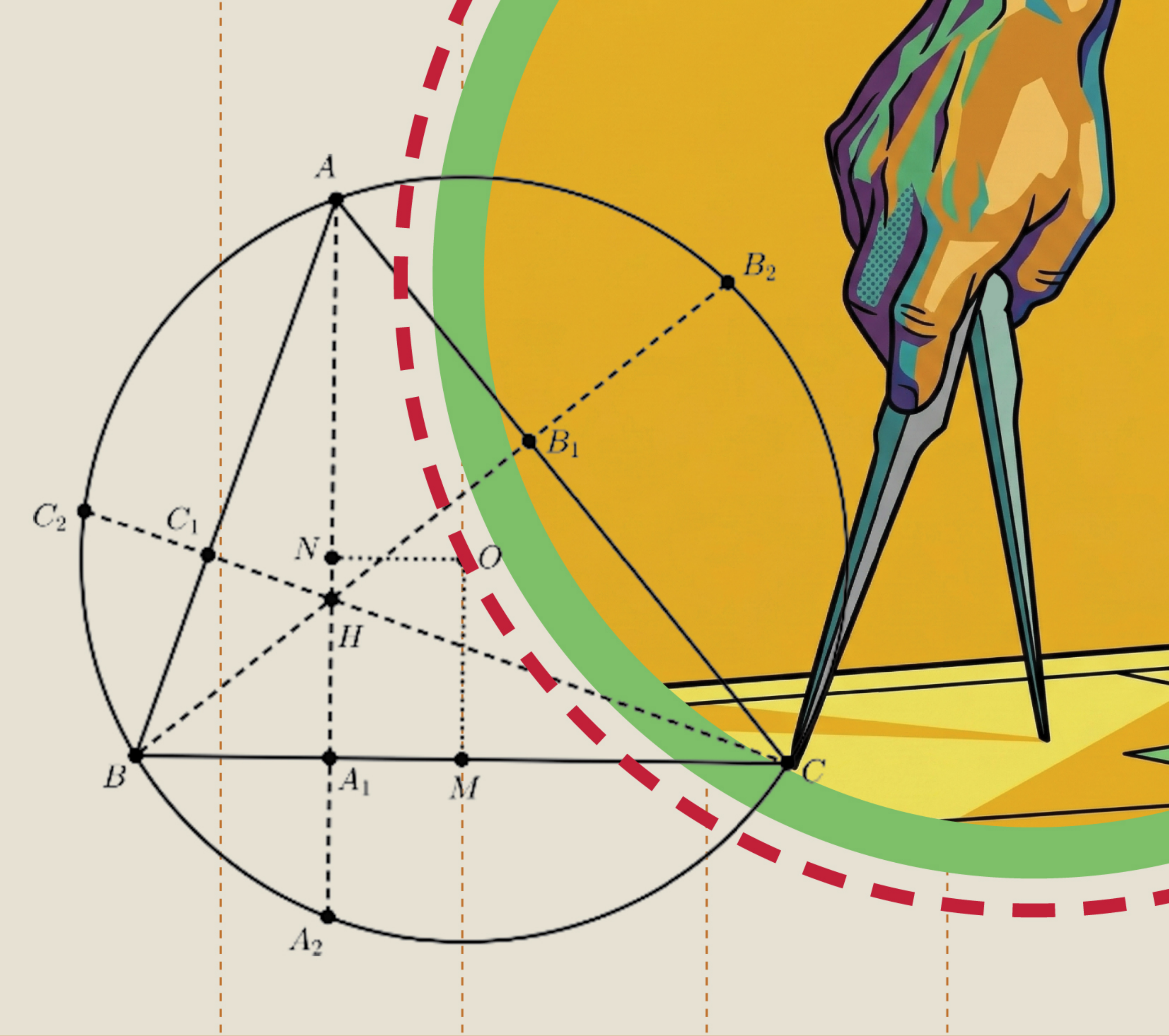


ANDRÁS SZILÁRD ■ LUKÁCS ANDOR ■ SZILÁGYI ZSOLT

VII. Országos Magyar Matematikaolimpia

XXXIV. Erdélyi Magyar Matematikaverseny

KOLOZSVÁRI EGYETEMI KIADÓ ■ 2026

ANDRÁS SZILÁRD | LUKÁCS ANDOR | SZILÁGYI ZSOLT

VII. Országos Magyar Matematikaolimpia

XXXIV. Erdélyi Magyar Matematikaverseny

PRESA UNIVERSITARĂ CLUJEANĂ

2026

Lektorálta:

Dr. ZSOLDOS MARCHIȘ Julianna egyetemi tanár

Dr. NAGY Örs I-es fokozatú tanár

Borítóterv: Sütő Ferenc

ISBN 978-606-37-2967-6

Universitatea Babeș-Bolyai

Presa Universitară Clujeană

Director: Codruța Săcelean

Str. B.P. Hasdeu nr. 51

400371 Cluj-Napoca, România

Tel.: (+40) 744 687 884

E-mail: editura@ubbcluj.ro

editura.ubbcluj.ro | libraria.ubbcluj.ro

A VII. Országos Magyar Matematikaolimpia feladatsorait és megoldásait a beérkező javaslatok alapján a VII. Országos Magyar Matematikaolimpia versenybizottsága állította össze. Az országos szakasz helyszíne a csíkszeredai Márton Áron Főgimnázium volt, a verseny február 2025. február 24. és 28. között zajlott.

A VII. Országos Magyar Matematikaolimpia versenybizottságának névsora:

Elnök: dr. András Szilárd docens, Babeș–Bolyai Tudományegyetem

Ügyvezető elnök: Csapó Hajnalka, Hargita megyei tanfelügyelőség

Alelnökök: dr. Lukács Andor adjunktus, Babeș–Bolyai Tudományegyetem
dr. Szilágyi Zsolt adjunktus, Babeș–Bolyai Tudományegyetem

Titkárok: Zsombori Gabriella, Márton Áron Főgimnázium
Gyarmati Dénes, Márton Áron Főgimnázium

Tagok:

Baja Zsolt, Babeș–Bolyai Tudományegyetem, Matematika és Informatika Kar
Dávid Géza, Tamási Áron Elméleti Líceum, Székelyudvarhely
Durugy Erika, Jósika Miklós Elméleti Líceum, Torda
Faluvégi Melánia, Simion Bărnuțiu Általános Iskola, Zilah
Fodor Erika, Andrei Mureșanu Főgimnázium, Beszterce
Forgács István, Kölcsey Ferenc Főgimnázium, Szatmárnémeti
Gergely Anna, Marosi Gergely Általános Iskola, Siménfalva
Kocsis Attila-Levente, Téglás Gábor Elméleti Líceum, Déva
Köncse Balázs, Nagy Imre Általános Iskola, Csíkszereda
Mátéfi István, Bolyai Farkas Elméleti Líceum, Marosvásárhely
Mátyás Ildikó Beáta, Mircea Eliade Általános Iskola, Szatmárnémeti
Nagy Enikő Ilona, Ady Endre Elméleti Líceum, Nagyvárad
Oláh-Ilkei Árpád, Székely Mikó Kollégium, Sepsiszentgyörgy
Orbán Ilona Karmen, 1. sz. Technológiai Líceum, Berettyószéplak
Pálhegyi Farkas László, Mihai Eminescu Főgimnázium, Nagyvárad
Papp Ilonka, Áprily Lajos Főgimnázium, Brassó
Spier Tünde, Csiky Gergely Főgimnázium, Arad
Szász Szilárd, Bolyai Farkas Elméleti Líceum, Marosvásárhely
Szilágyi Judit, Báthory István Elméleti Líceum, Kolozsvár
Tempfli Gabriella, Kölcsey Ferenc Főgimnázium, Szatmárnémeti
Tóth Csongor József, Domokos Kázmér Szakközépiskola, Szováta
Tőtős György, Babeș–Bolyai Tudományegyetem, Matematika és Informatika Kar
Turdean Katalin, Silvania Nemzeti Főgimnázium, Zilah
Ugron Szabolcs, Székely Mikó Kollégium, Sepsiszentgyörgy

A könyv megjelenését az Erdélyi Tehetségsegítő Tanács által kivitelezett **NTP-TSZMT-M-25-0014** kódszámú pályázat támogatta, amelyet a Kulturális és Innovációs Minisztérium megbízásából a Nemzeti Kulturális Támogatáskezelő bonyolította le.

A VII-a Olimpiadă Națională de Matematică pentru Școlile/Secțiile cu Predare în Limba Maghiară

Tartalomjegyzék

VII. Országos Magyar Matematikaolimpia, 2025
XXXIV. Erdélyi Magyar Matematikaverseny

Megyei forduló

5. osztály

1. feladat (10 pont). a) Igazold, hogy az $a = 2025 \cdot (2025 + 2024 \cdot 2025) : (2025 \cdot 2026 - 2025)$ négyzetszám!

b) Legyen n a legnagyobb, nullától különböző számjegyekből álló természetes szám, amelyben a számjegyek összege 2025. Határozd meg az n szám 37-tel való osztási maradékát és hányadosát!

Durugy Erika, Torda
Mátyás Ildikó Beáta, Szatmárnémeti

2. feladat (10 pont). Az iskolában Marika felírja a táblára növekvő sorrendben az összes természetes számot, az 1-es számtól kezdve, egészen a 2025-ös számmal bezárólag. A szünetben megérkezik Pisti, és viccből letörli a tábláról a 89-től 113-ig terjedő számokat, beleértve a 89-et és a 113-at is. Miután Marika rászól, hogy hagyja abba, a többi szám érintetlenül a táblán marad. Ekkor Marika kíváncsian kérdezi a következőket.

a) A táblán maradt számoknak összesen hány számjegye van?

b) A táblán maradt számok sorában melyik számjegy található a 2025-dik helyen? Indokold meg a helyes választ!

Durugy Erika, Torda
Orban Ilona-Karmen, Berettyószéplak

3. feladat (10 pont). Józsi és Karcsi társasjátékot játszanak és a továbblépéshez maguk választottak feltételeket, egy piros és egy sárga dobókockával történő dobás alapján. Józsi akkor léphet, ha a két kockával dobott értékek összegének és szorzatának összege páros szám. Karcsi pedig akkor léphet, ha ez a szám páratlan. Két dobás eredményét azonosnak tekintjük, ha az azonos színű kockákon ugyanaz a szám jelenik meg a két dobás során. Hányféle különböző eredménye lehet a dobásoknak, ha a két kockával mindig egyszerre dobunk? Ebből hány esetben léphet Karcsi és hány esetben léphet Józsi? Indokold meg a választ!

Matlap 10/2024, A:5010

4. feladat (10 pont). a) Határozd meg a $3^{10} + 5^{10}$ szám utolsó számjegyét!

b) Milyen n pozitív természetes számokra lesz a 81^n utolsó két számjegye $\ldots 01$?

c) Határozd meg a $3^{2025} + 5^{2025}$ utolsó két számjegyét!

Szász Szilárd, Marosvásárhely

6. osztály

1. feladat (10 pont). Kató, Laci, Melinda és Norbi jó barátok, mindegyiknek van kutyája, kedvenc csokija és családjuk különböző márkájú kocsit használ. A kutyák neve valamilyen sorrendben: Bodri, Füles, Morzsa, Tücsök. A használt autómárkák: Ford, Honda, Opel, Skoda és a kedvenc csokifajták: fekete csoki, tejcsoki, mogyorós csoki és marcipános csoki (valamilyen sorrendben). A következőket tudjuk róluk:

(1) Bodri gazdája a mogyorós csokoládét szereti.

(2) Norbi egy Hondában utazik sízni és fekete csokit eszik.

(3) Kató minden nap sétálni viszi Fülest.

(4) Tücsök gazdája az Opelt kedveli.

(5) Melinda mindig tejcsokoládét vásárol.

(6) Füles a Skoda hátsó ülésén utazik.

Hogy hívják Morzsa gazdáját? Ki szereti a marcipános csokit? Ki utazik Ford autóban?
(Írd le a gondolatmenetedet lépésről lépésre!)

Matlap 10/2024, A:5015

2. feladat (10 pont). Adottak az $\widehat{AOA_1} = 2°$, $\widehat{A_1OA_2} = 3°$, $\widehat{A_2OA_3} = 4°$, $\ldots$, $\widehat{A_{n-1}OA_n} = (n+1)°$ szögek úgy, hogy az előbbi felsorolásban közvetlenül egymás után következő szögek egymás melletti szögek legyenek és a felsorolt szögek mértékének összege 135°.

a) Tudva, hogy n a fenti kijelentésben szereplő szögek száma, határozd meg az n értékét!

b) Ha az OM félegyenes az $\widehat{A_4OA_9}$ szögfelezője, számítsd ki az $\widehat{A_3OM}$ mértékét!

*****

3. feladat (10 pont). Tekintjük a

$$p, \quad p+3^k, \quad p+3^{k+1}, \quad p+3^{k+2}, \quad p+3^{k+3}$$

számokat, ahol a k és p valamilyen természetes számok.

a) Igazold, hogy az előbb felsorolt öt szám közül valamelyik osztható 5-tel!

b) Lehet-e p páratlan, ha a felsorolt öt szám mindegyike prímszám?

c) Határozd meg a k és p természetes számokat, amelyekre a felsorolt öt szám mindegyike prímszám!

Tempfli Gabriella, Szatmárnémeti

4. feladat (10 pont). a) Határozd meg az $\overline{ab}$ természetes számot, amelyre

$$\frac{\overline{aab}}{\overline{aa}-7}=15.$$

Faluvégi Melánia, Zilah

b) Határozd meg azt az $\overline{abcd}$ természetes számot, amelyre

$$\frac{\overline{abcd}}{\overline{cd}+2}=75 \quad \text{és} \quad \frac{\overline{abcd}}{\overline{ab}+5}=81.$$

Simon József, Csíkszereda

7. osztály

1. feladat (10 pont). A hét törpe kártyajátékot játszik egy különleges 2025 kártyából álló paklival. A kártyákon egy 1 és 2025 közötti természetes szám szerepel a gyök alatt. Mindegyik kártyán pontosan egy szám van és egyetlen szám sem szerepel két kártyán. A megkevert pakliból a törpék egymás után húznak egy-egy kártyát, amíg a pakli el nem fogy.
Bizonyítsd, hogy amikor az összes kártyát kihúzták lesz legalább egy törpe, akinek a kártyáin egyetlen természetes szám négyzete sem szerepel!

Gergely Anna, Székelyudvarhely

2. feladat (10 pont). Az $ABCD$ paralelogrammában $AD \equiv BD$, P a DC oldal egy olyan pontja, hogy $BP \perp DC$, továbbá $BP \cap AC = \{N\}$.

a) Bizonyítsd, hogy $NC \equiv ND$ és $AN = 2 \cdot ND$.

b) Bizonyítsd, hogy $\widehat{CAD} = 30°$ akkor és csakis akkor, ha $ABCD$ rombusz!

*****

3. feladat (10 pont). a) Határozd meg azon $x \geq 0$ racionális számokat, amelyekre $\dfrac{10x+1}{x+1}$ négyzetszám!

b) Oldd meg a következő egyenletet a racionális számok halmazán:

$$\frac{x+1}{5} + \frac{x+2}{6} + \frac{x+3}{7} + \cdots + \frac{x+2024}{2028} = \frac{2024^2}{2023}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \cdots + \frac{1}{2023 \cdot 2024}\right).$$

Matlap 10/A: 5017, 2024

4. feladat (10 pont). Az ABC háromszögben O a BC oldal felezőpontja, E és F pedig az AB és AC oldalaknak olyan belső pontjai, amelyekre $AE = 3 \cdot EB$ és $CF = 3 \cdot AF$. Az E és F pontokon keresztül az AO egyenessel húzott párhuzamosok a BC oldalt az M, illetve N pontokban metszik.
Bizonyítsd be, hogy:

a) $EMNF$ trapéz és $EM + FN = AO$;

b) $\dfrac{T_{EMNF}}{T_{ABC}} = \dfrac{1}{2}$.

Simon József, Csíkszereda

8. osztály

5. feladat (10 pont). a) Igazold, hogy ha $x, y \in \mathbb{R}^*$ és $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{2024} = 0$, akkor az

$$n = \left(\frac{x}{8} + 253\right)\left(\frac{y}{8} + 253\right) - 9$$

szám egy természetes szám köbe!

b) Bizonyítsd be, hogy ha az a, b, c számjegyek esetén $\left(\overline{ab}\right)^2 - c^2 = 2024$, akkor az $n = \overline{ab} - c$ szám osztható 11-gyel!

Matlap 10/A: 5021, 2024

6. feladat (10 pont). a) Igazold, hogy ha k természetes szám, akkor fennáll a következő egyenlőség:

$$\frac{1}{(k+1)\sqrt{k+2}} = \left(\sqrt{\frac{k+2}{k+1}} + 1\right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{k+1}} - \frac{1}{\sqrt{k+2}}\right).$$

b) Igazold, hogy teljesül a következő egyenlőtlenség:

$$\frac{1}{81\sqrt{82}} + \frac{1}{82\sqrt{83}} + \frac{1}{83\sqrt{84}} + \cdots + \frac{1}{2024\sqrt{2025}} > \frac{8}{45}.$$

*****

7. feladat (10 pont). Koppány az $ABCDA'B'C'D'$ kocka minden csúcsára felírta az 1 és 0 számok valamelyikét. Miután az egyes oldallapokhoz tartozó csúcsokra írt számokat összeadta, minden esetben a 4, 3 vagy 2 értékek valamelyikét kapta, mindegyiket legalább egyszer és az $ABCD$ oldallap esetén 4-et kapott összegül.

a) Hányféleképpen írhatta fel Koppány az 1 és a 0 számokat a kocka csúcsaira? Két felírást különbözőnek tekintünk, ha a két felírásban valamelyik csúcson különböző szám szerepel. Válaszodat indokold! Sorold fel az eseteket és készíts ábrát mindegyikhez!

b) Elemi lépésnek nevezzük azt, hogy egy tetszőleges él két végpontjában található értékeket a 2025 szám ugyanazon prímosztójával növeljük. Előfordulhat-e, hogy bizonyos számú elemi lépés után a 8 csúcson azonos értékek jelenjenek meg? Függhet-e ez attól, hogy kezdetben milyen számokat írtunk a csúcsokra?

