema lui Pitagora, dar nu demonstrează perpendicularitatea, deci faptul că teorema se poate aplica. La probleme de numărare, elevii enumeră într-un mod sistematic toate posibilitățile sau folosesc diagrame sau alte reprezentări. La probabilități, elevii pot opera cu evenimente, le pot descompune în evenimente mai simple, există concordanța între operațiile algebrice cu probabilități și operațiile cu evenimente, dar toate acestea depind de contextul în care sunt introduse.

2.3.4 Nivelul deducțiilor formale

La acest nivel se folosesc și se construiesc demonstrații formale (complete, corecte, verificate și analizate), raționamentele devin independente de figuri, reprezentări, diagrame. De exemplu, la geometrie se verifică dacă raționamentul acoperă toate cazurile (de exemplu triunghiuri ascuțitunghice, dreptunghice, obtuzunghice la demonstrarea concurenței înălțimilor, etc.), la problemele de numărare se verifică dacă s-a realizat într-adevăr o bijecție între obiectele/cazurile numărate efectiv și cele care erau de numărat inițial, se verifică dacă au fost numărate toate și nu s-a numărat niciun caz de două ori. La probabilități, proprietățile devin independente de reprezentările primare, sunt demonstrate folosind concepte din teoria mulțimilor, apare perspectiva de a trata toate cazurile deodată, apare noțiunea de distribuție ca posibilitate de a descrie un model de comportament aleator.

2.3.5 Nivelul logicii formale

Acesta este nivelul la care lucrează matematicienii, la care teoriile, obiectele sunt construite prin metode axiomatice, deducțiile, demonstrațiile sunt formale și se conștientizează faptul că putem schimba unele axiome, unele reguli. Acest nivel este atins de regulă doar la nivel universitar.

2.3.6 Implicații pentru activitățile investigative

Conform proprietăților nivelurilor, pentru a trece de la un nivel la următorul este nevoie de investigație. Bineînțeles investigația în sine nu va rezolva problema, de aceea este nevoie de conceperea unor activități complexe prin care elevii pot experimenta faza de investigație, dar într-un context bine definit (care asigură orientarea dirijată, însă este destul de flexibil pentru a da loc și orientării libere) în care elevul poate ajunge la explicații și, într-un final, la integrarea cunoștințelor acumulate. La planificarea și la derularea activităților bazate pe investigație este important de conștientizat că, în raport cu noile conținuturi, o parte dintre elevi vor fi probabil la nivel intuitiv și noi dorim ca pe parcursul unei unități de învățare, să ajungă cel puțin la nivelul deducțiilor informale, eventual – în clasele mai bune și în liceu chiar și la nivelul deducțiilor formale. Din acest motiv unitatea de învățare trebuie planificată în așa fel încât acest proces să fie fezabil. Singura modalitate prin care profesorul (cel puțin la început) devine capabil de a înțelege această trecere de la un nivel la următorul este încercarea aceleiași activități în rolul unui elev, parcurgând pas cu pas fiecare sarcină pe care o va avea elevul. Acest lucru se poate realiza cel mai simplu în echipă, pentru care unul dintre colegi (profesor sau formator) pregătește o astfel de activitate. În lipsa unor astfel de experiențe va fi foarte dificil găsirea unui limbaj comun de comunicare, pentru că profesorul va vedea activitatea prin prisma unor scheme cognitive de care elevul nu dispune și îi va fi foarte greu să înțeleagă dificultățile cu care se confruntă elevii.

2.4 Cadrul TRU - Teaching for Robust Understanding

Cadrul TRU - Teaching for Robust Understanding ([93], [94], [95]) a fost elaborat de o echipă de didacticieni condusă de Alan H. Schoenfeld de la Universitatea Berkeley din California în perioada 2010–2013, urmând să fie perfecționat și aplicat până în prezent. TRU ne oferă un cadru conceptual bazat pe cercetare privind următoarea întrebare fundamentală:

„Care sunt proprietățile esențiale ale mediilor de învățare echitabile și robuste - medii în care toți elevii sunt sprijiniți să devină gânditori informați, flexibili și ingenioși din perspectiva unei discipline?"

La elaborarea acestui cadru au contribuit peste 30 de cercetători și mii de practicieni (profesori, instructori, antrenori, etc.) care au descris proprietățile relevante ale unor contexte educaționale, medii de învățare, urmând ca ulterior cercetătorii să grupeze toate proprietățile enumerate în cinci clase denumite dimensiuni. Aceste dimensiuni sunt importante pentru planificarea și derularea activităților, pentru alegerea contextelor în care organizăm activități investigative sau a modului în care organizăm modul de lucru în rezolvarea unor probleme. Dimensiunile identificate sunt:

1) Conținutul

2) Solicitarea cognitivă

3) Accesul echitabil la conținuturi

4) Autonomia, simțul proprietății și identitatea profesională

5) Evaluarea formativă

Cadrul TRU a devenit un instrument major nu numai în matematică, dar și în alte domenii științifice, atât în cercetare, cât și în practică, de la proiectarea la evaluarea activităților, în studiile de lecții, în formarea profesională a cadrelor didactice, etc. În următoarele subparagrafe prezentăm foarte pe scurt cele cinci dimensiuni.

2.4.1 Conținutul

Prin conținut înțelegem noțiunile, conceptele, proprietățile, teoremele abordate, dar și totalitatea practicilor specifice disciplinei. Aceste practici de foarte multe ori nu sunt formulate exact, dar sunt însușite la nivel procedural, de exemplu, faptul că raționamentele trebuie să fie corecte și complete, că demonstrațiile la geometrie trebuie să cuprindă toate figurile posibile, că rezolvarea ecuațiilor înseamnă determinarea tuturor soluțiilor, că discuția unei ecuații înseamnă discutarea tuturor cazurilor, etc. Înțelegerea de către elevi a unei discipline este modelată în mod fundamental de experiența lor în clasă. A învăța să gândești ca un om de știință sau ca un practician al oricărei discipline înseamnă a te familiariza cu conceptele și practicile disciplinei respective, folosind un spectru larg de cunoștințe și instrumente la dispoziție. Oamenii de știință și matematicienii investighează „ceea ce face lucrurile să funcționeze”, folosind rațiunea, ecuațiile, reprezentările și modelele în serviciul înțelegerii fenomenelor. Această combinație de abordări specifice disciplinei, cunoștințe (inclusiv concepte și instrumente), practici și obiceiuri mentale este ceea ce numim pe scurt „conținutul” disciplinei. Elevii trebuie să experimenteze acest conținut în toată bogăția sa pentru a putea deveni practicieni ai unei discipline. Un conținut bogat este însă doar un început. Ideea principală din spatele cadrului TRU este că, în instruire, rolul decisiv îi revine modului în care elevii se întâlnesc cu conținutul, al poziției în care aceștia sunt plasați pentru a profita de bogățiile pe care disciplina le are de oferit. Din acest motiv, dimensiunile care reflectă modul în care elevii înșiși experimentează disciplina sunt la fel de importante ca și dimensiunea conținutului.

2.4.2 Solicitarea cognitivă

Termenul „solicitare cognitivă” descrie nivelul de dificultate al activității pe care elevii trebuie să o desfășoare, în raport cu ceea ce știu. Scopul este de a găsi o zonă de mijloc, în care elevii să aibă posibilitatea de a se baza pe ceea ce știu și de a-și extinde cunoștințele actuale. Pentru a identifica zona de mijloc privind procesele cognitive ne referim la taxonomia lui Bloom revizuită ([1] sau online https://academicaffairs.unl.edu/documents/4-Revised-Blooms-Taxonomy.pdf):

1) **A reaminti** - se referă la abilitatea de a recunoaşte şi de a rechema informaţii relevante (terminologie, date factuale, definiţii, principii, teorii) din memoria pe termen lung.
2) **A înțelege** - se referă la abilitatea de a construi sensul pe baza mesajelor educaţionale, la înţelegerea materialului și capacitatea de a-l exprima în propriile cuvinte (folosind conceptele, noțiunile specifice disciplinei).
3) **A aplica** - vizează abilitatea de a folosi materialul învăţat în situaţii noi şi concrete, de a utiliza idei, concepte, proceduri pentru a rezolva probleme.
4) **A analiza** - semnifică descompunerea cunoştinţelor în părţi şi considerarea relaţiei dintre părţi şi structura generală, căutarea elementelor esențiale, a relaţiilor, a principiilor de organizare.
5) **A evalua** - se referă la capacitatea de a prezenta și de a apăra opinii prin formularea de argumente cu privire la informații, validitatea ideilor sau calitatea muncii pe baza unui set de criterii.
6) **A crea** - înseamnă a concepe, a elabora ceva ce nu exista înainte, a combina lucruri existente pentru a face ceva nou.

Aceste niveluri din taxonomia lui Bloom sunt considerate a fi structurate ierarhic deoarece gradul de complexitate crește de la un nivel la celălalt, fiecare nivel fiind considerat o condiție prealabilă pentru nivelul următor. Abilitățile de gândire de ordin inferior (asociate primelor niveluri) oferă fundamentul pentru capacitățile superioare de gândire (nivelurile superioare). Bineînțeles, nivelurile definite de Bloom, mai ales cele superioare, nu sunt ușor de atins la o oră de matematică și în predarea tradițională acest lucru nici nu a fost formulat ca obiectiv (nici măcar la nivel de curriculum sau competențe). Trebuie precizat, însă, că la definiția acestor niveluri, tot ce face elevul trebuie privit din perspectivă educațională, deci crearea unor probleme, idei, proprietăți nu înseamnă crearea unor noutăți din punctul de vedere al matematicii, ci o noutate în contextul educațional în care se află elevul. Este exact aceeași situație ca la definirea problemelor, o sarcină poate fi o problemă pentru unii și ceva de rutină pentru alții. Aici crearea a ceva ce nu exista înainte, nu înseamnă crearea unor concepte noi, care încă nu au fost formulate/studiate de matematicieni, ci înseamnă ceva nou pentru elev, nou în contextul activității elevului și nou prin prisma cunoștințelor anterioare. La o activitate bazată pe metode investigative, obiectivul este ca elevul să ajungă la acest nivel și numai după aceea să regândim tot procesul și din perspectiva limbajului matematic, a conținuturilor curriculare. Deoarece obiectivul acestor activități este foarte frecvent înțelegerea în profunzime a fenomenelor/proprietăților, este util să folosim și taxonomia lui Krathwohl pentru descrierea celor patru tipuri de cunoștințe cu care operăm:

1) **Cunoştinţele factuale** includ fragmente/bucăți izolate de informații, cum ar fi definiții, simboluri, proprietăți formulate pe baza observațiilor, etc.
2) **Cunoştinţele conceptuale** constau în sisteme de informaţii, cum ar fi modele, principii, clasificări, categorii, teorii.
3) **Cunoştinţele procedurale** includ procedee, algoritmi, metode de lucru, abilităţi precum şi cunoştinţe despre situaţiile în care se folosesc aceste metode şi procedee.
4) **Cunoștințele metacognitive** se referă la cunoştinţele despre procesele de gândire, despre sine și modalitățile în care aceste procese pot fi folosite în mod eficient în diferite contexte.

În procesul educațional, obiectivul este ca, pe baza unor cunoștințe factuale, să creăm cunoștințe conceptuale și procedurale și să reactualizăm rețeaua noastră de cunoștințe, folosind și cunoștințele cognitive. În predarea matematicii este o capcană uriașă (și foarte des întâlnită) trecerea de la cunoștințele factuale la cele procedurale fără a acumula și cunoștințe conceptuale. Astfel, se poate ajunge la situația în care elevii vor cunoaște notațiile pentru produs și vor putea calcula produsul a două numere, dar nu vor fi capabili să rezolve probleme textuale în care intervine înțelegerea conceptuală. Matricea obținută din cele două taxonomii (cel al lui Bloom și cel al lui Krathwohl) ar furniza un sistem format din 24 de elemente și ar fi mult prea complicată pentru practica didactică. Din perspectiva cadrului TRU, este important ca elevii, în vederea înțelegerii și a aprofundării unui conținut bogat, să se angajeze într-o stare de „stăruință productivă”, care implică procese cognitive de nivel ridicat conform taxonomiei Bloom revizuite, dar este necesară și exteriorizarea acestor procese, exprimarea gândurilor, schimbul de idei. Astfel, pentru planificarea/evaluarea activităților ne putem referi la cadrul DOK (Depth of Knowledge, profunzimea cunoașterii) al lui Webb, care scoate în evidență faptul că avansarea printre nivelurile celor două taxonomii ar trebui să se realizeze simultan. Acest cadru identifică patru niveluri:

1) **Reamintire, reproducere.** Elevii își reamintesc și reproduc date, definiții, detalii, fapte, informații și proceduri.
2) **Abilități, concepte.** Elevii utilizează concepte științifice și abilități cognitive pentru a răspunde la întrebări, a aborda probleme, a îndeplini sarcini și a analiza texte și subiecte.
3) **Gândire strategică, raționament.** Elevii se gândesc strategic și rezonabil, argumentând cum și de ce conceptele, ideile, operațiunile și procedurile pot fi utilizate pentru a obține și a explica răspunsuri, concluzii, decizii, motive și rezultate.

4) **Gândirea augmentată.** Elevii se gândesc la ce se mai pot aplica cunoștințele acumulate, atât în diferite contexte academice, cât și în contexte cotidiene.

În diferite momente ale activităților, elevii trebuie să se angajeze la toate aceste niveluri.

2.4.3 Accesul echitabil la conținuturi

Clasele echitabile oferă tuturor elevilor acces la concepte și practici semnificative specifice disciplinei, sprijinindu-i în dezvoltarea propriilor concepte și în construirea unor identități productive specifice disciplinei și cadrului educațional. Pentru o învățare eficientă, profesorii trebuie să încurajeze participarea tuturor elevilor clasei la comunitatea intelectuală a acesteia. Există numeroase modalități prin care elevii pot fi sprijiniți în accesul la conținutul și practicile disciplinei studiate.

- În alegerea și conceperea activităților, precum și în pregătirea scenariului activităților, profesorii pot oferi mai multe puncte de acces la materialul relevant, susținând așteptarea ca toți elevii să fie capabili să participe și asigurând șansa de a participa într-un mod sau altul la activități.

- Sarcinile care pot fi abordate în mai multe moduri sau din mai multe perspective, și în care abordările pot fi comparate și contrastate, le oferă elevilor diferite căi de acces la activitate. În plus, acestea le oferă oportunități de a face conexiuni între abordări.

- Profesorii pot încuraja generarea și rafinarea ideilor, mai degrabă decât să critice sau să ignore comentariile care sunt doar parțial corecte.

- Profesorii pot sprijini utilizarea mai multor stiluri de comunicare, de exemplu: solicitând unui elev să reformuleze contribuția altuia într-un limbaj academic mai precis sau, poate, într-un limbaj mai informal, cotidian.

- În timpul discuțiilor, profesorii pot utiliza o varietate de strategii pentru a încuraja participarea largă, de exemplu: alegând să apeleze doar la elevii care nu au vorbit încă; acordând timp pentru a vorbi cu un coleg înainte de a răspunde public; selectând aleatoriu elevii care să contribuie.

- Profesorii pot propune sarcini utilizând un limbaj și contexte care să se conecteze la experiențele trăite de elevi și să ofere ferestre către experiențe necunoscute.

2.4.4 Autonomia, simțul proprietății și identitatea profesională

Cei care învață au autonomie intelectuală atunci când împărtășesc ceea ce cred cu adevărat despre problema în discuție, în loc să simtă nevoia de a veni cu un răspuns, în care cred sau nu, dar care corespunde cu ceea ce o altă autoritate, cum ar fi un profesor sau un manual, ar spune că este corect. Autonomia intelectuală definește dorința unei persoane de a se angaja în disciplina studiată și poate proveni din percepția că poate progresa în rezolvarea unor probleme dificile, lucrând la ele și având încredere în concluziile pe care le trage.

Simțul proprietății se referă la sentimentul de a deține controlul asupra ideilor specifice disciplinei, mai degrabă decât de a repeta sau memora ideile altora. Este diferența dintre a spune „am gândit bine și sunt convins că are sens” și a te baza pe o autoritate externă.

Un aspect cheie este măsura în care un mediu de învățare le oferă elevilor oportunități de a-și dezvolta aceste aspecte ale identității lor profesionale și personale. Profesorii eficienți recunosc și valorifică punctele tari ale fiecărui elev, găsind modalități de a-i ajuta pe elevii individuali să intre în comunitatea de învățare atunci când nu le este ușor să intre singuri. Există mai multe modalități de a face acest lucru. Profesorii pot crea oportunități de recunoaștere publică a contribuțiilor elevilor la discuțiile profesionale, pot ajuta elevii să lucreze împreună în grupuri mici și se pot ocupa de elevii care întâmpină dificultăți, prin valorificarea punctelor tari ale gândirii lor. O tehnică comună este solicitarea elevilor de a reitera raționamentul altora, de a se baza pe ceea ce au spus alți elevi și solicitarea de explicații.

Cu toate acestea, mai presus de acțiunile profesorilor, este însăși natura mediului din clasă. Se simt elevii în siguranță când contribuie la conversațiile din clasă? Au fost stabilite norme pentru a aduce contribuții? Pentru valorificarea contribuțiilor altora? Pentru validarea și exprimarea opiniilor critice față de contribuțiile altora?

2.4.5 Evaluarea formativă

Evaluarea formativă implică orchestrarea unor activități în clasă care dezvăluie stadiul actual al înțelegerii elevilor în timpul procesului de învățare. În cadrul evaluării formative, informațiile colectate cu privire la raționamentul și înțelegerea elevilor joacă un rol major în modelarea activităților de clasă care urmează. Atunci când grupurile sau întreaga clasă lucrează la sarcini relevante, elevii pot servi drept resurse puternice unii pentru alții în modelarea și dezvoltarea gândirii. Proiectul derulat de Shell Center for Mathematical Education de la University of Nottingham și Universitatea Berkeley din California, denumit Mathematics Assessment Project, oferă o serie întreagă de instrumente, atât pentru evaluarea formativă, cât și pentru cea sumativă (a se vedea https://www.map.mathshell.org/index.php).

2.4.6 Implicații pentru activitățile investigative

La conceperea și planificarea unei activități matematice bazate pe investigație trebuie să luăm în considerare toate cele cinci dimensiuni TRU. Conținutul trebuie să fie unul relevant și atractiv, dar trebuie căutat un context în care acest conținut devine accesibil tuturor celor care urmează să participe și fiecare elev trebuie să găsească părți ale activității care să reprezinte o solicitare cognitivă optimă pentru el. Acest lucru se poate realiza numai dacă conținutul este destul de profund și complex pentru a permite focusarea pe diferite aspecte, unele mai simple, altele mai complicate. Pe parcursul activităților, profesorii trebuie să sprijine în mod vizibil autonomia intelectuală a elevilor (bineînțeles în contextul construit), câteodată trebuie să renunțe la prezentarea unor informații/idei/proprietăți și trebuie să insiste până când elevii observă singuri ce ar fi avut ei de spus. Uneori poate părea pierdere de timp, dar trebuie să fim conștienți că acest timp merită investit dacă elevii se află într-o stare de stăruință productivă și există speranța ca ei să poată formula proprietăți relevante. Este un mod de lucru foarte dificil care trebuie ajustat continuu în urma a ceea ce se întâmplă la activități. Pentru cei obișnuiți cu evaluările sumative (lucrări, răspunsuri orale), evaluarea formativă în sine poate reprezenta o problemă, dar încorporarea evaluării formative în activitatea de investigare poate părea ceva irealizabil. Există tehnici prin care ne putem obișnui totuși cu acest rol profesional. Una dintre aceste tehnici este să lucrăm și noi, ca profesori, în echipe sau perechi. Astfel, în fiecare moment, unul dintre profesori poate fi cel care conduce activitatea, iar celălalt își poate observa elevii. Acest mod de lucru, din păcate, nu este sprijinit în mod oficial. O altă tehnică este de a lua notițe în timpul activității, cu observații care pot constitui baza unor discuții ulterioare, ale unor evaluări formative sau, dacă elevii lucrează în echipe, atunci să numim câte un elev în fiecare echipă cu rolul de a nota punctele cheie, dificultățile apărute sau chiar unele aspecte pe care le indicăm noi în timpul interacțiunilor din timpul activității.

3 Modele de învățare

3.1 Modelul instrucțional al celor 5 E-uri

Modelul celor 5 E-uri, elaborat de Roger W. Bybee a folosit încă din anii ’80 ([19]) și a fost publicat în 1990 datorită succesului cu care se poate aplica, atât în practică, cât și în conceptualizarea unor fenomene din perspectiva cercetărilor didactice. Acest model descrie, pe de o parte etapele cognitive ale învățării prin care trec elevii în cadrul unor activități investigative, pe de altă parte arată obiectivele specifice care trebuie atinse în derularea activităților.

- Angajarea (Engage). Sarcina formulată sprijină accesarea cunoștințelor anterioare ale elevilor și îi ajută să experimenteze ceva nou prin utilizarea unor activități scurte care promovează curiozitatea și stimulează cunoștințele anterioare. Activitatea ar trebui să realizeze conexiuni între experiențele de învățare trecute și prezente, să expună conceptele construite anterior și să faciliteze reorganizarea ideilor elevilor în vederea obținerii rezultatelor învățării din activitățile curente.

- Explorarea (Explore). Experiențele de explorare oferă elevilor o bază comună de activități în cadrul cărora sunt identificate conceptele actuale (chiar și concepțiile greșite), sunt identificate procesele și abilitățile și este facilitată schimbarea conceptuală. Elevii pot efectua activități de diferite tipuri, de la încercări aleatorii la încercări sistematizate, sau simulări computerizate etc. care îi ajută să utilizeze cunoștințele anterioare pentru a genera idei noi, a explora întrebări și posibilități, precum și să conceapă și să efectueze o investigație preliminară.

- Explicarea (Explain). Faza de explicare concentrează atenția elevilor asupra unui anumit aspect al experiențelor lor și oferă oportunități de a-și demonstra înțelegerea conceptuală, abilitățile de procesare sau comportamentele. Această fază le oferă, de asemenea, profesorilor ocazia de a introduce direct un concept, un proces sau o abilitate. Elevii pot prezenta modul în care ei percep și înțeleg anumite noțiuni. O explicație din partea profesorului îi poate îndruma spre o înțelegere mai profundă, înțelegere care este principalul obiectiv al acestei faze.

- Elaborarea (Elaborate). Profesorii facilitează realizarea înțelegerii conceptuale și dezvoltarea unor abilități specifice ale elevilor. Prin experiențele noi, elevii își dezvoltă o înțelegere mai profundă și mai amplă, dezvoltă abilități adecvate, bazate pe mai multe informații. Elevii aplică înțelegerea conceptuală în cadrul unor activități suplimentare.

- Evaluarea (Evaluate). Faza de evaluare încurajează elevii să își evalueze nivelul de înțelegere, abilitățile dezvoltate, totodată oferă profesorilor oportunități de a evalua progresul elevilor către atingerea obiectivelor educaționale.

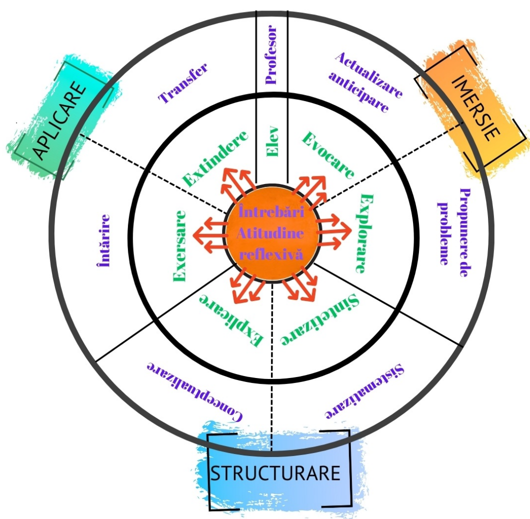
Articolul [10] sintetizează 20 de intervenții din perioada 2013–2021, documentate, în care intervenția a fost realizată pe baza acestui model la orele de matematică. Rezultatele arată că folosirea modelului celor 5 E-uri poate contribui la îmbunătățirea cunoștințelor conceptuale, a cunoștințelor și flexibilității procedurale, deci per ansamblu poate îmbunătăți procesul de învățare a matematicii. Autorii lucrării [106] prezintă un experiment din Cipru, efectuat cu elevi de clasa a VIII-a, în care au folosit modelul celor 5 E-uri și modelarea matematică pentru predarea geometriei. Concluzia a fost că predarea prin modelul instrucțional 5E și metoda modelării matematice a crescut performanța academică a elevilor. Autorii au remarcat și faptul că metoda modelării matematice a contribuit într-o măsură mai mare la creșterea performanțelor academice și la dezvoltarea competențelor de rezolvare a problemelor. Există o serie de variante ale acestui model, unele simplificate, altele mai detaliate, în funcţie de intențiile autorilor. De exemplu autorii lucrării [68] folosesc un model mai detaliat cu 7 E-uri: entuziasm (Excitement), explorare (Exploration), explicare (Explanation), expansiune (Expansion), extindere (Extension), schimbare (Exchanging), evaluare (Evaluation). La fel, autorii articolelor [17] respectiv [23] folosesc două modele diferite cu 6 E-uri, ambele fiind obținute prin adăugarea la modelul celor 5 E-uri a unei dimensiuni adiționale și anume

„e-search” pentru folosirea tehnologiilor sau „dEsign” pentru proiectare – dar există și modele în care a 6-a dimensiune provine de la schimb (Exchange) sau extensie (Extension), îmbogățire (Enrich), etc.

Modelul celor 5 E-uri

3.2 Modelul IMSTRA

Modelul IMSTRA – Imersie (Immersion), Structurare (Structuring), Aplicare (Applying) – a fost propus de Mihaela Singer și Hedy Moscovici în 2008 ([98]) pornind de la patru aspecte necuprinse sau neclarificate de alte modele: diferențele dintre rolul profesorului și al elevului în etapele procesului de învățare, flexibilitatea în parcurgerea etapelor, sprijinirea planificării activităților în contexte variate și dezvoltarea concomitentă a elevilor și a profesorului pe parcursul activităților. Pe această diagramă putem urmări cum sunt sincronizate rolurile elevilor și cele ale profesorului. Această sincronizare poate ajuta pe parcursul procesului de trecere de la investigațiile structurate la cele ghidate și la cele deschise, pentru că această trecere înseamnă de fapt transferarea graduală a responsabilităților și a inițiativelor.



Modelul Imersie-Structurare-Aplicare

3.3 Investigația bazată pe concepte

Modelul investigației bazat pe concepte ([61]) a fost creat prin intersectarea metodelor investigative (IBL) și a învățării bazat pe concepte (folosit și în programul de pregătire pentru bacalaureatul internațional) și este ilustrat în diagrama alăturată.

Un aspect important al acestui model este faptul că anumite etape necesită aprofundarea cunoștințelor conceptuale și astfel nu se poate întâmpla ca de la cunoștințele factuale elevii să sară la cele procedurale. De altfel, etapa de generalizare apare și în modelul inițial al lui Pólya privind rezolvarea problemelor în analiza soluției, doar că la orele tradiționale ciclul rezolvării propusă de Pólya de foarte multe ori nu este parcurs în întregime și astfel se pierde o parte esențială a oportunităților de a progresa.

Modelul investigației bazat pe concepte

3.4 Modelul ERR

Modelul ERR (Evocare – Realizarea sensului – Reflecție) este prezentat și completat în lucrarea [25]. Varianta completată a fost folosită cu succes în proiectul „Fizica altfel” (https://ceae.ro/wp-content/uploads/2021/05/ISTORIC-PROIECT-1.pdf) în cadrul căruia 3100 de profesori de fizică din România au participat la cursuri de formare privind predarea fizicii prin metode investigative. Modelul completat constă în următoarele etape: Evocare-Anticipare, Explorare-Experimentare, Reflecție-Explicare, Aplicare-Transfer și Evaluare. Acest model poate fi folosit și în cazul unor activități de matematică atâta timp cât faza de explorare-experimentare se poate implementa (de exemplu la multe teme de geometrie) și faza de evocare-anticipare are sens în procesul conceptualizării și al investigației.