Pálhegyi-Farkas László, Nagyvárad
Nagy Enikő Ilona, Nagyvárad

8. feladat (10 pont). Adott az $ABCDA'B'C'D'$ téglatest, melyben $AA' = a$ és $AB = BC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Jelöljük O-val az AC és BD átlók metszéspontját, valamint G-vel az AO szakasz O-hoz közelebb eső harmadoló pontját. Legyen E a G pont szimmetrikusa az AB oldal felezőpontjára nézve.

a) Ha G' pont az $A'B'D'$ háromszög súlypontja, akkor igazold, hogy az A, E, B', G' pontok egy síkban vannak!

b) Határozd meg a $B'E$ és az $A'O$ egyenesek által alkotott szög mértékét!

Pálhegyi-Farkas László, Nagyvárad
Ugron Szabolcs, Sepsiszentgyörgy

9. osztály

1. feladat (10 pont). Ha x, y, z, t szigorúan pozitív valós számok, akkor igazold az alábbi egyenlőtlenségeket:

a) $\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zt} + \sqrt{tx} \leq x + y + z + t$,

b) $\dfrac{1}{x+y+z} \leq \dfrac{1}{9}\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}\right)$,

c) $\dfrac{1}{x+y+\sqrt{zt}} + \dfrac{1}{y+z+\sqrt{tx}} + \dfrac{1}{z+t+\sqrt{xy}} + \dfrac{1}{t+x+\sqrt{yz}} \leq \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{t}\right)$.

Szilágyi Judit, Kolozsvár

2. feladat (10 pont). Ha $x \in \mathbb{R}$ és $x \geq 1$, akkor igazold, hogy $\left[\sqrt{[x] \cdot \left[x + \frac{1}{2}\right] + 1} + \frac{1}{2}\right] = \left[x + \frac{1}{2}\right]$, ahol $[a]$ az $a \in \mathbb{R}$ egész részét jelöli.

Matlap 10/2024, L:3802
Jakab Tibor, Sepsiszentgyörgy

3. feladat (10 pont). Az $1, 2, 3, \ldots, 2025$ számok közül kiválasztunk 1014 számot úgy, hogy a legnagyobb kiválasztott szám páratlan legyen. Igazold, hogy bármilyen választás esetén a kiválasztott számok között van kettő, amelyeknek az összege a legnagyobb kiválasztott számmal egyenlő!

Spier Tünde, Arad

4. feladat (10 pont). Az ABC háromszög síkjában P egy tetszőleges pont. A D, E és F azok a pontok, amelyekre $\overrightarrow{BD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EA}$, $\overrightarrow{BF} = -2\overrightarrow{AF}$. A P pontnak a D, E és F pontok szerinti szimmetrikusát jelölje rendre P_1, P_2 és P_3. Ha G az ABC háromszög súlypontja és G_1 a $P_1P_2P_3$ háromszög súlypontja, akkor igazold, hogy G a PG_1 szakasz felezőpontja!

Tóth Csongor, Szováta

10. osztály

5. feladat (10 pont). a) Igazold, hogy ha az $az^2 + bz + c = 0$ egyenlet $a, b, c \in \mathbb{C}^*$ együtthatóira fennáll a $|b| \geq 2|c|$ egyenlőtlenség, akkor az egyenletnek létezik legalább egy olyan gyöke, amelynek a modulusa kisebb vagy egyenlő mint 1!

b) Határozd meg a $z \in \mathbb{C}$ lehetséges értékeit úgy, hogy teljesüljön a

$$\max\{|z-1|, |z-\varepsilon|, |z-\varepsilon^2|\} \leq 1$$

egyenlőtlenség, ha $1, \varepsilon, \varepsilon^2$ harmadrendű egységgyökök!

Matlap 2024/8,L3776

6. feladat (10 pont). Adottak az $1 < a < b$ valós számok.

a) Igazold, hogy $(a+b)x - ab \geq x^2$, minden $x \in [a, b]$ esetén.

b) Adottak az $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [a, b]$ valós számok, ahol $n \geq 2$. Igazold a következő egyenlőtlenséget:

$$\log_{x_1}((a+b)x_2 - ab) + \log_{x_2}((a+b)x_3 - ab) + \ldots + \log_{x_{n-1}}((a+b)x_n - ab) + \log_{x_n}((a+b)x_1 - ab) \geq 2n.$$

***

7. feladat (10 pont). Tanulmányozd az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény injektivitását, amely teljesíti a

$$2f(x)^2 + 5f(x) + 2 = f(2x^2 - 10x + 5)$$

összefüggést, minden $x \in \mathbb{R}$ esetén!

***

8. feladat (10 pont). Bizonyítsd be, hogy 10 különböző rácspont közül mindig kiválasztható kettő úgy, hogy az általuk meghatározott szakasz harmadolópontjai is rácspontok legyenek! (Rácspontnak nevezzük azokat a pontokat, amelyeknek mindkét koordinátája egész szám.)

***

11. osztály

1. feladat (10 pont). Adott az $(a_n)_{n\geq 0}$ számsorozat, amelyre

$$a_0 = 1 \quad \text{és} \quad a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n = a_n a_{n+1},$$

bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén.

a) Határozd meg az $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ értékét!

b) Határozd meg a sorozat általános tagját! Bizonyítsd is be a kapott eredményt!

Jakab Tibor, Sepsiszentgyörgy, Matlap 8/L:3780

2. feladat (10 pont). a) Adj példát olyan $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ mátrixra, amelyre $A^2 + I_2 = O_2$.

b) Igazold, hogy végtelen sok olyan $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ mátrix létezik, amelyre $A^2 + I_2 = O_2$.

c) Igazold, hogy végtelen sok olyan $B, C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ invertálható mátrixokból álló páros létezik, amelyre

$$B^2 \neq I_2,\ C^2 \neq I_2 \quad \text{és} \quad B^2 + C^2 = O_2.$$

Csapó Hajnalka, Csíkszereda

3. feladat (10 pont). Adott az $(x_n)_{n\geq 1}$ pozitív tagú sorozat, amelyre

$$x_1 = 3 \quad \text{és} \quad 3x_{n+1}^2 \cdot x_n = 6 + x_n^3, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

a) Igazold, hogy az $(x_n)_{n\geq 1}$ sorozat konvergens, majd határozd meg a határértékét!

b) Számítsd ki a $\lim\limits_{n\to\infty} (n \cdot x_n^3 - 3n)$ határértéket!

Mátéfi István, Marosvásárhely

4. feladat (10 pont). Egy $n \times 5$-ös téglalapot 1×5-ös téglalapokkal födünk le. Jelölje a_n a lefödések számát.

a) Szerkeszd meg az összes lehetséges lefödést, ha $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

b) Vezess le egy rekurziót az $(a_n)_{n\geq 1}$ sorozatra!

c) Határozd meg az $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2025}\}$ halmazban az 5-tel osztható számok számát!

Csapó Hajnalka, Csíkszereda

12. osztály

1. feladat (10 pont). Adottak az $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = x \text{ és } g(x) = xe^{2-x}$$

függvények. Bizonyítsd be, hogy a $h\colon [0,4] \to \mathbb{R}$,

$$h(x) = \min\{f(x), g(x)\}$$

függvénynek van primitívje, majd határozd meg a h azon primitívjét, amely átmegy a $\left(3, 4 - \frac{4}{e}\right)$ koordinátájú ponton!

***

2. feladat (10 pont). Adott a

$$\mathbb{Z}[\varepsilon] = \{a + b\varepsilon \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \text{ halmaz, ahol } \varepsilon = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}.$$

a) Igazold, hogy $\mathbb{Z}[\varepsilon]$ kommutatív monoid a komplex számok szorzási műveletével!

b) Határozd meg a $\mathbb{Z}[\varepsilon]$ monoid invertálható elemeit!

c) Legyen $M = \{a^2 - ab + b^2 \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$. Igazold, hogy ha $x, y \in M$, akkor $x \cdot y \in M$!

***

3. feladat (10 pont). Tekintsük a Gauss-féle egész számok $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ halmazát.

a) Igazold, hogy bárhogyan is választunk ki öt elemet a halmazból, van köztük két olyan z_1 és z_2 elem, amelyre $\dfrac{z_1 + z_2}{2} \in \mathbb{Z}[i]$.

b) Igazold, hogy bárhogyan is választunk ki 13 elemet a halmazból, van köztük három olyan z_1, z_2 és z_3 elem, amelyre $\dfrac{z_1 + z_2 + z_3}{3} \in \mathbb{Z}[i]$.

***

4. feladat (10 pont). Adott az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = e^{\sin^2 x}$$

függvény. Legyen $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ az f egy olyan primitívje, melyre $F(0) = 0$.

a) Igazold, hogy F bijektív függvény!

b) Számítsd ki a

$$\lim_{n\to\infty} \left[F\left(\frac{1}{1}\right) + F\left(\frac{1}{2}\right) + F\left(\frac{1}{3}\right) + \ldots + F\left(\frac{1}{n}\right)\right] \text{ határértéket!}$$

***

Országos döntő - I. forduló

5. osztály

1. feladat (10 pont). Adott a következő számpiramis:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 3 & 1 & 3 & & \\ & 5 & 3 & 1 & 3 & 5 & \\ 7 & 5 & 3 & 1 & 3 & 5 & 7 \\ \end{array}$$

....

a) Számítsd ki a 10-dik sorban szereplő számok összegét!

b) Melyik teljes négyzet kétszerese 1-gyel nagyobb, mint a 100-dik sorban szereplő számok összege?

Orbán Ilona-Kármen, Berettyószéplak
Durugy Erika, Torda

2. feladat (10 pont). Határozd meg azt a legkisebb $\overline{abcd}$ alakú természetes számot, amelyre $\overline{abcd}$ teljes négyzet és $(\overline{cb} + \overline{ad}) : (\overline{cd} - \overline{ab}) = 9$.

Simon József, Csíkszereda

3. feladat (10 pont). Az alábbi összeadásban a különböző betűk különböző számjegyeket és az azonos betűk azonos számjegyeket helyettesítenek. Határozd meg az összeg azon legnagyobb értékét, amely osztható a számjegyei összegével!

$$\begin{array}{r} \text{LÁM}+ \\ \text{APA} \\ \text{FEJ} \\ \hline \text{1LEA} \end{array}$$

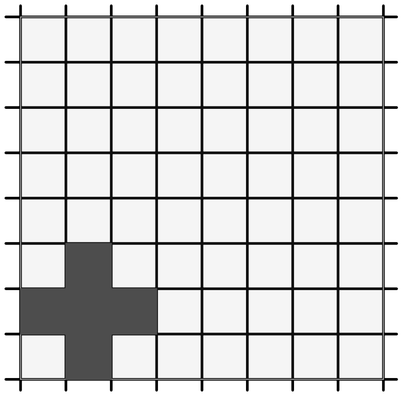
András Szilárd, Csíkdelne

4. feladat (10 pont). Három testvér, Péter, Zsolt és Erzsébet, összesen 2025 lejt kapott a nagymamájuktól, hogy hangszereket vásároljanak. Péter egy gitárt, Zsolt egy hegedűt, Erzsébet pedig egy trombitát szeretne. Tudjuk, hogy Erzsébet négyszer annyi pénzt kapott, mint Zsolt. A gitár ára a trombita árának felével, illetve a hegedű árának 2/3-ával egyenlő. Péter rájön, hogy a 2025 lej teljes felhasználásával mindhárman meg tudnák venni a kiválasztott hangszert, ha ő a kapott pénze 1/6-át odaadná a testvéreinek. Hány lejbe kerülnek az egyes hangszerek, illetve hány lejt kapott Péter, Zsolt és Erzsébet külön-külön a nagymamától?

Szász Szilárd, Marosvásárhely
Durugy Erika, Torda

6. osztály

1. feladat (10 pont). Az alábbi 8×8-as táblán elhelyeztünk egy 5 egységnégyzetből álló keresztet. Legfeljebb hány ilyen kereszt helyezhető el átfedés nélkül a 8×8-as táblán?



András Szilárd, Csíkdelne

2. feladat (10 pont). Határozd meg az összes olyan $\overline{abcd}$ alakú természetes számot, amelyre egyidőben teljesülnek a következő feltételek:

a) $\dfrac{\overline{ab}}{4} = \dfrac{\overline{cd}}{5}$;

b) $\overline{ad} + c = 27$.

Simon József, Csíkszereda

3. feladat (10 pont). Adott az $a = 3n + 2$, $b = 2n + 1$ és $c = n + 1$ szám, ahol n egy természetes szám.

a) Igazold, hogy az a és b relatív prímek!

b) Bizonyítsd be, hogy az $[a, b] + [a, c]$ szám négyzetszám, bármely n természetes szám esetén, ahol $[a, b]$ az a és b számok legkisebb közös többszörösét jelöli!

Faluvégi Melánia, Zilah

4. feladat (10 pont). Adottak az $\widehat{AOA_1}$, $\widehat{A_1OA_2}$, $\widehat{A_2OA_3}$, ..., $\widehat{A_{n-1}OA}$ egy pont körüli, egymással kongruens $24°$-os szögek. Legyenek ugyanazon az ábrán az $\widehat{AOB_1}$, $\widehat{B_1OB_2}$, $\widehat{B_2OB_3}$, ..., $\widehat{B_{m-1}OA}$ egy pont körüli, egymással kongruens $18°$-os szögek úgy, hogy az A_1 és B_1 az OA egyenes ugyanazon oldalán helyezkedjenek el.

a) Összesen hányszor esnek egybe a szögek szárai az OA félegyenesen kívül?

b) Az O pont körül legtöbb hány olyan szög van, amelyek belső tartományai páronként nem metszik egymást?

c) Hány derékszög van az ábrán?

Simon József, Csíkszereda

7. osztály

1. feladat (10 pont). a) Hasonlítsd össze az m és n számokat, ha

$$m = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{\sqrt{2\cdot 1}} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3\cdot 2}} + \cdots + \frac{\sqrt{2025}-\sqrt{2024}}{\sqrt{2025\cdot 2024}} \quad \text{és}$$

$$n = 5^{2025} - 4\cdot 5^{2024} - 4\cdot 5^{2023} - \cdots - 4\cdot 5^2 - 4\cdot 5 - 4.$$

b) Adottak az x, y, z szigorúan pozitív racionális számok úgy, hogy

$$\frac{5y+4z-3x}{7x} = \frac{5z+4x-3y}{7y} = \frac{5x+4y-3z}{7z}.$$

Igazold, hogy ha $a = \dfrac{(5y+4z)\cdot(5z+4x)\cdot(5x+4y)}{2025xyz}$, akkor $\sqrt{a}$ racionális szám!

Oláh-Ilkei Árpád, Sepsiszentrgyörgy
Fodor Erika, Beszterce

2. feladat (10 pont). Az ABC háromszögben $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$. A háromszögbe írt kör BC-t K pontban, AB-t M pontban, míg AC-t N pontban érinti.

a) Határozd meg az AM, BK, CN szakaszok hosszát az a, b és c függvényében!

b) Igazold, hogy ha az ABC háromszög kerülete 12 egység, akkor teljesül a

$$\sqrt{CN+CK} + \sqrt{BM+BK} + \sqrt{AM+AN} \leq 6$$

egyenlőtlenség!

Barta-Zágoni Csongor, Marosvásárhely

3. feladat (10 pont). a) Igazold, hogy két, 7-tel nem osztható, természetes szám négyzetének összege nem osztható 7-tel!

b) Tekintsük az $1^2, 2^2, 3^2, \ldots, 2025^2$ számokat. Legfennebb hány darab természetes számot választhatunk ki az adott számokból úgy, hogy ne legyen közöttük három olyan szám, amelyeknek összege osztható 7-tel?

Simon József, Csíkszereda

4. feladat (10 pont). Egy O középpontú körön adott az E pont. Az E középpontú kisebb sugarú kör az előbbi kört az A és B pontokban metszi. Legyen a kisebb körön P egy olyan pont, amely a nagyobbik kör belsejében van. Az E pontból az AP, illetve BP szakaszokra húzott merőleges egyenesek az O középpontú kört másodszor rendre a C, illetve D pontokban metszik. Legyen EL az O középpontú kör átmérője.

Igazold, hogy:

a) az A, P és D, valamint a B, P és C pontok kollineárisak;

b) az $ADLC$ egyenlő szárú trapéz;

c) $EP \perp CD$.

Simon József, Csíkszereda

8. osztály

1. feladat (10 pont). a) Oldd meg a valós számok halmazán a

$$\{x+3\}+2[x+3]+\sqrt{x^2+3(2x+3)}=4$$

egyenletet, ahol $\{a\}$ és $[a]$ rendre az a valós szám tört-, illetve egészrészét jelöli!

b) Legyen $a,b,c>0$ úgy, hogy $abc=2025$. Igazold, hogy

$$\frac{a+b}{a^2+b^2}+\frac{b+c}{b^2+c^2}+\frac{c+a}{c^2+a^2}\leq\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{45}.$$

Mátyás Ildikó Beáta, Szatmárnémeti
Turdean Katalin, Zilah

2. feladat (10 pont). Adott egy 45×45-ös négyzetrács, amelyben a természetes számok 1-től 2025-ig sorrendben követik egymást, a mellékelt ábra szerint.

1	2	3	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	43	44	45
46	47	48	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	88	89	90
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$				$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$				$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$				$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
1981	1982	1983	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	2023	2024	2025

A négyzetrács 9 négyzetét lefedjük egy 3×3-as négyzetlappal. Számítsd ki a valószínűségét, hogy a lefedett kilenc szám összege osztható legyen 81-gyel!