3.5 Modelul trifazic

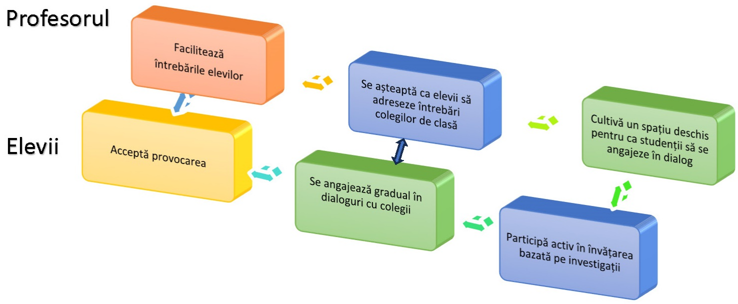
În practică este esențial ca activitățile să fie fezabile în timpul alocat și etapele care trebuie parcurse de elevi să nu fie întrerupte, pentru că impresiile și experiențele acumulate la etapele inițiale se vor estompa în timp. Din acest motiv, modelele foarte detaliate vor fi aplicate cu dificultăți mai ales de profesorii începători în aplicarea metodelor investigative. Un model conceptual trifazic pentru organizarea activităţilor matematice bazate de investigaţii, similar cu modelul ERR, este descris în lucrarea [14]. Acest model a fost folosit cu succes mai ales la clasele liceale și constă în următoarele trei etape:

1. Crearea contextului pentru activitățile elevilor:
   - formularea unor întrebări sau a unor provocări;
   - stabilirea mediului didactic de lucru;
   - stabilirea cadrului temporal și practic;
   - clarificarea cerințelor referitoare la rezultatul elaborat de elevi, a formei de evaluare şi a criteriilor de evaluare.
2. Activități independente ale elevilor, orientate spre investigaţii:
   - acordarea unui timp suficient, libertate și sprijin pentru activitatea elevilor;
   - sprijin și provocare prin dialog, conform principiului îndrumării minime (profesorul având rol de facilitator);
   - pregătire prealabilă a unor dialoguri posibile prin parcurgerea etapelor de investigare de către profesor.
3. Reflecții și învățare împărtășite:
   - experiențele, rezultatele și reflecțiile din cadrul activității sunt sistematizate și împărtășite;
   - ideile principale și rezultatele matematice sunt evidenţiate din rezultatele elevilor și din reflecțiile împărtășite;
   - rezultatele sunt corelate cu conţinuturile/cunoștințele instituționalizate, de exemplu cu programa școlară.

Acest model este similar cu modelul ERR și poate fi privit ca un model simplificat care poate fi aplicat în multe situații și în timp, odată cu dezvoltarea profesională a celor care predau, poate fi completat cu aspectele cuprinse în celelalte modele.

Este esenţială şi o schimbare de paradigmă privind participarea elevilor la aceste activităţi: obiectivul principal nu este ca elevii să înveţe conţinuturi matematice, ci să creeze propriile lor idei matematice într-un context în care o serie de noţiuni abstracte devin palpabile, iar după formarea acestor idei proprii cu ajutorul profesorului să realizeze corespondenţele dintre ideile proprii şi conţinuturile formale din programa şcolară.

Trecerea de la modul de lucru tradiţional la participare activă în investigaţii, practic la modul de lucru al unui matematician, nu se realizează instantaneu, ci este un proces gradual. Dinamica acestui proces a fost descrisă în [69].



3.6 Observații

- Există o multitudine de modele pentru a descrie din diferite perspective procesul de învățare în cadrul folosirii metodelor investigative. Unele dintre aceste modele au părți comune, dar se și completează din anumite perspective.
- Din perspectiva practicii, a realizării activităților investigative la orele de matematică, este important ca pentru activitățile pe care le planificăm și le derulăm să avem o structură bine definită, un model pe care-l avem în vizor (dacă ar fi un studiu de caz, o cercetare, atunci ar fi important să avem o structură comună pentru toate activitățile, dar asta ar însemna că ne-am focusat pe nevoile noastre și nu pe ale elevilor). Pe de altă parte, nu este necesar ca de fiecare dată să parcurgem toate etapele din modelul ales, pentru că obiectivele unor activități investigative pot fi foarte variate, la unele ore obiectivul poate fi structurarea unor informații, la altele angrenarea într-o tematică încă necunoscută, înțelegerea întrebărilor de bază. Este importantă parcurgerea tuturor etapelor la un nivel macro, pe fondul unui proces de durată.
- Din toate aceste modele, se pot identifica practic trei părți pe care este important să le reținem, acestea au fost descrise și în [14] și le vom detalia la organizarea activităților IBL:
  1. crearea contextului pentru activitățile elevilor;
  2. activități independente ale elevilor (individual sau în grupuri) orientate spre investigație;
  3. reflecții, discuții.

  Practic fiecare model ne arată o structurare a acestor trei părți organizatorice și ne ajută să ne focusăm asupra dimensiunilor importante din perspectiva procesului de învățare.

4 Proiecte europene legate de IBL

În contextul diferitelor rapoarte educaționale, la sfârșitul anilor ’90 unele țări au început să finanțeze programe de dezvoltare profesională în vederea îmbunătățirii rezultatelor obținute de elevi la diferitele evaluări. Așa a fost și în Germania, unde după un an de la publicarea rezultatelor studiului TIMS (Third International Mathematics and Science Study) și TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study) în 1998, a fost lansat programul SINUS pentru creșterea eficienței predării matematicii și științelor ([81]). Ideile principale ale acestui proiect au fost folosirea profesorilor ca experți în elaborarea cursurilor de formare, susținerea cooperării și colaborării profesorilor intra- și interdisciplinar, stilul de muncă organizat în rețele mici de 6-10 școli și elaborarea a 11 module de formare, câteva dintre acestea fiind complet noi în peisajul educațional existent: dezvoltarea unei culturi a sarcinilor, lucrul științific, învățarea din greșeli, dobândirea de cunoștințe de bază, învățarea cumulativă, abordarea interdisciplinară, motivarea fetelor și a băieților, învățarea prin cooperare, învățarea autonomă, progresul competențelor, asigurarea calității. Acest proiect a avut un succes remarcabil, astfel încât în 2003 a fost demarat un alt proiect, SINUS-TRANSFER, cu scopul de a extinde la scară largă aceste rezultate. În Franța, programul de reformă a început cu predarea științelor prin programul „La main à la pâte”, care a coordonat si proiectul european POLLEN în perioada 2006–2009. care la rândul său a avut un succes remarcabil implicând peste 36000 de elevi și 2000 de profesori. După ce în 2007 raportul Rocard ([86]) a evocat aceste proiecte ca exemple demne de urmat, Comisia Europeană, prin al șaptelea program cadru, a finanțat mai multe proiecte europene ale căror obiectiv a fost experimentarea și răspândirea metodelor investigative în predarea matematicii și a științelor. Astfel, pe baza rezultatelor proiectelor SINUS, SINUS-TRANSFER și POLLEN, în 2009, a fost conceput proiectul european FIBONACCI care a implicat un consorțiu de 25 de parteneri din 21 de țări europene ([43]). În cadrul celui de al șaptelea program cadru, au mai fost finanțate o serie de alte proiecte care au avut ca obiectiv specific implementarea/experimentarea metodelor investigative în matematică (vezi (lista completă a proiectelor finanțate)): PRIMAS - Promoting Inquiry in Mathematics and Science Education Across Europe (2010–2013), SAILS - Strategies for Assessment of Inquiry Learning in Science (2012–2015), MASCIL - Maths and Science for Life (2013–2016), Assist-me - Assess Inquiry in Science, Technology and Mathematics Education (2013–2016). Merită menționat și faptul că mulți dintre partenerii acestor proiecte internaționale au lucrat în perioada 2004–2010 la diferite proiecte legate de folosirea modelării matematice în școli: DQME - Developing Quality in Mathematics Education (2004–2007) și DQME II (2007–2010), LEMA - Learning and Education in and through Modelling and Applications (2006–2009) sau Compass - Common problem solving strategies and the links between mathematics and science (2009–2011). Aceste proiecte au avut la rândul lor un succes remarcabil și materialele, respectiv experiențele acumulate în aceste proiecte legate de modelarea matematică au fost valorificate în contextul mai larg al metodelor investigative.

4.1 Proiectul Fibonacci

Proiectul Fibonacci ([43]) a fost un proiect de trei ani finanțat din cel de-al șaptelea program cadru care a pornit la 1 ianuarie 2010, a fost coordonat de programul „La main à la pâte” (un program derulat de Academia de Științe din Franța, Institutul Național de Cercetări din Franța și École Normale Supérieure) și de Universitatea Bayreuth din Germania, cu participarea a 25 de instituții partenere din 21 de țări. Proiectul a preluat rezultatele din proiectele FP6 Science educ, POLLEN și din proiectele naționale SINUS, SINUS-TRANSFER (Germania), IMST (Austria), fiind construit pe trei piloane principale și 9 tipare. Cele trei piloane au fost: educația științifică și matematică bazată pe investigație, inițiativele locale pentru inovare și sustenabilitate și o strategie de multiplicare prin centre locale de referință. Cele 9 tipare pe care s-au focusat cei implicați în practica didactică au fost dezvoltarea unei culturi a învățării bazate pe rezolvarea problemelor, metodele de lucru științifice, învățarea din greșeli, asigurarea unor cunoștințe de bază, învățarea cumulativă, explorarea abordărilor interdisciplinare, promovarea participării fetelor și a băieților, promovarea colaborării între elevi, învățarea autonomă. Centrele de referință au avut un rol important în diseminarea rezultatelor pentru că, pe lângă realizarea unor activități la clase, elaborarea unor materiale, realizarea unor cursuri de formare colaborative prin vizite de ore, tutorat, mentorat, au implicat părinți, factori decizionali, comunitatea științifică, autorități din domeniu, atât în activități formale, cât și informale. În cadrul proiectului au fost elaborate în total 8 publicații importante (disponibile online pe pagina Fundației La main à la pâte), dintre care trei relevante din punctul de vedere al predării matematicii ([7], [11], [6]). Cartea [11] conține și exemple de materiale didactice și exemple de activități din țări europene cu tradiții matematice apropiate de tradițiile existente în România, cum ar fi Bulgaria. Materialele și experiența acumulată în proiect a fost valorificată în mai multe proiecte ulterioare (PRIMAS, MASCIL) și prin implicarea directă a unor cercetători din proiectul Fibonacci în diferite comitete consultative, de exemplu Michèle Artigue a fost consultant atât pentru PRIMAS, cât și pentru MASCIL.

4.2 Proiectul PRIMAS

PRIMAS este un acronim care provine din varianta în engleză a titlului mai lung „Promovarea învățării bazate pe investigare (IBL) în matematică și științe în Europa”. PRIMAS a fost finanțat în cadrul celui de-al 7-lea program cadru în programul „Știința în Societate”. Proiectul s-a desfășurat timp de patru ani (2010–2013) cu participarea a 14 universități din 12 țări europene: Cipru, Danemarca, Elveția, Germania, Malta, Norvegia, Olanda, Regatul Unit, România, Slovacia, Spania, și Ungaria, instituția coordonatoare fiind Universitatea de Educație din Freiburg. Partenerii proiectului PRIMAS au elaborat materiale pentru utilizare directă în clasă, module pentru dezvoltarea profesională, au desfășurat cursuri de dezvoltare profesională și au sprijinit rețele profesionale în fiecare dintre țările partenere. Publicația finală [55] (https://primas-project.eu/wp-content/uploads/sites/323/2017/11/primas_final_publication.pdf) conține o scurtă introducere în învățarea bazată pe investigație și curiozitate, o colecție de exemple de sarcini/probleme care pot fi abordate prin metode investigative. Pe lângă această publicație finală au fost elaborate mai multe ghiduri privind organizarea cursurilor de formare ([82]), acțiunile de suport în școală și în afara școlii, precum și câteva rapoarte privind implementarea proiectului. Aceste rapoarte sunt disponibile pe serverul Comisiei Europene (https://cordis.europa.eu/project/id/244380 sau https://primas-project.eu/).

În viziunea proiectului PRIMAS, IBL are potențialul de a crește interesul intrinsec al elevilor pentru matematică și științe și sprijină dobândirea unor competențe importante cum ar fi abilitățile de rezolvare a problemelor, învățarea autodirijată și explorarea unor noi contexte de cunoaștere. Profesorii sunt actorii-cheie în implementarea pedagogiilor IBL la orele de matematică și științe și în transformarea potențialelor beneficii ale IBL în efecte reale. Acesta este motivul pentru care PRIMAS și-a propus în principal să îi sprijine prin furnizarea de materiale didactice, prin cursuri de formare/dezvoltare profesională și un sistem de sprijin continuu în cadrul unor comunități de practică IBL. O serie de activități au fost incluse în cartea PRIMAS publicată în România https://simplexportal.ro/tananyagok/primas/primas_ro_opt.pdf. În capitolele care urmează vom prelua ingredientele esențiale din viziunea PRIMAS, câteva idei din ghidul pentru formatori și vom prezenta și câteva exemple din proiect.

4.3 Proiectul MASCIL

MASCIL este un acronim care provine de la varianta în engleză a titlului „Matematică și știință în viață: învățarea prin investigație și lumea muncii”. MASCIL a fost finanțat în cadrul celui de-al 7-lea program cadru de Comisia Europeană. Proiectul s-a desfășurat timp de patru ani (2013–2016) cu participarea a 17 universități și centre de cercetare din 13 țări europene: Austria, Bulgaria, Cehia, Cipru, Germania, Grecia, Lituania, Norvegia, Olanda, Regatul Unit, România, Spania și Turcia, instituția coordonatoare fiind Universitatea de Educație din Freiburg. Partenerii proiectului MASCIL au elaborat materiale didactice pentru utilizare directă în clasă, module pentru dezvoltare profesională, au desfășurat cursuri de dezvoltare profesională și au redactat o serie de rapoarte. Unele dintre acestea pot fi accesate la adresa https://www.fisme.science.uu.nl/publicaties/subsets/mascil/ sau https://cordis.europa.eu/project/id/320693. În acest proiect focusul a fost pe conexiunile cu lumea muncii, perspectiva IBL a fost cea elaborată în proiectul PRIMAS și au fost adăugate o serie de caracteristici importante pentru realizarea unor conexiuni reale dintre sarcinile profesionale de la locurile de muncă și conținuturile matematice abordate prin metode investigative. Publicația finală [49], pe lângă prezentarea unor exemple relevante din diferite țări conține idei importante privind transformarea conținuturilor tradiționale în sarcini care pot fi abordate prin metode investigative, exemple de abordări și probleme folosite în clasă pentru a ilustra contrastul dintre abordările tradiționale și cele bazate pe metode investigative și o introducere scurtă în cadrul conceptual folosit. În cadrul proiectului în 2014 a fost lansat seria de conferințe „Educating the Educators” ([57]) care a continuat și după terminarea proiectului în 2016 (Freiburg), 2019 (Freiburg) și 2023 (Leiden), o nouă conferință urmân dsă fie organizată în 2025 la Limassol, în Cipru. În capitolele care urmează vom prezenta diagrama Mascil cu caracteristicile IBL în cazuri în care problemele sunt legate de locuri de muncă și roluri profesionale, precum și câteva exemple.

4.4 Proiectul ASSIST-ME

Acronimul ASSIST-ME provine de la versiunea în engleză a titlului „Evaluarea metodelor investigative în educația științifică, tehnologică și matematică". A fost finanțat de Comisia Europeană în perioada 2013-2016, coordonatorul proiectului a fost Universitatea Copenhaga din Danemarca și au participat alte 10 universități/centre de cercetare din 8 țări, Danemarca, Cehia, Cipru, Elveția, Finlanda, Franța, Germania și Regatul Unit. Proiectul a fost structurat pe 7 pachete de lucru, primul pachet fiind unul administrativ, iar în celelalte pachete au fost sintetizate rezultatele cercetărilor existente (2), caracterizate sistemele educaționale ale țărilor participante (3), elaborate metode de evaluare (4), testate/validate metodele de evaluare (5), transferate rezultatele în contextele naționale (6) și a fost elaborat un ghid pentru profesori (7). Metodele elaborate se referă, atât la evaluarea formativă, cât și la evaluarea sumativă. În urma sintetizării rezultatelor și a descrierii sistemelor educaționale au fost identificate șase competențe relevante: competența de a investiga (în științe), competența de rezolvarea de probleme (în matematică), competența de design tehnic (în educația tehnologică), competența de a argumenta, competența de a crea/elabora modele și de a inova. Au fost identificate subcompetențe și pentru fiecare au fost studiate, din punctul de vedere al evaluării formative, patru metode de evaluare: interacțiunile în timp real, feedback-ul personal și cel al colegilor, notarea unor lucrări scrise și formularea unor opinii scrise despre acestea, evaluarea unor prezentări orale în cadrul unor discuții deschise sau structurate în clasă. Metodele elaborate au fost implementate în 144 de cazuri, cu 100 de profesori și peste 3400 de elevi. În ghidul elaborat (livrabilul D7.2) au fost formulate 10 mesaje cheie.

- Pedagogia bazată pe investigație este un mijloc eficient de dezvoltare a competențelor care îi pregătesc pe viitorii cetățeni să se implice în probleme științifice și tehnologice și să ia decizii în cunoștință de cauză cu privire la viitorul lor și al societății.

- Pedagogia bazată pe investigație sporește motivația și angajamentul elevilor și profesorilor față de știință. Dovezile bazate pe cercetare arată că pedagogia bazată pe investigație este corelată cu îmbunătățirea rezultatelor școlare ale elevilor.

- Profesorii trebuie să știe clar cum arată pedagogia bazată pe investigație într-o clasă. Aceasta include o înțelegere clară a caracteristicilor acestei abordări și a modului în care acestea diferă de alte forme de predare și învățare.

- Profesorii trebuie să fie lămuriți cu privire la scopurile și procesele de evaluare în clasă în contextul metodelor investigative. Aceasta include recunoașterea și conceperea unor sarcini de evaluare adecvate, care pot fi utilizate în scopuri formative și/sau sumative.
- ASSIST-ME a explorat utilizarea a patru strategii distincte de evaluare în clasă: interacțiunile în timp real, dialogul de evaluare structurat, feed-back-ul scris al profesorului și feed-back-ul scris al colegilor. Aceste strategii oferă diferite oportunități de a colecta dovezi ale învățării, de a le interpreta și de a le utiliza în scopuri formative și/sau sumative. Toate au un loc în evaluarea în clasă și pot fi integrate în diferite părți ale procesului de învățare.
- Utilizarea formativă a dovezilor de învățare și învățarea în sine sunt interconectate și nu ar trebui separate una de cealaltă. Înțelegerea clară a obiectivelor de învățare ale lecției și a modului în care acestea se încadrează într-o imagine mai largă a învățării este foarte importantă pentru orientarea unei acțiuni formative eficiente.
- ASSIST-ME a identificat o nevoie de dezvoltare profesională care să sprijine înțelegerea de către profesori a evaluării formative și a predării bazate pe investigație. Dezvoltarea profesională ar trebui să creeze oportunități pentru stabilirea unei comunități active de practicieni care pot împărtăși bunele practici și reflecțiile lor critice asupra activității lor.
- Profesorilor trebuie să li se acorde timp și oportunități pentru dezvoltarea profesională. Cea mai bună modalitate de a aborda acest aspect este testarea și dezvoltarea învățării și evaluării prin cercetare, ca intervenție pe termen lung, prin schimbul de experiență cu alți profesori, formatori de profesori și cercetători.
- Materialele didactice pentru activitățile din clasă și instrumentele de evaluare trebuie să fie puse la dispoziție, astfel încât profesorii să fie sprijiniți în adoptarea și dezvoltarea propriilor resurse.
- Constatările proiectului evidențiază provocările cu care s-au confruntat profesorii în adoptarea acestei practici. Pentru mulți profesori, ea necesită o schimbare a filosofiei de predare. La început, acest lucru necesită mai mult timp și efort pentru planificare și mai multe resurse. De asemenea, profesorii au confirmat impactul pozitiv asupra practicii lor și asupra elevilor.

În perioada 2012–2015 a fost finanțat și proiectul SAILS, al cărui acronim provine din versiunea în engleză a titlului „Strategii de evaluare a învățării prin investigare în domeniul științelor”. Acest proiect a fost menit să elaboreze unitățile de învățare împreună cu unitățile de evaluare, astfel au fost propuse 19 de activități puse în aplicare în diferite țări, pentru fiecare unitate fiind oferite și criterii/perspective de evaluare. Aceste exemple, cu toate că sunt din domeniul științelor, pot fi folosite pentru a înțelege procesul de evaluare. În capitolul dedicat evaluării prezentăm mai multe rezultate ale acestor proiecte.

5 Organizarea activităților matematice de tip IBL

Există multe recomandări teoretice și practice privind organizarea activităților investigative în diferite discipline și multe axate chiar pe matematică. Acestea de regulă se focusează pe folosirea unui cadru conceptual fixat, sunt autori care recomandă modelul lui Bybee (modelul celor 5 E-uri, [106]), alții recomandă folosirea cadrului IMSTRA ([98]) ș.a.m.d. În matematică focusul este puțin diferit față de toate celelalte discipline, din mai multe motive: există tradiții foarte puternice (atât local, cât și la nivel internațional) care înglobează conținuturi, abordări, aplicații care sunt foarte valoroase din punct de vedere profesional și din punctul de vedere al formării generațiilor de profesioniști; există foarte multe concursuri, majoritatea lor fiind concursuri individuale (deși există competiții pentru echipe în Olanda, Ungaria, etc.); însă motivul primordial este faptul că predarea matematicii are ca scop intrinsec abstractizarea, atingerea unui nivel mai abstract, mai structurat al gândirii. Privit dintr-un punct de vedere constructivist, în realizarea acestui obiectiv timpul (deci și viteza, eficiența cu care un elev poate înțelege noțiuni abstracte, poate crea legături dintre acestea) este un element cheie. Pe de altă parte, chiar și la nivelul Uniunii Europene există diferențe relativ mari în privința duratei unei ore de matematică ([76],[97]). Aceste diferențe influențează și diferențele duratelor efective în care elevii lucrează ([71]). Durata unei ore variază între 45 de minute și 90 de minute, dar există țări (sau regiuni, sau școli cu suficientă autonomie) în care programul este de la 8 la 13 cu o pauză la ora 10, în rest trecerea de la o activitate la alta nu implică pauze (acest lucru fiind posibil acolo unde, chiar și la nivelul gimnazial, predau profesori generaliști). Mai mult, în unele țări durata orelor poate varia în funcție de ciclul școlar, cu o tendință crescătoare în ciclurile superioare. La activitățile investigative abstractizarea și formalizarea au loc de obicei în fazele finale. Astfel, managementul timpului este esențial și structurarea unei activități după un model complex cu 5 faze poate crea dificultăți profesorilor, care la rândul lor, experimentează și ei aceste metode. În mai multe proiecte europene, focusul a fost pe crearea unui cadru conceptual flexibil, gândit din perspectiva practicii, a profesorilor și mai ales din perspectiva profesorilor care încep să folosească metodele investigative. Pentru ei, folosirea unui model complex este practic imposibilă la început, pentru că ar trebui să urmărească activitatea grupurilor de elevi, să anticipeze dificultățile, să reacționeze dacă e nevoie, să nu reacționeze dacă cred că elevii vor găsi (sau e important să găsească) răspunsul căutat. Din acest motiv, a fost elaborată diagrama PRIMAS, care descrie ingredientele esențiale ale metodelor investigative. Aceste ingrediente, deși unele sunt conectate între ele, pot fi folosite, pot fi introduse la orele/activitățile de matematică gradual, unul câte unul, fără a ieși complet din zona de confort.

Aceste ingrediente au fost gândite și din perspectiva conținuturilor tradiționale pentru ca profesorii să aibă la început oportunitatea de a experimenta schimbări în organizarea orelor, în metodele folosite fără a schimba radical tipul conținuturilor cu care sunt obișnuiți elevii.

Ingredientele esențiale ale metodelor investigative, elaborate în proiectul PRIMAS

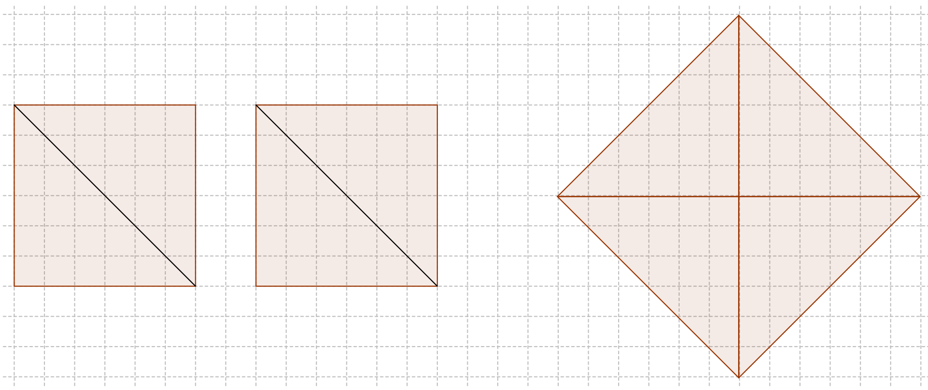
Dacă pe lângă problemele tradiționale apar și probleme preluate din contexte cotidiene sau diverse contexte profesionale, este posibil ca stilul problemei să implice schimbări în structura, în modul de organizare al soluției: dat fiind că rezolvarea problemei implică un proces de modelare, iar în ciclul de modelare rezolvarea matematică a problemei, care se obține din model, este numai o parte a demersului, această rezolvare trebuie integrată într-un cadru mai complex, prin care calculele efectuate sau raționamentul matematic elaborat se vor proiecta în situația reală inițială. De exemplu, dacă o problemă provine dintr-un context real, atunci răspunsul trebuie să fie coerent în contextul inițial și e suficient dacă validitatea soluției se poate proba în acest context – ceea ce uneori e posibil și fără a parcurge raționamentul matematic din spate. Pentru a înțelege mai bine acest aspect, considerăm problema următoare:

Problemă: Avem două bucăți de hârtie pătratice cu latura de 9 cm. Tăiați cele două bucăți în câteva piese mai mici din care să asamblați un singur pătrat!

Soluție: Tăiem fiecare pătrat de-a lungul unei diagonale și asamblăm cele patru triunghiuri isoscele dreptunghice obținute ca în figura alăturată.

Verificarea faptului că soluția este bună nu necesită un raționament care explică de ce am procedat așa. Astfel, dacă dorim să evităm eliminarea raționamentului, trebuie să reformulăm problema.

Din acest motiv a fost elaborat în cadrul proiectului MASCIL diagrama cu caracteristicile metodelor investigative în cazul în care apar probleme provenite din contexte profesionale sau cotidiene.



Caracteristici ale metodelor investigative cu elemente din lumea muncii elaborate în proiectul MASCIL

Aceste caracteristici preiau ingredientele esențiale enumerate anterior și adaugă o perspectivă nouă care se încorporează în tot procesul de investigare. Perspectivele enumerate pentru probleme sunt: contextul, rolul, activitatea și produsul.

Contextul în care se formulează problema este legat de lumea muncii sau viața cotidiană, această legătură nu este una superficială, ci una de fond. Totuși, această conexiune poate fi foarte puternică dacă se folosește o practică autentică din lumea muncii ca și context pentru învățare. Acesta de regulă oferă o motivație clară și o nevoie de a cunoaște, de a rezolva problemele formulate. Conexiunea între problemă și lumea muncii poate fi și slabă, dacă problema este formulată în context profesional, dar acest context nu este important în rezolvarea problemei, pe parcursul investigației.