Nagy Enikő Ilona, Nagyvárad
Mátyás Ildikó Beáta, Szatmárnémeti
Baja Zsolt, Kolozsvár

3. feladat (10 pont). A $VABCD$ szabályos négyoldalú gúlában V a gúla csúcsa, E a VB, F pedig a VD él felezőpontja, és $VA=AB=a$.

a) Határozd meg az AEF és VBD síkok által alkotott szög szinuszát!

b) Számítsd ki az AE és CF egyenesek által alkotott szög szinuszát!

Simon József, Csíkszereda

4. feladat (10 pont). Az $ABCD$ négyzet AB, BC és CD oldalainak belsejében felvesszük az M, N, illetve P pontokat úgy, hogy $AM=BN=CP$. A Q,R,S és T pontokra igaz, hogy $MC\cap AN=\{Q\}$, $DM\cap AP=\{R\}$, $MN\cap AD=\{S\}$ és $NR\cap DQ=\{T\}$.

a) Igazold, hogy R a DAN háromszög magasságpontja!

b) Bizonyítsd be, hogy $ST\parallel AR$!

Turdean Katalin, Zilah

9. osztály

1. feladat (10 pont). Határozd meg azokat az (x, y) természetes számpárokat, amelyek teljesítik az

$$5x^2 + y^2 - 2xy + 6x - 2y = 8$$

összefüggést!

Spier Tünde, Arad
Szilágyi Judit, Kolozsvár
Tóth Csongor, Szováta

2. feladat (10 pont). Az a, b, c szigorúan pozitív valós számokra $a + b + c = 2025$. Igazold, hogy

$$\frac{a+b}{\sqrt{2025c+ab}} + \frac{b+c}{\sqrt{2025a+bc}} + \frac{a+c}{\sqrt{2025b+ac}} \geq 3.$$

Oláh Ilkei Árpád, Sepsiszentgyörgy

3. feladat (10 pont). Ha $A = [\sqrt{1}] + [\sqrt{3}] + [\sqrt{5}] + \ldots + [\sqrt{2025}]$, igazold, hogy $A^2 - 1$ osztható 506-tal, ahol $[a]$ az a szám egészrészét jelöli!

Szilágyi Judit, Kolozsvár

4. feladat (10 pont). Az ABC háromszög AA_1, BB_1 és CC_1 magasságai a háromszög köré írt O középpontú kört rendre az A_2, B_2 és C_2 pontokban metszik.

a) Igazold hogy az ABA_2C négyszög G_a súlypontja az OA_1 szakasz felezőpontja!

b) Ha H az ABC háromszög ortocentruma, G_1 és G_2 az $A_1B_1C_1$, illetve az $A_2B_2C_2$ háromszög súlypontja, igazold, hogy G_1 a HG_2 szakasz felezőpontja!

Tóth Csongor, Szováta

10. osztály

1. feladat (10 pont). Határozd meg azokat az $n \in \mathbb{N}^*$ és $z \in \mathbb{C}$ számokat, amelyek esetén

$$(\overline{z})^n = (i \cdot z + 2)^n ,$$

ahol $i^2 = -1$.

Kovács Béla, Szatmárnémeti

2. feladat (10 pont). Oldd meg a valós számok halmazán a

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x+2y+1} + \sqrt[3]{x-y} = & 2 \\ 2x + y + \sqrt[3]{y-x} = & 5 \end{cases}$$

egyenletrendszert!

Papp Ilonka, Brassó

3. feladat (10 pont). Ha $x, y, z \in (0,1)$ vagy $x, y, z \in (1, +\infty)$ igazold, hogy

$$\frac{\left(\log_y x\right)^3}{\log_y z + \log_z x} + \frac{\left(\log_z y\right)^3}{\log_x y + \log_z x} + \frac{\left(\log_x z\right)^3}{\log_x y + \log_y z} \geq \frac{1}{2}\left(\sqrt{\log_x y} + \sqrt{\log_y z} + \sqrt{\log_z x}\right).$$

Pálhegyi-Farkas László, Nagyvárad

4. feladat (10 pont). Adott egy egységnyi sugarú körbe írt ABC egyenlő szárú háromszög, ahol $AB = AC$. A BC egyenesen legyen P egy pont úgy, hogy a C pont a BP szakasz belsejében van. A P ponton át az AC és AB oldalakhoz húzott párhuzamosok az AB és AC egyeneseket rendre az E és F pontokban metszik. Ha az A pont átmérősen ellentett pontja az M pont, igazold, hogy a PM egyenes merőleges az EF egyenesre!

Ugron Szabolcs, Sepsiszentgyörgy

11. osztály

1. feladat (10 pont). a) Az $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{N})$ (ahol $n \geq 2$) mátrixban minden $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ esetén $a_{ij} = 1$, ha $i \mid j$, különben $a_{ij} = 0$. Számítsd ki a $\det A$ értékét!

b) Az $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{N})$ (ahol $n \geq 2$) mátrixban minden $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ esetén $a_{ij} = 1$, ha i és j relatív prím, különben $a_{ij} = 0$. Számítsd ki a $\det A$ értékét!

Gábor Farkas Ferencz, Nagyenyed

2. feladat (10 pont). Legyen $b \geq 2$ egy természetes szám. Tekintsünk egy, a b számrendszerben felírt, $(x_n)_{n\geq 0}$ sorozatot, ahol $x_0 \in \mathbb{N}$ és x_{n+1} az x_n számjegyeinek az összege. Bizonyítsd be, hogy az $(x_n)_{n\geq 0}$ sorozat konvergens és számítsd ki a határértékét!

Tőtős György, Zilah

3. feladat (10 pont). Adott az $(a_n)_{n\geq 0}$ és $(b_n)_{n\geq 0}$ valós számsorozat, valamint az $\alpha \in (0, 1)$ valós szám úgy, hogy

$$0 \leq a_{n+1} \leq \alpha \cdot a_n + b_n,$$

minden $n \geq 0$ esetén, és $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$. Igazold, hogy az $(a_n)_{n\geq 0}$ sorozat konvergens és határértéke nulla!

Tőtős György, Zilah

4. feladat (10 pont). Az $A = (a_{ij})_{i,j=1,2,3} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ mátrix teljesíti a $2A^3 - 7A^2 + 4A + 4I_3 = O_3$ összefüggést. Igazold, hogy a

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

összeg osztható hárommal!

*****

12. osztály

1. feladat (10 pont). Határozd meg az

$$f(x,y)=\sqrt{(x-e^y)^2+(y-e^x)^2}$$

kifejezés minimumát, ha $x,y\in\mathbb{R}$.

Dávid Géza, Székelyudvarhely

2. feladat (10 pont). A $(G,\cdot)$ véges csoport esetén létezik olyan $f\colon G\to G$ morfizmus, melyre $f(x^2)=x$, bármely $x\in G$.

a) Igazold, hogy a $(G,\cdot)$ kommutatív csoport!

b) Igazold, hogy ha a G csoport ciklikus, akkor nem lehet páros sok eleme!

c) Határozd meg az összes ilyen f függvényt, ha a G-nek páratlan sok eleme van!

Baja Zsolt, Kolozsvár

3. feladat (10 pont). Számítsd ki az

$$\int (1+u^2)\ln(1+\sqrt{2+u^2})\,\mathrm{d}u$$

határozatlan integrált!

Szilágyi Zsolt, Kolozsvár

4. feladat (10 pont). Legyen $(G,\cdot)$ egy 2025 elemű csoport, H egy olyan valódi részcsoportja, amelynek legalább 675 eleme van, és X egy olyan nemüres részhalmaza a G-nek, amelyre $X\cdot H=X$. (Ha $A,B\subset G$, akkor $A\cdot B=\{a\cdot b\mid a\in A, b\in B\}$.)

a) Hány eleme lehet a H-nak?

b) Hány eleme lehet az X-nek?

c) Az X elemszámának minden lehetséges értéke esetén adj példát olyan G-re, H-ra és X-re, amelyekre a fenti feltételek teljesülnek!

András Szilárd, Csíkdelne
Lukács Andor, Kolozsvár

Országos döntő - II. forduló

9. osztály

1. feladat (10 pont). Határozd meg azokat a p, q, r prímszámokat, amelyekre

$$p \cdot q + 6 = r \cdot (r - 1).$$

Tóth Csongor, Szováta
Spier Tünde, Arad

2. feladat (10 pont). Az A-ban derékszögű ABC háromszög AD magassága ($D \in BC$) a B és C szögek szögfelezőit az M, illetve N pontban metszi. Igazold, hogy

$$\left(\frac{ND}{AN}\right)^2 + \left(\frac{MD}{AM}\right)^2 = 1.$$

Tóth Csongor, Szováta

3. feladat (10 pont). Az ABC hegyesszögű háromszögben AD magasság, $D \in BC$. Az AD, AB, BC és CA szakaszok centiméterben kifejezett hosszai egymás utáni természetes számok, ebben a sorrendben.

a) Számítsd ki a ABC háromszög oldalainak hosszát!

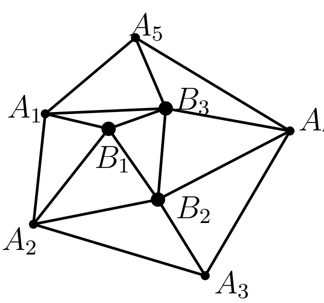
b) Igazold, hogy a háromszögbe írt kör sugarának centiméterben kifejezett hossza természetes szám!

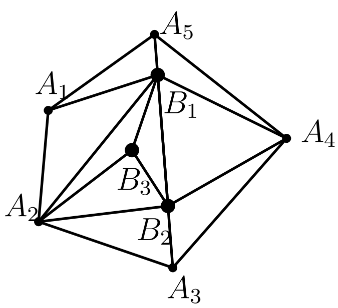
Dávid Géza, Székelyudvarhely
Szilágyi Judit, Kolozsvár

4. feladat (10 pont). Egy 1000 oldalú konvex sokszög belsejében felveszünk n pontot. Jelöljük $\mathcal{H}$-val a sokszög csúcsaiból és a felvett pontokból álló halmazt. A sokszöget osszuk fel páronként diszjunkt belsejű *üres* háromszögekre úgy, hogy a háromszögek csúcsai a $\mathcal{H}$-ból legyenek. Egy háromszöget *üres* háromszögnek nevezünk, ha sem a belsejében, sem az oldalainak belsejében nem tartalmaz $\mathcal{H}$-beli pontot. Az alábbi ábrákon két ilyen felbontást szemléltetünk egy ötszög és a belsejében felvett három pont esetén.

a) Létezik-e olyan n érték, amelyre a felbontás 2025 üres háromszögből áll?

b) Milyen k értékekre létezik olyan $n > 0$, amelyre a felbontás k darab üres háromszögből áll?





Szilgyi Judit, Kolozsvár

5. feladat (10 pont). Tekintsük a $H = \{6, 7, 8, \ldots, 21\}$ számhalmazt. Igazold, hogy H-ból bárhogy választunk ki 7 számot, a kiválasztottak között létezik 3 olyan, amellyel hegyesszögű háromszög szerkeszthető!
Bíró Béla, Sepsiszentgyörgy

6. feladat (10 pont). Egy természetes számot teljes hatványnak nevezünk, ha felírható a^b alakban, ahol $a, b \in \mathbb{N}$ és $b \geq 2$. Határozd meg azt a legnagyobb természetes számot, amelyet nem lehet felírni páronként különböző teljes hatványok összegeként!
András Szilárd, Csíkdelne

10. osztály

1. feladat (10 pont). Oldd meg az $x^3 + 8y^3 + 27z^3 - 18xyz = 29$ egyenletet a nullától különböző természetes számok halmazán! *(***)*

2. feladat (10 pont). Az ABC egyenlő oldalú háromszögben D a C-ből kiinduló magasság talppontja, az E pont a CD szakasz egy pontja úgy, hogy $\widehat{AEB}$ derékszög. Legyen F a C pontnak az E pont szerinti szimmetrikusa. Az $\widehat{ACD}$ szögfelezője az AB oldalt a T pontban, a BF egyenest az M pontban metszi. Igazold, hogy $MTDF$ húrnégyszög!

Rákóczi Erik, Kolozsvár

3. feladat (10 pont). Adott egy 2025×2025-ös négyzetrács, melyben minden sorban és minden oszlopban egyetlen mező van feketére színezve, minden más mező fehér színű. Egy lépésben kiválasztunk egy sort vagy egy oszlopot és az ebben található mezők színét megváltoztatjuk. Elérhető-e, hogy valahány lépés után két sor vagy két oszlop színezése azonos legyen?

Ugron Szabolcs, Sepsiszentgyörgy

4. feladat (10 pont). Jelöljük I-vel az ABC háromszögbe írt kör középpontját.

a) Igazold, hogy ha az AI egyenes a BC oldalt a D pontban metszi, akkor $\dfrac{AI}{AD} = \dfrac{T_{ABI} + T_{ACI}}{T_{ABC}}$.

b) Igazold, hogy

$$\frac{AI}{\sqrt{p(p-a)}} + \frac{BI}{\sqrt{p(p-b)}} + \frac{CI}{\sqrt{p(p-c)}} \leq 2,$$

ahol a, b, c a háromszög oldalai és p a háromszög félkerülete!

Pálhegyi-Farkas László, Nagyvárad

5. feladat (10 pont). a) Bizonyítsd be, hogy minden $k \geq 2$ természetes szám esetén létezik olyan $2k$ számjegyű teljes négyzet, amely az első k és az utolsó k számjegyéből alkotott két szám összegének a négyzete!

b) Igazold, hogy az előbbi feltételt teljesítő számok közt végtelen sok k esetén találunk olyat is, amely osztható a számjegyei összegével! Például $k = 2$ esetén egy ilyen szám a 2025.

András Szilárd, Csíkdelne

6. feladat (10 pont). a) Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy tetszőleges másodfokú függvény. Ha az $f(x)$, $f(x + 1)$, $f(x + 2)$ behelyettesítési értékek egészek valamilyen egész x értékre, akkor igazold, hogy $f(x + n)$ szintén egész, bármilyen n egész szám esetén!

b) Jelöljük $\mathcal{M}$-mel az origó középponttú, 7 egység sugarú körlap belsejében levő rácspontok halmazát (az $A(x, y)$ pontot rácspontnak nevezzük, ha $x, y \in \mathbb{Z}$). Az M halmaz elemei közül legtöbb hány lehet egy másodfokú függvény grafikus képén?

András Szilárd, Csíkdelne

11-12. osztály

1. feladat (10 pont). Oldd meg az

$$(xy + 6)^2 = x^2 + y^2$$

egyenletet az egész számok halmazán!

Bencze Mihály, Brassó

2. feladat (10 pont). Adott egy n oldalú konvex sokszög ($n \geq 4$), amelyet valamilyen módon felbontunk háromszögekre belső pontban egymást nem metsző átlók segítségével. Az adott felbontás esetén nevezzük nullás csúcsnak a sokszög azon csúcsait, amelyekből nem indul ki átló, illetve nevezzük belső háromszögnek azokat, amelyek minden oldala átló. Ha N a nullás csúcsok száma, illetve B a belső háromszögek száma, akkor igazold, hogy

$$N = B + 2.$$

Szilágyi Zsolt, Kolozsvár

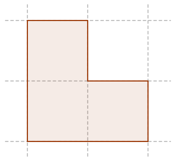
3. feladat (10 pont). Egy $30\,\mathrm{cm}^2$ területű ABC háromszög mindhárom szögének tangense egész szám. Mekkora a háromszög köré írható kör sugara?

Kaiser Dániel, Kolozsvár

4. feladat (10 pont). Egy $2n \times 2n$-es, $4n^2$ egységnégyzetből álló négyzet alakú tábla egyik egységnégyzetét kivettük.

a) Bizonyítsd be, hogy ha $n \in \{1, 2, 4\}$, akkor a megmaradt rész hézag és átfedés nélkül lefedhető az alábbi ábrán látható, 3 egységnégyzetből álló alakzat segítségével, ha ebből elégséges számú áll a rendelkezésünkre, és ezeket bármilyen pozícióban elhelyezhetjük a táblán!

b) Határozd meg az összes olyan $n \in \mathbb{N}^*$ számot, amely esetén a megmaradt rész hézag és átfedés nélkül lefedhető az előbbi alakzatok segítségével!



András Szilárd, Csíkdelne

5. feladat (10 pont). Legyen ABC egy egyenlő szárú háromszög, amelyben a $\widehat{BAC} = 100°$. Az ABC szög szögfelezője az AC oldalt E pontban, az EBC szög szögfelezője az AC oldalt pedig D pontban metszi. Megszerkesztjük az ABE háromszög AF magasságát és az ABD háromszög AG magasságát. Legyen H az AF és BC egyenesek metszéspontja.

a) Igazold, hogy $FG \parallel HE$.

b) Bizonyítsd be, hogy a $HD \parallel AB$.

Mészár Julianna, Nagyszalonta
Pálhegyi-Farkas László, Nagyvárad

6. feladat (10 pont). Bizonyítsd be, hogy végtelen sok olyan nem nullában végződő N teljes négyzet létezik, amely osztható a számjegyei négyzetösszegével, és amelyre N-et elosztva a számjegyei négyzetösszegével a hányados is négyzetszám!

András Szilárd, Csíkdelne

MEGOLDÁSOK

Megyei forduló

5. osztály

1. feladat (10 pont). a) Igazold, hogy az $a = 2025 \cdot (2025 + 2024 \cdot 2025) : (2025 \cdot 2026 - 2025)$ négyzetszám!

b) Legyen n a legnagyobb, nullától különböző számjegyekből álló természetes szám, amelyben a számjegyek összege 2025. Határozd meg az n szám 37-tel való osztási maradékát és hányadosát!