Dacă problema implică un context profesional autentic, atunci activitățile elevilor trebuie să fie legate de practici autentice de la locul de muncă (cu toate implicațiile privind folosirea dispozitivelor specifice). Ele pot fi mai mult sau mai puțin similare cu activitatea lucrătorilor de la diferite locuri de muncă și trebuie să reflecte caracteristicile unei munci reale cum ar fi: organizarea ierarhică, munca în echipă, divizarea sarcinilor, etc. Astfel, activitățile trebuie să aibă un scop precis, să implice probleme reale și să scoată în evidență modurile de aplicare a matematicii sau a științelor. Este foarte important ca elevii să folosească matematica și științele în moduri și în contexte ce sunt determinate de lumea muncii. Dacă problemele și activitățile sunt similare cu cele din manualele sau culegerile de probleme tradiționale, atunci legătura cu lumea muncii este foarte slabă. Pentru a rezolva problema, elevii sunt puși în roluri profesionale legate de context și astfel în unele cazuri pot ieși din rolul de elevi. Este de asemenea foarte important ca activitatea să fie finalizată prin crearea unui produs care este similar cu un produs din viața profesională reală.

Pentru ca o problemă să fie strâns legată de lumea muncii, fiecare componentă (context, rol, activitate și produs) trebuie să fie explicită și clară pentru elevi. Nu este necesar ca toate cele patru componente să fie la fel de importante, însă pentru elaborarea materialului didactic este binevenit ca toate aceste componente să fie analizate profund.

Din acest punct de vedere, este important să formulăm cerințele în așa fel încât să rezolvăm și problema din contextul real (pentru că altfel pierdem legătura între matematica pe care o facem și contextul inițial), dar să existe și ancore care nu permit desprinderea de raționamentele matematice, de noțiunile matematice pe care dorim să le abordăm.

Pentru realizarea activităților, mai ales în perioadele incipiente, considerăm că se potrivește condițiilor din România modelul conceptual (simplificat) prezentat în lucrarea [14], model care cuprinde următoarele trei etape:

1. Crearea contextului pentru activitățile elevilor:
   - formularea unor întrebări sau a unor provocări;
   - stabilirea mediului didactic de lucru;
   - stabilirea cadrului temporal și practic;

- clarificarea cerințelor referitoare la rezultatul elaborat de elevi, a formei de evaluare și a criteriilor de evaluare.

2. Activități independente ale elevilor, orientate spre investigație:

   - acordarea de timp suficient, libertate și sprijin pentru activitatea elevilor;
   - sprijin și provocare prin dialog, conform principiului îndrumării minime (profesorul având rol de facilitator);
   - pregătire prealabilă a unor dialoguri posibile prin parcurgerea etapelor de investigare de către profesor.

3. Reflecții și învățare împărtășite:

   - experiențele, rezultatele și reflecțiile din cadrul activității sunt sistematizate și împărtășite;
   - ideile principale și rezultatele matematice sunt evidențiate din rezultatele elevilor și din reflecțiile împărtășite;
   - rezultatele sunt corelate cu conținuturile/cunoștințele instituționalizate, de exemplu cu programa școlară.

Bineînțeles, la crearea contextului și la formularea problemelor vom avea în vedere nivelul van Hiele la care se află majoritatea elevilor, vom ține cont de dimensiunile TRU și de caracteristicile întrebărilor ca fiind ingrediente esențiale în IBL.

Pe parcursul activităților rolul de facilitator este crucial, în anumite momente trebuie să intervenim pentru a stimula elevii, pentru a susține importanța unor gesturi, pentru a consolida unele idei importante etc.; în alte situații intervenția va fi de altă natură sau poate nici nu intervenim. În această fază e important să fim conștienți de acțiunile noastre și să le raportăm la caracteristicile IBL, la ingredientele esențiale și la cadrele conceptuale cu care operăm. În ultima etapă, organizăm modul în care ideile vor fi discutate, prezentate din poziția de facilitator. În tabelul alăturat ([32]) am inclus câteva idei referitoare la acest rol de facilitator, care este complet diferit de rolul obișnuit al unui profesor la orele tradiționale.

Strategii IBL	Sugestii pentru întrebări/îndemnuri adresate elevilor:
Acordați timp elevilor să înțeleagă problema și să se familiarizeze cu ea. Descurajați graba, nu lăsați să vă pună întrebări de la început.	• Nu te grăbi, înțelege problema! • Ce știi? • Ce încerc să faci? • Ce este fixat? Ce se poate schimba? • Nu cere ajutor de la început – încearcă să te gândești la o abordare posibilă.
Oferiți mai mult ajutor strategic și nu de ordin tehnic. Evitați simplificarea problemelor prin precizarea pașilor pe care urmează să le parcurgă elevii.	• Cum ai putea începe? • Ce ai încercat până acum? • Ai încercat cazuri particulare? • Cum ai putea sistematiza ideile? • Poți găsi o reprezentare relevantă?
Încurajați elevii să găsească metode alternative, abordări diferite pentru aceeași problemă. Încurajați-i să compare idei, metode, strategii.	• Poți obține același rezultat altfel? • Descrie metoda folosită și colegilor tăi! • Care metodă ți se pare mai bună și pentru ce anume?
Încurajați explicațiile date de elevi (chiar și cele greșite, sau doar intuitive). Cereți elevilor să elaboreze raționamente și să le discute între ei.	• Poți explica metoda folosită? • Poți explica din nou, dar altfel? • Poți reformula cu propriile cuvinte ce a spus colegul? • Poți formula o explicație?
Prezentați metodele eficiente și ideile excepționale doar la sfârșit. Când elevii au făcut tot ce au putut, vor învăța mai mult dintr-o abordare elegantă și eficientă. Dacă prezentați acestea la început, vor încerca să imite metoda fără a înțelege sau a aprecia necesitatea acesteia, fără a înțelege limitele de aplicabilitate.	• Încerc să rezolv și eu, mă voi gândi cu voce tare. • Poate greșesc undeva, încercați să reperați greșeala! • Soluția poate fi îmbunătățită... • Vă prezint și eu o abordare, vă rog s-o criticați!

6 Evaluarea elevilor

Evaluarea nivelului de cunoștințe acumulate și a competențelor formate la elevii care învață prin activitățile investigative este o sarcină foarte grea, deoarece elaborarea unei evaluări profesioniste pornește de la definiția cadrului de evaluare, de la competențele pe care dorim să evaluăm, iar în evaluările tradiționale nu au fost incluse competențele pe care încercăm să le dezvoltăm. De exemplu, evaluarea PISA din 2009 ([70]) a urmărit opt competențe: gândirea și raționamentele (formularea unor întrebări matematice și înțelegerea tipurilor de răspunsuri pe care matematica le poate oferi), argumentarea (utilizarea demonstrațiilor și raționamentelor matematice, elaborarea și exprimarea argumentelor matematice), comunicarea (exprimarea într-un limbaj matematic, atât oral, cât și în scris, precum și înțelegerea conceptelor comunicate de ceilalți), modelarea (structurarea, interpretarea, comunicarea, analiza, lucrul cu modele predefinite, criticarea și validarea modelelor matematice în funcție de realitate), formularea și rezolvarea problemelor matematice (formularea, definirea și rezolvarea problemelor matematice prin diverse metode), reprezentarea (reprezentarea obiectelor și situațiilor matematice în funcție de context și scop), utilizarea limbajului simbolic, a celui formal și a operațiilor (utilizarea simbolurilor matematice, a limbajului formal și a operațiilor pentru a rezolva ecuații și a efectua calcule), utilizarea mijloacelor și instrumentelor (cunoașterea și utilizarea metodelor și instrumentelor matematice, inclusiv a instrumentelor oferite de tehnologia informației, pentru a sprijini abilitățile matematice). Aceste competențe însă au fost evaluate pe trei niveluri: nivelul reproducerii (calcule de rutină, proceduri și algoritmi de rutină, rezolvarea unor probleme de rutină), nivelul conexiunilor (realizarea legăturilor între contextele cotidiene și reprezentările matematice, rezolvări standard ale unor probleme prin metode multiple), nivelul reflecțiilor (rezolvarea problemelor complexe, abordări originale, generalizări, metode multiple complexe). Astfel, problemele au fost clasificate atât după competențe, cât și în funcție de nivelurile menționate. Pe de altă parte, marea majoritate a evaluărilor tradiționale (evaluare națională, bacalaureat) este axată pe verificarea unor cunoștințe punctuale scoase din context, care de obicei atinge cel mult al doilea nivel și numai una sau două dintre competențele de mai înainte, în plus, timpul este un factor crucial la aceste evaluări. Prin urmare, o evaluare tradițională de regulă nu reușește să evalueze rezultatele proceselor de învățare la adevărata lor valoare, existând atât erori de speța întâi (când un elev este evaluat peste nivelul lui general de cunoștințe doar datorită faptului că a reușit să dea răspunsurile așteptate, ori în urma unor raționamente greșite, ori în urma unor încercări aleatorii), cât și erori de speța a doua (când un elev este evaluat sub nivelul lui de cunoștințe, de exemplu greșește, sau interpretează incorect o problemă, dar are un raționament corect sau pur și simplu nimerește o problemă pe care nu știe s-o rezolve). Bineînțeles, ambele erori pot fi corectate într-un proces educațional prin evaluări repetate, prin construirea unor evaluări care reduc cât mai mult efectele aleatorii, dar evaluările tradiționale de cele mai multe ori nu au aceste caracteristici. Totuși, există o serie de rezultate ([48]) care arată că există o corelație semnificativă între creșterea notelor elevilor mai slabi (deci rezultatele obținute la evaluări tradiționale pe o perioadă mai îndelungată) și folosirea metodelor investigative chiar și la conținuturi matematice abstracte, și că nivelul competențelor la elevii care învață (și) prin metode investigative este mai ridicat decât nivelul competențelor celor care nu folosesc metode investigative ([31]). Ba mai mult, folosirea metodelor investigative are un efect pozitiv asupra dezvoltării competențelor legate de gândirea critică, asupra nivelului de motivare și asupra performanțelor academice în general ([85]), dar și la elevii cu dificultăți socio-emoționale și de comportament ([110]).

În proiectele dedicate elaborării metodelor de evaluare care pot cuprinde eficient și corect rezultatele învățării în diferite contexte investigative, în care uneori elevii au oportunitatea de a alege chiar și problemele studiate, sau abordările experimentate (de exemplu ASSIST-ME, SAILS), au fost formulate o serie de concluzii privind importanța folosirii evaluării formative pe parcursul procesului de învățare. Independent de aceste proiecte și într-un context social puțin diferit, autorul tezei [36] a folosit cadrul de evaluare utilizat în PISA din 2009 și a formulat următoarea concluzie: evaluarea formativă sprijină învățarea matematicii în diferite etape ale procesului de învățare, oferind elevilor oportunități de a conecta și sintetiza ideile lor, de a reflecta asupra ideilor proprii despre matematica explorată. Astfel, gândirea devine un proces de conceptualizare și investigația conduce la o gândire și o înțelegere mai profundă a conținuturilor matematice. Volumul [35] detaliază o serie de perspective actuale privind evaluarea inovativă a elevilor în contextul schimbărilor care au intervenit în societate.

6.1 Cadrul de evaluare PISA 2022

Este important de menționat că PISA evaluează domeniile matematică, lectură și știință în fiecare ciclu, însă ciclurile au doar câte un domeniu considerat domeniul principal al evaluării. În fiecare ciclu (2000, 2003, 2006, 2009, 2012, 2015, 2018, 2022) este elaborat un cadru conceptual prin definirea obiectivelor evaluării (precum cel prezentat succint mai înainte), dar la fiecare evaluare PISA când matematica este domeniul principal (2003, 2012, 2022) cadrul conceptual este complet regândit, actualizat, incluzând și reflectând atât o serie de rezultate de cercetare didactică, cât și o serie de linii importante din domeniul politicilor educaționale la nivel mondial, precum și schimbările/provocările din lumea socio-economică.

Cadrul de evaluare din 2022 a fost mult mai complex decât cel anterior. Ciclul modelării matematice, utilizat și în evaluări anterioare pentru a descrie etapele prin care trec elevii în rezolvarea problemelor contextualizate, a rămas o componentă esențială a cadrului PISA 2022. Acesta a fost utilizat pentru a ajuta la definirea proceselor matematice în care sunt implicați elevii pe măsură ce rezolvă probleme - procese care, împreună cu raționamentul matematic (atât deductiv, cât și inductiv), constituie principalele dimensiuni de raportare. Obiectivul principal a fost evaluarea gradului în care elevii sunt capabili să raționeze matematic și să utilizeze concepte, proceduri, fapte și instrumente matematice pentru a descrie, explica și prezice fenomene într-o varietate de contexte specifice secolului XXI. În comparație cu PISA 2003 și PISA 2012, există tendința de focusare mai redusă pe efectuarea calculelor și mai mult pe luarea unor decizii bazate pe informații valide și fundamentate științific în diferite contexte, astfel elaborarea raționamentelor matematice a (re)căpătat o importanță sporită și a fost evaluată separat de rezolvarea problemelor. Au fost definite patru dimensiuni de evaluare: elaborarea raționamentelor matematice, rezolvarea problemelor, competențele necesare secolului XXI și contextele în care absolvenții vor trebui să funcționeze. În paragrafele care urmează detaliem câteva caracteristici importante ale acestor dimensiuni (conform [73]).

6.1.1 Raționamentele matematice

Raționamentul matematic (atât deductiv, cât și cel inductiv) implică evaluarea situațiilor, selectarea strategiilor, formularea concluziilor logice, elaborarea și descrierea soluțiilor și recunoașterea modului în care aceste soluții pot fi aplicate. Elevii raționează matematic atunci când:

- identifică, recunosc, organizează, conectează și reprezintă (noțiuni, relații, date, etc.);
- construiesc, abstractizează, evaluează, deduc, justifică, explică și susțin (idei, conexiuni, argumente, proprietăți, raționamente, etc.);
- interpretează, judecă, critică, infirmă și califică (date, argumente, conexiuni, raționamente, proprietăți, etc.).

Capacitatea de a raționa logic și de a prezenta argumente în mod onest și convingător este o abilitate care devine din ce în ce mai importantă în lumea de astăzi. Matematica este o știință a conceptelor, noțiunilor, proprietăților și obiectelor bine definite, care pot fi analizate și transformate în diferite moduri folosind „raționamentul matematic" pentru a obține concluzii de care suntem siguri. Prin intermediul matematicii, elevii învață că, folosind un raționament adecvat, pot ajunge la rezultate și concluzii pe care le pot considera adevărate. Mai mult, aceste concluzii sunt logice și obiective și, prin urmare, imparțiale, fără a fi nevoie de validarea de către o autoritate externă. Acest tip de raționament a cărui utilitate depășește cu mult domeniul disciplinei, poate fi învățat și practicat cel mai eficient în cadrul matematicii.

Raționamentul matematic (atât deductiv, cât și inductiv) care se bazează pe înțelegerea unor concepte/noțiuni/proprietăți cheie din matematică reprezintă nucleul alfabetizării matematice. Dintre aceste conținuturi matematice în PISA 2022 au fost incluse următoarele:

- înțelegerea sistemelor de numerație, a diferitelor cantități și a proprietăților lor algebrice;
- înțelegerea și aprecierea puterii abstractizării și a reprezentării simbolice;
- explorarea structurilor matematice și a tiparelor caracteristice acestora;
- recunoașterea relațiilor funcționale dintre diferite mărimi;

- utilizarea modelării matematice ca o perspectivă asupra lumii reale (de exemplu, modele care apar în fizică, biologie, științele sociale, economice și comportamentale);

- înțelegerea noțiunii de dispersie ca una din cele mai importante noțiuni ale statisticii.

Documentul [73] detaliază fiecare conținut enumerat.

6.1.2 Rezolvarea problemelor matematice

Pentru a descrie procesele legate de rezolvarea problemelor matematice, cadrul PISA 2022 folosește capacitatea unei persoane de a formula, utiliza și interpreta (evalua) matematica. Aceste trei perspective oferă o structură utilă și semnificativă pentru organizarea proceselor matematice care descriu ceea ce fac elevii pentru a conecta contextul unei probleme cu matematica și pentru a rezolva problema. Itemii din testul PISA 2022 la matematică au fost atribuiți fie dimensiunii de raționament matematic, fie unuia dintre cele trei procese matematice care descriu procesul de rezolvare a problemelor (dar și procesul de modelare):

- formularea matematică a situațiilor;

- utilizarea de concepte, noțiuni, proprietăți și proceduri matematice;

- interpretarea, aplicarea și evaluarea rezultatelor matematice.

Formularea matematică a situațiilor în acest context de evaluare arată cât de eficient pot elevii să recunoască și să identifice oportunitățile de a utiliza matematica în situații problemă și apoi să recunoască/construiască structura matematică necesară pentru a formula problema inițială într-un cadru matematic. Procesul de formulare matematică a situațiilor include următoarele activități (fără exhaustivitate):

- selectarea unui model adecvat dintr-o listă;

- identificarea aspectelor matematice ale unei probleme situate într-un context real și identificarea variabilelor semnificative;

- recunoașterea structurii matematice (inclusiv tipare, relații și modele) în probleme sau situații;

- simplificarea unei situații sau probleme pentru a o face accesibilă prin instrumente matematice (de exemplu prin descompunere);

- identificarea constrângerilor și ipotezelor care stau la baza elaborării unui model matematic, identificarea simplificărilor desprinse din context;

- reprezentarea matematică a unei situații, utilizând variabile, simboluri, diagrame și modele standard adecvate;
- reprezentarea unei probleme într-un mod diferit, inclusiv organizarea acesteia conform conceptelor matematice și formularea unor ipoteze adecvate;
- înțelegerea și explicarea conexiunilor dintre limbajul specific contextului unei probleme și limbajul simbolic și formal necesar pentru a o reprezenta matematic;
- traducerea unei probleme în limbaj matematic;
- recunoașterea aspectelor unei probleme care corespund unor probleme, proprietăți sau concepte matematice cunoscute;
- alegerea și utilizarea celui mai eficient instrument de calcul pentru a reprezenta o relație matematică inerentă unei probleme contextualizate;
- elaborarea unei secvențe de instrucțiuni pentru rezolvarea problemelor.

Utilizarea conceptelor se referă la gradul capacităţii elevilor de a efectua calcule și de a aplica conceptele și teoremele/proprietățile pe care le cunosc pentru a obține o soluție matematică relevantă în contextul inițial al problemei. În mod concret, acest proces de utilizare a conceptelor, proprietăților și procedurilor matematice include activități precum:

- efectuarea unui calcul simplu;
- formularea unei concluzii simple;
- selectarea unei strategii adecvate dintr-o listă;
- conceperea și punerea în aplicare a unor strategii pentru obținerea unei soluții matematice;
- utilizarea instrumentelor matematice, inclusiv a tehnologiei, pentru a ajuta obținerea de soluții exacte sau aproximative;
- aplicarea proprietăților, teoremelor, regulilor, algoritmilor și structurilor matematice pe parcursul obținerii unor soluții;
- folosirea corectă a numerelor, a datelor și informațiilor grafice și statistice, a expresiilor și ecuațiilor algebrice și a reprezentărilor geometrice;
- realizarea de diagrame, grafice, simulări și construcții matematice și extragerea de informații matematice din acestea;

- utilizarea și comutarea între diferite reprezentări în procesul de căutare a soluțiilor;
- generalizarea și formularea de ipoteze pe baza rezultatelor aplicării procedurilor matematice pentru găsirea soluțiilor;
- reflectarea asupra argumentelor matematice și explicarea și justificarea rezultatelor matematice;
- evaluarea semnificației modelelor și tiparelor observate (sau propuse) în date.

Interpretarea (și evaluarea) se referă la eficiența cu care elevii sunt capabili să reflecteze asupra soluțiilor sau concluziilor matematice, să le interpreteze în contextul unei probleme din lumea reală și să determine dacă rezultatul (rezultatele) sau concluzia (concluziile) sunt rezonabile și/sau utile. Procesul de interpretare, aplicare și evaluare a rezultatelor matematice include activități precum:

- interpretarea informaţiilor prezentate sub formă grafică şi/sau prin diagrame;
- evaluarea unui rezultat matematic din punctul de vedere al contextului;
- interpretarea unui rezultat matematic sau a impactului acestuia în contextul unei probleme cotidiene/profesionale;
- evaluarea caracterului rezonabil al unei soluții matematice în contextul unei probleme din lumea reală;
- înțelegerea modului în care lumea reală influențează evaluarea rezultatelor și calculelor matematice din perspectiva luării unor decizii contextuale despre cum ar trebui să fie rezultatele pentru a putea fi aplicate;
- explicarea motivului pentru care un rezultat sau o concluzie matematică are sau nu sens, având în vedere contextul unei probleme;
- înțelegerea limitelor conceptelor și soluțiilor matematice folosite;
- criticarea și identificarea limitelor modelului utilizat pentru rezolvarea unei probleme;
- utilizarea gândirii matematice și a gândirii computaționale pentru a face predicții, pentru a oferi dovezi pentru argumente, pentru a testa și compara soluțiile propuse.

Capacitatea elevilor de a aplica matematica la probleme și situații formale și informale depinde de competențele inerente acestor trei etape, iar o înțelegere a eficacității elevilor în fiecare dintre aceste etape poate contribui la fundamentarea discuțiilor la nivel politic și a deciziilor luate. Este important de menționat că, pe parcursul acestor procese, elevii sunt încurajați să folosească instrumente și practici computaționale, tehnologice, iar în cadrul evaluării (formative sau sumative) elaborarea itemilor trebuie să aibă în vedere activitățile enumerate mai înainte.

Toate aceste procese și activități nu pot fi evaluate decât dacă sunt fixate și conținuturile la care acestea sunt raportate. Cadrul PISA 2022 a fost construit pe patru categorii de conținuturi:

- schimbare și relații (modelarea schimbărilor și relațiilor cu ajutorul funcțiilor și ecuațiilor adecvate, precum și crearea, interpretarea și traducerea reprezentărilor simbolice și grafice ale relațiilor);
- spațiu și formă (geometria este fundamentală pentru această categorie, dar categoria se extinde dincolo de geometria tradițională în ceea ce privește conținutul, semnificația și metodele folosite, bazându-se pe elemente din alte domenii matematice, cum ar fi vizualizarea spațială, folosirea unor mărimi fizice sau a algebrei);
- cantitatea (aspecte ale unor raționamente privind diferite cantități cum ar fi reprezentările numerelor, calculul structurat, calcul mental, simulările pe calculator, estimările care pot interveni în validarea calculelor și a rezultatelor);
- incertitudine și date (prezentarea și interpretarea datelor sunt concepte cheie în această categorie, dar categoria include și recunoașterea importanței cuantificării unor variații împreună cu gradul de incertitudine și de încredere al acestora, include elaborarea, interpretarea și evaluarea concluziilor în situațiile în care este prezentă incertitudinea).

Documentul [73] conține câteva exemple ilustrative pentru toate aceste categorii, potrivite atât pentru evaluările sumative, cât și pentru organizarea unor activități și efectuarea unor evaluări formative.

6.1.3 Competențele cheie pentru secolul XXI

Competențele incluse în cadrul de evaluare au fost identificate în ultimii 15 ani, atât prin proiectele proprii ale organizației OECD (The Future of Education and Skills: An OECD 2030 Framework), cât și în alte studii profesionale. Aceste competențe sunt:

- gândirea critică;
- creativitatea;
- investigarea și cercetarea;
- autodirecționarea, inițiativa și perseverența;

- utilizarea informațiilor;
- gândirea sistemică;
- comunicarea;
- reflecția.

6.1.4 Contextele de funcționare

Cadrul PISA 2022 a fost construit pe patru contexte în care pot apărea problemele care trebuie rezolvate:

- contextul personal focusat pe activitățile personale ale elevilor (incluzând și cele din cadrul familiei sau altor grupuri);
- contextul profesional (ocupațional) legat de locurile de muncă;
- contextul social focusat pe comunitatea mai largă în care elevii trăiesc și pe abordarea problemelor care apar din perspectiva comunităților (și nu din perspective individuale);
- contextul științific în care apar diferitele aplicații ale matematicii în alte domenii științifice, incluzând, bineînțeles, dezvoltarea proprie a matematicii.

Am detaliat acest context din mai multe motive:

- este cel mai recent context de evaluare folosit la nivel mondial și cu rezultate bazate pe un eșantion semnificativ, care ilustrează totodată schimbarea perspectivelor din care sunt construite instrumentele de evaluare în mai multe țări (nu numai cele ale evaluării PISA);
- arată clar că dimensiunea de raționament este distinctă de dimensiunea de rezolvare a problemelor (bineînțele, ambele dimensiuni pot fi atinse prin rezolvarea problemelor matematice, dar există un risc enorm de a rezolva o serie de probleme fără a dezvolta și partea de raționament);
- arată foarte clar că abordarea bazată și pe metode investigative poate contribui nu numai la dezvoltarea competenței de investigare/cercetare (care este listat explicit), dar și la dezvoltarea celorlalte competențe, sprijină procesele și activitățile care formează cadrul de evaluare și poate contribui la îmbunătățirea rezultatelor la toate dimensiunile de evaluare.

6.2 Instrumentele de evaluare dezvoltate în diferite proiecte

În volumul [54] (capitolul 8) sunt prezentate trei tehnici de autoevaluare utilizate în studiile metacognitive și anume: inventarul de autoevaluare, autoevaluarea retrospectivă și interviul calitativ. Inventarul constă în detalierea unor aspecte prestabilite: planificare, monitorizare sau autoverificare, strategii cognitive și conștientizare.

Autoevaluarea retrospectivă constă în raportarea în timp real sau retrospectiv de către elevi a elementelor/ideilor/gândurilor legate de rezolvarea problemelor. Această metodă s-a dovedit a fi o metodă fiabilă de colectare a datelor atunci când există și alte mijloace de triangulare a datelor, cum ar fi interviurile sau inventarul anchetei. Un exemplu de interviu calitativ cuprinde următoarele trei etape:

(a) vorbirea/gândirea cu voce tare: elevii își verbalizează gândurile în timpul procesului de rezolvare a problemelor. Informațiile consemnate sunt cele care au captat atenția elevului în timpul procesului de rezolvare a problemei;

(b) sondarea concomitentă: elevii raportează aspecte specifice care îi interesează pe profesori în cursul rezolvării problemei;

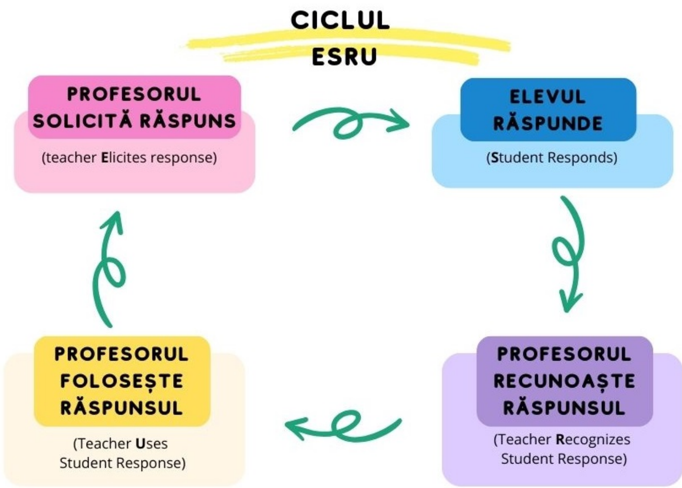
(c) sondarea retrospectivă: elevii sunt rugați să își amintească amănunte referitoare la elaborarea raționamentului după rezolvarea problemei și apoi să raporteze aspecte specifice care prezintă interes pentru evaluator.

Inițial aceste tehnici au fost dezvoltate din perspectiva cercetărilor, dar ele pot fi folosite și pentru o evaluare formativă (sau chiar sumativă, dacă probleme au fost elaborate corespunzător). Ideea fundamentală este implicarea elevilor în procesul de evaluare, prin autoevaluări și prin inter-evaluări, după discutarea criteriilor generale pe baza cărora vor fi realizate aceste evaluări.

De exemplu, în volumul [54] capitolul 9 este prezentat un instrument elaborat pornind de la activitățile echipei PRIMAS din Elveția, care a definit patru dimensiuni de evaluare a competențelor la activitățile de rezolvare de probleme: prezentarea, narațiunea, cercetarea, tehnica. Această grilă de evaluare a fost elaborată într-un grup de lucru la care au participat 18 de profesori – implicați într-un curs de perfecționare în cadrul căruia au aplicat metode investigative la orele de matematică – și poate fi folosită prin parcurgerea repetată a ciclului ESRU în cadrul unui interviu.

Deși grila pare foarte complicată la prima vedere, este un instrument util, dacă profesorul este obișnuit cu folosirea ei. De exemplu, pe parcursul unei activități de 67 de minute au fost purtate 21 de conversații evaluative cu elevii care lucrau în 4 grupe (de 4-7-5-5 elevi respectiv) și au avut loc 48 de cicluri parțiale E-S-R-U (9 cicluri complete, 26 cicluri S-R-U, 13 cicluri E-S-R) derulate în timpul unei activități investigative.

Tot în volumul [54] (capitolul 11) este descrisă o evaluare bazată pe rezolvarea unor probleme și completarea unui chestionar care prezintă abordări diferite pentru problemele rezolvate. Elevii aleg pe o scară Likert cu 6 + 1 opțiuni (dintre care primele șase se referă la cele două abordări contrastante, una mai mult investigativă și una mai mult în format clasic, iar ultima se referă la posibilele alte abordări. Abordarea este una foarte interesantă dar foarte dificil de realizat individual de către toți profesorii. Bineînțeles, elaborarea unui set de astfel de probleme la fiecare capitol, împreună cu un instrument pentru evaluare, ar elimina presiunea care apasă pe profesori.



Ciclul ESRU

Grila de criterii stabilită de grupul de lucru

Dimensiuni	**Criterii**
Prezentare	Grijă
Narațiune	• Comprehensivă • Relevantă (centrată pe investigație) și structura textului (fiecare etapă are un început, o dezvoltare și o concluzie). • Completă și cronologică (toate etapele sunt descrise, ordinea corectă).
Modelare	• Însușirea problemei: reformularea problemei în propriul limbaj și/sau exprimarea ei prin desene, diagrame, tabele. • Utilizarea instrumentelor, teoriilor și strategiilor matematice potrivite.
Cercetare	• Urmarea unei piste, a unei strategii. • Efectuarea de încercări relevante și eliminarea caracterului aleator. • Explicația și justificarea tuturor conjecturilor. • Expunerea unei conjecturi valide sau a unor conjecturi invalide. • Testarea (sau demonstrarea) fiecărei conjecturi. • Încheierea analizei fiecărei conjecturi. • Exprimarea unei concluzii globale cu privire la investigare, discuția soluției matematice în raport cu contextul problemei.
Tehnică	• Utilizarea adecvată a instrumentelor și teoriilor matematice (unități de învățare, noțiuni, teoreme etc.). • Introducerea unor notații/variabile/parametri noi.

6.2.1 Recomandări ale proiectului ASSIST-ME

Proiectul ASSIST-ME a propus patru metode de evaluare, fiecare implementat și testat la ore de matematică în cele opt țări participante, în vederea transformării metodelor actuale de predare și evaluare din perspectiva realizării unui feedback mai bun și mai eficient din partea profesorului, feedback care sprijină dezvoltarea elevilor.

Feedback scris

ASSIST-ME sugerează parcurgerea următorilor pași pentru a crește calitatea feedback-ului scris destinat elevilor:

- Elevii realizează livrabile bine specificate (rapoarte de laborator, idei pentru experimente, jurnale, hărți mentale, portofolii etc. asociate competenței vizate).
- Profesorii oferă feedback scris pe livrabilele predate fie pe hârtie, fie prin platforme digitale.
- Feedback-ul profesorilor este realizat pe formulare special concepute, care oferă o listă de verificare a criteriilor folosite și pe componentele competenței vizate pentru lecția/unitatea de învățare și arată progresul realizat în învățare.
- La primirea comentariilor din partea profesorului, fiecare elev revizuiește livrabilul relevant ținând cont de feedback-ul primit.

Feedback oral pe parcurs

ASSIST-ME sugerează următorii pași pentru a crește calitatea feedback-ului oral oferit în timp real pentru grupuri mici de elevi:

- Profesorul sugerează o activitate pentru a investiga o ipoteză care a apărut în timpul unei discuții.
- Profesorul formulează o întrebare menită să stimuleze gândirea elevilor cu privire la problema discutată.
- Profesorul pune întrebări de clarificare pentru a-i ajuta pe elevi să detalieze mai bine o contribuție aparent validă pe care au făcut-o.
- Profesorul utilizează ceea ce a spus elevul pentru a oferi feedback.
- Elevii exprimă mai multe idei care permit profesorului să le ceară să-și compare ideile.
- Profesorul obține o contribuție din partea elevilor și solicită explicații suplimentare cu intenția de a-i ajuta să-și evalueze și să-și ajusteze raționamentul.

Feedback din partea colegilor

ASSIST-ME sugerează următorii pași pentru a crește calitatea feedback-ului de la elev la elev (de la egal la egal):

- Materialele de predare și învățare elaborate vizează competențele relevante.
- Înainte de implementare, elevilor li se prezintă rolurile de evaluator și evaluat. În timpul implementării, elevii își vor schimba rolurile.
- Ca parte a materialelor de predare și învățare, elevii prezintă colegilor lor anumite artefacte pe care le produc, asociate competenței puse în evidență. Aceste artefacte pot fi produse fie de elevi individuali, fie de grupuri de elevi.
- Elevul (elevii) oferă feedback colegilor. Procesul de schimb de feedback între colegi este susținut de formulare special concepute care cuprind criterii de evaluare a artefactelor specifice. Aceste instrumente sunt dezvoltate de către profesor.

Dialog structurat de evaluare

ASSIST-ME sugerează următorii pași pentru a crește eficiența dialogului structurat de evaluare:

- Profesorii elaborează materiale didactice care vizează competențele alese.
- Planul de realizare include o conversație standardizată (5 minute) între un elev (elevul în centrul atenției) și profesor, desfășurată pe baza pregătirii elevului și a formularului completat de profesor, care reflectă cerințele pentru competența care urmează să fie evaluată. Profesorul pregătește întrebări care ajută la evaluarea progreselor elevului (atingerea obiectivelor) în procesul de învățare.
- Conversația precedentă este urmată de o fază de feedback între colegi, în care elevul vizat discută despre această conversaţie cu un grup de elevi, care oferă feedback (de ce ar fi nevoie pentru ca dialogul elev-profesor să acopere mai bine obiectivul de învățare?).
- În timpul acestor două interacțiuni, restul clasei observă și încercă să-și îmbunătățească propria înțelegere a problemelor discutate.
- La final, toți elevii formulează concluziile propriilor reflecții cu privire la nivelul atins de ei și la activitățile viitoare în vederea îmbunătățirii acestui nivel, utilizând un formular special de autoreflecție creat pentru elevi.

În cadrul proiectului ASSIST-ME au fost elaborate formulare în sprijinul recomandărilor (acestea pot fi accesate la adresa https://www.ind.ku.dk/english/projects/assist-me/). Anexa livrabilului D4.7 ([40], https://www.ind.ku.dk/english/projects/assist-me/documents/researchers-documents/project-outcomes/D4.7.pdf) conține și un tabel cu etape de învățare pentru competența de rezolvare a problemelor, care poate fi urmărit în cadrul evaluărilor formative (bazat pe cadrul de evaluare PISA 2013).

6.2.2 Abordarea din proiectul SAILS și câteva concluzii

Concluziile principale ale proiectului SAILS au fost următoarele:

- Profesorii pot dezvolta strategii de evaluare relevante pentru investigații specifice.
- Profesorii pot evalua elevii în timpul unei activități investigative și le pot oferi feedback pentru a le permite să efectueze schimbări în activitatea lor.
- Alegerea investigațiilor de obicei se bazează pe conținuturile specifice și afectează alegerea dimensiunilor de evaluare.
- Unele aspecte ale investigațiilor sprijină realizarea conexiunilor între progresul individual, autoevaluarea și evaluarea colegială.

În cadrul acestui proiect, au fost elaborate 19 unități de învățare care cuprind și perspectivele de evaluare. Aceste unități au fost puse în aplicare în mai multe țări, iar cele două volume elaborate conțin și feedback-ul din cadrul acestor implementări. Cadrul de evaluare SAILS a fost construit având în vedere cinci competențe:

- elaborarea de ipoteze;
- planificarea și implementarea investigațiilor;
- formularea de argumente coerente și munca în colaborare;
- elaborarea de raționamente științifice;
- alfabetizare științifică.

Principalele metode de evaluare propuse sunt:

- dialogul în clasă;
- observarea activității de către profesor;
- evaluarea de către colegi;
- autoevaluarea;
- fișele de lucru;
- materiale concepute de elevi;

- alte elemente de evaluare (test post-activitate);

La fiecare unitate propusă autorii au specificat și competențele vizate de unitatea respectivă și au elaborat formulare pentru autoevaluare, pentru evaluare colegială, diferite tabele pentru a evalua nivelul competențelor vizate. De asemenea, ei au prezentat mai multe studii de caz din diferite țări în care a fost implementată unitatea respectivă, împreună cu criteriile specifice de evaluare adaptate la standardele naționale.

7 Dezvoltarea profesională a profesorilor

7.1 Modelul conceptual al lui Clarke și Hollingsworth

În ultimele decenii, au fost efectuate numeroase cercetări în legătură cu dezvoltarea profesională continuă (CPD) și au fost elaborate criterii de calitate aferente. Pentru a fi eficientă, CPD ar trebui să fie colaborativă și extinsă în timp, să includă timp pentru practică, coaching și urmărire, să fie fundamentată pe curriculum-ul elevilor și aliniată la politicile locale, să fie încorporată în lumea muncii și conectată la mai multe elemente de instruire ([83], [20]). Cercetările indică faptul că activitățile comunicative și activitățile de cooperare reprezintă factorii de bază care favorizează impactul durabil al programelor CPD ([51]). Lerman și Zehetmeier afirmă, de asemenea, că în special furnizarea unor oportunități bogate de reflecție și discuție în colaborare (exemple de practici profesionale, analiza muncii elevilor, a greșelilor sau a altor aspecte ale predării) reprezintă o caracteristică de bază a proceselor de schimbare eficiente. De asemenea, există tot mai multe dovezi că un ingredient-cheie pentru un program CPD eficient este colaborarea între profesori. ([89]).

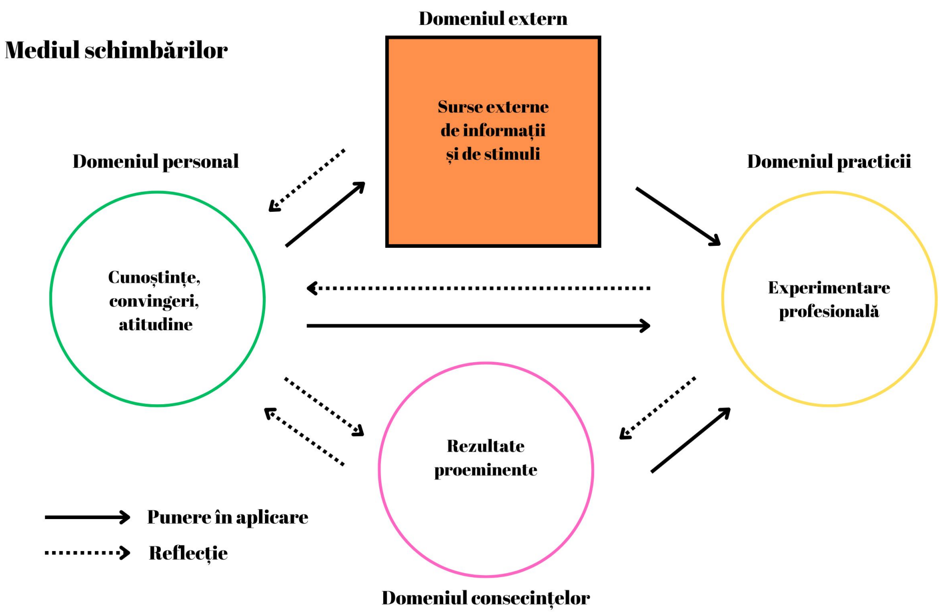
Pentru a urmări și a sprijini dezvoltarea profesională a cadrelor didactice, au fost elaborate diverse modele conceptuale, unele liniare (modelul lui Guskey, vezi [41]), sau ciclice (vezi [100] sau [99]), dar cel mai robust și mai eficient atât din punct de vedere al cercetării, cât și din punct de vedere practic, s-a dovedit modelul dezvoltării profesionale a cadrelor didactice, elaborat de Clarke și Hollingsworth ([26]). Acesta poate avea atât secvențe liniare, cât și secvențe ciclice, dar, datorită flexibilității sale, permite și secvențe mai complexe. Modelul operează cu patru domenii:

- domeniul personal, care cuprinde bagajul de cunoștințe al profesorului, convingerile sale și atitudinile sale privind situațiile care intervin la orele de matematică sau în procesul educațional în general;

- domeniul practicii, care cuprinde activitatea sa profesională de la planificarea activităților, derularea activităților, evaluarea elevilor la analiza activităților, până la activitatea lui în comunitatea profesională, însă acest domeniu este mai ales zona în care individul poate experimenta/implementa schimbări;

- domeniul extern, care cuprinde sursele externe de informații, discuțiile cu alți specialiști, elemente de la cursurile de formare, toate având specificul de a crea o disonanță cognitivă, de a scoate individul din zona de confort (dar nu și din zona proximei dezvoltări);
- domeniul consecințelor proeminente, adică zona în care individul poate observa rezultate, schimbări sau lipsa acestora.

În acest model, autorii au identificat două tipuri de interacțiuni între domeniile enumerate. O interacțiune de tip acțiune, care înseamnă punerea în aplicare, adaptarea unor elemente dintr-un domeniu (de exemplu metode noi de abordare ale unor conținuturi) într-un alt domeniu (de exemplu domeniul practicii) – și o interacțiune de tip reacție care se manifestă la nivel metacognitiv prin reflecție.



Modelul interconectat al dezvoltării profesionale a cadrelor didactice

Sunt mai multe aspecte importante care trebuie remarcate în acest model:

- între domeniul personal și domeniul consecințelor nu există interacțiune directă de tip acțiune, deci schimbările în domeniul personal nu se vor produce în mod automat, în urma unor rezultate din domeniul consecințelor. Pentru aceasta este nevoie de reflecții, iar pentru producerea unor schimbări în urma reflecțiilor este esențială autonomia profesională;
- nu există interacțiuni de tip acțiune care să acționeze asupra domeniului personal, deci schimbările în domeniul personal nu se vor produce în mod automat nici

prin introducerea elementelor externe noi, nici prin schimbări implementate în domeniul practicii, dar nici în urma rezultatelor obținute (oricare ar fi acestea) – este nevoie iarăși de reflecții asupra tuturor acestor aspecte;

- folosind cadrul conceptual al acestui model, putem descrie sau urmări o serie de activități complexe atât la nivelul individual al fiecărui profesor, cât și la nivelul organizării unor cursuri de formare.

Modelul interconectat face diferența între ceea ce se numește „secvențe de schimbări” și „rețele de dezvoltare”. Schimbarea într-un domeniu poate să nu conducă la schimbări într-un alt domeniu, dar atunci când se întâmplă o schimbare, se folosește termenul de „secvență de schimbare”. O secvență de schimbare constă în una sau două legături între domenii, fie prin punere în aplicare, fie prin reflecție. Termenul „dezvoltare” este rezervat schimbărilor mai durabile. O „rețea de dezvoltare” cuprinde mai mult de două legături și implică dovezi ale unor schimbări durabile fie în practică, fie în cunoștințe sau convingeri.

În prezentarea [103] autorii au identificat similarități, dar și diferențe marcante între profesorii din Norvegia și profesorii din România care au experimentat implementarea metodelor investigative în proiectul Mascil. De exemplu, interacțiunea de tip reflecție spre domeniul consecințelor a apărut în ambele țări numai dinspre domeniul practicii, dar secvența

$$\text{Domeniul extern} \rightarrow \text{Domeniul practicii} \rightarrow \text{Domeniul personal}$$

nu a apărut decât în Norvegia. De asemenea rețeaua de dezvoltare

$$\text{Domeniul extern} \rightarrow \text{Domeniul practicii} \rightarrow \text{Domeniul personal} \rightarrow \text{Domeniul practicii}$$

a apărut în ambele țări, dar ciclul

$$\text{Domeniul practicii} \rightarrow \text{Domeniul consecințelor} \rightarrow \text{Domeniul personal} \rightarrow$$
$$\rightarrow \text{Domeniul practicii}$$

nu a apărut în interviurile profesorilor norvegieni. Deși interviurile provin de la un număr redus de profesori din ambele țări, ele arată că tiparele de evoluție profesională pot fi diferite în contexte sociale diferite, chiar dacă cursurile de formare au fost gândite din aceeași perspectivă și s-a folosit aceeași colecție de materiale ca factor de influență din domeniul extern. Multitudinea de posibilități și analiza interviurilor arată clar că percepția și procesul de dezvoltare al profesorilor privind aplicarea metodelor investigative poate fi foarte diferită, chiar dacă contextul social este același. Acest aspect nu poate fi neglijat nici la construirea cursurilor de formare, dar nici la elaborarea materialelor didactice, nici la diferitele abordări ale unităților de învățare și nici la studiul impactului.

7.2 Caracteristici ale metodelor investigative la orele de matematică și aplicarea acestora în cursurile de formare

Un curs de formare poate fi organizat în foarte multe moduri, ca mod efectiv de realizare sau chiar la nivel de planificare conceptuală. În acest paragraf nu dorim să discutăm aceste aspecte, doar dorim să punctăm unele repere care trebuie urmărite indiferent de derularea efectivă a cursurilor. Aceste repere au fost discutate și experimentate în 14 țări europene în perioada 2010–2013 în cadrul proiectului PRIMAS și au fost implementate în mai multe țări după 2013. Una dintre țările în care a fost documentat procesul complet a fost Malta (vezi [21]). Autorul articolului citat scoate în evidență patru caracteristici: sarcinile matematice, învățarea colaborativă, întrebările investigative și responsabilizarea elevilor. Toate sunt de fapt gândite din perspectiva rolului care îi revine profesorului în selectarea sarcinilor, planificarea orelor, organizarea și gestionarea clasei și orchestrarea învățării. Deși cele patru caracteristici pot apărea ca fiind distincte, în cadrul lecțiilor IBL acestea de regulă se suprapun și sunt conectate între ele. Această interconectare trebuie să se manifeste atât în timpul lecțiilor cu elevii, cât și în timpul atelierelor CPD cu profesorii.

O provocare majoră pentru profesori pare a fi adoptarea și integrarea pedagogiilor IBL ca parte a predării, deoarece acestea necesită pe de o parte competențe străine de abordările tradiționale de la orele de matematică, dar pe de altă parte, în unele cazuri necesită și o înțelegere mai profundă a motivațiilor profesionale din spatele conținuturilor. În vederea consolidării schimbărilor în domeniul personal și în domeniul practicii, cursurile de formare care s-au dovedit eficiente din perspectiva metodelor investigative au fost concepute în jurul acestor patru caracteristici pentru a transmite un mesaj coerent de IBL ([92]). De exemplu, în transmiterea către profesori a semnificației transferului responsabilității către elevi și în sprijinirea dezvoltării identității profesionale, profesorii înșiși trebuie să fie responsabilizați și sprijiniți în preluarea unui control semnificativ privind conținuturile, ideile discutate, în testarea ideilor prezentate, în împărtășirea experiențelor (și nu numai a cazurilor de succes), precum și în adaptarea și construirea propriilor perspective teoretice ale predării prin investigație. Scopul unui curs de dezvoltare profesională este de a prezenta pedagogii care să stimuleze profesorii să acționeze, să vorbească și să gândească dintr-o perspectivă IBL.

Caracteristici	Rolul profesorului	Condiții pentru IBL
Sarcini (probleme, contexte, situații problemă) matematice	Profesorul prezintă probleme, situații problemă sau contexte matematice bogate care implică elevii în elaborarea unor raționamente în timp ce accesează activ conținutul și realizează conexiuni.	Sarcinile prezentate • sunt accesibile tuturor elevilor; • oferă provocări realizabile; • contribuie la înțelegerea conceptuală și la dezvoltarea proceselor de gândire, a fluenței în comunicarea rezultatelor; • pot fi abordate prin multiple strategii sau metode de rezolvare; • valorifică mai degrabă procesul decât răspunsul.
Învățarea colaborativă	Profesorul oferă un mediu de colaborare care implică elevii în schimbul de idei / dezbaterea argumentelor facilitând și construirea conceptelor matematice.	Cultura clasei • sprijină schimbul de idei și abordări; • valorifică diversitatea ideilor și a înțelegerii; • promovează discuții și analize critice; • recunoaște că elevii pot învăța unii de la alții.
Întrebări cu intenții didactice și profesionale	Profesorul folosește întrebări care stimulează raționamentul și stimulează elevii să își comunice gândurile și ideile matematice într-o formă structurată.	Întrebările profesorului • sunt planificate în prealabil; • ajută gândirea elevilor și elaborarea raționamentelor; • favorizează evaluarea și comunicarea diferitelor strategii; • scot în evidență concepțiile greșite; • sprijină elevul să învețe din greșeli; • încurajează explorarea abordărilor alternative.
Responsabilitățile elevilor și identitatea lor profesională	Profesorul oferă oportunități elevilor să își asume mai multe responsabilități în învățare și lucrează pentru a-i sprijini să devină mai activi în asumarea unor roluri.	Responsabilitățile elevilor • selectarea problemelor de rezolvat (când este cazul); • formularea propriilor întrebări și a răspunsurilor la acestea; • luarea de decizii; • conceperea și elaborarea strategiilor; • prezentarea ideilor; • criticarea punctelor de vedere.

Aplicarea caracteristicilor	Profesorii în școli	Formatorii la cursurile de formare profesională
Folosirea sarcinilor autentice, bogate	Prezintă elevilor sarcini matematice autentice, prin care ei pot aborda și experimenta atât noțiunile matematice, cât și conexiunile dintre noțiuni.	Prezintă sarcini care oferă profesorilor oportunități de a explora, interpreta, experimenta și dezvolte cunoștințe autentice profunde despre investigațiile matematice.
Cultivarea unui mediu colaborativ	Organizează activități în grupuri mici pentru ca elevii să împărtășească idei, să formuleze argumente matematice, să elaboreze raționamente și să discute opinii.	Organizează activități de colaborare pentru ca profesorii să reflecteze și să evalueze practicile și consecințele folosirii unor abordări, atât la nivelul pedagogiilor, cât și la nivelul rezolvării efective a unor probleme. Furnizează provocări noi și generează disonanțe cognitive.
Promovarea unei atitudini investigative	Pun întrebări care stimulează formularea unor argumente, elaborarea unor raționamente. Susțin învățarea și încurajează elevii să comunice, să-și formuleze ideile într-o formă structurată, într-o formă matematică.	Dezvoltă un mediu bazat pe formularea întrebărilor relevante, pe căutarea răspunsurilor, pe analiza metodelor și a practicilor didactice folosite, cu scopul de a angrena profesorii într-o serie de dezbateri bazate pe reflecții și analize profunde privind toate aspectele procesului didactic. Sprijină profesorii, în asumarea unor roluri mai active în dezvoltarea lor profesională.
Transferul responsabilității în învățare și sprijinirea dezvoltării unei identități profesionale	Oferă elevilor oportunități pentru a-și asuma mai multă responsabilitate în procesul dezvoltării lor, sprijină dezvoltarea unei încrederi în importanța implicării active în studiul matematicii.	Oferă experiențe care să sprijine dezvoltarea încrederii în capacitățile proprii ale profesorilor privind planificarea, implementarea și evaluarea practicilor bazate pe investigație.

Mai multe detalii despre cursurile de formare care au constituit punctul de pornire pentru trecerea la metodele investigative în mai multe țări europene, precum și câteva exemple de materiale pot fi consultate în ghidul elaborat în cadrul proiectului Primas

([82]). Au avut loc o serie de activități experimentale și în România, în majoritatea activităților au fost implicați elevi de liceu și unele materiale abordate au fost incluse în cartea Primas publicată în limba română ([3]). Unele dintre activitățile prezentate în această carte pot fi folosite și la clase gimnaziale, bineînțeles, prin renunțarea la unele aspecte ale formalismului folosit. Pentru o exemplificare concretă prezentăm două astfel de probleme.

1. Problema bicicletei

Doi bicicliști pleacă într-o excursie, în timpul căreia călătoresc cu trenul până în localitatea A, de acolo se deplasează pe un teren accidentat, pe bicicletă, până în localitatea B, iar din B se întorc acasă cu trenul. Pe porțiunea dintre A și B, în punctul C, una dintre biciclete nu se mai poate folosi pentru că a căzut într-o prăpastie. Distanța dintre C și B este de 40 kilometri, distanța între A și C este de 60 km, iar trenul care i-ar duce acasă din B pleacă peste 5 ore și jumătate. Când merg pe jos, cei doi au viteza $v_1 = 5$ km/h, iar când merg pe bicicletă, au viteza $v_2 = 20$ km/h. Pot să ajungă amândoi la timp în B pentru a prinde trenul, dacă nu pot folosi simultan bicicleta?

Încercați să extindeți rezultatele la cazul în care sunt mai mulți bicicliști și mai multe biciclete devin nefolosibile și încercați să formulați rezultatele în limbaj matematic cu argumente complete.

2. Configurații cu pătrate

Problema apare și în cartea fundamentală scrisă de Spencer Kagan despre metodele cooperative, dar în contextul original este destinată elevilor din ciclul primar. În timpul acestei activităţi, elevii sunt împărțiți în grupe de câte 4 şi fiecare elev primeşte 3 fâșii de hârtie identice (aproximativ 20 cm lungime, $1,5$ cm lățime). În locul fâșiilor de hârtie pot fi folosite bețișoare sau chibrituri mari. Fiecare grupă trebuie să creeze (să aranjeze) și să deseneze configurații în care apar $1, 2, 3, \ldots$ pătrate respectând următoarele reguli:

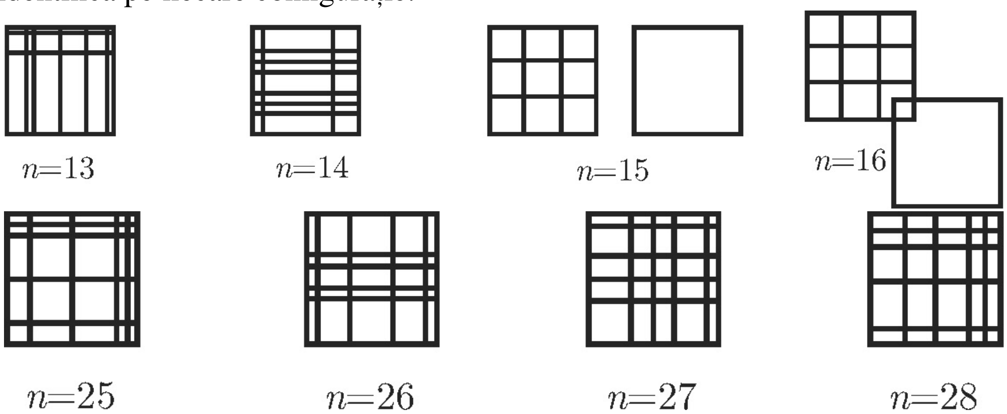
- în configurația desenată fiecare fâșie de hârtie este importantă, adică dacă se înlătură una din ele, se schimbă numărul pătratelor din figură;
- fiecare grupă trebuie să folosească la fiecare configurație toate fâșiile de hârtie pe care le are la dispoziţie;
- nu există extremităţi libere, adică la fiecare capăt al unei fâșii se atașează capătul altei fâșii;
- nu există acoperiri parțiale sau totale, adică fâșiile paralele nu au părți care se suprapun – ceea ce nu exclude intersecția fâșiilor de hârtie neparalele.

În primele 15-20 minute ale activității, elevii trebuie să aranjeze fâșiile de hârtie în diferite configuraţii, apoi, timp de 10-15 minute, să deseneze configurațiile posibile, după aceea fiecare grupă trebuie să deseneze configurațiile obţinute pe un poster comun.