Durugy Erika, Torda
Mátyás Ildikó Beáta, Szatmárnémeti

Megoldás. Hivatalból (**1 pont**)

a)

$$a = 2025 \cdot [2025 \cdot (1 + 2024)] : [2025 \cdot (2026 - 1)] \quad \textbf{(2 pont)}$$
$$= 2025 \cdot 2025^2 : 2025^2 \quad \textbf{(1 pont)}$$
$$= 2025 = 45^2. \quad \textbf{(1 pont)}$$

b) A legnagyobb természetes szám, melynek számjegyei nullától különböznek és összegük 2025, az $n = \underbrace{11...111}_{2025\text{-ször}}$ természetes szám. (**1 pont**)

Az n szám felírható, mint

$$n = \underbrace{111 \cdot 10^{2022} + 111 \cdot 10^{2019} + 111 \cdot 10^{2016} + ... + 111 \cdot 10^3 + 111}_{675 \text{ tag}}. \quad \textbf{(1 pont)}$$

Észrevesszük, hogy $111 = 37 \cdot 3$, így a keresett szám a következő alakokba írható:

$$n = \underbrace{111 \cdot 10^{2022} + 111 \cdot 10^{2019} + ... + 111 \cdot 10^3 + 111}_{675 \text{ tag}}$$
$$= 37 \cdot 3 \cdot \underbrace{(10^{2022} + 10^{2019} + ... + 10^3 + 1)}_{675 \text{ tag}} \quad \textbf{(1 pont)}$$
$$= 37 \cdot 3 \cdot \underbrace{1001001...1001}_{2023 \text{ számjegy}}$$
$$= 37 \cdot \underbrace{3003003...3003}_{2023 \text{ számjegy}}. \quad \textbf{(1 pont)}$$

Tehát a maradékos osztás tétele alapján belátható, hogy az n számnak 37-tel való osztásakor a hányados $\underbrace{3003003...3003}_{2023 \text{ számjegy}}$ lesz, a maradék pedig 0. (**1 pont**)

■

2. feladat (10 pont). Az iskolában Marika felírja a táblára növekvő sorrendben az összes természetes számot, az 1-es számtól kezdve, egészen a 2025-ös számmal bezárólag. A szünetben megérkezik Pisti, és viccből letörli a tábláról a 89-től 113-ig terjedő számokat, beleértve a 89-et és a 113-at is. Miután Marika rászól, hogy hagyja abba, a többi szám érintetlenül a táblán marad. Ekkor Marika kíváncsian kérdezi a következőket.

a) A táblán maradt számoknak összesen hány számjegye van?

b) A táblán maradt számok sorában melyik számjegy található a 2025-dik helyen? Indokold meg a helyes választ!

Durugy Erika, Torda
Orban Ilona-Karmen, Berettyószéplak

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

a) Megfigyelhetjük a következőket:

- 1-től 9-ig 9 darab egyjegyű szám van, ez összesen 9 számjegy. **(1 pont)**

- 10-től 99-ig 90 darab kétjegyű szám van, ez összesen 180 számjegy, de ebből hiányzik 11 darab kétjegyű szám, amit Pisti letörölt, vagyis 22 számjegy, tehát $180 - 22 = 158$ számjegy marad. **(1 pont)**

- 100-tól 999-ig 900 darab háromjegyű szám van, amiből hiányzik 14 darab, amit Pisti letörölt, tehát marad összesen $2700 - 42 = 2658$ számjegy. **(1 pont)**

- 1000-tól 2025-ig $2025 - 999 = 1026$ darab négyjegyű szám van, amelyeknek összen $1026 \cdot 4 = 4104$ darab számjegye van.

Tehát a táblán maradt számoknak összesen $9 + 158 + 2658 + 4104 = 6929$ számjegye van. **(1 pont)**

b) Mivel $9 + 158 < 2025$ és $9 + 158 + 2658 = 2825 > 2025$, ezért a háromjegyű számok valamelyikének a számjegye lesz a keresett 2025. számjegy. Tehát a háromjegyű számok számjegyei közül a $2025 - 167 = 1858$. számjegyet keressük. **(2 pont)**

Az 1858-at hárommal osztva a hányados 619, a maradék pedig 1. Ez azt jelenti, hogy a táblán maradt számok közül 619 darab háromjegyű szám után következő első számjegyet keressük. **(1 pont)**

Mivel 114-gyel kezdődően a 732-ig bezárólag összesen 619 darab háromjegyű szám van, így az utánuk következő első számjegy a 733 első számjegye, vagyis a 7-es. Tehát a táblán marad számok sorában a 2025. számjegy a 7-es. **(2 pont)**

$$\underbrace{1, 2, \ldots, 9,}_{\text{9 db. számjegy}}\ \underbrace{10, 11, \ldots, 87, 88,}_{\text{158 db. számjegy}} \qquad \underbrace{114, 115, \ldots, 732,}_{\text{1857 db. számjegy}}\ \boxed{7}33, \ldots, 2025.$$ ■

3. feladat (10 pont). Józsi és Karcsi társasjátékot játszanak és a továbblépéshez maguk választották feltételeket, egy piros és egy sárga dobókockával történő dobás alapján. Józsi akkor léphet, ha a két kockával dobott értékek összegének és szorzatának összege páros szám. Karcsi pedig akkor léphet, ha ez a szám páratlan. Két dobás eredményét azonosnak tekintjük, ha az azonos színű kockákon ugyanaz a szám jelenik meg a két dobás során. Hányféle különböző eredménye lehet a dobásoknak, ha a két kockával mindig egyszerre dobunk? Ebből hány esetben léphet Karcsi és hány esetben léphet Józsi? Indokold meg a választ!

Matlap 10/2024, A:5010

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**
A két különböző színű kockával összesen $6 \cdot 6 = 36$ eredménye lehet a dobásoknak. **(3 pont)**
Ismeretes, hogy két szám összege akkor páros, ha mindkét szám ugyanolyan paritású. Két szám szorzata csak akkor páratlan, ha mindkét szám páratlan.
Jelöljük a két dobókockán levő értékek összegét $ö$-vel, szorzatukat pedig sz-szel. Az $ö + sz$ összeget jelöljük e-vel.

- Ha mindkét dobókockán levő érték páratlan, akkor

$$ö - \text{páros és } sz - \text{páratlan, így } e - \text{páratlan.}$$ **(1 pont)**

- Ha a 2 dobókockán levő értékek közül egyik páros, a másik páratlan, akkor

$$ö - \text{páratlan és } sz - \text{páros, így } e - \text{páratlan.}$$ **(1 pont)**

- Ha mindkét dobókockán levő érték páros, akkor

$$ö - \text{páros és } sz - \text{páros, így } e - \text{páros.}$$ **(1 pont)**

Tehát az eredmény csak akkor páros, ha mindkét dobókockával páros számot dobunk. Azoknak a dobásoknak a száma, ahol mindkét érték páros, egyenlő 9-cel. Ezek:

$$2-2;\quad 4-4;\quad 6-6;\quad 2-4;\quad 4-2;\quad 2-6;\quad 6-2;\quad 4-6;\quad 6-4.$$ **(2 pont)**

Az eredmény 27 esetben páratlan, tehát Karcsi 27 esetben léphet, illetve 9 esetben páros, ekkor Józsi léphet. **(1 pont)**

Megjegyzés. Ha a versenyző tanuló táblázat segítségével leírja az összes lehetséges dobást és eredményt, akkor is megszerzi a maximális pontszámot.

■

4. feladat (10 pont). a) Határozd meg a $3^{10} + 5^{10}$ szám utolsó számjegyét!

b) Milyen n pozitív természetes számokra lesz a 81^n utolsó két számjegye $\ldots 01$?

c) Határozd meg a $3^{2025} + 5^{2025}$ utolsó két számjegyét!

Szász Szilárd, Marosvásárhely

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

a) Ha megnézzük az 5 hatványainak utolsó számjegyét, azt látjuk, hogy

$$u(5^1) = 5, \quad u(5^2) = 5, \quad u(5^3) = 5, \quad \ldots, \quad u(5^{10}) = 5. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Ahhoz, hogy az ismétlődő mintát felismerjük, megnézzük a 3 hatványainak az utolsó számjegyét:

$$u(3^1) = 3, \quad u(3^2) = 9, \quad u(3^3) = u(27) = 7, \quad u(3^4) = u(81) = 1, \quad u(3^5) = u(243) = 3, \ldots.$$

Ezek alapján azt látjuk, hogy a hatványok utolsó számjegyei rendre $3, 9, 7, 1$ és ezek ismétlődnek ebben a sorrendben. **(1 pont)**

Tehát, hogy megtudjuk, mi a 3^{10} utolsó számjegye, elég csak a 10-et 4-gyel osztani és az osztás maradékát figyelembe venni:

$$10 : 4 = 2, \text{ ahol a maradék } 2.$$

Mivel a maradék 2, ezért az $u(3^{10}) = u(3^2) = 9$.

Végezetül kapjuk, hogy $3^{10} + 5^{10} = \overline{\ldots 9} + \overline{\ldots 5} = \overline{\ldots 4}$, tehát $u(3^{10} + 5^{10}) = 4$. **(1 pont)**

b) A 81 hatványainak az utolsó számjegyét a következőképpen számolhatjuk ki. A $81^1 = 81$ utolsó két számjegye 81. A $81^2 = 81 \cdot 81 = 6561$ utolsó két számjegye 61. A $81^3 = 81^2 \cdot 81$ utolsó két számjegyének kiszámolásához vesszük a 81^2 utolsó két számjegyét (a 61-et), amelyet megszorzunk 81-gyel ($61 \cdot 81 = 4941$), majd vesszük a kapott eredmény utolsó két számjegyét, a 41-et. Hasonlóan a fentihez a $81^4 = 81^3 \cdot 81$ utolsó két számjegye megegyezik a 41 és 81 szorzatának ($41 \cdot 81 = 3321$) utolsó két számjegyével, vagyis 21-gyel. A $81^5 = 81^4 \cdot 81$ utolsó két számjegye megegyezik a 21 és 81 szorzatának ($21 \cdot 81 = 1701$) utolsó két számjegyével, a 01-gyel. Összefoglalva

$$\begin{aligned}
81^1 &= 81 = \overline{\ldots 81},\\
81^2 &= 81^1 \cdot 81 = \overline{\ldots 81} \cdot 81 = \overline{\ldots 61},\\
81^3 &= 81^2 \cdot 81 = \overline{\ldots 61} \cdot 81 = \overline{\ldots 41},\\
81^4 &= 81^3 \cdot 81 = \overline{\ldots 41} \cdot 81 = \overline{\ldots 21},\\
81^5 &= 81^4 \cdot 81 = \overline{\ldots 21} \cdot 81 = \overline{\ldots 01}.
\end{aligned} \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Ezután az utolsó két számjegy ismétlődik:

$$\begin{aligned}
81^6 &= 81^5 \cdot 81 = \overline{\ldots 01} \cdot 81 = \overline{\ldots 81},\\
81^7 &= 81^6 \cdot 81 = \overline{\ldots 81} \cdot 81 = \overline{\ldots 61},\\
81^8 &= 81^7 \cdot 81 = \overline{\ldots 61} \cdot 81 = \overline{\ldots 41},\\
81^9 &= 81^8 \cdot 81 = \overline{\ldots 41} \cdot 81 = \overline{\ldots 21},\\
81^{10} &= 81^9 \cdot 81 = \overline{\ldots 21} \cdot 81 = \overline{\ldots 01}.
\end{aligned}$$

Tehát a 81 azon pozitív hatványainak lesz az utolsó két számjegye 01, amelyek 5-nek többszörösei: $81^n = \overline{\ldots 01}$, csak ha n osztható 5-tel. **(2 pont)**

c) Mivel $81^5 = (3^4)^5 = 3^{20}$ és $2025 = 2020 + 5 = 101 \cdot 20 + 5$, ezért

$$3^{2020} = 3^{20\cdot 101} = (3^{20})^{101} = (\overline{...01})^{101} = \overline{...01}.$$ (**1 pont**)

Így $3^{2025} = 3^{2020} \cdot 3^5 = \overline{...01} \cdot 243 = \overline{...43}$. (**1 pont**)

Végezetül kapjuk, hogy $3^{2025} + 5^{2025} = \overline{...43} + \overline{...25} = \overline{...68}$. (**1 pont**)

■

6. osztály

1. feladat (10 pont). Kató, Laci, Melinda és Norbi jó barátok, mindegyiknek van kutyája, kedvenc csokija és családjuk különböző márkájú kocsit használ. A kutyák neve valamilyen sorrendben: Bodri, Füles, Morzsa, Tücsök. A használt autómárkák: Ford, Honda, Opel, Skoda és a kedvenc csokifajták: fekete csoki, tejcsoki, mogyorós csoki és marcipános csoki (valamilyen sorrendben). A következőket tudjuk róluk:

(1) Bodri gazdája a mogyorós csokoládét szereti.

(2) Norbi egy Hondában utazik sízni és fekete csokit eszik.

(3) Kató minden nap sétálni viszi Fülest.

(4) Tücsök gazdája az Opelt kedveli.

(5) Melinda mindig tejcsokoládét vásárol.

(6) Füles a Skoda hátsó ülésén utazik.

Hogy hívják Morzsa gazdáját? Ki szereti a marcipános csokit? Ki utazik Ford autóban?
(Írd le a gondolatmenetedet lépésről lépésre!)

Matlap 10/2024, A:5015

Megoldás. Hivatalból (**1 pont**)
A (2) kijelentésből megtudjuk, hogy Norbinak Hondája van és fekete csokit eszik. (**1 pont**)
A (3) kijelentés alapján Kató kutyája Füles. (**1 pont**)
A (6) állítás szerint a Skoda a Katóé. (**1 pont**)
Az (5) kijelentésből megtudjuk, hogy Melinda tejcsokit eszik. (**1 pont**)

Ezeket az adatokat egyértelműen beírhatjuk az alábbi táblázatba:

	Kató	Laci	Melinda	Norbi
Autó	Skoda			Honda
Kutya	Füles			
Csoki			tejcsoki	fekete csoki

Az (1) állítás alapján Bodri csak a Laci kutyája lehet (mert a Katóé Füles és Melinda meg Norbi nem a mogyorós csokoládét szereti), illetve Laci a mogyorós csokoládét szereti. (**2 pont**)

	Kató	Laci	Melinda	Norbi
Autó	Skoda			Honda
Kutya	Füles	Bodri		
Csoki		mogyorós csoki	tejcsoki	fekete csoki

Innen kizárásos alapon, Kató szereti a marcipános csokit. (**1 pont**)
A (4) állítás szerint csak Melinda lehet a Tücsök gazdája és Melinda Opelt vezet. (**1 pont**)

	Kató	Laci	Melinda	Norbi
Autó	Skoda		Opel	Honda
Kutya	Füles	Bodri	Tücsök	
Csoki	marcipános csoki	mogyorós csoki	tejcsoki	fekete csoki

Ezek után már egyértelmű, hogy Laci autója Ford és Morzsa gazdája Norbi. (**1 pont**)

Megjegyzés. Amennyiben a diák csak az alábbi táblázatot tölti ki, magyarázat nélkül, akkor a feladatra 5 pont jár.

	Kató	Laci	Melinda	Norbi
Autó	Skoda	Ford	Opel	Honda
Kutya	Füles	Bodri	Tücsök	Morzsa
Csoki	marcipános csoki	mogyorós csoki	tejcsoki	fekete csoki

■

2. feladat (10 pont). Adottak az $\widehat{AOA_1} = 2°$, $\widehat{A_1OA_2} = 3°$, $\widehat{A_2OA_3} = 4°$, ..., $\widehat{A_{n-1}OA_n} = (n+1)°$ szögek úgy, hogy az előbbi felsorolásban közvetlenül egymás után következő szögek egymás melletti szögek legyenek és a felsorolt szögek mértékének összege 135°.

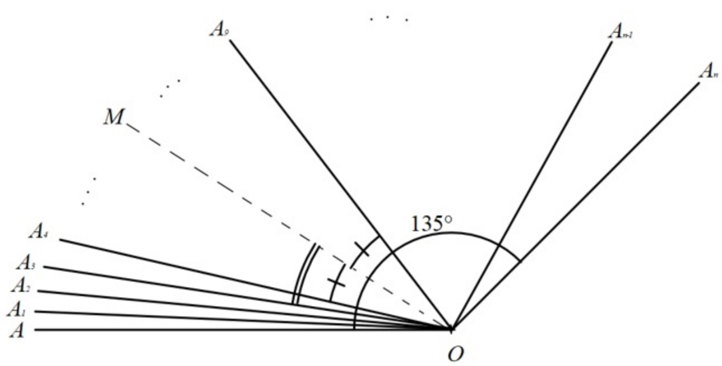
a) Tudva, hogy n a fenti kijelentésben szereplő szögek száma, határozd meg az n értékét!

b) Ha az OM félegyenes az $\widehat{A_4OA_9}$ szögfelezője, számítsd ki az $\widehat{A_3OM}$ mértékét!

***

Megoldás. Hivatalból (**1 pont**)

a) A megadott adatok alapján $\widehat{AOA_1} + \widehat{A_1OA_2} + \widehat{A_2OA_3} + \ldots + \widehat{A_{n-1}OA_n} = 135°$. (**1 pont**)



A szögek összege

$$2° + 3° + 4° + \cdots + (n+1)° = \frac{(2+n+1)° \cdot n}{2} = \frac{(n+3)° \cdot n}{2}.$$ (**2 pont**)

Így kapjuk, hogy

$$\frac{(n+3)^\circ \cdot n}{2} = 135^\circ,$$
$$(n+3)^\circ \cdot n = 270^\circ. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Tudva hogy

$$n \in \mathbb{N} \text{ és } 270 = 18 \cdot 15 \text{ következik, hogy } n = 15. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

b) Mivel

$$\widehat{A_4OA_9} = \widehat{A_4OA_5} + \widehat{A_5OA_6} + \widehat{A_6OA_7} + \widehat{A_7OA_8} + \widehat{A_8OA_9}, \qquad \textbf{(1 pont)}$$
$$\widehat{A_4OA_9} = 6^\circ + 7^\circ + 8^\circ + 9^\circ + 10^\circ,$$
$$\widehat{A_4OA_9} = 40^\circ. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Tudjuk, hogy OM szögfelelzője az $\widehat{A_4OA_9}$ szögnek, így

$$\widehat{A_4OM} = \widehat{MOA_9} = \frac{\widehat{A_4OA_9}}{2} = 20^\circ. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Azaz

$$\widehat{A_3OM} = \widehat{A_3OA_4} + \widehat{A_4OM},$$
$$\widehat{A_3OM} = 5^\circ + 20^\circ = 25^\circ. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

■

3. feladat (10 pont). Tekintjük a

$$p, \quad p+3^k, \quad p+3^{k+1}, \quad p+3^{k+2}, \quad p+3^{k+3}$$

számokat, ahol a k és p valamilyen természetes számok.

a) Igazold, hogy az előbb felsorolt öt szám közül valamelyik osztható 5-tel!

b) Lehet-e p páratlan, ha a felsorolt öt szám mindegyike prímszám?

c) Határozd meg a k és p természetes számokat, amelyekre a felsorolt öt szám mindegyike prímszám!

Tempfli Gabriella, Szatmárnémeti

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

a) A 3 szám négy egymást követő hatványának az utolsó számjegyei valamilyen sorrendben $1, 3, 9, 7$. Így ha p utolsó számjegye $9, 7, 1, 3$ akkor a $p + 3^k$, $p + 3^{k+1}$, $p + 3^{k+2}$, $p + 3^{k+3}$ valamelyikének utolsó számjegye 0, míg ha p utolsó számjegye $4, 2, 6, 8$ akkor a $p + 3^k$, $p + 3^{k+1}$, $p + 3^{k+2}$, $p + 3^{k+3}$ valamelyikének utolsó számjegye 5, tehát ezekben az esetekben az állítás teljesül. Ugyanakkor ha p utolsó számjegye 0 vagy 5, akkor p osztható 5-tel, tehát bármi is a p utolsó számjegye a $p, p + 3^k$, $p + 3^{k+1}$, $p + 3^{k+2}$, $p + 3^{k+3}$ valamelyikének utolsó számjegye 0 vagy 5 és így osztható 5-tel. (**4 pont**)

b) Bármely $k \in \mathbb{N}$ esetén a 3^k, 3^{k+1}, 3^{k+2}, 3^{k+3} számok páratlan számok, ezért p páros szám kell legyen, mert ellenkező esetben az összegük páros lenne és nem lehetne prím. (**2 pont**)

c) Mivel p páros és p prímszám, így $p = 2$. (**1 pont**)
Ha $k \geq 2$, akkor a $2 + 3^k$, $2 + 3^{k+1}$, $2 + 3^{k+2}$, $2 + 3^{k+3}$ számok 5-nél nagyobb számok és valamelyiknek az utolsó számjegye 5, tehát az nem lehet prím, mert osztható 5-tel. (**1 pont**)
Ha $k = 0$, akkor a számok $2, 3, 5, 11, 29$ és mind prímszámok. Ha $k = 1$, akkor a számok $2, 5, 11, 29, 83$ és ezek is mind prímszámok. (**1 pont**)
Tehát csak a $p = 2$ és $k = 0$, illetve $p = 2$ és $k = 1$ esetben lehet mind az öt felsorolt szám prímszám. ■

4. feladat (10 pont). a) Határozd meg az $\overline{ab}$ természetes számot, amelyre

$$\frac{\overline{aab}}{\overline{aa} - 7} = 15.$$

Faluvégi Melánia, Zilah

b) Határozd meg azt az $\overline{abcd}$ természetes számot, amelyre

$$\frac{\overline{abcd}}{\overline{cd} + 2} = 75 \quad \text{és} \quad \frac{\overline{abcd}}{\overline{ab} + 5} = 81.$$

Simon József, Csíkszereda

Első megoldás. Hivatalból (**1 pont**)

a) Az aránypárok alaptulajdonsága alapján $\overline{aab} = 15 \cdot (\overline{aa} - 7)$, tehát az $\overline{aab}$ szám osztható 15-tel. (**1 pont**)
Ez pontosan akkor teljesül, ha osztható 3-mal is és 5-tel is, tehát $b \in \{0, 5\}$ és $2a + b$ osztható 3-mal. (**1 pont**)
$b = 0$ esetén a $330, 660$ és 990 számokat kell megvizsgálni, de egyikre sem teljesül a megadott egyenlőség. (**1 pont**)
$b = 5$ esetén a $225, 555$ és 885 számokat kell megvizsgálni. Ezek közül csak a 225-re teljesül a $225 = 15 \cdot (22 - 7)$ összefüggés, tehát az $\overline{ab}$ csak a 25 lehet. (**1 pont**)

b) A feltevésből következik, hogy $\overline{abcd} = (\overline{cd} + 2) \cdot 75$ és $\overline{abcd} = (\overline{ab} + 5) \cdot 81$, tehát az $\overline{abcd}$ szám osztható 81-gyel és 75-tel. **(1 pont)**
Ez pontosan akkor teljesül, ha osztható $81 \cdot 25 = 2025$-tel, tehát ki kell próbálni az

$$\overline{abcd} \in \{2025, 4050, 6075, 8100\}$$

eseteket. **(2 pont)**
Ha $\overline{abcd} = 2025$, akkor $\overline{ab} = 20$, $\overline{cd} = 25$ és teljesülnek a megadott egyenlőségek ($2025 = 27 \cdot 75 = 25 \cdot 81$). **(1 pont)**
Ha $\overline{abcd} \in \{4050, 6075, 8100\}$, akkor nem teljesülnek a megadott egyenlőségek, mert $4050 \neq 52 \cdot 75$, $6075 \neq 77 \cdot 75$ és $8100 \neq 2 \cdot 75$. **(1 pont)**

■

Második megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

a) Az aránypárok alaptulajdonsága alapján $\overline{aab} = 15 \cdot (\overline{aa} - 7)$, innen pedig $\overline{aa0} + b = 15(\overline{aa} - 7)$, vagyis $10 \cdot \overline{aa} + b = 15 \cdot \overline{aa} - 105$. **(1 pont)**
Rendezve az összefüggést kapjuk, hogy $b = 5 \cdot \overline{aa} - 105$, azaz $b \,\vdots\, 5$. **(1 pont)**
Mivel b számjegy és a $\overline{aa} \neq 21$, a b csak 5 lehet. **(1 pont)**
Innen $1 = 11a - 21$ következik, hogy $a = 2$. Tehát a keresett szám a 25. **(1 pont)**

b) A feltevésből következik, hogy $\overline{abcd} = (\overline{cd} + 2) \cdot 75$ és $\overline{abcd} = (\overline{ab} + 5) \cdot 81$. **(1 pont)**
Tehát $(\overline{cd} + 2) \cdot 75 = (\overline{ab} + 5) \cdot 81$, ahonnan $(\overline{cd} + 2) \cdot 25 = (\overline{ab} + 5) \cdot 27$. **(1 pont)**
Mivel $(\overline{cd} + 2) \,\vdots\, 27$, tehát $(\overline{cd} + 2) \in \{27, 54, 81\}$, ahonnan kapjuk, hogy $\overline{cd} \in \{25, 52, 79\}$. **(1 pont)**
Mivel az $\overline{abcd}$ osztható 75-tel következik, hogy $d = 5$ felel meg. **(1 pont)**
Tehát $\overline{cd} = 25$ és $\overline{ab} = 20$, vagyis $\overline{abcd} = 2025$. **(1 pont)**

■

7. osztály

1. feladat (10 pont). A hét törpe kártyajátékot játszik egy különleges 2025 kártyából álló paklival. A kártyákon egy 1 és 2025 közötti természetes szám szerepel a gyök alatt. Mindegyik kártyán pontosan egy szám van és egyetlen szám sem szerepel két kártyán. A megkevert pakliból a törpék egymás után húznak egy-egy kártyát, amíg a pakli el nem fogy.
Bizonyítsd, hogy amikor az összes kártyát kihúzták lesz legalább egy törpe, akinek a kártyáin egyetlen természetes szám négyzete sem szerepel!

Gergely Anna, Székelyudvarhely

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**
A kártyákon tehát szerepelnek a $\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \ldots, \sqrt{2025}$ számok, valamilyen sorrendben. Ahhoz, hogy egy kártyán természetes szám szerepeljen, a kártyán lévő érték $\sqrt{k^2}$ alakú kell legyen, ahol $k \in \mathbb{N}$. **(2 pont)**

Észrevehetjük, hogy $2025 = 45^2$. **(1 pont)**

Így a kártyákon szereplő természetes számok az

$$1 = \sqrt{1}, \quad 2 = \sqrt{4}, \quad 3 = \sqrt{9}, \quad \ldots, \quad 45 = \sqrt{2025}. \qquad \textbf{(2 pont)}$$

Viszont ezek között csak az $1 = 1^2$, $4 = 2^2$, $9 = 3^2, \ldots, 36 = 6^2$ számok négyzetszámok. **(2 pont)**

Mivel 7 törpe játszik, és összesen 6 darab négyzetszám szerepel a kártyákon, így a skatulya-elv alapján biztosan lesz legalább egy olyan törpe, akinek kártyáin nem szerepel egy természetes szám négyzete sem. **(2 pont)**

■

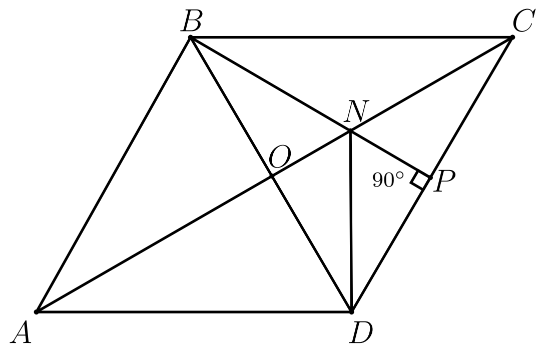
2. feladat (10 pont). Az $ABCD$ paralelogrammában $AD \equiv BD$, P a DC oldal egy olyan pontja, hogy $BP \perp DC$, továbbá $BP \cap AC = \{N\}$.

a) Bizonyítsd, hogy $NC \equiv ND$ és $AN = 2 \cdot ND$.

b) Bizonyítsd, hogy $\widehat{CAD} = 30°$ akkor és csakis akkor, ha $ABCD$ rombusz!

***

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**



a) Az $ABCD$ paralelogramma, ezért $AD \equiv BC$, továbbá a megadott feltétel alapján $BD \equiv AD$. Tehát $BD \equiv BC$ és a BCD háromszög egyenlő szárú. A BCD egyenlő szárú háromszögben BP magasság egyben oldalfelező is. (**1 pont**)

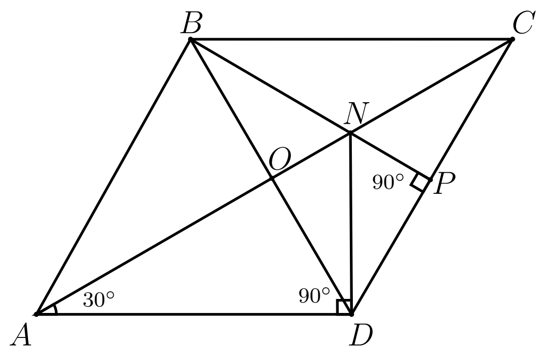
Az N pont rajta van a DC szakasz BP odalfelező merőlegesén, ezért az NDC háromszög egyenlő szárú és $NC \equiv ND$. (**1 pont**)

Az $ABCD$ paralelogrammában az AC és BD átló közös felezőpontja legyen O. Ekkor az N pont a BCD háromszög OC és BP oldalfelezőinek metszéspontja, tehát N a BCD háromszög súlypontja. (**1 pont**)

Az N súlypont harmadolja az OC oldalfelezőt, így $NC = \frac{2}{3} \cdot OC$, továbbá

$$AN = AC - NC = 2 \cdot OC - \frac{2}{3} \cdot OC = \frac{4}{3} \cdot OC = 2 \cdot NC.$$

Felhasználva, hogy $NC \equiv ND$, kapjuk, hogy $AN = 2 \cdot ND$. (**1 pont**)



b) Először tegyük fel, hogy $\widehat{CAD} = 30°$. Az AND háromszögben $AN = 2 \cdot ND$ és $\widehat{CAD} = 30°$. Igazolni fogjuk, hogy $ND \perp DA$. Ha $\widehat{NDA} \neq 90°$, akkor legyen M az N pontból az AD egyenesre bocsájtott merőleges talppontja, vagyis $M \in AD$ és $NM \perp AD$. Ekkor az NMA derékszögű háromszögben $\widehat{NAM} = 30°$, így ezzel a szöggel szembeni befogó hossza fele olyan hosszú, mint az átfogó, vagyis $AN = 2 \cdot NM$. Tehát $NM \equiv ND$, ezért az NMD háromszög egyenlő szárú, továbbá $\widehat{NMD} = 90°$. Ez ellentmondáshoz vezet, tehát D egybe kell essen az M ponttal, vagyis $ND \perp AD$. (**1 pont**)

Az $AD \parallel BC$ és $ND \perp AD$ alapján $ND \perp BC$, így ND a BCD háromszög magassága. Az N pont a BP és ND magasságok metszéspontja, tehát N a BCD háromszög magasságpontja, (**1 pont**) ahonnan következik, hogy $NC \perp BD$, így $CO \perp BD$. Az $ABCD$ paralelogramma átlói merőlegesek egymásra, ezért $ABCD$ rombusz. (**1 pont**)

Végül tételezzük fel, hogy $ABCD$ rombusz. Ekkor $AD \equiv BA$, illetve a feltétel alapján $AD \equiv BD$. Innen következik, hogy az ABD háromszög egyenlő oldalú, sajátosan $\widehat{BAD} = 60°$. **(1 pont)**
Az $ABCD$ rombuszban az átlók felezik egymást és merőlegesek egymásra, így AO az ABD egyenlő oldalú háromszögben oldalfelező merőleges, ezért szögfelező is, ahonnan következik, hogy $\widehat{CAD} = \widehat{DAO} = 30°$. **(1 pont)**

■

3. feladat (10 pont). a) Határozd meg azon $x \geq 0$ racionális számokat, amelyekre $\dfrac{10x+1}{x+1}$ négyzetszám!

b) Oldd meg a következő egyenletet a racionális számok halmazán:

$$\frac{x+1}{5} + \frac{x+2}{6} + \frac{x+3}{7} + \cdots + \frac{x+2024}{2028} = \frac{2024^2}{2023}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \cdots + \frac{1}{2023 \cdot 2024}\right).$$

Matlap 10/A: 5017, 2024

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

a) Mivel $x \geq 0$, ezért $1 \leq 10x + 1 < 10x + 10$, ahonnan következik, hogy

$$1 = \frac{x+1}{x+1} \leq \frac{10x+1}{x+1} < \frac{10x+10}{x+1} = 10.$$

Ha $\frac{10x+1}{x+1}$ az n természetes szám négyzete, vagyis $\frac{10x+1}{x+1} = n^2$, akkor $1 \leq n^2 < 10$, ahonnan kapjuk, hogy n^2 csak 1, 4 vagy 9 lehet. **(2 pont)**
Kipróbáljuk ezeket az eseteket.

- Ha $n^2 = 1$, akkor

$$\frac{10x+1}{x+1} = 1 \iff 10x+1 = x+1 \iff 9x = 0 \iff x = 0.$$

- Ha $n^2 = 4$, akkor

$$\frac{10x+1}{x+1} = 4 \iff 10x+1 = 4x+4 \iff 6x = 3 \iff x = \frac{1}{2}.$$

- Ha $n^2 = 9$, akkor

$$\frac{10x+1}{x+1} = 9 \iff 10x+1 = 9x+9 \iff x = 8.$$

Összegezve $x \in \{0, \frac{1}{2}, 8\}$. **(2 pont)**

b) Minden k pozitív természetes szám esetén

$$\frac{1}{k\cdot(k+1)}=\frac{(k+1)-k}{k\cdot(k+1)}=\frac{k+1}{k\cdot(k+1)}-\frac{k}{k\cdot(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}.$$

Ezt felhasználva az egyenlet jobb oldalán álló zárójel átírható a következőképpen:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\dots+\frac{1}{2023\cdot 2024}&=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\dots+\frac{1}{2023\cdot 2024}\\&=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\dots+\left(\frac{1}{2023}-\frac{1}{2024}\right)\\&=\frac{1}{1}+\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\dots\\&\quad\dots+\left(-\frac{1}{2023}+\frac{1}{2023}\right)-\frac{1}{2024}\\&=\frac{1}{1}-\frac{1}{2024}=\frac{2023}{2024}.\end{aligned}$$ **(2 pont)**

Ekkor az egyenlet a következő egyenértékű formákba írható át:

$$\begin{aligned}\frac{x+1}{5}+\frac{x+2}{6}+\frac{x+3}{7}+\dots+\frac{x+2024}{2028}&=\frac{2024^2}{2023}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\dots+\frac{1}{2023\cdot 2024}\right),\\\frac{x+1}{5}+\frac{x+2}{6}+\frac{x+3}{7}+\dots+\frac{x+2024}{2028}&=\frac{2024^2}{2023}\cdot\frac{2023}{2024},\\\frac{x+1}{5}+\frac{x+2}{6}+\frac{x+3}{7}+\dots+\frac{x+2024}{2028}&=2024.\end{aligned}$$ **(1 pont)**

Átrendezve a következőket kapjuk:

$$\frac{x+1}{5}+\frac{x+2}{6}+\frac{x+3}{7}+\dots+\frac{x+2024}{2028}-2024=0,$$

$$\left(\frac{x+1}{5}-1\right)+\left(\frac{x+2}{6}-1\right)+\left(\frac{x+3}{7}-1\right)+\dots+\left(\frac{x+2024}{2028}-1\right)=0,$$

$$\frac{x-4}{5}+\frac{x-4}{6}+\frac{x-4}{7}+\dots+\frac{x-4}{2028}=0,$$

$$(x-4)\cdot\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\dots+\frac{1}{2028}\right)=0.$$ **(1 pont)**

Viszont ebben az egyenletben az $\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\dots+\frac{1}{2028}\neq 0$, ezért $x-4=0$, azaz $x=4\in\mathbb{Q}$.**(1 pont)**

Megjegyzés. Az $\frac{x+1}{5}+\frac{x+2}{6}+\frac{x+3}{7}+\dots+\frac{x+2024}{2028}=2024$ egyenlet úgy is megoldható, hogy kitaláljuk és behelyettesítéssel ellenőrizzük, hogy $x=4$ megoldás, illetve felhasználjuk, hogy az elsőfokú ($ax=b$ alakú) egyenletnek egyetlen megoldása van, ha $a\neq 0$.