În etapa următoare a activității, elevii trebuie să formuleze întrebări legate de activitatea lor (inclusiv despre configurațiile obţinute), apoi să ordoneze problemele după gradul de dificultate (fără a cunoaște soluția lor) și din aceste probleme să aleagă câteva pe care cred că le pot rezolva și să le rezolve.

Aceste probleme au fost folosite și la cursuri de formare unde profesorii, după ce au elaborat propriile lor soluții și generalizări, au avut de analizat lucrările elevilor, au discutat despre posibilele dificulăți cu care elevii se pot confrunta și strategiile didactice cu care putem ajuta elevii pe parcursul rezolvării acestor probleme. Putem observa, că prima este mai mult apropiată de PBL, unde problema fundamentală este formulată din start, iar a doua este o investigație mai deschisă în care nu am formulat o problemă matematică concretă. Problema fundamentală la această activitate este legată de numărul maxim de pătrate care pot apărea (55) sau descrierea tuturor posibilităților. Această problemă poate fi foarte ușor dirijată de către profesor sau chiar transformată pe parcurs, dacă la rândul său a efectuat un raționament investigativ în acest context și este conștient de dificultățile care pot apărea.

În figurile alăturate avem câteva configurații posibile și numărul de pătrate care se pot identifica pe fiecare configurație.



Este important faptul că niciuna din cele două probleme nu abordează obiectivele de învățare în mod direct. La prima problemă, obiectivul este ca elevii să modeleze o situație complexă și să formuleze ipoteze pe care să le verifice folosind noțiunea de viteză. La nivel formal obiectivul este să folosească inegalități. În cazul problemei a doua, obiectivul este să numere corect pătratele pe o configurație complexă. Participanții cursurilor de formare trebuie să treacă prin procesul de investigare tocmai pentru a înțelege cum se leagă aceste obiective de activitatea propriu zisă și să poată ghida elevii, dacă aceștia omit elemente esențiale care ulterior duc la ratarea acestor obiective. O altă concluzie importantă de la aceste cursuri este că, în clasă se poate întâmpla ca profesorii care nu au parcurs procesul de investigare să nu poată reacționa în timp real la unele întrebări la care ar trebui să răspundă. În cartea Primas (care poate fi accesată online aici cu parola Primas2013! sau fără parolă de la adresa https://simplexportal.ro/tananyagok/primas/primas_ro_opt.pdf) am detaliat câteva idei importante legate de soluția acestor două probleme.

8 Anexe

8.1 Să construim numerele!

Conținuturile vizate la aceste activități: numere prime, divizori, teorema fundamentală a aritmeticii, cel mai mare divizor comun, cel mai mic multiplu comun, numărul divizorilor.

8.1.1 Cadrul conceptual

Această unitate de învăţare cuprinde 2–4 activităţi care sunt bazate pe modelul conceptual trifazic descris în lucrarea [14].

Unitatea de faţă a fost concepută nu numai pentru a investiga conţinuturi matematice, ci şi în vederea sprijinirii acestui proces de scufundare în investigaţii din ce în ce mai complexe. Întrucât acest proces depinde de elevi (atât din punctul de vedere al cunoştinţelor, cât şi din punctul de vedere al metodei de lucru), dar şi de profesor, nu am fragmentat procesul în lecţii separate, ci am înşirat practic întrebările/sarcinile propuse pentru abordarea temei. Totuşi precizăm câteva sugestii metodologice sau de ordin organizatoric.

- Scopul activităților este de a introduce conceptul de număr prim, teorema fundamentală a aritmeticii, noţiunea de divizor, respectiv cel mai mare divizor comun şi cel mai mic multiplu comun şi de a deduce formula de calcul pentru numărul divizorilor. Toate aceste denumiri trebuie să apară numai după ce elevii au formulat cu propriile cuvinte, la nivelul intuitiv, proprietăţi care indică înţelegerea conceptuală sau procedurală a unor aspecte importante.

- Contextul de bază este introdus prin folosirea unui set de blocuri Lego şi are rolul de a capta atenţia elevilor. Recomandarea este de a fragmenta investigaţia în patru activităţi distincte. Prima dintre acestea este dedicată introducerii numerelor prime şi înţelegerii teoremei fundamentale a aritmeticii. A doua activitate poate fi dedicată fundamentării noţiunii de divizor şi multiplu, respectiv stabilirii formulei de calcul a numărului divizorilor pe baza factorizării. Următoarea activitate sau următoarele două activităţi pot fi dedicate noţiunilor de cel mai mic multiplu comun şi cel mai mare divizor comun. Întrucât nu există transfer direct de la înţelegerea conceptelor la aplicaţiile lor în contexte cotidiene, se poate completa cu o activitate separată dedicată acestor aspecte, sau aceste aspecte pot fi incluse în celelalte activităţi.

- Elevii vor lucra în echipe formate din 3-4 elevi. Fiecare echipă va avea la dispoziţie o suprafaţă orizontală de aproximativ 1 m^2 şi vor primi câte un set de blocuri Lego de dimensiuni egale, având cel puţin 7-8 culori diferite (albastru, verde, roşu, alb, galben, negru, portocaliu, mov, etc.), 21 de bucăţi de culoare albastră şi 10-15 bucăţi din celelalte culori. Profesorul va mai pregăti şi câte un set de cartonaşe identice pe care le va da elevilor numai la rezolvarea problemei 4).

- O metodă de lucru eficientă s-a dovedit a fi ca fiecare echipă să fotografieze construcţiile pe care le face la câte o problemă, urmând ca acestea să fie afişate pe o tablă digitală (sau proiectate pe un ecran) şi pe baza acestor fotografii să discute raţionamentele pe baza cărora au realizat acele construcţii. Este important ca în urma acestor discuţii să fie introduse denumirile corecte şi să fie fixate noţiunile noi (în mod etapizat).

8.1.2 Derularea activităţilor

1) Construcțiile de pe biroul profesorului reprezintă numerele: 6, 12, 75, 99, 245 și 1001. Blocurile de construcție (elementele Lego) reprezintă câte un număr, aceeași culoare reprezentând același număr. Liantul (mortarul) care ține construcţia împreună este o operație. Sarcina este să aflaţi această operaţie şi să stabiliţi valoarea reprezentată de fiecare culoare.

8.1. Comentarii. Operaţia căutată este înmulţirea, iar culorile reprezintă următoarele numere:

- albastru → 2
- verde → 3
- roşu → 5
- alb → 7
- galben → 11
- negru → 13

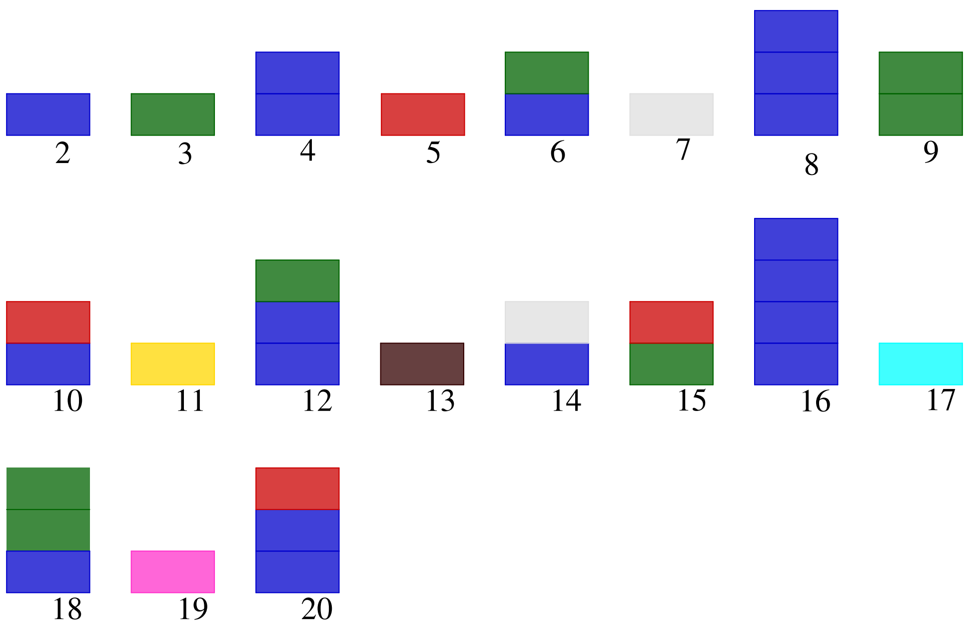
Dacă elevii nu se descurcă din prima încercare, atunci profesorul poate da exemple de alte construcţii folosind numere mai mici (mai ales pentru identificarea factorilor 7 şi 11). De exemplu 4, sau 33, sau 25, pentru a compara acestea cu 12, 99, 75, până când cineva observă că adăugarea unui bloc Lego de culoarea verde înseamnă că valoarea creşte de trei ori. Este important ca operaţia de înmulţire să fie recunoscută de elevi – chiar dacă profesorul simte nevoia să explice ce înseamnă o operaţie, s-o facă pe un exemplu din care să nu rezulte faptul că este vorba de înmulţire.

2) a) Ce numere de la 2 la 20 pot fi construite în mod similar folosind culorile folosite anterior?

b) Construiţi toate aceste numere. Care sunt numerele (de la 2 la 20) care nu pot fi construite astfel? Atribuiţi câte o culoare nouă fiecăruia dintre acestea și adăugați-le la setul vostru.

c) Dacă dorim să obținem toate numerele până la 100 din cuburi Lego, câte culori trebuie să mai adăugăm la set? În câte moduri putem reprezenta numerele?

8.2. Comentarii. Printre numerele de la 2 la 20 numai 17 şi 19 nu se poate scrie ca produsul a două numere mai mici (care deja au fost reprezentate). În figura de mai jos putem vedea reprezentările numerelor şi cele două culori atribuite numerelor 17 respectiv 19.



Pentru a vedea care sunt numerele pentru care trebuie să mai adăugăm şi alte culori, putem proceda fie prin construcţia efectivă a numerelor, fie prin eliminarea acelora care se pot construi. Astfel orice număr par are cel puţin un bloc Lego albastru, deci pentru a depista numerele pentru care trebuie să asignăm o culoare nouă nu mai trebuie să verificăm numerele pare mai mari decât 2. La fel, multiplii lui 3 se pot elimina şi aşa mai departe ajungem practic la ciurul lui Eratostene şi obţinem numerele pentru care este nevoie de o culoare separată (la început am înşirat şi cele deja folosite):

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67,$$

$$71, 73, 79, 83, 89, 97,$$

deci ar mai fi nevoie de încă 17 culori.

Pe baza exemplelor studiate elevii îşi vor putea da seama că reprezentarea unui număr este unică în sensul că elementele Lego din care este construit un nunăr sunt determinate în mod unic. De exemplu, 12 poate fi reprezentat prin două blocuri albastre şi un bloc Lego verde (pe care le putem suprapune în orice ordine).

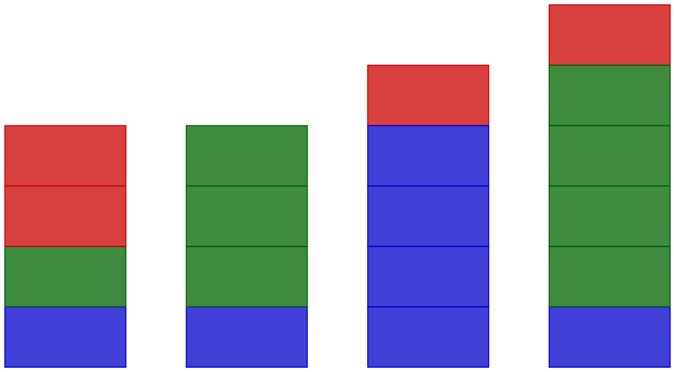
3) Ce proprietate au în comun numerele reprezentate de culorile din set?

8.3. Comentarii. Numerele reprezentate prin culori diferite nu se pot scrie sub forma unui produs $a \cdot b$, unde $a, b \geq 2$, deci ajungem la definiţia numerelor prime. Este de remarcat faptul că nu am definit încă noţiunea de divizor, deci definiţia nu este legată de această noţiune, ci efectiv de operaţia de înmulţire. Un avantaj al acestei abordări este faptul că elevii vor formula prin cuvinte proprii definiţia numerelor prime, poate nu chiar exact, dar definiţia corectă oricum se va baza pe formulările lor şi pe intuiţia lor. În acest context nu mai este necesar să subliniem că numerele prime au o importanţă deosebită în matematică, pentru că este clar pentru toată lumea că toate numerele se pot construi pornind de la numerele prime, deci acestea sunt elementele de bază.

4) Ce s-ar fi schimbat dacă ai fi adăugat la set o culoare şi pentru numărul 1?

8.4. Comentarii. Dacă şi numărul 1 ar fi reprezentat de o culoare, atunci pentru orice număr ar exista o infinitate de reprezentări (pentru că am putea folosi oricâte blocuri cu valoarea 1). Pentru a evita acest lucru, numărul 1 nu îl vom reprezenta cu blocuri Lego, ci cu ajutorul unui pătrăţel de hârtie care este pus sub fiecare construcţie, ca şi cum ar fi baza (fundaţia) construcţiei. Acest aspect este important pentru a defini corect divizorii unui număr şi a evita tratarea separată a divizorilor proprii.

5) Construiți din setul vostru numerele 150, 54, 80 şi 810.

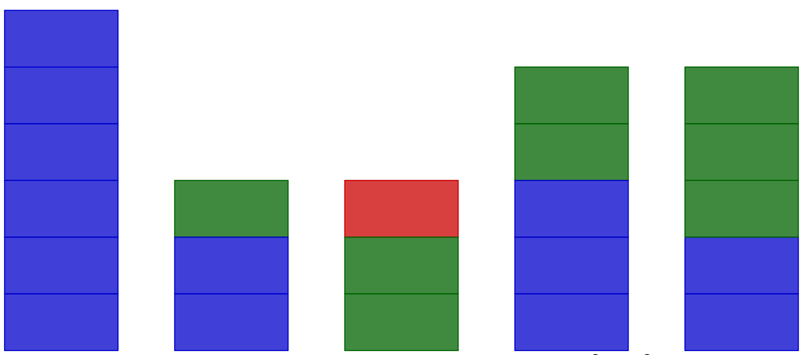


$150 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2$ $54 = 2 \cdot 3^3$ $80 = 2^4 \cdot 5$ $810 = 2 \cdot 3^4 \cdot 5$

8.5. Comentarii. Aceste reprezentări se pot obţine în mai multe moduri, dar oferă o oportunitate pentru a discuta eventualele abordări, algoritmi pe care le putem folosi. De exemplu, luăm numerele prime în ordine crescătoare şi verificăm dacă numărul ales divide numărul dat în problemă. Dacă am găsit un divizor prim, atunci în continuare vom căuta divizorii primi ai câtului, fără a mai reveni la numerele prime mai mici. De exemplu, după ce am împărţit 54 la 2 şi am obţinut câtul 27 verificăm dacă se mai divide cu 2 şi după acesta încercăm să împărţim 27 la 3, iar după ce obţinem câtul 9 nu mai revenim la numărul prim 2, ci verificăm divizibilitatea cu 3. Totodată acest exerciţiu oferă oportunitatea de a discuta teorema fundamentală a aritmeticii şi anume faptul că orice număr natural mai mare ca 1 admite o descompunere unică în produs de puteri ale unor numere prime. Unicitatea în acest caz înseamnă că numerele prime şi exponenţii care intervin sunt determinate în mod unic.

6) a) Construiți din setul vostru numerele 64, 12, 45, 72, 108.

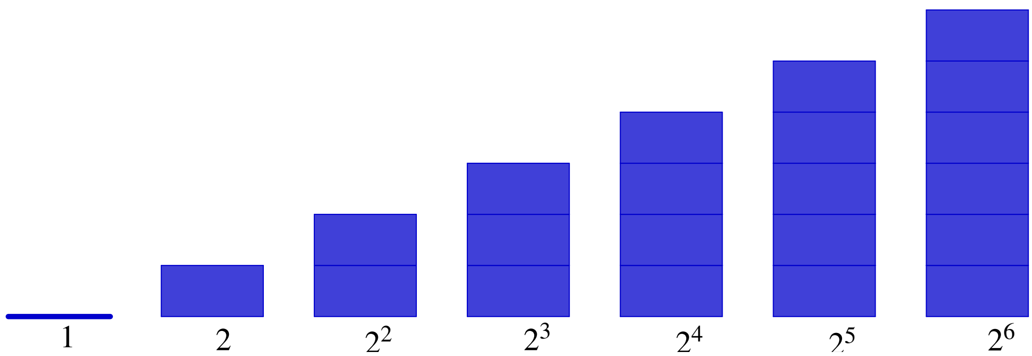
b) Separat pentru fiecare construcție obţinută la punctul a), realizaţi toate construcțiile care pot fi produse folosind numai o parte dintre piesele folosite la reprezentarea numărului.



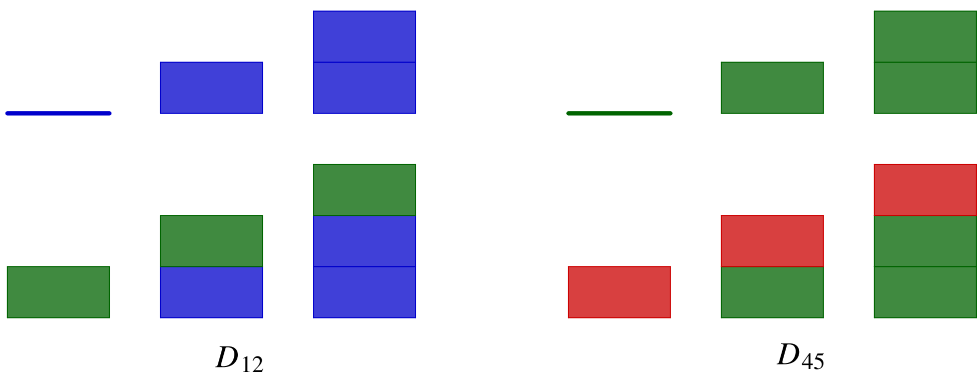
$64 = 2^6$ $12 = 2^2 \cdot 3$ $45 = 3^2 \cdot 5$ $72 = 2^3 \cdot 3^2$ $108 = 2^2 \cdot 3^3$

8.6. Comentarii. O parte a unei construcţii reprezintă un divizor al numărului reprezentat de construcţia iniţială. Rolul exerciţiului este de a fixa această noţiune. Totodată punctul b) oferă posibilitatea de a discuta două chestiuni importante: numărul divizorilor unui număr care este puterea unui număr prim şi faptul că numărul divizorilor depinde numai de exponenţii care intervin în descompunerea în factori primi al numărului, nu şi de numerele prime din această descompunere. Mulţimea divizorilor unui număr n o vom nota cu D_n.

Divizorii puterii unui număr prim:



Divizorii unui număr de forma $p_1^2 \cdot p_2$, unde p_1 şi p_2 sunt numere prime:



7) Construiţi toţi divizorii pentru numerele de la problema 5).

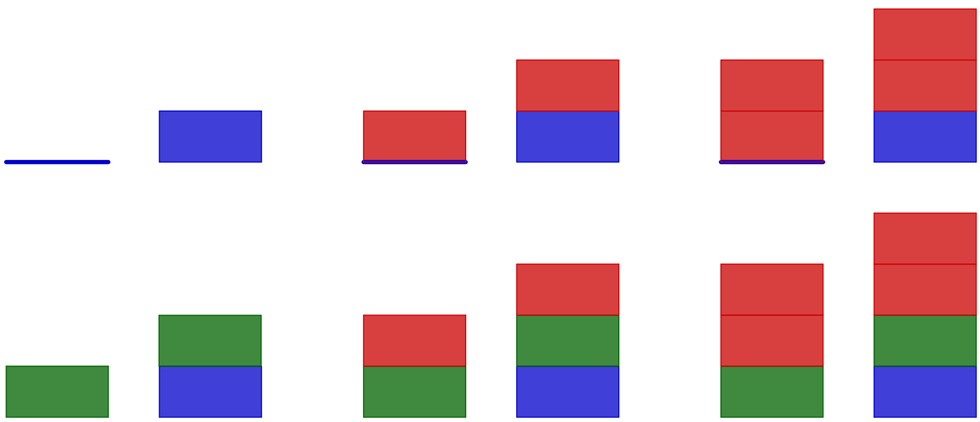
8.7. Comentarii. În cazul numerelor 54 şi 80, folosind ideea de la problema precedentă, obţinem divizorii

$$D_{54} = \{1, 3, 3^2, 3^3, 2, 2 \cdot 3, 2 \cdot 3^2, 2 \cdot 3^3\}$$

$$D_{80} = \{1, 2, 2^2, 2^3, 2^4, 5, 5 \cdot 2, 5 \cdot 2^2, 5 \cdot 2^3, 5 \cdot 2^4\}$$

Din aceste cazuri putem deduce că, în general, numărul divizorilor numărului $n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2}$ este $(k_1 + 1) \cdot (k_2 + 1)$.

Dacă avem mai mulţi factori primi, atunci mai avem nevoie de o idee. Vom enumera divizorii lui 150 prin adăugarea treptată a factorilor primi. La divizorii lui 2, adică la 1, 2 adăugăm factorul 3. Astfel obţinem primele două coloane din figura alăturată. Dacă la toate aceste elemente adăugăm factorul 5 respectiv 5^2, atunci obţinem coloanele 3 și 4 respectiv 5 și 6. În total avem $2 \cdot 2$ elemente în primele două coloane (aici se aplică regula formulată mai înainte) şi avem 3 astfel de blocuri, deci în total $4 \cdot 3 = 12$ divizori.



D_{150}

Pentru numărul 810 obţinem în mod analog $2 \cdot 5 \cdot 2 = 20$ de divizori.

8) Câți divizori au numerele din problema 5) şi 6)? Încercaţi să calculaţi numărul divizorilor fără a enumera toţi divizorii.

8.8. Comentarii. Problema aceasta are rolul de a fixa ideile din cele două probleme precedente şi de a crea un context pentru intuirea unei proprietăţi mai generale. Practic, în rezolvarea următoarelor 5 probleme, elevii pot parcurge pas cu pas raţionamentul care duce la formula numărului divizorilor, dar bineînţeles pot ajunge la înţelegerea acestei proprietăţi mai repede şi atunci nu vor mai folosi blocurile Lego pentru a scrie divizorii. Astfel problema 9) este pentru a fixa ideea că un număr de forma p^k are exact $k + 1$ divizori şi aceştia sunt $\{1, p, p^2, \ldots, p^k\}$. Problemele 10) și 11) au rolul de a fixa cazul numerelor de forma $n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2}$ cu $(k_1 + 1) \cdot (k_2 + 1)$ divizori. Deşi în problema 11) aparent nu facem altceva decât repetăm ideea aranjării sub forma unui tabel a divizorilor, avem oportunitatea de a pregăti rezolvarea problemei 12) care este cheia trecerii la cazul general. În problema 13), fie elevii au reuşit deja intuirea formulei generale şi aici vor verifica numai dacă este corectă în cazurile studiate, fie prin studierea cazurilor particulare şi discutarea observaţiilor vom ajunge la formularea generală: „Numărul divizorilor unui număr n se obţine înmulţind numerele care sunt mai mari cu o unitate decât exponenţii din descompunerea numărului n."

9) Construiți din set numerele 2, 4, 8, 16, 32, 64. Câți divizori au aceste numere? Repetați același lucru pentru numerele 3, 9, 27, 81, 243. Ce observați? Formulaţi o proprietate despre numărul divizorilor unui număr care poate fi reprezentat cu o singură culoare din setul Lego.

10) Construiți din set numerele 24, 40, 54, 135, 56 și apoi determinați numărul divizorilor lor. Ce observați? Repetați pentru numerele 36, 100, 225, 441. Ce observați? Formulaţi o proprietate relativ la numărul divizorilor unui număr care poate fi reprezentat cu două culori din setul Lego.

11) Pentru numerele 24, 40, 54, 135, 56, 36, 100, 225, 441, aranjaţi divizorii acestora într-un tabel (câte un tabel pentru fiecare număr) după factorii primi. Pentru 24 tabelul ar arăta astfel:

	1	2	4	8
1	1	2	4	8
3	$1 \cdot 3$	$2 \cdot 3$	$4 \cdot 3$	$8 \cdot 3$

Pentru 36 tabelul ar arăta astfel:

	1	2	2^2
1	1	2	4
3	$1 \cdot 3$	$2 \cdot 3$	$4 \cdot 3$
3^2	$1 \cdot 9$	$2 \cdot 9$	$4 \cdot 9$

Câte rânduri și câte coloane au aceste tabele? Formulaţi o proprietate generală.

12) a) Construiți divizorii numerelor 28 și 375, apoi construiți divizorii lui $28 \cdot 375$.

b) Decideţi dacă este adevărată următoarea proprietate: „Dacă două numere nu au factori primi în comun, atunci numărul de divizori al produsului lor este egal cu produsul numărului de divizori ai celor două numere."

13) Construiți următoarele numere și apoi găsiți numărul de divizori ai acestora: 400, 360, 1050. Formulaţi o proprietate generală.

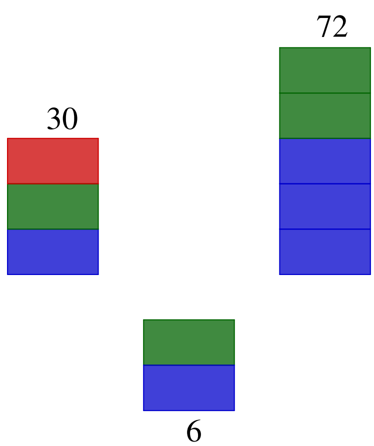
14) În cazul construcţiilor de la punctul b) al problemei 6) formaţi perechi de construcţii complementare. Două construcţii sunt complementare dacă suprapunerea lor reprezintă numărul iniţial. Care sunt numerele pentru care nu se pot forma astfel de perechi din construcţiile reprezentând toţi divizorii proprii?

8.9. Comentarii. Problemele 14) şi 15) au rolul de a fixa noţiunea de divizor complementar. Pentru numărul n divizorii d şi $\frac{n}{d}$ sunt divizori complementari. Cele două probleme scot în evidenţă faptul că pentru un număr care nu este pătrat perfect, divizorii se pot grupa în perechi de divizori complementari, iar acest lucru nu este posibil pentru pătrate perfecte. Astfel numărul divizorilor unui număr natural este impar dacă şi numai dacă numărul este pătrat perfect. Bineînţeles, acest lucru poate fi dedus şi din formula generală pentru numărul divizorilor.

15) Reprezentaţi numerele 9, 64, 144 și 225 folosind setul de Lego şi determinaţi numărul de divizori ai acestor numere. Formulaţi o proprietate relativ la paritatea numărului de divizori ai unui număr.

16) Construiţi ansamblurile care reprezintă numerele 30 și 72, apoi enumeraţi toate construcţiile care fac parte din ambele ansambluri. Cum le putem numi? Câte sunt? Care dintre ele este cea mai mare?

8.10. Comentarii. Un ansamblu format din blocuri Lego care sunt comune celor două reprezentări este reprezentarea unui divizor comun. În cazul acesta un bloc albastru şi un bloc verde sunt elementele comune ale celor două reprezentări.

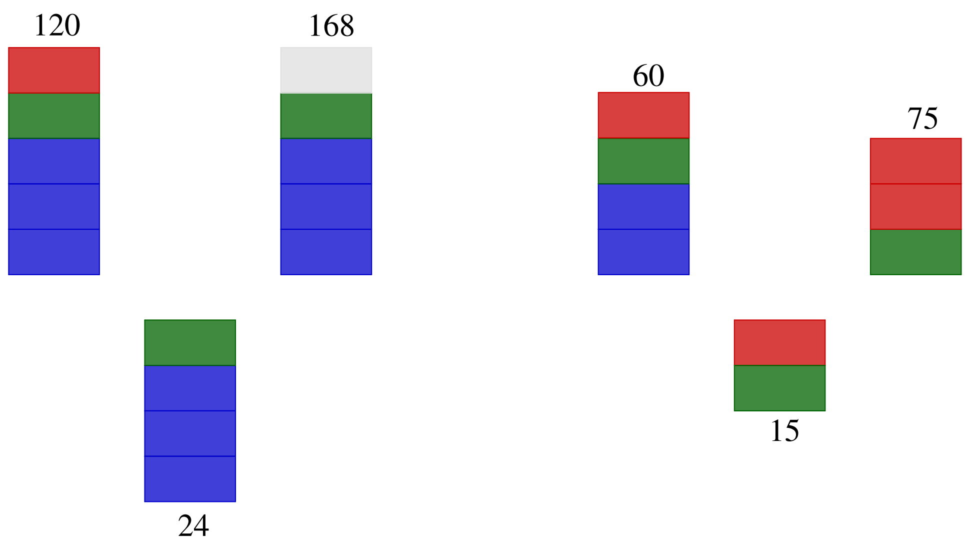


Orice ansamblu construit numai cu aceste două blocuri Lego reprezintă un divizor comun al celor două numere date. Astfel divizorii comuni sunt $1, 2, 3, 6$. Este clar că cel mai mare dintre acestea este numărul 6. Abordarea aceasta însă are avantajul de a scoate în evidenţă şi faptul că orice divizor comun este de fapt divizor al celui mai mare divizor comun. Din punct de vedere matematic acest lucru este foarte important, pentru că reflectă faptul că sintagma „cel mai mare” nu se referă numai la ordonarea obişnuită, ci şi la ordonarea în raport cu relaţia de divizibilitate (care este o relaţie de ordonare parţială). Bineînţeles, această diferenţă nu o putem explica la nivelul clasei a VI-a, dar poate fi importantă atât la rezolvarea unor probleme, cât şi la elaborarea unor raţionamente ulterioare.

17) Faceți același lucru pentru perechile 120 și 168, apoi pentru 60 și 75. Încercați să formulați o regulă care să arate cum poate fi creată construcția corespunzătoare celui mai mare dintre divizorii comuni a două numere. Cum pot fi descriși divizorii comuni folosind cel mai mare divizor comun?

8.11. Comentarii. Numărul 120 este reprezentat prin trei blocuri albastre, unul verde şi unul roşu, iar numărul 168 prin trei blocuri Lego albastre, unul verde şi unul alb, deci cele două construcţii au în comun cele trei blocuri albastre şi unul verde. Astfel cel mai mare divizor comun este $24 = 2^3 \cdot 3$ şi divizorii comuni sunt de fapt divizorii numărului 24 (deci avem 8 divizori comuni).

În cazul numerelor 60 şi 75, un bloc Lego verde şi unul roşu sunt bucăţile care apar în ambele construcţii, deci cel mai mare divizor comun este $15 = 3 \cdot 5$ iar divizorii comuni sunt divizorii numărului 15.



18) Pe baza problemei anterioare, formulați modul în care cel mai mare divizor comun a două sau mai multe numere poate fi calculat pornind de la factorizarea numerelor.

8.12. Comentarii. Pentru a construi cel mai mare subansamblu comun a mai multor construcţii, selectăm culorile care apar în ambele construcţii, adică numerele prime comune în factorizarea numerelor. Căutăm pentru fiecare culoare câte blocuri avem în fiecare construcţie şi determinăm minimul acestor numere, deci practic alegem cel mai mic exponent pentru fiecare factor prim comun. Astfel am şi ajuns la algoritmul prin care putem determina cel mai mare divizor comun a două sau a mai multor numere.

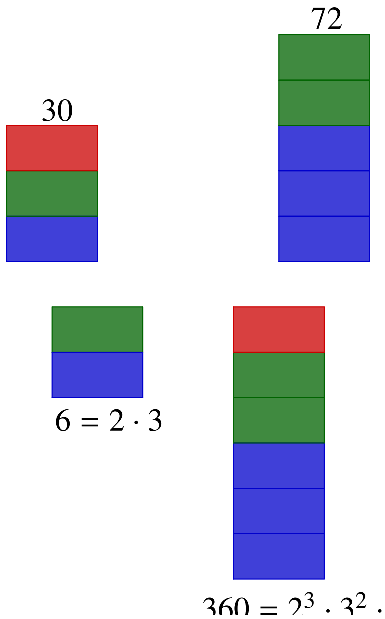
19) Pentru construcțiile corespunzătoare numerelor 12 și 15, găsiți câteva numere care au toate elementele de construcție atât din 12, cât și din 15. Care dintre acestea conține cele mai puține elemente de construcție? Cum pot fi descrise construcțiile rezultate folosind construcția cu cele mai puține elemente de construcție?

8.13. Comentarii. Este clar că la această problemă construim multipli comuni şi ne focusăm asupra celui mai mic multiplu comun a două numere. Abordarea scoate în evidenţă pe lângă algoritmul cunoscut şi faptul că toţi multiplii comuni sunt multipli ai celui mai mic multiplu comun.

20) Pe baza problemei anterioare, formulați modul în care cel mai mic multiplu comun a două sau mai multe numere poate fi calculat pornind de la factorizarea numerelor.

21) Folosind reprezentarea numerelor cu elemente Lego, arătați că produsul dintre cel mai mare divizor comun şi cel mai mic multiplu comun a două numere este egal cu produsul celor două numere. Încercați să generalizați această proprietate la mai multe numere.

8.14. Comentarii. Pentru fiecare culoare comună c, dacă a şi b reprezintă numărul blocurilor de culoarea c în reprezentarea celor două numere date, atunci culoarea c apare atât în reprezentarea celui mai mare divizor comun cât şi în reprezentarea celui mai mic multiplu comun şi numărul blocurilor de culoare c este minimul dintre a şi b în reprezentarea celui mai mare divizor comun, iar în reprezentarea celui mai mic multiplu comun numărul blocurilor de culoarea c este maximul dintre a şi b.



Astfel apar în total $a + b$ blocuri de culoarea c atât în produsul celor două numere, cât şi în produsul dintre cel mai mare divizor comun şi cel mai mic multiplu comun al celor două numere. Culorile care nu sunt comune apar numai în reprezentarea celui mai mic multiplu comun, deci numărul blocurilor pentru fiecare astfel de culoare este acelaşi atât în produsul celor două numere, cât şi în produsul dintre cel mai mare divizor comun şi cel mai mic multiplu comun al celor două numere. Abordarea prezentată are avantajul că această proprietate devine accesibilă şi pentru copii nu foarte buni, nu numai în sensul că o pot înţelege, dar şi în sensul că o pot descoperi şi vor înţelege inclusiv raţionamentul pe care se bazează.

8.1.3 Observaţii finale

1) Practic se pot deosebi patru părţi mai mari în secvenţa de sarcini de mai înainte:

- problemele 1–5 au rolul de a introduce noţiunea de număr prim şi număr compus şi de a scoate în evidenţă teorema fundamentală a aritmeticii;
- problemele 6–15 fixează noţiunea de divizor şi conduc elevii către proprietatea generală referitoare la numărul divizorilor;
- problemele 16–18 au rolul de a scoate în evidenţă noţiunea de cel mai mare divizor comun a mai multor numere, împreună cu proprietatea care leagă cel mai mare divizor al numerelor cu descompunerea în factori primi, dar şi cu proprietatea foarte importantă care arată că orice divizor comun a două sau mai multe numere este divizorul celui mai mare divizor comun;

- problemele 19–20 au rolul de a scoate în evidenţă noţiunea de cel mai mic multiplu comun a mai multor numere împreună cu proprietatea care leagă cel mai mic multiplu comun al numerelor cu descompunerea în factori primi, dar şi cu proprietatea foarte importantă care arată că orice multiplu comun a două sau mai multe numere este multiplul celui mai mic multiplu comun.

Ultimele trei părţi mai mari sunt practic independente (noţiunea de divizor şi de multiplu pot fi introduse prin problema 6 în mod independent de problemele 7–15) şi pot fi permutate între ele. Astfel putem organiza chiar 4 activităţi distincte, sau 2-3 activităţi în care parcurgem aceste probleme (sau o parte din ele) în funcţie de nivelul clasei cu care lucrăm.

2) Folosirea blocurilor Lego nu este obligatorie, etapele investigative pot fi parcurse şi fără acestea, dacă elevii au un nivel de abstractizare suficient de ridicat. Acest aspect este la decizia profesorului. De asemenea, pe parcursul activităţilor se poate renunţa la blocurile Lego la orice moment, dacă profesorul crede că este în beneficiul elevilor. Este important însă ca profesorul să fie convins (prin feedback confirmat de la elevi) că elevii au înţeles ideile principale şi nu numai au reţinut câteva formule/fraze.

3) Pentru fixarea ideilor şi noţiunilor recomandăm completarea ultimelor trei părţi mai mari cu câte o problemă în care aceleaşi noţiuni apar în contexte diferite. De exemplu:

- În închisoarea unui sultan sunt 100 de celule şi în fiecare celulă este închis câte un condamnat. În fiecare noapte, cei 100 de gardieni efectuează câte o rundă de verificare a celulelor. Încuietoarele celulelor au două poziţii, deschis şi închis şi seara toate celulele sunt încuiate. Într-o noapte sultanul le porunceşte gardienilor ca al n-lea gardian să schimbe poziţia zăvorului la fiecare a n-a celulă (pentru fiecare n de la 1 la 100). Dimineaţa va elibera condamnaţii care vor avea ușa celulei deschisă. Întrebarea este: câţi condamnaţi va elibera sultanul şi care sunt celulele din care îi va elibera?
- Fiecare planetă revine în aceeași poziție atunci când a trecut un multiplu al perioadei sale, astfel Pământul revine în aceeași poziție după fiecare multiplu de 1 an (de exemplu, 1, 2 sau 3 ani), Marte revine în aceeași poziție după fiecare multiplu de 1,88 ani (de exemplu, 1,88 sau 3,76 sau 5,64 ani), iar Jupiter după fiecare multiplu de 11,87 ani (de exemplu, 11,87 sau 23,74 sau 35,61 ani). După câţi ani cele trei planete vor avea aceeaşi poziţie relativă una faţă de celelalte două?
- Un producător produce 240 de ciocolate mici și 320 de ciocolate mari în fiecare zi (folosind două utilaje diferite). Acesta dorește să-și ambaleze produsele în cutii cadou identice, folosind toate ciocolatele. Câte cutii poate folosi şi care poate fi conţinutul unei cutii?

4) Bineînţeles, investigaţii suplimentare pot fi efectuate şi într-un cadru mai abstract, de exemplu putem cere elevilor să generalizeze proprietatea din ultima problemă pentru mai multe numere sau să suprapună reţele pătrate generate de pătrate de diferite dimensiuni, etc.

5) Obstacolele şi dificultăţile de învăţare legate de noţiunile din această unitate de învăţare pot fi multiple (a se vedea [58]), dar abordarea PBL/IBL poate fi benefică atât din punctul de vedere al apariţiei unor atitudini pozitive faţă de învăţarea matematicii, cât şi din perspectiva pregătirii pentru examene ([52]). Pe de altă parte, fără o abordare care să elimine din start majoritatea greşelilor raţionale şi a concepţiilor eronate, elevii vor genera atât greşeli procedurale, cât şi conceptuale şi nu vor fi putea aplica aceste noţiuni nici în contexte formale şi nici în contexte cotidiene ([62]). Abordarea prezentată poate elimina majoritatea acestor greşeli.

8.2 Teorema lui Pitagora prin metode investigative

8.2.1 Cadrul conceptual

Structura activităţilor propuse pentru această unitate de învăţare este bazată tot pe modelul conceptual trifazic prezentat în lucrarea [14].

Prezentăm două alternative distincte pentru abordarea tematicii propuse, ambele conţin o activitate introductivă mai distractivă şi care poate capta atenţia şi curiozitatea elevilor, urmată de o fază de investigare mai riguroasă şi apoi de discuţii, reflecţii, respectiv formularea rezultatelor. Astfel partea introductivă are rolul de a crea un context pentru investigaţie.

Crearea contextului pentru activităţile elevilor

Este important să nu facem nicio referire la teorema lui Pitagora la început. Pe parcursul activităţii se poate întâmpla să cerem elevilor, pentru a-i sprijini în trecerea unor obstacole, să caute pe internet anumite informaţii legate de sarcinile primite. Dacă au cuvintele cheie care duc direct la rezultat, atunci e posibil să subminăm întreaga activitate de investigare.

8.2.2 Varianta 1 - Acoperirea planului cu pătrate

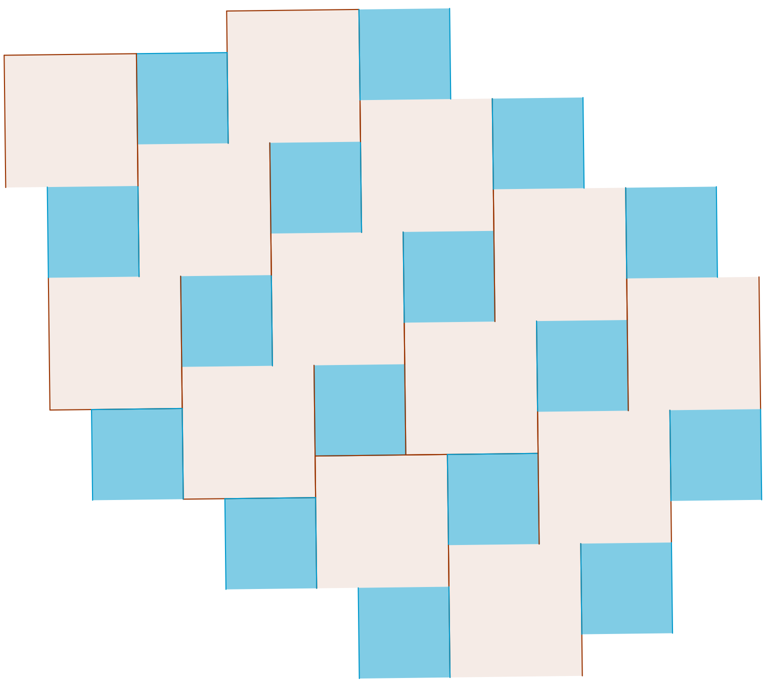
Contextul de bază este următorul:

Elevii vor lucra în perechi, fiecare elev va primi câteva (10–15) cartonaşe pătratice congruente, astfel încât membrii unei perechi să aibă pătrăţele de dimensiuni diferite (deci fiecare pereche are două tipuri de pătrăţele). Sarcina lor este să realizeze un model de acoperire (o pavare) a planului care să folosească ambele tipuri de pătrate, să nu depindă de dimensiunea exactă a celor două pătrate (implicit nici de raportul lungimilor laturilor), să fie periodică (deci, în principiu, modelul de acoperire poate fi extins pentru a acoperi întregul plan). O acoperire (pavare) a planului înseamnă că pătrăţelele nu pot fi suprapuse şi trebuie să acopere planul în întregime.

Este important să clarificăm aspectele importante şi, în cazul în care apar acoperiri care nu respectă cerinţele, acestea să fie discutate cu întreaga clasă pentru a evita repetarea aceloraşi greşeli. Eventual, pentru a concretiza sarcina, ne putem raporta la cele două tipuri de pătrăţele ca la două tipuri de gresie pătratică şi astfel acoperirea planului este de fapt o pavare periodică care foloseşte ambele tipuri de gresie. Este foarte important ca modelul să fie independent de lungimea laturilor celor două tipuri de pătrăţele.

Pentru verificarea modelelor este recomandat ca pătrăţelele de diferite dimensiuni să fie de culori diferite. Nu este necesar ca fiecare pereche să primească pătrăţele de aceleaşi dimensiuni. Astfel, dacă pe parcursul activităţii apar acoperiri care depind de dimensiunile pătrăţelelor, putem cere unor perechi de elevi care au pătrăţele de alte dimensiuni să încerce acoperirea planului folosind aceste modele şi astfel elevii au şansa să realizeze că modelul lor nu este corect.

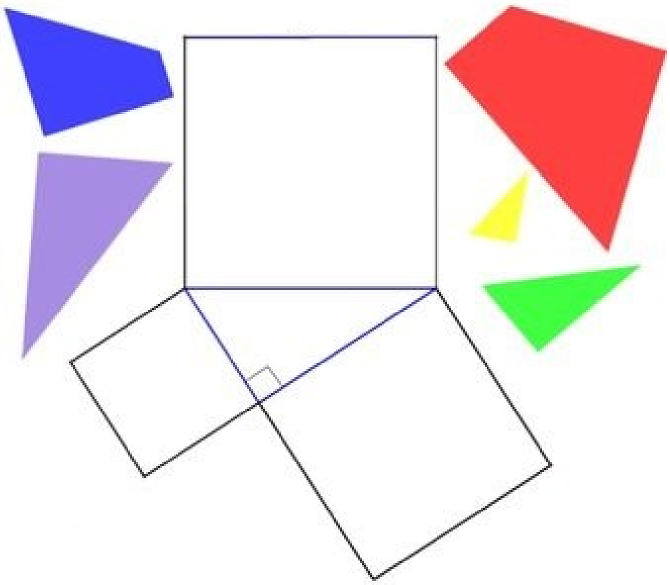
Timpul recomandat pentru realizarea unei astfel de acoperiri este de 15-20 de minute. Dacă elevii nu se descurcă, atunci putem să le cerem să se gândească la pardoseli acoperite cu două tipuri de gresie pătratică sau chiar să caute pe internet poze cu clădiri celebre, sau cu picturi celebre unde apar asemenea pardoseli.

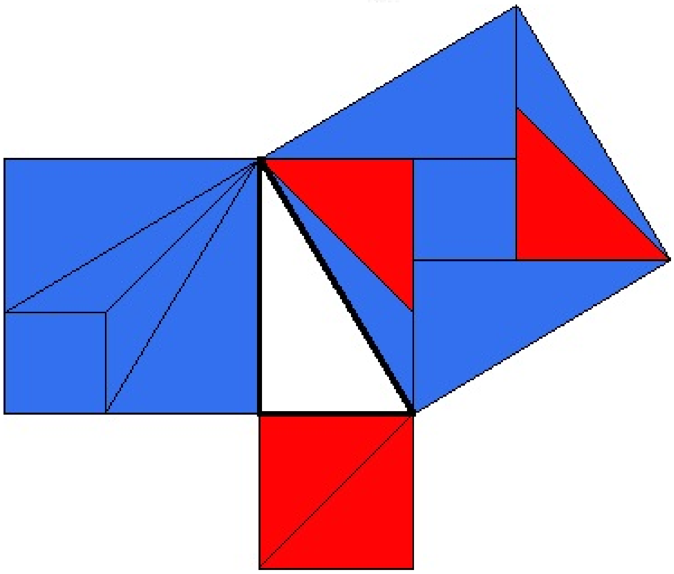


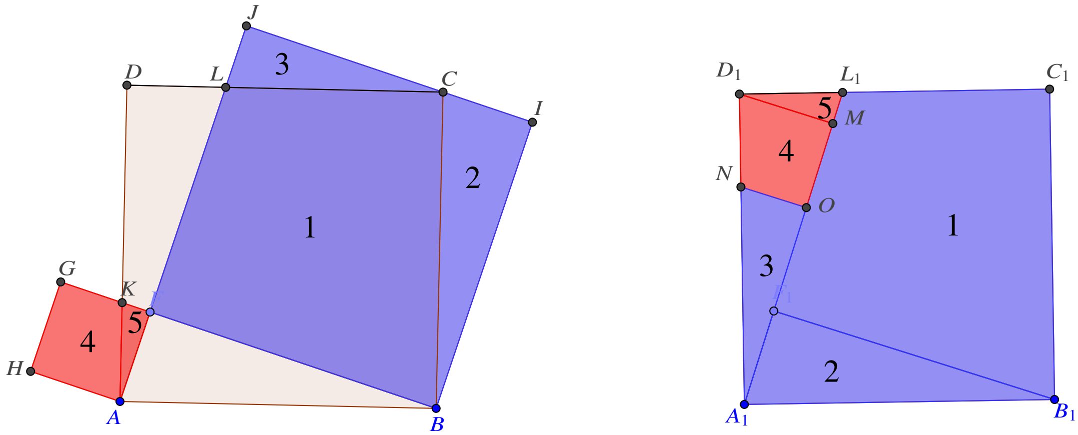
8.2.3 Varianta a 2-a - Rezolvarea unei probleme de tip puzzle

Contextul de bază este următorul:

Elevii vor lucra în perechi, fiecare pereche va primi câteva bucăţi de carton foliat; sarcina lor va fi să aranjeze bucăţile în așa fel încât să formeze un pătrat. După îndeplinirea acestei sarcini, a doua problemă va fi să aranjeze bucăţile astfel încât să formeze două pătrate diferite. Bineînţeles, pentru ca ambele probleme să fie rezolvabile, este nevoie de pregătirea corespunzătoare a bucăţilor de carton.



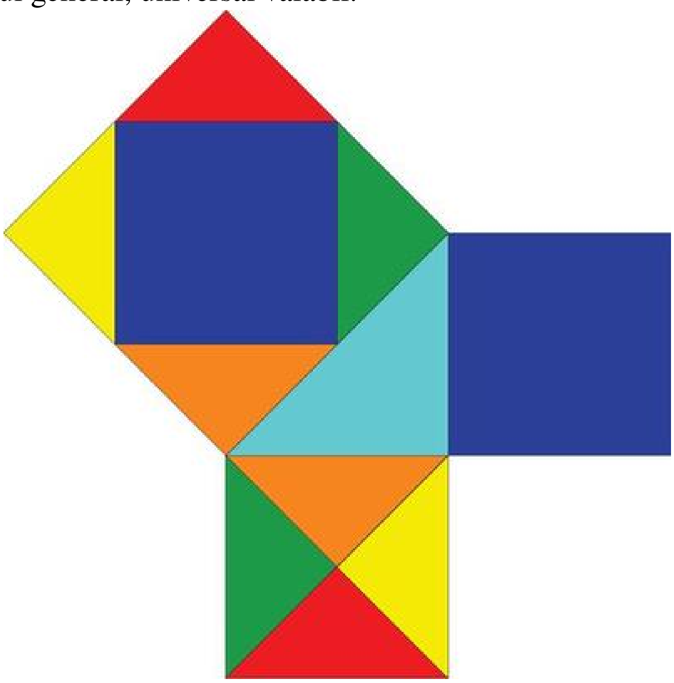


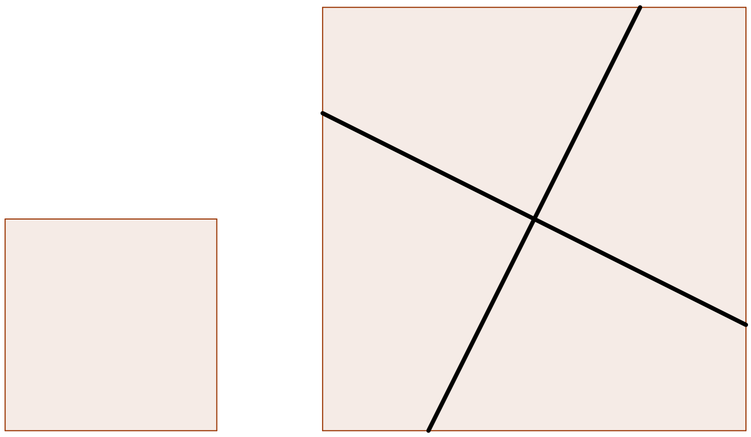


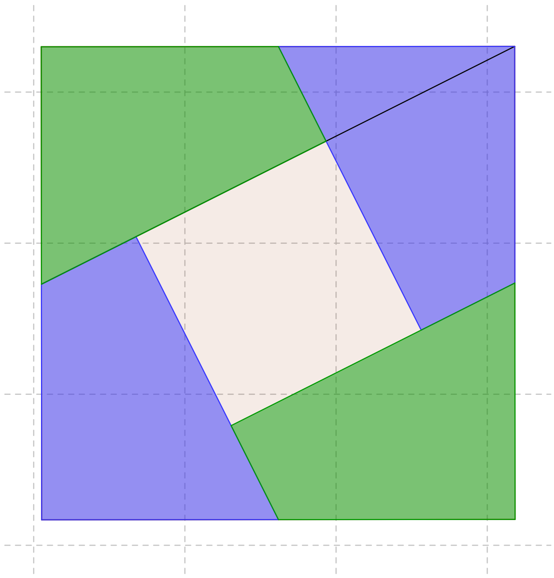
Soluţia primei probleme

Există multe pagini web (de exemplu [67]) sau cărţi ([65], [66], [74], [80]) în care sunt detaliate diferite demonstraţii pentru teorema lui Pitagora, care pot genera câte un puzzle corespunzător. Unele demonstraţii nu se bazează pe o descompunere directă ci pe completarea figurii cu anumite elemente (de exemplu demonstraţia nr. 4 din [67]), astfel pe baza acestora vom obţine un raţionament puţin diferit.

Dacă dorim să creştem dificultatea provocării, atunci putem porni de la un caz particular cum ar fi cel din figura de mai jos şi să cerem elevilor să transforme acest caz particular într-unul general, universal valabil.





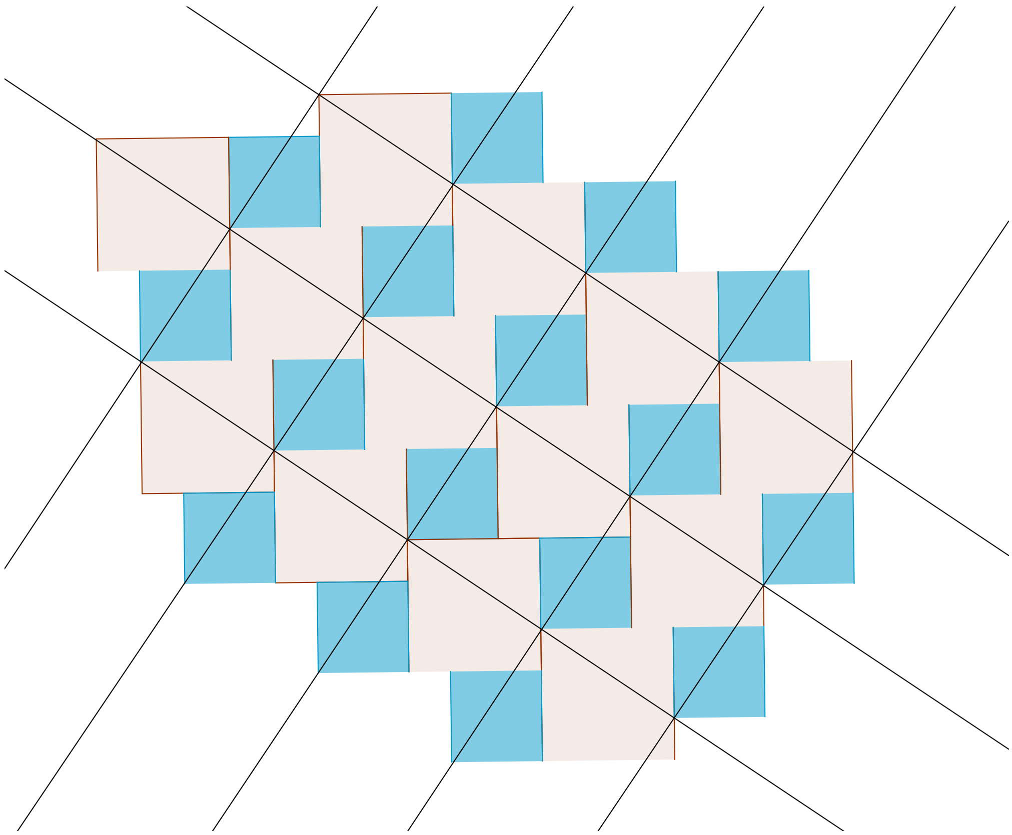


Observaţie. În ambele variante, partea introductivă poate fi concepută ca o activitate separată (în funcţie de nivelul elevilor, de cunoştiinţele anterioare ale elevilor, de limitările de timp, etc.). În acest caz merită să explorăm mai amănunţit structura figurilor obţinute şi să demonstrăm faptul că aceste figuri sunt într-adevăr corecte.