■

4. feladat (10 pont). Az ABC háromszögben O a BC oldal felezőpontja, E és F pedig az AB és AC oldalaknak olyan belső pontjai, amelyekre $AE=3\cdot EB$ és $CF=3\cdot AF$. Az E és F pontokon keresztül az AO egyenessel húzott párhuzamosok a BC oldalt az M, illetve N pontokban metszik. Bizonyítsd be, hogy:

a) $EMNF$ trapéz és $EM + FN = AO$;

b) $\dfrac{T_{EMNF}}{T_{ABC}} = \dfrac{1}{2}$.

Simon József, Csíkszereda

Első megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

a) A feltevés alapján $EM \parallel AO$ és $FN \parallel AO$, tehát $EM \parallel FN$. **(1 pont)**
Igazoljuk, hogy $EF \nparallel BC$. Legyen K és S az AB, illetve AC oldalak felezőpontjai. Illetve H az SC felezőpontja. A KS az ABC háromszög középvonala, így $KS \parallel BC$. Innen következik, hogy $KSCB$ trapéz, illetve EH a középvonala, tehát $EH \parallel BC$. Mivel egy ponton át egy egyenessel csak egy párhuzamos húzható, ezért ha $EF \parallel BC$, akkor $F = H$, ami ellentmond annak, hogy $CF = \frac{3}{4}AC$ és $CH = \frac{1}{4}AC$. Tehát $EF \nparallel BC$, így $EMNF$ trapéz. **(1 pont)**
Legyenek L és T a BO és OC szakaszok felezőpontjai. Így KL és ST az AOB és AOC háromszögek középvonalai, tehát

$$KL = \frac{1}{2}AO \quad \text{és} \quad ST = \frac{1}{2}AO.$$

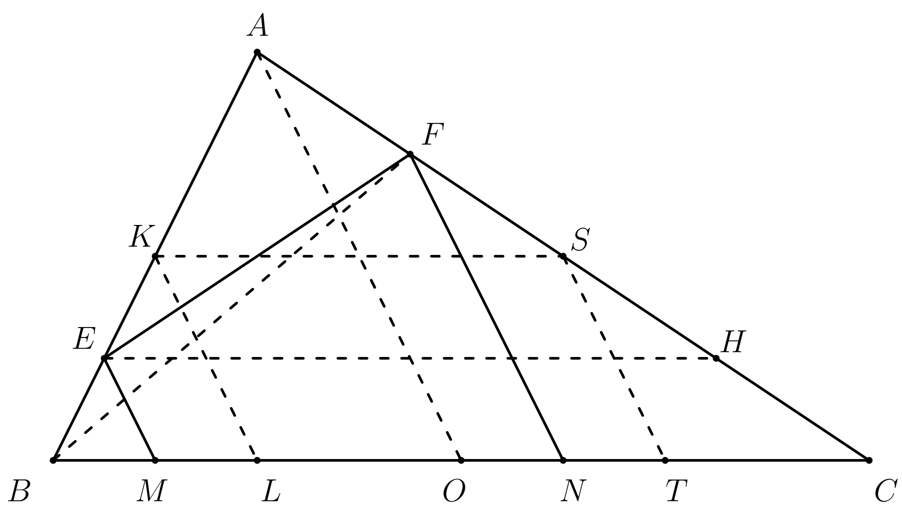
Az EM a BKL háromszög középvonala, vagyis

$$EM = \frac{KL}{2} = \frac{1}{4}AO. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Az FN a $AOTS$ trapéz középvonala, vagyis

$$FN = \frac{AO + ST}{2}. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Mivel $ST = \frac{AO}{2}$, így $FN = \frac{AO + \frac{AO}{2}}{2} = \frac{3}{4}AO$, ahonnan pedig $EM + FN = AO$. **(1 pont)**



b) Mivel O a BC felezőpontja, ezért $T_{ABO_\triangle} = \frac{1}{2} T_{ABC_\triangle}$. Továbbá KL középvonal az ABO háromszögben, így $T_{BKL_\triangle} = \frac{1}{4} T_{ABO_\triangle}$, illetve EM középvonal az BKL háromszögben, így $T_{BEM_\triangle} = \frac{1}{4} T_{BKL_\triangle}$. Összegezve, azt kaptuk, hogy

$$T_{BEM_\triangle} = \frac{1}{4} T_{BKL_\triangle} = \frac{1}{16} T_{ABO_\triangle} = \frac{1}{32} T_{ABC_\triangle}. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Legyen AQ az ABC háromszög A csúcsából húzott magasság ($Q \in BC$ és $AQ \perp BC$). Ha P a BC oldalon egy olyan pont, hogy $BP = k \cdot BC$, akkor

$$T_{ABP_\triangle} = \frac{BP \cdot AQ}{2} = \frac{k \cdot BC \cdot AQ}{2} = k \cdot \frac{BC \cdot AQ}{2} = k \cdot T_{ABC_\triangle}. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

A $CF = 3 \cdot AF$ feltételből kapjuk, hogy $AF = \frac{1}{4} AC$ és $CF = \frac{3}{4} AC$. A fenti területek közti összefüggést alkalmazva az ABC háromszögre és az $F \in AC$ osztópontra kapjuk, hogy

$$T_{ABF_\triangle} = \frac{1}{4} \cdot T_{ABC_\triangle}, \quad \text{illetve} \quad T_{FBC_\triangle} = \frac{3}{4} \cdot T_{ABC_\triangle}.$$

Majd újra alkalmazva az ABF háromszögre és az $E \in AB$ osztópontra ($AE = \frac{3}{4} AB$ a megadott feltételek miatt) kapjuk, hogy

$$T_{AEF_\triangle} = \frac{3}{4} T_{ABF_\triangle} = \frac{3}{16} T_{ABC_\triangle}. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Az FN az $ASTO$ trapéz középvonala és F az AS oldal felezőpontja, így N az OT oldal felezőpontja. Innen kapjuk, hogy

$$NC = NT + TC = \frac{1}{2} OT + TC = \frac{3}{2} TC = \frac{3}{4} OC = \frac{3}{8} BC.$$

A fenti területek közötti összefüggést alkalmazva a BFC háromszögben az $N \in BC$ osztópontra kapjuk, hogy

$$T_{FNC_\triangle} = \frac{3}{8} T_{FBC_\triangle} = \frac{9}{32} T_{ABC_\triangle}.$$

Végül

$$\begin{aligned}
T_{EFNM} &= T_{ABC_\triangle} - T_{AEF_\triangle} - T_{BEM_\triangle} - T_{FNC_\triangle} \\
&= T_{ABC_\triangle} - \frac{3}{16} T_{ABC_\triangle} - \frac{1}{32} T_{ABC_\triangle} - \frac{9}{32} T_{ABC_\triangle} \\
&= \left(1 - \frac{6}{32} - \frac{1}{32} - \frac{9}{32}\right) T_{ABC_\triangle} \\
&= \frac{1}{2} T_{ABC_\triangle}. \qquad \textbf{(1 pont)}
\end{aligned}$$

■

Második megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

a) A feltevés alapján $EM \parallel AO$ és $FN \parallel AO$, tehát $EM \parallel FN$. **(1 pont)**
Igazoljuk, hogy $EF \nparallel BC$. Legyenek K és S az AB és AC oldalak felezőpontjai. Akkor $KS \parallel BC$, de KS és EF átlók az $EKFS$ négyszögben, tehát metszik egymást, vagyis $EF \nparallel BC$. Tehát $EMNF$

trapéz. (**1 pont**)

Legyenek L és T a BO és OC szakaszok felezőpontjai. Így KL és ST az AOB és AOC háromszögek középvonalai.

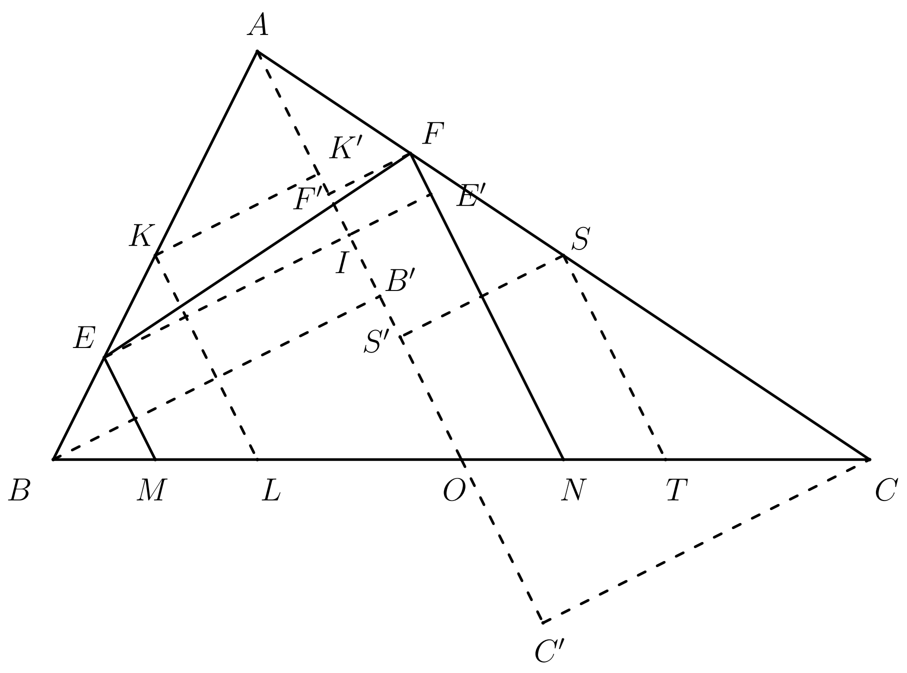
Az EM a BKL_Δ középvonala, vagyis $EM = \dfrac{KL}{2} = \dfrac{1}{4}AO$. (**1 pont**)

Az FN az $AOTS$ trapéz középvonala, vagyis $FN = \dfrac{AO + ST}{2}$. (**1 pont**)

Mivel $ST = \dfrac{AO}{2}$, így $FN = \dfrac{AO + \frac{AO}{2}}{2} = \dfrac{3}{4}AO$, ahonnan pedig $EM + FN = AO$. (**1 pont**)

b) Legyenek $BB' \perp AO$, $CC' \perp AO$ és $FF' \perp AO$, ahol $B', C', F' \in AO$, valamint $EE' \perp FN$, ahol $E' \in FN$ és $EE' \cap AO = \{I\}$.

Ekkor $OBB'_\Delta \equiv OCC'_\Delta$, mivel mindkettő derékszögű, $BO \equiv OC$ (átfogók), illetve $\widehat{BOB'} \equiv \widehat{COC'}$ (csúcsszögek). Innen pedig $BB' = CC'$. (**1 pont**)



Legyen $SS' \perp AO$, ahol $S' \in AO$. Az SS' az ACC'_Δ középvonala, ahonnan

$$SS' = \frac{CC'}{2} = \frac{BB'}{2} .$$

De FF' középvonal az ASS'_Δ-ben, így

$$FF' = \frac{SS'}{2} = \frac{CC'}{4} = \frac{BB'}{4} . \tag{1}$$

(**1 pont**)

Legyen $KK' \perp AO$, ahol $K' \in AO$. A KK' az ABB_Δ középvonala, ahonnan $KK' = \dfrac{BB'}{2}$, de EI a $BB'K'K$ trapéz középvonala, ahonnan

$$EI = \frac{BB' + KK'}{2} = \frac{BB' + \frac{BB'}{2}}{2} = \frac{3}{4}BB' \,. \tag{2}$$

Így az (1) és (2) összefüggések alapján $EE' = EI + FF' = BB'$. (**1 pont**)

Tehát

$$T_{EMNF} = \frac{(NF + ME) \cdot EE'}{2} = \frac{AO \cdot BB'}{2} = T_{AOB} = \frac{T_{ABC}}{2} \,,$$

azaz

$$\frac{T_{EMNF}}{T_{ABC}} = \frac{1}{2} \,.$$ (**1 pont**)

Megjegyzés. A BB' és CC' kongruenciája bizonyítható egyenlő területek felírásával is. Az AOB_Δ területe egyenlő az AOC_Δ területével, mert AO oldalfelező. Viszont $BB' \perp AO$, $CC' \perp AO$, így felírható, hogy

$$T_{AOB_\Delta} = \frac{AO \cdot BB'}{2} = T_{AOC_\Delta} = \frac{AO \cdot CC'}{2} \Longrightarrow BB' = CC' \,.$$

■

8. osztály

1. feladat (10 pont). a) Igazold, hogy ha $x, y \in \mathbb{R}^*$ és $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{2024} = 0$, akkor az

$$n = \left(\frac{x}{8} + 253\right)\left(\frac{y}{8} + 253\right) - 9$$

szám egy természetes szám köbe!

b) Bizonyítsd be, hogy ha az a, b, c számjegyek esetén $\left(\overline{ab}\right)^2 - c^2 = 2024$, akkor az $n = \overline{ab} - c$ szám osztható 11-gyel!

Matlap 10/A: 5021, 2024

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

a) A megadott összefüggés a következő egyenértékű alakokba írható:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{2024} = 0 \iff \frac{xy + 2024x + 2024y}{2024xy} = 0 \iff xy + 2024x + 2024y = 0. \qquad \textbf{(2 pont)}$$

Az n szám felírásában közös nevezőre hozunk, majd felbontjuk a zárójeleket és felhasználjuk az előbb kapott összefüggést:

$$\begin{aligned} n &= \left(\frac{x}{8} + 253\right) \cdot \left(\frac{y}{8} + 253\right) - 9 \\ &= \left(\frac{x + 2024}{8}\right) \cdot \left(\frac{y + 2024}{8}\right) - 9 \\ &= \frac{xy + 2024x + 2024y + 2024^2}{64} - 9 \\ &= \frac{2024^2}{64} - 9 = 64009 - 9 \\ &= 64000. \end{aligned} \qquad \textbf{(2 pont)}$$

A fentiekből következik, hogy $n = 64000 = 40^3$, tehát n a 40-nek a köbe. **(1 pont)**

b) Az $\left(\overline{ab}\right)^2 - c^2 = 2024$ felírásból következik, hogy

$$\left(\overline{ab} - c\right) \cdot \left(\overline{ab} + c\right) = 2024. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Keressük a $2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$ szám azon $\left(\overline{ab} - c, \overline{ab} + c\right)$ osztópárjait, amelyekre $\overline{ab} - c \leq \overline{ab} + c$ és a szorzatuk kiadja a 2024-et:

$$\left(\overline{ab} - c, \overline{ab} + c\right) \in \{(1, 2024), (2, 1012), (4, 506), (8, 253), (11, 184), (22, 92), (23, 88), (44, 46)\}.$$

(1 pont)

Az $\left(\overline{ab} + c\right) - \left(\overline{ab} - c\right) = 2c \leq 18$ feltételt a felsoroltak közül csak a $(44, 46)$ osztópár teljesíti. Innen következik, hogy $n = \overline{ab} - c = 44$, tehát az n szám osztható 11-gyel. **(2 pont)**

■

2. feladat (10 pont). a) Igazold, hogy ha k természetes szám, akkor fennáll a következő egyenlőség:

$$\frac{1}{(k+1)\sqrt{k+2}} = \left(\sqrt{\frac{k+2}{k+1}}+1\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{k+1}}-\frac{1}{\sqrt{k+2}}\right).$$

b) Igazold, hogy teljesül a következő egyenlőtlenség:

$$\frac{1}{81\sqrt{82}}+\frac{1}{82\sqrt{83}}+\frac{1}{83\sqrt{84}}+\cdots+\frac{1}{2024\sqrt{2025}} > \frac{8}{45}.$$

***

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

a) Közös nevezőre hozzuk és elvégezzük a műveleteket:

$$\left(\sqrt{\frac{k+2}{k+1}}+1\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{k+1}}-\frac{1}{\sqrt{k+2}}\right) = \left(\frac{\sqrt{k+2}}{\sqrt{k+1}}+\frac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{k+1}}\right)\cdot\frac{\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1}}{\sqrt{k+1}\cdot\sqrt{k+2}} \quad \textbf{(1 pont)}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{k+2}+\sqrt{k+1}\right)\cdot\left(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1}\right)}{\sqrt{k+1}\cdot\sqrt{k+1}\cdot\sqrt{k+2}} \quad \textbf{(1 pont)}$$

$$= \frac{k+2-k-1}{(k+1)\sqrt{k+2}} = \frac{1}{(k+1)\sqrt{k+2}}, \quad \textbf{(2 pont)}$$

amit igazolni kellett.

b) Felhasználjuk az a) alpontban bizonyított egyenlőséget és azt, hogy bármely k természetes szám esetén $\frac{k+2}{k+1} > 1$, ezért $\sqrt{\frac{k+2}{k+1}}+1 > 2$, minden $k \in \mathbb{N}$ esetén. **(2 pont)**
Ez alapján felírhatjuk, hogy

$$\frac{1}{81\sqrt{82}}+\frac{1}{82\sqrt{83}}+\frac{1}{83\sqrt{84}}+\cdots+\frac{1}{2024\sqrt{2025}} =$$

$$= \left[\sqrt{\frac{82}{81}}+1\right]\cdot\left[\frac{1}{\sqrt{81}}-\frac{1}{\sqrt{82}}\right]+\left[\sqrt{\frac{83}{82}}+1\right]\cdot\left[\frac{1}{\sqrt{82}}-\frac{1}{\sqrt{83}}\right]+$$

$$+\left[\sqrt{\frac{84}{83}}+1\right]\cdot\left[\frac{1}{\sqrt{83}}-\frac{1}{\sqrt{84}}\right]+\cdots+\left[\sqrt{\frac{2025}{2024}}+1\right]\cdot\left[\frac{1}{\sqrt{2024}}-\frac{1}{\sqrt{2025}}\right] \quad \textbf{(1 pont)}$$

$$> 2\cdot\left[\frac{1}{\sqrt{81}}-\frac{1}{\sqrt{82}}\right]+2\cdot\left[\frac{1}{\sqrt{82}}-\frac{1}{\sqrt{83}}\right]+2\cdot\left[\frac{1}{\sqrt{83}}-\frac{1}{\sqrt{84}}\right]+\cdots+2\cdot\left[\frac{1}{\sqrt{2024}}-\frac{1}{\sqrt{2025}}\right]$$

$$= 2\cdot\frac{1}{\sqrt{81}}-2\cdot\frac{1}{\sqrt{2025}} = \frac{2}{9}-\frac{2}{45}$$

$$= \frac{8}{45},$$

tehát $\frac{1}{81\sqrt{82}}+\frac{1}{82\sqrt{83}}+\frac{1}{83\sqrt{84}}+\cdots+\frac{1}{2024\sqrt{2025}} > \frac{8}{45}$, amit igazolni kellett. **(2 pont)**

■

3. feladat (10 pont). Koppány az $ABCDA'B'C'D'$ kocka minden csúcsára felírta az 1 és 0 számok valamelyikét. Miután az egyes oldallapokhoz tartozó csúcsokra írt számokat összeadta, minden esetben a 4, 3 vagy 2 értékek valamelyikét kapta, mindegyiket legalább egyszer és az $ABCD$ oldallap esetén 4-et kapott összegül.