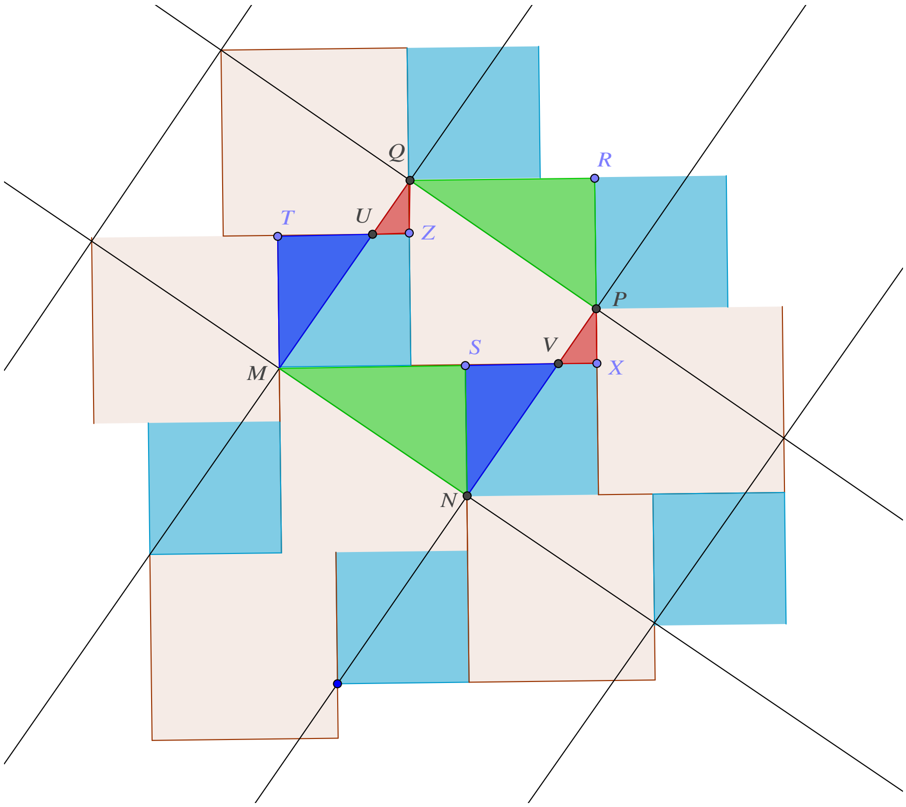
Activitatea independentă a elevilor

Varianta 1 - Suprapunerea unei reţelei pătrate peste pavare

Sarcina propriu zisă este căutarea unei reţele pătrate care se suprapune peste pavarea obţinută. Putem cere elevilor să construiască o reţea pătrată folosind numai o parte dintre nodurile pavării (punctele corespunzătoare vârfurilor pătratelor). Datorită faptului că există o infinitate de astfel de reţele, dacă elevii observă numai reţele mai complicate, atunci putem rafina cerinţa şi să cerem construcţia unei reţele cu pătrate cât mai mici. După construcţia unei astfel de reţele, următoarea sarcină este de a găsi o relaţie între aria celor două pătrate iniţiale şi aria pătratului de bază care generează reţeaua pătrată şi eventual transcrierea acestei relaţii cu ajutorul lungimilor laturilor celor trei pătrate. Introducerea notaţiilor poate fi lăsată la latitudinea elevilor, sau o putem strecura în formularea problemelor, în funcţie de gradul de independenţă cu care sunt obişnuiţi elevii. Este important să fim conştienţi de faptul că alegerea unei notaţii poate crea dificultăţi elevilor şi notaţiile introduse de ei probabil nu vor fi identice, deci pot crea dificultăţi în discuţiile ulterioare.



Reţeaua căutată este cea din figură (sau una translatată faţă de această reţea). Analizând bucăţile în care se descompune în mod natural pătratul de bază, se poate observa că aria acestuia este suma ariilor celor două pătrate iniţiale.



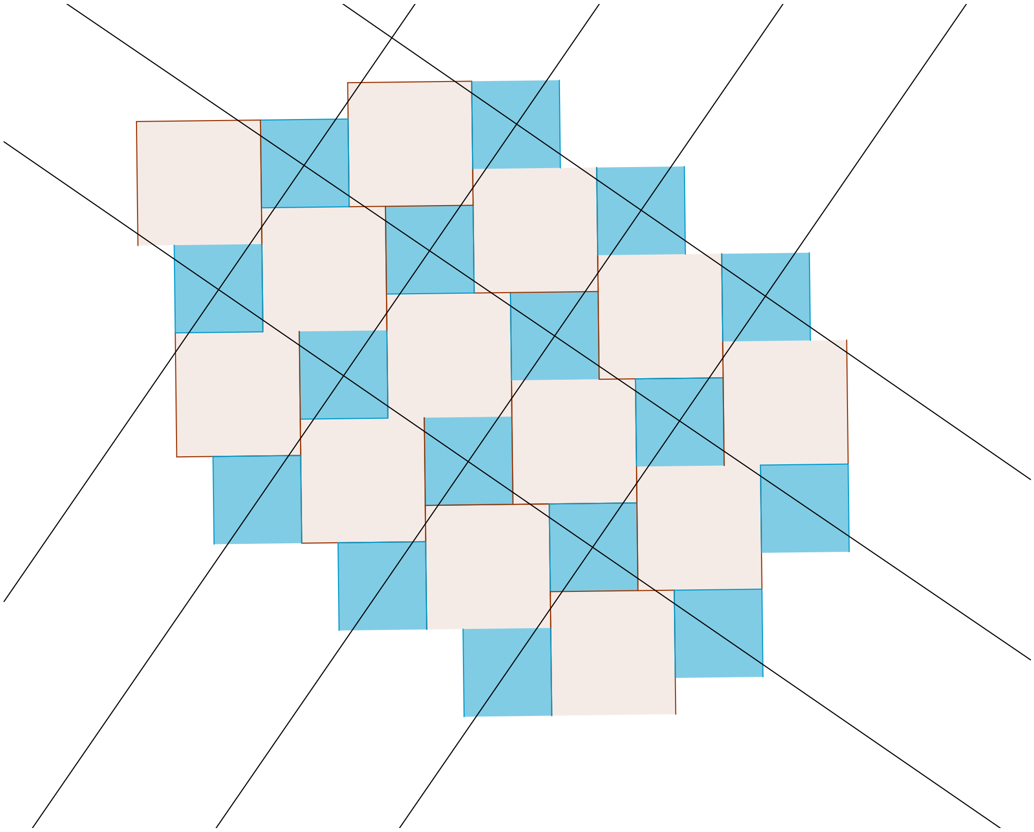
Această observaţie poate fi ghidată de profesor în funcţie de gradul de autonomie cu care sunt obişnuiţi elevii (sau la care dorim să ajungem). Putem să le cerem să găsească triunghiuri congruente, sau patrulatere congruente etc. Dacă folosim echipamente IT (tablă digitală, laptopuri sau tablete), atunci putem construi în GeoGebra modelul pavării şi astfel ariile pătratelor vor apărea în fereastra cu construcţiile, deci observaţia primară între cele trei arii poate fi una de natură algebrică (suma a două numere este al treilea număr), urmând ca partea geometrică a raţionamentului să urmeze numai după această observaţie. Folosirea programului GeoGebra depinde și ea de cunoștințele elevilor, dacă folosesc GeoGebra în mod regulat, atunci le putem cere să construiască ei figura, dacă nu, putem pregăti noi fişierul în care ei vor experimenta individual (în perechi) sau să folosim un singur fişier GeoGebra pe o tablă digitală.

Important este să ajungem la relaţia

$$c^2 = a^2 + b^2,$$

unde a şi b reprezintă lungimea laturilor pătratelor iniţiale şi c este lungimea laturii pătratului de bază al reţelei construite.

O altă posibilitate ar fi să nu specificăm ca reţeaua pătrată să aibă noduri comune cu pavarea, ci să cerem să fie legat „cumva” de pătratele pavării. Am putea cere ca reţeaua să taie fiecare pătrat mai mic în acelaşi mod (deci decupând aceste pătrate împreună cu dreptele reţelei să obţinem figuri congruente). Bineînţeles, există şi în acest caz o infinitate de soluţii, dar toate vor fi translatări ale reţelei care are nodurile în centrele pătratelor mici (sau mari) sau o translaţie a reţelei obţinute folosind nodurile pavării.

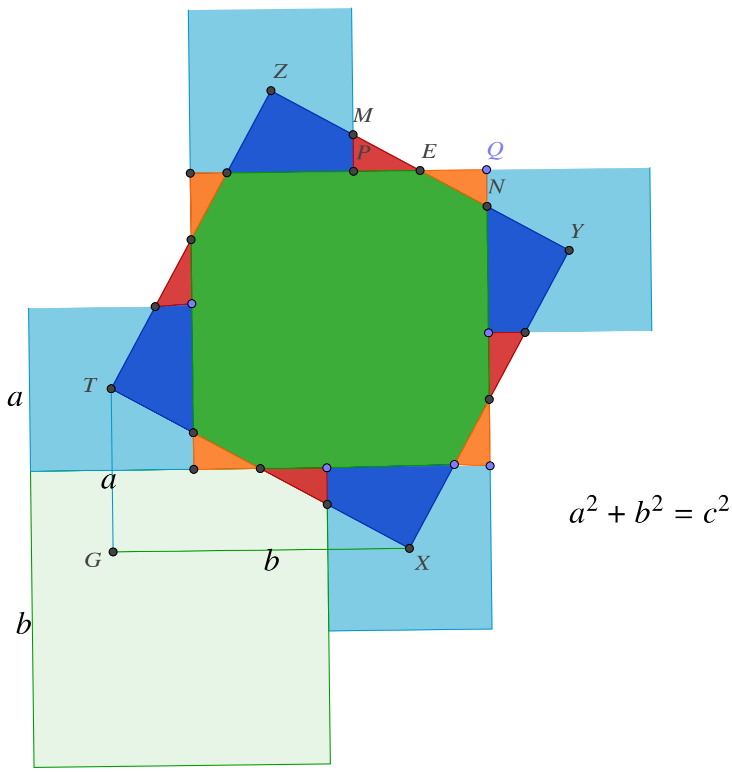


Analizând şi în acest caz bucăţile în care se descompune în mod natural pătratul de bază al reţelei, se poate observa că aria acestuia este suma ariilor celor două pătrate iniţiale. În figura de mai jos, cele patru bucăţi albastre formează pătratul mic de culoare albastru deschis, iar triunghiurile roşii sunt congruente cu cele portocalii, deci aria triunghiurilor roşii împreună cu aria regiunii verzi formează aria pătratului mai mare din pavare. Astfel ajungem la relaţia

$$c^2 = a^2 + b^2,$$

unde a şi b reprezintă lungimea laturilor pătratelor iniţiale şi c este lungimea laturii pătratului de bază al reţelei construite.

În ambele cazuri, dacă avem la dispoziţie timp suficient (2 ore pentru întreaga activitate), putem cere elevilor să elaboreze câte un poster A3 pe care să vizualizeze şi să explice relaţia observată.



Varianta a 2-a - Relaţia dintre ariile pătratelor

În acest caz, sarcina propriu zisă este stabilirea unei relaţii între ariile celor trei pătrate, pregătirea unui poster cu vizualizarea pătratelor şi cu vizualizarea relaţiei observate. Dacă nu suntem convinşi că elevii se vor descurca cu puzzle-ul, atunci putem pregăti piesele în aşa fel încât unul dintre cele două pătrate să fie foarte simplu de asamblat. De exemplu, cele două piese care formează pătratul mai mic să fie de aceeaşi culoare (nu ca în prima figură cu piesele de puzzle, ci ca în soluţia prezentată). Sau putem da conturul pătratului mai mare şi atunci vor avea de aranjat trei piese într-un pătrat dat. Toate aceste mici variaţii în metoda de lucru ne pot ajuta să ne încadrăm într-un interval de timp mai restrâns şi să lucrăm cu elevi care nu sunt obişnuiţi cu metodele investigative, poate nici cu lucrul în perechi la orele de matematică. Bineînţeles şi elevii vor resimţi faptul că investigarea este mai strict dirijată, deci nu vor avea acelaşi sentiment de proprietate proprie în legătură cu rezultatul obţinut, sau poate nu vor fi la fel de angrenaţi în discuţii. În această fază este importantă formularea relaţiei

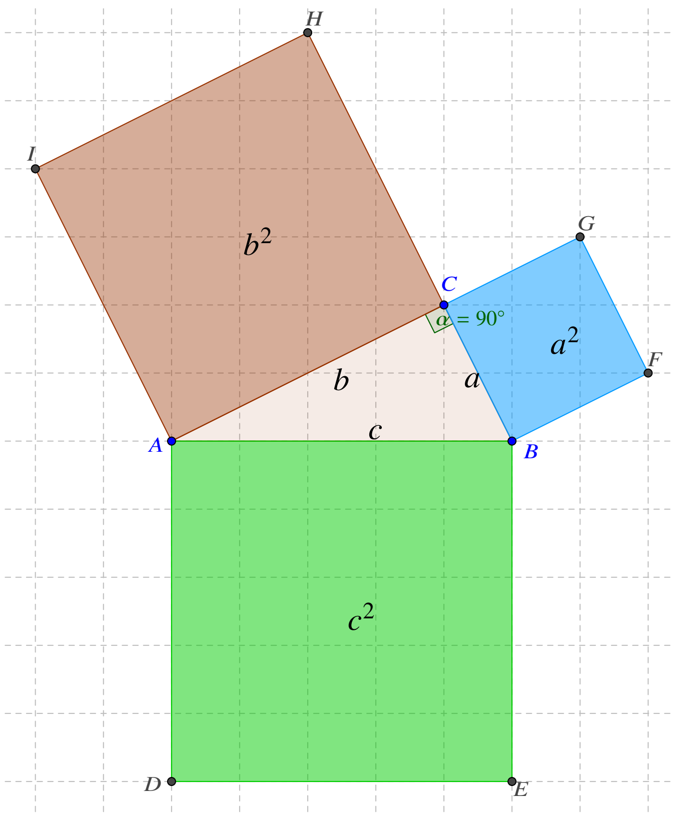
$$c^2 = a^2 + b^2,$$

unde a, b, c sunt lungimile laturilor celor trei pătrate.

Evidenţierea rezultatelor
Varianta 1 - Reţele peste pavare
În ambele cazuri este important să discutăm câteva aspecte importante:

1) Din figurile construite obţinem practic câte o modalitate de a tăia cele două pătrate iniţiale în bucăţi mai mici în așa fel încât din rearanjarea bucăţilor obţinute să putem alcătui un singur pătrat. Astfel figura formată din cele două pătrate iniţiale şi pătratul de bază al reţelei sunt echidecompozabile. Se poate aminti eventual şi teorema Wallace-Bolyai-Gerwien care afirmă că două poligoane cu arii egale sunt echidecompozabile (deci fiecare poate fi descompus într-un număr finit de piese din care să putem asambla celălalt poligon).

2) În ambele cazuri este important să evidenţiem faptul că relaţia obţinută poate fi folosită pentru calculul unor distanţe. De exemplu, în primul caz distanţele MQ, QP, NP, MN sau în al doilea caz distanţele TX, XY, adică distanţa dintre centrele pătratelor albastre.



3) Este important ca pe fiecare figură să reformulăm relaţia obţinută ca o relaţie între lungimile laturilor unui triunghi dreptunghic. În primul caz putem folosi triunghiul MSN iar în al doilea caz triunghiul GTX.

4) Ca un ultim pas în evidenţierea şi fixarea proprietăţii, este important să construim o figură nouă care să conţină numai elementele cheie şi să studiem dacă relaţia obţinută (şi implicit raţionamentul folosit) este valabilă pentru orice lungimi a, b, respectiv pentru orice triunghi dreptunghic. Eventual putem da câteva aplicaţii imediate şi putem evidenţia şi câteva triplete pitagoreice.

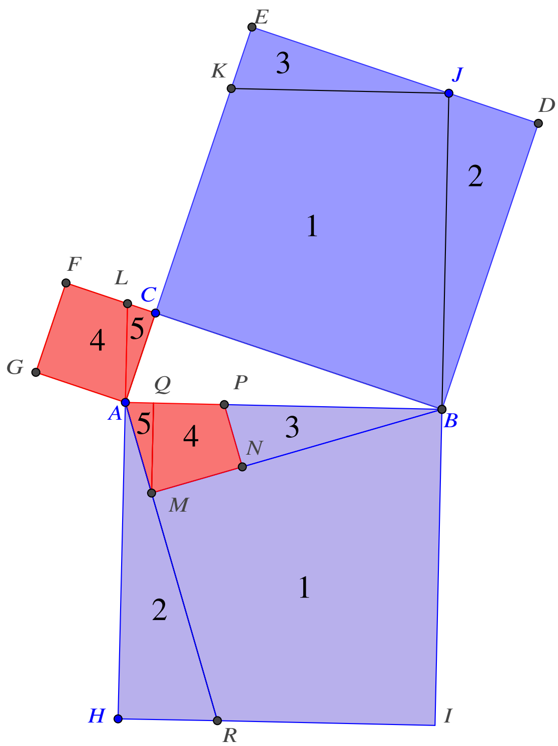
Managementul timpului. Pentru fixarea ideilor sunt necesare cel puţin 10 minute, deci în varianta fără poster am avea 15 minute pentru pavaje, 15 minute pentru reţele, 10 minute pentru stabilirea relaţiei şi încă 10 minute pentru discuţiile finale. Dacă avem la dispoziţie 1,5-2 ore, atunci putem avea 15-20 de minute pentru partea introductivă, 15 minute pentru reţele, 15-20 de minute pentru pregătirea posterului cu pavaj şi reţeaua pătrată. Stabilirea relaţiei ar necesita încă 10-15 minute, după care discuţiile finale ar dura încă 10-20 de minute şi ar mai fi timp şi pentru câteva aplicaţii scurte.

Varianta a 2-a - Analiza soluţiei unui puzzle

Este important să discutăm câteva aspecte importante:

1) Puzzle-ul ne arată practic o modalitate de a tăia cele două pătrate mai mici în bucăţi, astfel încât din rearanjarea bucăţilor obţinute să putem alcătui un singur pătrat.

2) Relaţia obţinută poate fi folosită pentru calculul lungimii unei laturi într-un triunghi dreptunghic, dacă cunoaştem lungimile celorlalte două laturi.



1) Ca un ultim pas în evidenţierea şi fixarea proprietăţii, este important să construim o figură nouă care să conţină numai elementele cheie şi să studiem dacă relaţia obţinută (şi implicit raţionamentul folosit) este valabilă pentru orice lungimi $AC = a$ şi $BC = b$, respectiv pentru orice triunghi dreptunghic. Eventual putem da câteva aplicaţii imediate şi putem evidenţia şi câteva triplete pitagoreice.

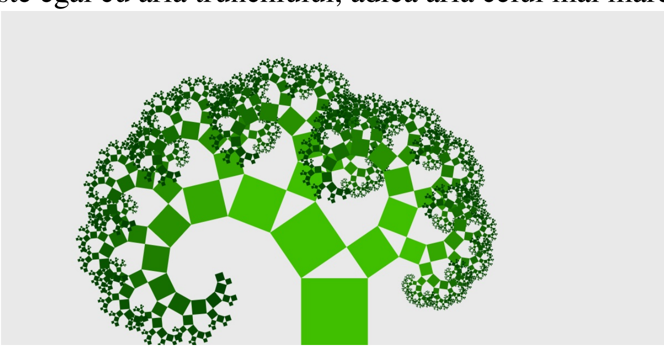
Managementul timpului. Pentru aranjarea bucăţilor de puzzle în funcţie de metoda aleasă (bucăţi de culori diferite, culori identice pentru cele două pătrate sau chiar şi conturul unui pătrat) putem aloca 15, 10 sau 5 minute. Pentru elaborarea unui poster sunt necesare încă 15-20 de minute, după care putem aloca 10-15 minute pentru discuţii şi formularea proprietăţii propriu-zise, sau poate chiar şi pentru o aplicaţie scurtă. Astfel ne putem încadra într-o oră obişnuită.

Bineînţeles, dacă avem la dispoziţie mai mult timp, atunci putem da elevilor sarcini suplimentare, putem folosi mai multe tipuri de puzzle, sau după aranjarea pieselor le putem da alte două pătrate de dimensiuni diferite faţă de cele cu care au lucrat şi îi putem ruga să taie acele pătrate în piese mai mici din care să poată alcătui un singur pătrat; sau le putem da mai multe pătrate cu sarcina de a tăia aceste pătrate în bucăţi mai mici în aşa fel ca din bucăţile obţinute să poată forma un singur pătrat.

Observaţii finale

1) Putem formula şi alte probleme pentru investigaţii ulterioare. De exemplu, la prima variantă, dacă există pavaje cu mai multe tipuri de pătrate ([88]), sau cu dreptunghiuri, sau dacă putem umple spaţiul cu două sau trei tipuri de cuburi ([37]), etc. La a doua variantă se pot formula diverse probleme, de exemplu dacă putem scade numărul pieselor, sau putem minimaliza lungimea totală a decupărilor etc. Poate fi important ca elevii să vadă că problema studiată – deşi este una antică – poate genera rezultate noi chiar şi la nivelul cercetărilor actuale.

2) Putem scoate în evidenţă şi faptul că putem folosi în locul pătratelor triunghiuri echilaterale, triunghiuri asemenea, pentagoane sau hexagoane regulate, semidiscuri sau orice alte forme asemenea şi că proprietatea se poate folosi şi în mod recursiv, obţinând astfel proprietatea arborilor pitagoreici şi anume că suma ariilor tuturor frunzelor este egal cu aria trunchiului, adică aria celui mai mare pătrat din figură.



3) Deşi ambele abordări sunt dirijate, prima variantă oferă o deschidere mai mare atât spre probleme matematice mai adânci, cât şi spre o investigare mai profundă, mai independentă. A doua variantă însă este mai strict dirijată, mai apropiată de metodele tradiţionale cu care sunt obişnuiţi majoritatea profesorilor, deci poate fi mai potrivită pentru elevi/profesori care sunt într-o fază de tranziţie spre aplicarea metodelor investigative.

4) Privind cele două abordări din perspectiva cadrului TRU (Teaching for Robust Understanding), prima variantă poate fi mai bogată în conţinuturi relevante, poate necesita o solicitare cognitivă mai intensă şi poate oferi un acces mai echitabil la conţinuturi. Implicarea elevilor poate fi la nivel similar în ambele contexte iar evaluarea nu este relevantă în aceste activităţi.

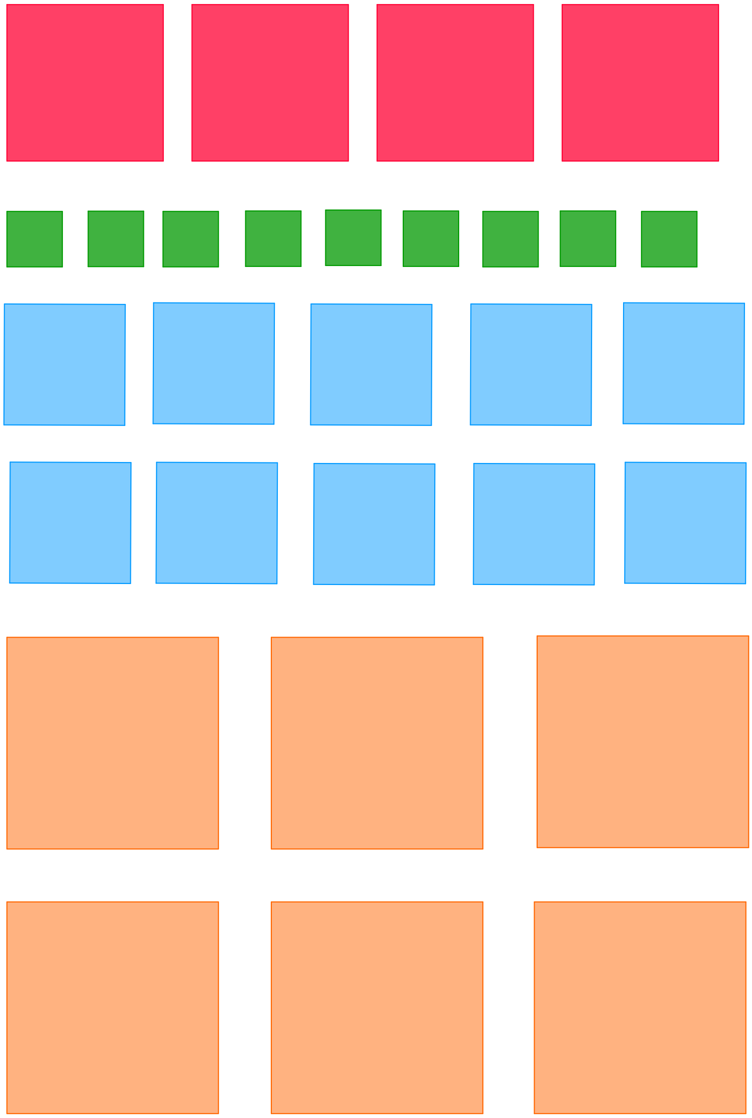
5) Ambele activităţi pot fi realizate şi în mod hibrid, în sensul că o parte de desfăşoară cu obiecte fizice şi o parte într-un cadru digital (de exemplu GeoGebra), sau chiar folosind numai instrumente digitale. Indiferent de metoda de realizare, este foarte important ca în urma discuţiilor elevii să fie conştienţi de importanţa rezultatului formulat (teorema lui Pitagora) şi să le fie foarte clar că – deşi unele momente ale activităţii au fost de tip „joacă" – partea de raţionament a fost o activitate matematică serioasă.

6) Activitatea prezentată trebuie urmată de cel puţin alte două activităţi în care elevii vor aplica teorema lui Pitagora pentru a calcula diferite distanţe sau arii, atât în contexte formale, cât şi în contexte cotidiene – şi trebuie evidenţiat faptul că poate fi necesar şi un efort din partea lor.

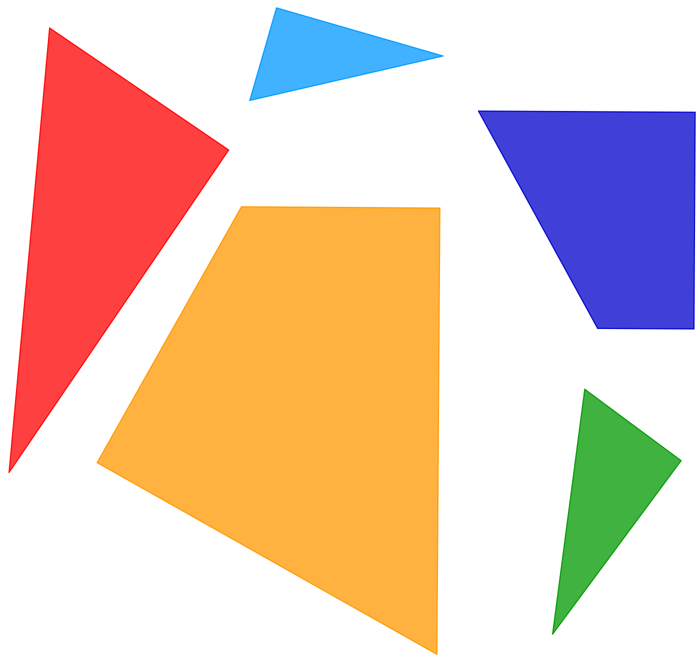
7) Este posibil ca unii profesori să considere pierdere de timp partea de investigaţii şi să focuseze pe aplicaţii (care oricum nu pot fi evitate). Designul unei activităţi concrete are trei componente importante: elevii cu care realizăm activitatea, profesorul care va realiza activitatea şi conţinutul. Pentru a realiza o activitate cu succes, fiecare profesor trebuie să găsească un echilibru între aceste trei componente. Pentru mai multe abordări recomandăm capitolul 7 din [109].

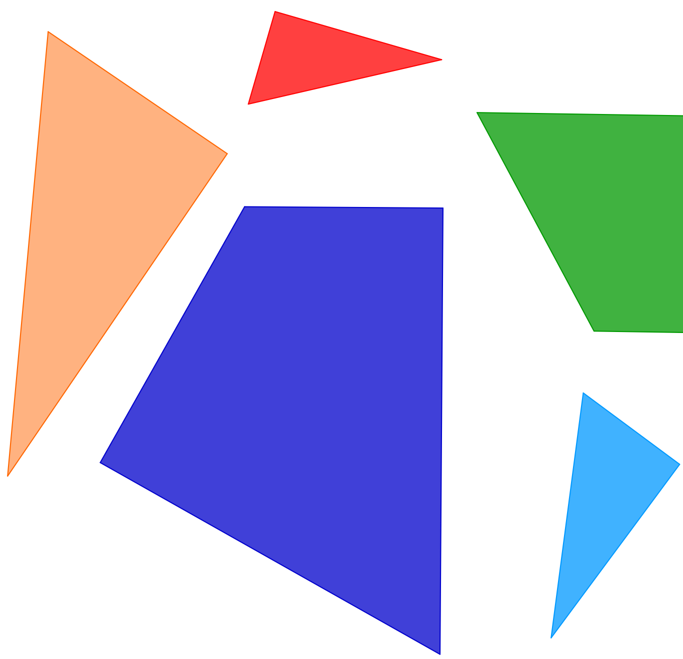
Manipulabile

1. Pătrate pentru realizarea pavărilor



2. Bucăţile de puzzle pentru varianta a doua (două seturi)





3. Instrucţiuni pentru varianta 1 (fiecare pereche primeşte două tipuri de pătrate):

- (15') Folosind cele două tipuri de pătrate primite realizaţi un model de pavare al planului care să nu depindă de dimensiunile efective ale pătratelor! Pavarea înseamnă că pătratele acoperă în întregime planul fără suprapuneri.
- (15') Peste pavarea realizată suprapuneţi o reţea pătrată care să aibă toate nodurile în vârfurile pătratelor care formează pavarea!
- (10') Stabiliţi o relaţie între ariile pătratelor primite iniţial şi aria pătratului de bază care generează reţeaua pătrată!
- (10') Calculaţi distanţa dintre nodurile vecine ale reţelei şi formulaţi relaţia dintre arii folosind numai lungimile laturilor unui triunghi!

4. Instrucţiuni pentru varianta a 2-a (fiecare pereche primeşte două seturi de piese puzzle):

- Aranjaţi un set din piesele primite în aşa fel încât acestea să formeze două pătrate!
- Aranjaţi piesele celuilalt set astfel încât acestea să formeze un singur pătrat!
- Stabiliţi o relaţie între ariile celor trei pătrate formate!
- Aranjaţi cele trei pătrate obţinute astfel ca fiecare două să aibă un vârf comun iar cele trei puncte astfel obţinute (vârfuri comune) să formeze un triunghi care are câte o latură comună cu fiecare pătrat!
- Formulaţi relaţia dintre arii cu ajutorul lungimilor laturilor triunghiului anterior obţinut!

Bibliografie

[1] Lorin W. Anderson, David R. Krathwohl (Editori): *A taxonomy for Learning, teaching, and assessing: A revision of Bloom's taxonomy of educational objectives*, New York: Addison Wesley Longman, 2001.

[2] Szilárd András: *Constructing with nonstandard bricks*, The Australian Mathematics Teacher, 68(2012):4, pag. 23-29.

[3] Szilárd András, Hajnalka Csapó, Örs Nagy, Kinga Sipos, Anna Soós, Judit Szilágyi: *Predarea matematicii prin metode bazate pe curiozitate şi investigaţii*, Editura Status, Miercurea Ciuc, 2013.

[4] Ibrahim Abu Aqeel: *Improving Methods of Finding the Least Common Multiple and the Greatest Common Divisor Using Conceptual Map*, Migration Letters Volume: 21, No: S3 (2024), pp. 1468-1479.

[5] Michèle Artigue, Morten Blomhøj: *Conceptualizing inquiry-based education in mathematics*, ZDM Mathematics Education (2013) 45:797–810 DOI 10.1007/s11858-013-0506-6.

[6] Michèle Artigue, Peter Baptist: *Inquiry in Mathematics Education*, Fibonacci Project, 2012

[7] Michèle Artigue, Justin Dillon, Wynne Harlen , Pierre Léna: *Learning through Inquiry*, Fibonacci Project, 2012.

[8] ASSIST-ME: *Illustrative Examples: A sample of illustrative examples of the use of formative assessment methods in inquiry-based education*, D6.4, University of Copenhagen, Department of Science Education, 2016.

[9] ASSIST-ME: *Assessment Transformation Package*, D6.5, University of Copenhagen, Department of Science Education, 2016.

[10] Suzianah Bakri, Mazlini Adnan: *Effect of 5E learning model on academic achievement in teaching mathematics: Meta-analysis study*, AIP Conf. Proc. 2750, 040018 (2024) https://doi.org/10.1063/5.0148568.

[11] Peter Baptist, Dagmar Raab (editori): *Implementing Inquiry in Mathematics Education*, Fibonacci Project, 2012.

[12] Merle Barlow: *The Pythagorean Theorem*, Westbow Press, 2016.

[13] Emőke Báró: *The effect of problem-based learning on students' learning outcomes*, Annales Mathematicae et Informaticae, 2024.

[14] Morten Blomhøj, Per Øystein Haavold, Ida Friestad-Pedersen: *Inquiry-based mathematics teaching in practice: a case of a three-phased didactical model*, Twelfth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME12), Feb 2022, Bozen-Bolzano, Italy. https://hal.science/hal-03760079/document.

[15] Werner Blum, D. Leiß: *How do students and teachers deal with modelling problems?*, în C. Haines, P. Galbraith, W. Blum şi S. Khan (editori), Mathematical modelling (ICTMA 12): Education, Engineering and Economics: proceedings from the twelfth International Conference on the Teaching of Mathematical Modelling and Applications (pp. 222-231). Chichester: Horwood, 2007.

[16] Guy Brousseau: *Theory of Didactical Situations in Mathematics: Didactique des Mathématiques, 1970–1990*, Kluwer Academic Publishers, 2002.

[17] B.N. Burke: *The ITEEA 6E Learning byDeSIGN™ Model, Maximizing Informed Design and Inquiry in the Integrative STEM Classroom*, Technology and Engineering Teacher 73 (6), 14-19, 2014.

[18] Jerry Burkhart: *Building Numbers from Primes,* Mathematics Teaching in the Middle School, vol 15(3), pag. 156-167, 2009.

[19] Rodger W. Bybee, Joseph A. Taylor, April Gardner, Pamela Van Scotter, Janet Carlson Powell, Anne Westbrook, Nancy Landes: *The BSCS 5E Instructional Model: Origins, Effectiveness, and Applications*, BSCS, 2006.

[20] Caena, F.: *Literature review Quality in Teachers' continuing professional development*, European Comission Education and training 2020 Thematic Working Group 'Professional Development of Teachers', 2011.

[21] James Calleja:*Teaching Mathematics through Inquiry – A Continuing Professional Development Programme Design*, Educational Designer, 3(9), 2016.

[22] Y.-H. Chen, C.-L. Hsu, Y-J. Wu, Z. Yi, Y. Wang, D. R. Thompson: *Exploring attribute hierarchies of the van Hiele theory using diagnostic classification modeling and structural equation modeling,* 2023, University of Chicago School Mathematics Project, https://ucsmp.uchicago.edu/resources/van-hiele/.

[23] D.A. Chessin, V.J. Moore: *The 6-E Learning Model*, Science and Children, 42, 3., 2004.

[24] Yves Chevallard, Berta Barquero, Marianna Bosch, Ignasi Florensa, Josep Gascón, Pedro Nicolás, Noemí Ruiz-Munzón: *Advances in the Anthropological Theory of the Didactic*, Birkhäuser Cham, 2022.

[25] Liliana Ciascai, Andreea Eșanu: Model ciclic de predare-învățare bazat pe investigație, Presa Universitară Clujeană, 2016 (https://ceae.ro/wp-content/uploads/2017/05/Fundamentarea-abordarii.pdf).

[26] D. Clarke, H. Hollingsworth: *Elaborating a model of teacher professional growth*, Teaching and Teacher Education, 18, 947-967, 2002.

[27] *Comenius good practices and examples*, Lifelong Learning Programme, 2013.

[28] Csaba Csíkos, Benő Csapó, Gábor Veres, Ferencné Adorján, Katalin Radnóti, Christine Harrison, Brian Matthews, Paul Black, Eilish McLoughlin, Paul van Kampen, Deirdre McCabe, Odilla Finlayson: *Final report on the assessment framework and instruments for IBSE skills*, Strategies for the Assessment of Inquiry Learning in Science (SAILS), 2015.

[29] Ying Dai: *Application of Inquiry Teaching Methods in Primary School Mathematics Curriculum*, Proceedings of the 2017 3rd International Conference on Economics, Social Science, Arts, Education and Management Engineering (ESSAEME 2017), pp. 2132-2137 https://doi.org/10.2991/essaeme-17.2017.432.

[30] Jacqueline Dewar, Pao-sheng Hsu, Harriet Pollatsek: *Mathematics Education – A Spectrum of Work in Mathematical Sciences Departments*, Springer, 2016.

[31] Filip Dochy, Mien Segers, Piet Van den Bossche, David Gijbels: *Effects of problem-based learning: a meta-analysis*, Learning and Instruction 13 (2003), 533–568.

[32] Michiel Doorman, Sabine Fechner, Vincent Jonker, Monica Wijers: *(Re)Design Guidelines for teachers for developing IBST-oriented classroom materials for science and mathematics using workplace contexts*, 2014.

[33] Michiel Doorman, Javier Garcia, Despina Potari, Gabriella Zsombori, Szilárd András: *The potential of a task for professional development across national contexts*, în volumul Educating the Educators: International Approaches to Scaling-up Professional Development in Mathematics and Science Education (pp. 216-227). Publisher: WTM Verlag. Editors: K. Maass, B. Barzel, G. Törner, D. Wernisch, E. Schäfer, K. Reitz-Koncebovski.

[34] Hanna Dumont, David Istance, Francisco Benavides (editori): *The Nature of Learning – Using Research to Inspire Practice*, Educational Research and Innovation, OECD Centre for Educational Research and Innovation, 2010.

[35] Foster, N. and M. Piacentini (eds.) (2023), *Innovating Assessments to Measure and Support Complex Skills*, OECD Publishing, Paris, https://doi.org/10.1787/e5f3e341-en.

[36] Kym Fry: *Measuring Messy Mathematics: Assessing learning in a mathematical inquiry context*, PhD Thesis, University of Queensland, 2015.

[37] Jakob Führer: *Filling space with hypercubes of two sizes – The Pythagorean Tilling in Higher Dimensions*, Mathematika, 2022(68):3, 827-839.

[38] José Mariano Gago, John Ziman, Paul Caro, Costas Constantinou, Graham Davies, Ilka Parchmannn, Miia Rannikmäe, Svein Sjøberg: *Increasing Human Resources for Science and Technology in Europe*, Report of the High Level Group on Human Resource, 2004.

[39] Inés M. Gómez-Chacón, Adrián Bacelo, José M. Marbán, Andrés Palacios: *Inquiry-based mathematics education and attitudes towards mathematics: tracking profiles for teaching*, Mathematics Education Research Journal, 36:715–743, 2024, https://doi.org/10.1007/s13394-023-00468-8.

[40] Regula Grob, Anne Beerenwinkel, Manuel Haselhofer, Monika Holmeier, Claudia Stübi, Olia Tsivitanidou, Peter Labudde: *Description of the ASSIST-ME assessment methods and competences*, ASSIST-ME project, D4.7, 2014.

[41] Guskey, T.R.: *Professional development and teacher change*, Teachers and Teaching, 8, 381-391, 2002.

[42] Per Øystein Haavold, Morten Blomhøj: *Coherence through inquiry based mathematics education*, Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, Utrecht University, Feb 2019, Utrecht, Netherlands, https://hal.science/hal-02429769v1.

[43] Wynne Harlen, Pierre Léna (editori): *The legacy of the FIBONACCI project to science and mathematics education – A systemic approach for sustainable implementation and dissemination of inquiry pedagogy, tested in primary and secondary schools throughout Europe (2010-2013).*

[44] van Hiele, P. M.: *Structure and insight: A theory of mathematics education*, Academic Press, 1986.

[45] Luhuan Huang, Michiel Doorman, Wouter van Joolingen: *Inquiry-Based Learning Practices in Lower-Secondary Mathematics Education Reported by Students from China and the Netherlands*, Int. J. of Sci. and Math. Educ. 19, 1505–1521, 2021, https://doi.org/10.1007/s10763-020-10122-5.

[46] Dániel Katona, Gábor Szűcs: *Pósa-Method & Cubic-Geometry – A Sample of a Problem Thread for Discovery Learning of Mathematics*, Differences in Pedagogical Theory and Practice, Editor Tibor János Karlovitz, International Research Institute sro, Komárno, Slovakia, 2017.

[47] Anna Kiss: *Complex Mathematics Education: An Integrated and Inquiry-Based Mathematics Teaching Method*, Can. J. Sci. Math. Techn. Educ. 22:758–772, 2022, https://doi.org/10.1007/s42330-022-00250-1.

[48] Marina Kogan, Sandra L. Laursen: *Assessing Long-Term Effects of Inquiry-Based Learning: A Case Study from College Mathematics*, Innov. High. Educ. (2014) 39:183–199 DOI 10.1007/s10755-013-9269-9.

[49] Nathalie Kuijpers, Katja Maaß, Karen Reitz-Koncebovski (editors): *Mathematics and Science in Life: Inquiry Learning and the World of Work*, Final publication of the Mascil project, University of Education Freiburg, 2016.

[50] Kyeong Hah Roh: *Problem-based Learning in Mathematics*, ERIC Digest, 2003.

[51] Lerman S., Zehetmeier, S. *Face-to-face communities and networks of practicing mathematics teachers.* In: Krainer, K. and Wood, Terry (Eds.). The International Handbook of Mathematics Teacher Education. Volume 3 Participants in Mathematics Teacher Education. Individuals, Teams, Communities and Networks. Sense Publishers, Rotterdam, the Netherlands, pp.133-153., 2008.

[52] H-C Li, T-L Tsai: *The effects of a problem-based learning intervention on primary students' performance on greatest common factor and least common multiple and on their attitudes towards mathematics*, International Journal of Innovation and Learning, vol. 31, no. 1, pp. 51-69., 2022 https://www.inderscienceonline.com/doi/abs/10.1504/IJIL.2022.119636.

[53] Peter Liljedahl, Manuel Santos-Trigo, Uldarico Malaspina, Regina Bruder: *Problem Solving in Mathematics Education*, Springer, 2016.

[54] Peter Liljedahl, Manuel Santos-Trigo (editori): *Mathematical Problem Solving – Current Themes, Trends, and Research*, Springer, 2019.

[55] Katja Maaß, Karen Reitz-Koncebovski (editors): *Inquiry-based learning in maths and science classes – Whay it is and how it works – examples – experiences*, Final publication of the Primas project, University of Education Freiburg, 2013.

[56] Katja Maaß, Michèle Artigue: *Implementation of inquiry-based learning in day-to-day teaching: a synthesis*, ZDM Mathematics Education, 45:779–795, 2013, DOI: https://doi.org/10.1007/s11858-013-0528-0.

[57] Katja Maaß, Bärbel Barzel, Günter Törner, Diana Wernisch, Elena Schäfer, Karen Reitz-Koncebovski (editors): *Educating the educators: international approaches to scaling-up professional development in mathematics and science education,* Proceedings of the conference hosted jointly by project

mascil (mathematics and science for life) and the German Centre for Mathematics Education (DZLM), 15-16 December 2014 in Essen, Germany. WTM – Verlag für Wissenaschaftliche Texte und Medien, Münster, 2015, https://www.dzlm.de/files/ConferenceProceedings_EducatingTheEducators.

[58] Mahmud, M. R., Turmudi, Sopandi, W., Rohimah, S. M., & Pratiwi, I. M.: *Learning obstacles analysis of lowest common multiple and greatest common factor in primary school*, Jurnal Elemen, 2023, 9(2), 440-449. https://doi.org/10.29408/jel.v9i2.12359.

[59] Kevin Manunure, Allen Leung: *Integrating inquiry and mathematical modeling when teaching a common topic in lower secondary school: an iSTEM approach*, Front. Educ. 9:1376951, 2024, https://doi.org/10.3389/feduc.2024.1376951.

[60] Eli Maor: *The Pythagorean Theorem – A 4000-Year History*, Princeton University Press, 2010.

[61] Carla Marschall, Rachel French: *Concept-Based Inquiry in Action: Strategies to Promote Transferable Understanding (Corwin Teaching Essentials)*, Corwin, 2018.

[62] Martinez, S., Valverde, J.C.: *Influence of Context on Greatest Common Divisor Problem Solving: A Qualitative Study*. Mathematics 2022, 10, 1325. https://doi.org/10.3390/math10081325.

[63] K. D. P. Meke, J. Jailani, D. U. Wutsqa, H. D. Alfi: *Problem based learning using manipulative materials to improve student interest of mathematics learning*, International Conference on Mathematics and Science Education (ICMScE 2018) IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series1157 (2019) 032099 IOP Publishing https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/1157/3/032099/pdf.

[64] Harald A. Mieg (editor): *Inquiry-Based Learning-Undergraduate Research – The German Multidisciplinary Experience*, Springer, 2019.

[65] Roger B. Nelsen: *Proofs Without Words – Exercises in Visual Thinking*, The Mathematical Association of America, 1993.

[66] Roger B. Nelsen: *Proofs Without Words II – More Exercises in Visual Thinking*, The Mathematical Association of America, 2000

[67] Pythagorean Theorem, platforma Cut the Knot.

[68] Nilda V. San Miguel: *Effect of 7E Model Inquiry-Based Approach on Student Achievement*, International Jorunal of Research Publications, 2021, 89(1), 46-61; doi:.10.47119/IJRP1008911120212430.

[69] Stella D. Nika, Alexios V. Brailas: *Interaction in the Mathematics Class: The Shaping Process of Inquiry-based Learning*, European Journal of Education and Pedagogy, 2022, vol. 3, DOI: http://dx.doi.org/10.24018/ejedu.2022.3.3.249.

[70] OECD (2010), *Mathematics Framework*, in PISA 2009 Assessment Framework: Key Competencies in Reading, Mathematics and Science, OECD Publishing, Paris. DOI: https://doi.org/10.1787/9789264062658-4-en.

[71] OECD (2020): *Global Teaching InSights – A video study of teaching*, OECD Publishing, Paris, https://doi.org/10.1787/20d6f36b-en.

[72] OECD (2021): *Teachers Getting the Best out of Their Students: From Primary to Upper Secondary Education*, TALIS, OECD Publishing, Paris, https://doi.org/10.1787/5bc5cd4e-en.

[73] OECD (2023), *PISA 2022 Assessment and Analytical Framework*, PISA, OECD Publishing, Paris, https://doi.org/10.1787/dfe0bf9c-en.

[74] Alexander Ostermann, Gerhard Wanner: *Geometry by Its History*, Springer, 2012.

[75] M. Azhari Panjaitan, Suhendra Suhendra: *Model Problem-Based Learning for Improving Student's Mathematical Competence: Systematic Literature Review*, Mathematics Education Journals, vol. 6, Nr. 2, August 2022.

[76] Cláudia da Mota Darós Parente: *Compared analysis of the school day in European Union countries*, Cadernos de Pesquisa, São Paulo, v. 50, n. 175, p. 78-94, jan./mar. 2020. https://doi.org/10.1590/198053146760.

[77] Ida Friestad Pedersen, Per Øystein Haavold: *Students' mathematical beliefs and motivation in the context of inquiry-based mathematics teaching*, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 54:8, 1649-1663, 2023, https://doi.org/10.1080/0020739X.2023.2189171.

[78] Peterson, A., et al. (2018): *Understanding innovative pedagogies: Key themes to analyse new approaches to teaching and learning*, OECD Education Working Papers, No. 172, OECD Publishing, Paris, https://doi.org/10.1787/9f843a6e-en.

[79] George Pólya: *How to Solve It*, Princeton University Press, 1945.

[80] Alfred S. Posamentier: *The Pythagorean Theorem: The Story Of Its Power And Beauty*, Prometheus Books, 2010.

[81] Manfred Prenzel, Matthias Stadler, Anja Friedrich, Katrin Knickmeier, Christian Ostermeier: *Increasing the efficiency of mathematics and science instruction (SINUS) – a large scale teacher professional development programme in Germany*, Leibniz-Institute for Science Education, Kiel, 2009.

[82] PRIMAS guide for professional development providers, https://primas-project.eu/wp-content/uploads/sites/323/2017/11/FINAL_WP4_Guide_PD_-providers_licence_150708.pdf.

[83] Putnam, R. T., Borko, H.: *What do new views of knowledge and thinking have to say about research on teacher learning?*, Educational Researcher, 29(1), 4-15., 2000.

[84] Christopher R. Rakes, Angela Wesneski, Rebecca Laws: *Building Mathematics Learning through Inquiry Using Student-Generated Data: Lessons Learned from Plan-Do-Study-Act Cycles*, Educ. Sci. 2023, 13(9), 919. https://doi.org/10.3390/educsci13090919.

[85] Sam Ramaila: *Systematic review of inquiry-based learning: assessing impact and best practices in education*, F1000Research 2024, 13:1045.

[86] Michel Rocard, Peter Csermely, Doris Jorde, Dieter Lenzen, Harriet Walberg-Henriksson, Valerie Hemmo: *Science Education Now: A Renewed Pedgogy for the Future of Europe*, Directorate-General for Research 2007 Science, Economy and Society, 2007.

[87] Manuel Santos-Trigo: *Problem solving in mathematics education: tracing its foundations and current research-practice trends*, ZDM – Mathematics Education 56:211–222, 2024 https://doi.org/10.1007/s11858-024-01578-8.

[88] D. Schattschneider: *Unilateral and Equitransitive Tilings by Squares*, Discrete and Computational Geometry, 2000(24), pag. 519-525.

[89] Schleicher, A.: Teaching Excellence through Professional Learning and Policy Reform: Lessons from Around the World. International Summit on the Teaching Profession. Paris: OECD Publishing, 2016.

[90] Alan H. Schoenfeld: *Mathematical Problem Solving*, Academic Press, 2016.

[91] Alan H. Schoenfeld: *Mathematical Thinking and Problem Solving*, Routledge, 2016.

[92] Alan H. Schoenfeld: *Thoughts on scale*, ZDM, 47(1), 161-169., 2015.

[93] Alan H. Schoenfeld and the Teaching for Robust Understanding Project: *An Introduction to the Teaching for Robust Understanding (TRU) Framework. Berkeley, CA: Graduate School of Education,* 2016, http://truframework.org sau http://map.mathshell.org/trumath.php.

[94] Alan H. Schoenfeld, Heather Fink, Alyssa Sayavedra, Anna Weltman, Sandra Zuñiga-Ruiz: *Mathematics Teaching On Target A Guide to Teaching for Robust Understanding at All Grade Levels*, Routledge, 2023.

[95] Alan H. Schoenfeld, Heather Fink, Sandra Zuñiga-Ruiz, Siqi Huang, Xinyu Wei, Brantina Chirinda: *Helping Students Become Powerful Mathematical Thinkers. Case Studies of Teaching for Robust Understanding*, Routledge, 2023.

[96] W. Servais, T. Varga (editors): *Teaching School Mathematics – A UNESCO Source book*, Penguin books, 1971, https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000007959.

[97] Shlomo Sharan, Ivy Geok Chin Tan: *Organizing Schools for Productive Learning*, Springer, 2008.

[98] Florence Mihaela Singer, Hedy Moscovici: *Teaching and learning cycles in a constructivist approach to instruction*, Teaching and Teacher Education 24 (2008) 1613–1634.

[99] Southwest Educational Development Laboratory: *The Professional Teaching and Learning Cycle: Introduction*, 2005.

[100] Leandro de Oliveira Souza, Celi Espasandin Lopes, Maxine Pfannkuch: *Collaborative professional development for statistics teaching: A case study of two middle-school mathematics teachers*, Statistics Education Research Journal, 14(1), 112-134, 2015.

[101] John C. Sparks: *The Pythagorean Theorem: Crown Jewel of Mathematics*, Author House, 2008.

[102] Bharath Sriraman, Gabriele Kaiser, Morten Blomhøj: *A brief survey of the state of mathematical modeling around the world*, Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 38(3):212-213, 2006 DOI:10.1007/BF02652805.

[103] Ragnhild Lyngved Staberg, Maria Immaculata Maya Febri, Svein Arne Sikko, Szilárd András, Gabriella Zsombori: *Bridging the gap between research and practice in teacher professional development (TPD): Teachers as facilitators of inquiry based learning TPD in Norway and Romania*, The XVIII Symposium of the International Organization for Science and Technology Education (IOSTE), 2018.

[104] Sepideh Stewart (editor), *Mathematicians' Reflections on Teaching A Symbiosis with Mathematics Education Theories*, Springer, 2023 (Advances in Mathematics Education Series)

[105] Andrew A. Tawfik, Woei Hung, Philippe J. Giabbanelli: *Comparing How Different Inquiry-based Approaches Impact Learning Outcomes*, The Interdisciplinary Journal of Problem-based Learning, vol 14(1), 2020, DOI: https://doi.org/10.14434/ijpbl.v14i1.28624.

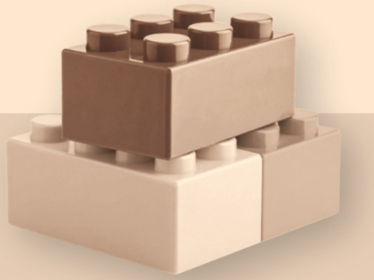
[106] Murat Tezer, Meryem Cumhur: *Mathematics through the 5E Instructional Model and Mathematical Modelling: The Geometrical Objects*, EURASIA Journal of Mathematics Science and Technology Education, 13(8):4789-4804, 2017.

[107] Zalman Usiskin: *Van Hiele Levels and Achievment in Secondary School Geometry*, The University of Chicago, 1982, https://ucsmp.uchicago.edu/resources/van_hiele_levels.pdf.

[108] Tian Wang, Libin Zhang, Zhiyong Xie, Jian Liu: *How does mathematical modeling competency affect the creativity of middle school students? The roles of curiosity and guided inquiry teaching*, Front. Psychol. 13:1044580, 2023, doi: https://doi.org/10.3389/fpsyg.2022.1044580.

[109] Erich Christian Wittmann: *Connecting Mathematics and Mathematics Education – Collected Papers on Mathematics Education as a Design Science*, Springer, 2021.

[110] Inge Zweers, Mariette Huizinga, Eddie Denessen, Maartje Raijmakers: *Inquiry-Based Learning For All: A Systematic Review of the Effects of Inquiry-Based Learning on Knowledge, Skills, Attitudes and Behavior of Students with Social-Emotional and Behavioral Difficulties in Primary and Secondary Education*, OSP preprint, 2019, https://doi.org/10.31219/osf.io/z45jt.



Aplicarea metodelor investigative (Inquiry-based Learning – IBL) în predarea matematicii contribuie la formarea unei gândiri logice și critice, încurajând elevii să descopere conceptele prin explorare și raționament propriu. Această abordare favorizează o înțelegere profundă și durabilă a conținuturilor, dezvoltând totodată competențe esențiale pentru rezolvarea de probleme. Folosirea la scară largă a metodelor IBL a fost recomandată explicit la nivel European încă din 2007, și majoritatea țărilor membre ale Uniunii Europene au și introdus la nivel de curriculum școlar folosirea acestora. În acest context proiectul „Matematica Altfel" derulat de Centrul de Evaluare și Analize Educaționale constituie un pas important spre îmbunătățirea învățământului preuniversitar. Cartea oferă o imagine de ansamblu asupra aplicării metodei IBL, asigurând atât o prezentare a fundamentelor teoretice, cât și ilustrarea acestora prin exemple practice.

(Prof. univ. dr. Zsoldos-Marchiş Julianna)

ISBN 978-606-37-2974-4

UNIVERSITAS CLAUDIOPOLITANA
ROMANIA
PRESA UNIVERSITARĂ