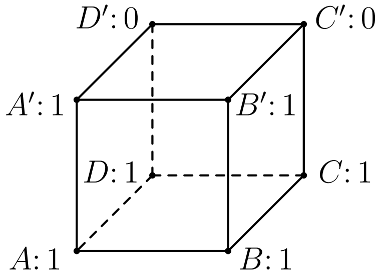
a) Hányféleképpen írhatta fel Koppány az 1 és a 0 számokat a kocka csúcsaira? Két felírást különbözőnek tekintünk, ha a két felírásban valamelyik csúcson különböző szám szerepel. Válaszodat indokold! Sorold fel az eseteket és készíts ábrát mindegyikhez!

b) Elemi lépésnek nevezzük azt, hogy egy tetszőleges él két végpontjában található értékeket a 2025 szám ugyanazon prímosztójával növeljük. Előfordulhat-e, hogy bizonyos számú elemi lépés után a 8 csúcson azonos értékek jelenjenek meg? Függhet-e ez attól, hogy kezdetben milyen számokat írtunk a csúcsokra?

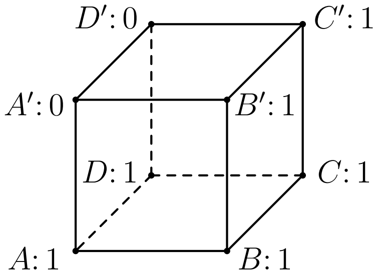
Pálhegyi-Farkas László, Nagyvárad
Nagy Enikő Ilona, Nagyvárad

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

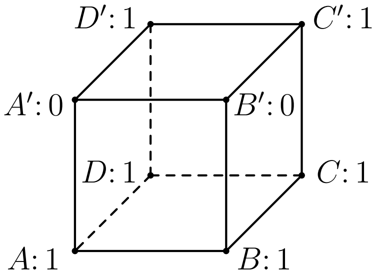
a) Mivel a kocka $ABCD$ oldallapján lévő csúcsokhoz tartozó számok összege 4, ezért az A, B, C, D csúcsokra biztosan 1-esek vannak írva. **(1 pont)**
Az A', B', C', D' csúcsokra Koppány pontosan két darab 1-est kell írjon, mivel ha többet írna, akkor a kockának nem lenne olyan oldallapja, amelyhez tartozó összeg 2 lenne, míg ha kevesebbet írna, akkor a kockának lenne olyan oldallapja, amelyhez tartozó összeg 1-gyel, vagy 0-val lenne egyenlő, ami nem felelne meg a feltételeknek. **(1 pont)**
Az $A'B'C'D'$ oldallap csúcsaira koppány felírhatja a két 1-est egymás mellé vagy átlósan, tehát az alábbi ábrán látható 6 eset lehetséges:



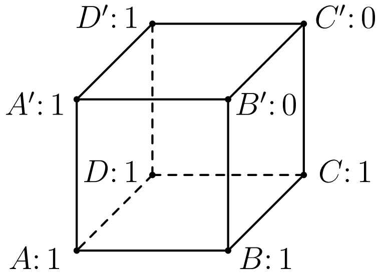
1. ábra.



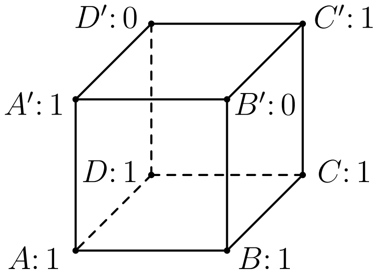
2. ábra.



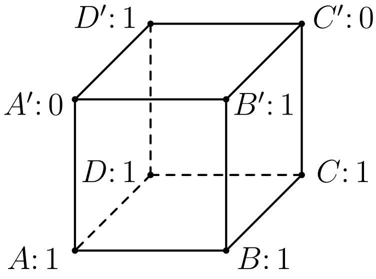
3. ábra.



4. ábra.



5. ábra.



6. ábra.

(2 pont)

b) Mivel $2025 = 3^4 \cdot 5^2$ ezért egy elemi lépés után egy él végpontjaiban lévő számok értéke 3-mal vagy 5-tel fog nőni. Tekintjük először az első esetet, amely a 1. ábrán látható. Ha a $C'D'$ él mindkét végpontjában lévő számhoz hozzáadunk kétszer 5-öt, az AB, DC, $A'B'$ élek végpontjaiban lévő számokhoz pedig háromszor 3-mat, ekkor a kocka minden csúcsán a 10 fog szerepelni. Mivel a 2., 3., 4. ábrán lévő esetek az 1. ábrán lévő eset elforgatása (egy függőleges tengely körül), ezért ezek az esetekben hasonlóan elérhető, hogy mindegyik csúcson 10 szerepeljen. (**2 pont**)

Most előbb nézzük az 5. ábrán taláható esetet. A kocka bármely élének egyik végpontja az A, C, B', D' csúcsok, míg a másik végpontja az A', C', B, D csúcsok között van. Így egy elemi lépés során az A, C, B', D' csúcsokon lévő számok összege ugyanannyival nő, mint az A', C', B, D csúcsokon lévő számok összege. Ha elérhető, hogy minden csúcson ugyanaz az érték szerepeljen, akkor valamennyi elemi lépés során az A, C, B', D' csúcsokon lévő számok összege egyenlő kellene legyen az A', C', B, D csúcsokon lévő számok összegével. De a kezdeti felírás után az A, C, B', D' csúcsokon lévő számok összege 2, míg az A', C', B, D csúcsokon lévő számok összege 4, illetve minden elemi lépés során ugyanannyival növeljük mindkét összeget, így nem érhető el, hogy a megnövelt összegek valaha is egyenlőek legyenek. Tehát az 5. ábrának megfelelő esetben nem lehet elérni elemi lépések segítségével, hogy a kocka minden csúcsán ugyanaz az érték szerepeljen.

A 6. ábra esetén szintén nem érthető el, mivel a kezdeti felírás után az A, C, B', D' csúcsokon lévő számok összege 4, míg az A', C', B, D csúcsokon lévő számok összege 2. (**3 pont**)

■

4. feladat (10 pont). Adott az $ABCDA'B'C'D'$ téglatest, melyben $AA' = a$ és $AB = BC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Jelöljük O-val az AC és BD átlók metszéspontját, valamint G-vel az AO szakasz O-hoz közelebb eső harmadoló pontját. Legyen E a G pont szimmetrikusa az AB oldal felezőpontjára nézve.

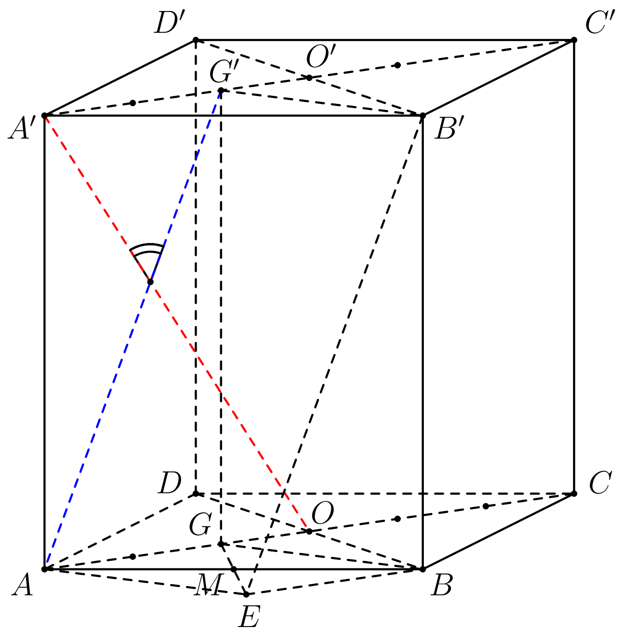
a) Ha G' pont az $A'B'D'$ háromszög súlypontja, akkor igazold, hogy az A, E, B', G' pontok egy síkban vannak!

b) Határozd meg a $B'E$ és az $A'O$ egyenesek által alkotott szög mértékét!

Pálhegyi-Farkas László, Nagyvárad
Ugron Szabolcs, Sepsiszentgyörgy

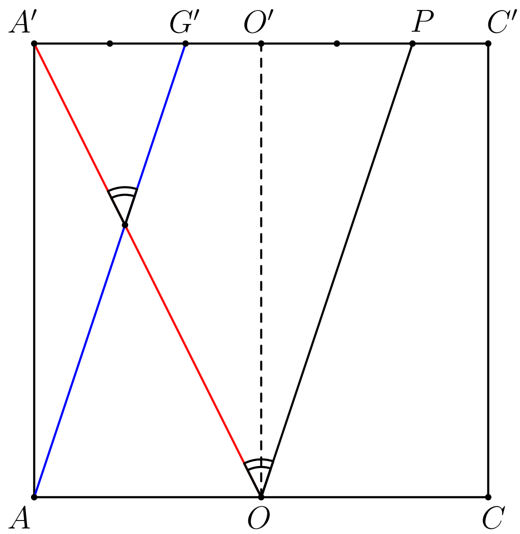
Megoldás. Hivatalból (**1 pont**)

a) Legyen O' az $A'C'$ és $B'D'$ átlók metszéspontja, M az AB szakasz felezőpontja, G' az $A'O'$ szakasz O'-hez közelebb eső harmadolópontja. Mivel $AM = MB$ és $GM = ME$, következik, hogy az $AEBG$ négyszög paralelogramma. Továbbá tudjuk, hogy $GBB'G'$ téglalap, ezekből következik, hogy $AE \parallel GB$ és $AE \equiv GB$, illetve $GB \parallel G'B'$ és $GB \equiv G'B'$, tehát az $AEB'G'$ négyszög egy paralelogramma, s így az A, E, B', G' pontok egy síkban vannak. (**3 pont**)



b) Mivel $AEB'G'$ paralelogramma, innen következik, hogy $B'E$ párhuzamos AG'-tel, így a $B'E$ és $A'O$ egyenesek szögének mértéke megegyezik a $G'A$ és $A'O$ egyenesek szögének mértékével.

(**1 pont**)



Legyen P az $O'C'$ szakasz C'-hez közelebb eső harmadolópontja. A szerkesztés alapján

$$AO = G'P = \frac{AC}{2},$$

és tudjuk, hogy $AO \parallel G'P$, ebből következik, hogy $AOPG'$ paralelogramma. Tehát $G'A \parallel PO$, ebből következik, hogy $B'E$ és $A'O$ egyenesek szögének mértéke (amely megegyezik az $G'A$ és $A'O$ egyenesek szögének mértékével) tulajdonképpen megegyezik a $\widehat{POA'} = \alpha$ szög mértékével. (**1 pont**)

Mivel $ABCDA'B'C'D'$ téglatest, ezért az $ABCD$ és $ACC'A'$ négyszögek téglalapok. A feltevés szerint $AB = BC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, következik, hogy $ABCD$ négyzet, ahonnan kapjuk, hogy

$$AC = AB \cdot \sqrt{2} = a = AA',$$

tehát az $ACC'A'$ téglalap egy négyzet. **(1 pont)**

Felírjuk kétféleképpen a POA' háromszög területét. Egyrészt

$$T_{POA'_\triangle} = \frac{A'P \cdot OO'}{2} = \frac{\frac{5}{6} \cdot a \cdot a}{2} = \frac{5a^2}{12}. \quad \textbf{(1 pont)}$$

Másrészt, Pitagorasz tétele segítségével kiszámolhatjuk, hogy

$$A'O = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2} \quad \text{és} \quad PO = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{9}} = \frac{a\sqrt{10}}{3},$$

ami alapján

$$T_{POA'_\triangle} = \frac{A'O \cdot PO \cdot \sin\alpha}{2} = \frac{\frac{a\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{10}}{3} \cdot \sin\alpha}{2} = \frac{5a^2\sqrt{2}}{12} \cdot \sin\alpha. \quad \textbf{(1 pont)}$$

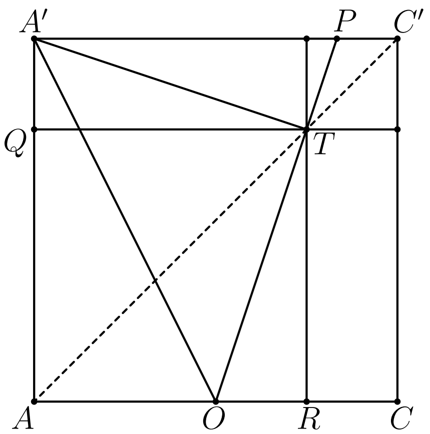
Ezekből adódik, hogy

$$\sin\alpha = \frac{5a^2}{12} \cdot \frac{12}{5a^2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

tehát az $\alpha = 45°$. **(1 pont)**

Megjegyzés. Az utolsó 5 pont megszerezhető tetszőleges gondolatmenettel, amely alapján meghatározható az $A'O$ és az AG' által bezárt szög mértéke.

Megjegyzés. A $\widehat{POA'}$ szög mértéke a következőképpen is meghatározható:



Jelöljük az AC' és PO egyenesek metszéspontját T-vel. A T ponton át az $ACC'A'$ négyzet oldalaival párhuzamos egyeneseket húzunk, amelyek az AA' egyenest a Q pontban, míg a AC egyenest az R pontban metszik. Ha a TRO háromszöget a T pont körül az óramutató járásával megegyező irányba $90°$-kal elforgatjuk, akkor pontosan a TQA' háromszöget kapjuk. Ebből következik, hogy a TOA' háromszög egyenlő szárú derékszögű, tehát a keresett szög

$$\widehat{POA'} = \widehat{TOA'} = 45°. \quad \textbf{(4 pont)}$$

■

9. osztály

1. feladat (10 pont). Ha x, y, z, t szigorúan pozitív valós számok, akkor igazold az alábbi egyenlőtlenségeket:

a) $\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zt} + \sqrt{tx} \le x + y + z + t$,

b) $\dfrac{1}{x+y+z} \le \dfrac{1}{9}\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}\right)$,

c) $\dfrac{1}{x+y+\sqrt{zt}} + \dfrac{1}{y+z+\sqrt{tx}} + \dfrac{1}{z+t+\sqrt{xy}} + \dfrac{1}{t+x+\sqrt{yz}} \le \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{t}\right)$.

Szilágyi Judit, Kolozsvár

Megoldás. Hivatalból (**1 pont**)

a) A mértani és számtani középarányosok közti egyenlőtlenség alapján

$$\sqrt{xy} \le \frac{x+y}{2}, \quad \sqrt{yz} \le \frac{y+z}{2}, \quad \sqrt{zt} \le \frac{z+t}{2} \quad \text{és} \quad \sqrt{tx} \le \frac{t+x}{2}.$$

Összeadva a fenti egyenlőtlenségeket kapjuk, hogy

$$\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zt} + \sqrt{tx} \le x + y + z + t.$$ (**3 pont**)

b) Az $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$ pozitív számokra alkalmazzuk a számtani és harmonikus közepek közti egyenlőtlenséget:

$$\frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}}{3} \ge \frac{3}{x+y+z},$$

ezt végigosztva 3-mal következik, hogy $\frac{1}{x+y+z} \le \frac{1}{9}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)$. (**3 pont**)

c) A b) alpont alapján

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{x+y+\sqrt{zt}} + \frac{1}{y+z+\sqrt{tx}} + \frac{1}{z+t+\sqrt{xy}} + \frac{1}{t+a+\sqrt{yz}} \\
&\le \frac{1}{9}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{\sqrt{zt}} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{\sqrt{tx}} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} + \frac{1}{\sqrt{xy}} + \frac{1}{t} + \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{yz}}\right) \\
&= \frac{1}{9}\left(\frac{2}{x} + \frac{2}{y} + \frac{2}{z} + \frac{2}{t} + \frac{1}{\sqrt{xy}} + \frac{1}{\sqrt{yz}} + \frac{1}{\sqrt{zt}} + \frac{1}{\sqrt{tx}}\right).
\end{aligned}$$

Az a) alpontban x, y, z, t helyett $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}, \frac{1}{t}$ értékeket helyettesítve kapjuk, hogy

$$\frac{1}{\sqrt{xy}} + \frac{1}{\sqrt{yz}} + \frac{1}{\sqrt{zt}} + \frac{1}{\sqrt{tx}} \le \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t}.$$

A fentiek alapján az következik, hogy

$$\begin{aligned}
S &\le \frac{1}{9}\left(\frac{2}{x} + \frac{2}{y} + \frac{2}{z} + \frac{2}{t} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t}\right) \\
&= \frac{1}{9}\left(\frac{3}{x} + \frac{3}{y} + \frac{3}{z} + \frac{3}{t}\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t}\right).
\end{aligned}$$ (**3 pont**) ■

2. feladat (10 pont). Ha $x \in \mathbb{R}$ és $x \geq 1$, akkor igazold, hogy $\left[\sqrt{[x] \cdot \left[x + \frac{1}{2}\right] + 1} + \frac{1}{2}\right] = \left[x + \frac{1}{2}\right]$, ahol $[a]$ az $a \in \mathbb{R}$ egész részét jelöli.

Matlap 10/2024, L:3802
Jakab Tibor, Sepsiszentgyörgy

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

Legyen $\left[x + \frac{1}{2}\right] = k$. Mivel $x \in \mathbb{R}$ és $x \geq 1$, ezért $k \in \mathbb{N}^*$. Ekkor

$$k \leq x + \frac{1}{2} < k + 1,$$
$$k - \frac{1}{2} \leq x < k + \frac{1}{2}. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Ha $x \in \left[k - \frac{1}{2}, k\right)$, akkor $[x] = k - 1$, így

$$\left[\sqrt{[x] \cdot \left[x + \frac{1}{2}\right] + 1} + \frac{1}{2}\right] = \left[\sqrt{k(k-1) + 1} + \frac{1}{2}\right]$$
$$= \left[\sqrt{k^2 - k + 1} + \frac{1}{2}\right]. \qquad \textbf{(2 pont)}$$

Igazoljuk, hogy $k \leq \sqrt{k^2 - k + 1} + \frac{1}{2} < k + 1$. Mivel $k \in \mathbb{N}^*$, az egyenlőtlenség egyenértékű az alábbiakkal:

$$k - \frac{1}{2} \leq \sqrt{k^2 - k + 1} < k + \frac{1}{2},$$
$$k^2 - k + \frac{1}{4} \leq k^2 - k + 1 < k^2 + k + \frac{1}{4}.$$

Az egyenlőtlenség bal oldala nyilvánvalóan igaz, a jobb oldal pedig egyenértékű azzal, hogy $k > \frac{3}{8}$, ami szintén igaz. Tehát $\left[\sqrt{[x] \cdot \left[x + \frac{1}{2}\right] + 1} + \frac{1}{2}\right] = k$.

(2 pont)

Ha $x \in \left[k, k + \frac{1}{2}\right)$, akkor $[x] = k$, így

$$\left[\sqrt{[x] \cdot \left[x + \frac{1}{2}\right] + 1} + \frac{1}{2}\right] = \left[\sqrt{k^2 + 1} + \frac{1}{2}\right]. \qquad \textbf{(2 pont)}$$

Igazoljuk, hogy $k \leq \sqrt{k^2 + 1} + \frac{1}{2} < k + 1$. Mivel $k \in \mathbb{N}^*$, az egyenlőtlenség egyenértékű azzal, hogy:

$$k - \frac{1}{2} \leq \sqrt{k^2 + 1} < k + \frac{1}{2}$$
$$k^2 - k + \frac{1}{4} \leq k^2 + 1 < k^2 + k + \frac{1}{4},$$

ami igaz, tehát $\left[\sqrt{[x] \cdot \left[x + \frac{1}{2}\right] + 1} + \frac{1}{2}\right] = k$. **(2 pont)**

■

3. feladat (10 pont). Az $1, 2, 3, \ldots, 2025$ számok közül kiválasztunk 1014 számot úgy, hogy a legnagyobb kiválasztott szám páratlan legyen. Igazold, hogy bármilyen választás esetén a kiválasztott számok között van kettő, amelyeknek az összege a legnagyobb kiválasztott számmal egyenlő!

Spier Tünde, Arad

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

Legyen a legnagyobb kiválasztott szám $2p + 1$, ahol $p \in \mathbb{N}$. A $(2p + 1)$-nél kisebb számokat olyan párokba rendezzük, amelyekben az összeg $2p + 1$, azaz: $(1, 2p)$, $(2, 2p - 1)$, $\ldots$,$(p, p + 1)$. **(2 pont)**

Ez p darab párt jelent, és a $(2p+1)$-nél kisebb számok mindegyike pontosan egy ilyen párban szerepel. **(1 pont)**

Mivel $2p + 1 \leq 2025$, ezért $p \leq 1012$, következik, hogy $p + 2 \leq 1014$. **(1 pont)**

Tehát legalább $p + 2$ számot választottunk az $1, 2, \ldots, 2p, 2p + 1$ számok közül. **(1 pont)**

Mivel ezek közül az egyik a $2p + 1$, ez azt jelenti, hogy legalább $p + 1$ számot választottunk az $1, 2, \ldots, 2p$ számok közül. **(1 pont)**

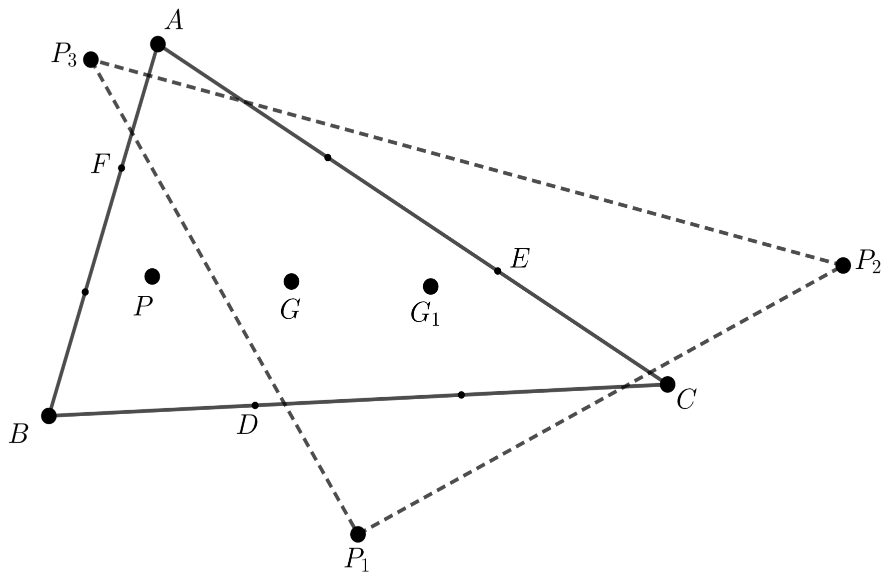
Mivel az $1, 2, \ldots, 2p$ számokat p párba rendeztük el és legalább $p + 1$ számot választottunk közülük, a skatulyaelv alapján van olyan pár, amelynek mindkét tagját kiválasztottuk. **(3 pont)**

■

4. feladat (10 pont). Az ABC háromszög síkjában P egy tetszőleges pont. A D, E és F azok a pontok, amelyekre $\overrightarrow{BD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EA}$, $\overrightarrow{BF} = -2\overrightarrow{AF}$. A P pontnak a D, E és F pontok szerinti szimmetrikusát jelölje rendre P_1, P_2 és P_3. Ha G az ABC háromszög súlypontja és G_1 a $P_1P_2P_3$ háromszög súlypontja, akkor igazold, hogy G a PG_1 szakasz felezőpontja!

Tóth Csongor, Szováta

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**



Mivel G_1 a $P_1P_2P_3$ háromszög súlypontja, ezért

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PG_1} &= \frac{\overrightarrow{PP_1}+\overrightarrow{PP_2}+\overrightarrow{PP_3}}{3}\\ &= \frac{2(\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{PE}+\overrightarrow{PF})}{3}.\end{aligned}$$ **(3 pont)**

Továbbá $\frac{BD}{DC}=\frac{1}{2}$, így

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PD} &= \frac{1}{\frac{1}{2}+1}\cdot\overrightarrow{PB}+\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+1}\cdot\overrightarrow{PC}\\ &= \frac{2}{3}\overrightarrow{PB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{PC}.\end{aligned}$$

Hasonlóan $\overrightarrow{PE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{PC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{PA}$, valamint $\overrightarrow{PF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{PA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{PB}$. **(3 pont)**
Tehát

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PG_1} &= \frac{2(\frac{2}{3}\overrightarrow{PB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{PC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{PC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{PA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{PA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{PB})}{3}\\ &= \frac{2(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})}{3}=2\cdot\overrightarrow{PG},\end{aligned}$$

ez pedig azt jelenti, hogy G a PG_1 szakasz felezőpontja. **(3 pont)**

■

Megjegyzés. Egy szemléletes ábra elkészítésére az első háromból egy pont jár.

10. osztály

1. feladat (10 pont). a) Igazold, hogy ha az $az^2 + bz + c = 0$ egyenlet $a, b, c \in \mathbb{C}^*$ együtthatóira fennáll a $|b| \geq 2|c|$ egyenlőtlenség, akkor az egyenletnek létezik legalább egy olyan gyöke, amelynek a modulusa kisebb vagy egyenlő mint 1!

b) Határozd meg a $z \in \mathbb{C}$ lehetséges értékeit úgy, hogy teljesüljön a

$$\max\{|z-1|, |z-\varepsilon|, |z-\varepsilon^2|\} \leq 1$$

egyenlőtlenség, ha $1, \varepsilon, \varepsilon^2$ harmadrendű egységgyökök!

Matlap 2024/8,L3776

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

a) Legyen $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ az egyenlet két gyöke. A Viète-összefüggések alapján

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{és} \quad z_1 z_2 = \frac{c}{a}. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Mivel $c \neq 0$ ezért $z_1, z_2 \neq 0$. Továbbá $\frac{|b|}{|c|} \geq 2$. A felírt egyenletek alapján

$$2 \leq \frac{|b|}{|c|} = \frac{|-a(z_1+z_2)|}{|az_1z_2|} = \left|\frac{z_1+z_2}{z_1z_2}\right| = \left|\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}\right|. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Alkalmazva a háromszög-egyenlőtlenséget kapjuk, hogy

$$\left|\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}\right| \leq \left|\frac{1}{z_1}\right| + \left|\frac{1}{z_2}\right|. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

A fenti két egyenlőtlenség alapján

$$2 \leq \left|\frac{1}{z_1}\right| + \left|\frac{1}{z_2}\right|. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Ha $|z_1| > 1$ és $|z_2| > 1$, akkor

$$\left|\frac{1}{z_1}\right| + \left|\frac{1}{z_2}\right| < 1 + 1 = 2,$$

ami ellentmondás. Tehát $|z_1| \leq 1$ vagy $|z_2| \leq 1$. **(1 pont)**

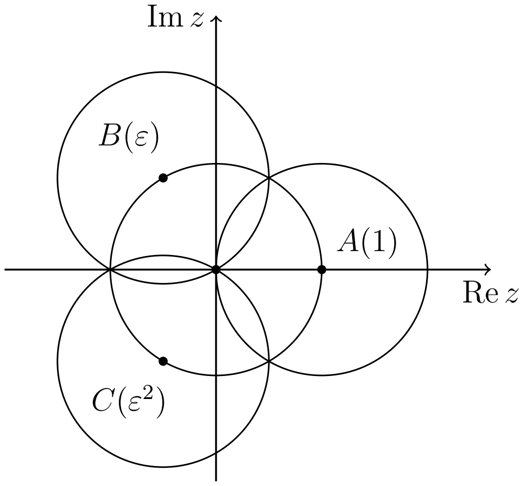
b) Legyen A, B, C, D pontok a síkban, melyek affixumai rendre $1, \varepsilon, \varepsilon^2, z$; ahol $z \in \mathbb{C}$ tetszőleges. A $\max\{|z-1|, |z-\varepsilon|, |z-\varepsilon^2|\} \leq 1$ egyenlőtlenség pontosan akkor teljesül ha $|z-1| \leq 1$ és $|z-\varepsilon| \leq 1$ és $|z-\varepsilon^2| \leq 1$. **(1 pont)**

Írhatjuk a következő ekvivalenciákat

$$|z-1| \leq 1 \iff D \in \mathcal{C}(A,1) \cup \operatorname{int}\mathcal{C}(A,1),$$

$$|z-\varepsilon| \leq 1 \iff D \in \mathcal{C}(B,1) \cup \operatorname{int}\mathcal{C}(B,1),$$
$$|z-\varepsilon^2| \leq 1 \iff D \in \mathcal{C}(C,1) \cup \operatorname{int}\mathcal{C}(C,1).$$ (**2 pont**)

A három körlap metszete csak az origó lehet, figyelembe véve, hogy a középpontjaik az egység sugarú origó középpontú körön vannak. Tehát $D = O$ vagyis $z = 0$. (**1 pont**)



■

2. feladat (10 pont). Adottak az $1 < a < b$ valós számok.

a) Igazold, hogy $(a+b)x - ab \geq x^2$, minden $x \in [a,b]$ esetén.

b) Adottak az $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [a,b]$ valós számok, ahol $n \geq 2$. Igazold a következő egyenlőtlenséget:

$$\log_{x_1}((a+b)x_2-ab)+\log_{x_2}((a+b)x_3-ab)+\ldots+\log_{x_{n-1}}((a+b)x_n-ab)+\log_{x_n}((a+b)x_1-ab) \geq 2n.$$

***

Megoldás. Hivatalból (**1 pont**)

a) Az $x \in [a,b]$ pontosan akkor, ha $(x-a)(x-b) \leq 0$. (**1 pont**)
A szorzást elvégezve átírható $x^2-(a+b)x+ab \leq 0$ alakba, ami egyenértékű az $x^2 \leq (a+b)x - ab$ egyenlőtlenséggel. (**1 pont**)

b) Az írásmód egyszerűsítése érdekében legyen $x_{n+1} = x_1$ és az egyenlőtlenség bal oldalát jelöljük S-sel. Mivel $x_k \in [a,b]$, minden $k = 1, \ldots, n$ esetén, ezért az előző alpont alapján teljesül, hogy $(a+b)x_k - ab \geq x_k^2$. (**2 pont**)
Továbbá a $\log_{x_k} : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ egy növekvő függvény, mert $x_k \geq a > 1$. (**1 pont**)
Tehát $\log_{x_k}((a+b)x_{k+1}-ab) \geq \log_{x_k}(x_{k+1}^2)$, minden $k = 1, \ldots, n$ esetén. (**1 pont**)
Összegezve ezt az n darab egyenlőtlenséget kapjuk, hogy

$$S \geq \log_{x_1} x_2^2 + \log_{x_2} x_3^2 + \ldots + \log_{x_{n-1}} x_n^2 + \log_{x_n} x_1^2,$$

$$S \geq 2(\log_{x_1} x_2 + \log_{x_2} x_3 + \ldots + \log_{x_{n-1}} x_n + \log_{x_n} x_1).$$ **(1 pont)**

A jobb oldalon az összeg minden tagja pozitív, mert $x_k > 1$. Így alkalmazható a számtani és mértani közepek közti egyenlőtlenség és írhatjuk, hogy

$$S \geq 2n \sqrt[n]{\log_{x_1} x_2 \log_{x_2} x_3 \cdot \ldots \cdot \log_{x_{n-1}} x_n \log_{x_n} x_1},$$

$$S \geq 2n \sqrt[n]{\frac{\lg x_2}{\lg x_1} \cdot \frac{\lg x_3}{\lg x_2} \cdot \ldots \cdot \frac{\lg x_n}{\lg x_{n-1}} \cdot \frac{\lg x_1}{\lg x_n}} = 2n.$$ **(2 pont)**

■

3. feladat (10 pont). Tanulmányozd az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény injektivitását, amely teljesíti a

$$2f(x)^2 + 5f(x) + 2 = f(2x^2 - 10x + 5)$$

összefüggést, minden $x \in \mathbb{R}$ esetén!

***

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

Megvizsgáljuk milyen x értékekre lesz $2x^2 - 10x + 5$ egyenlő x-szel.

$$\begin{aligned} 2x^2 - 10x + 5 =& x, \\ 2x^2 - 11x + 5 =& 0, \\ (2x-1)(x-5) =& 0. \end{aligned}$$

Tehát $x \in \left\{\frac{1}{2}, 5\right\}$ esetén $2x^2 - 10x + 5 = x$. **(4 pont)**

Ha $x \in \left\{\frac{1}{2}, 5\right\}$, akkor $2f(x)^2 + 5f(x) + 2 = f(x)$, vagyis $2(f(x)+1)^2 = 0$. Tehát $f(x) = -1$. **(3 pont)**

Következésképpen $f\left(\frac{1}{2}\right) = f(5) = -1$, ahonnan következik, hogy f nem injektív. **(2 pont)**

■

4. feladat (10 pont). Bizonyítsd be, hogy 10 különböző rácspont közül mindig kiválasztható kettő úgy, hogy az általuk meghatározott szakasz harmadolópontjai is rácspontok legyenek! (Rácspontnak nevezzük azokat a pontokat, amelyeknek mindkét koordinátája egész szám.)

***

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

Ha $z_1 = x_1 + iy_1$ és $z_2 = x_2 + iy_2$ két rácspontnak az affixuma, akkor a harmadolópontok affixuma $h_1 = \frac{1}{3}(2z_1 + z_2)$, illetve $h_1 = \frac{1}{3}(z_1 + 2z_2)$. Emiatt pontosan akkor lesznek a harmadolópontok is rácspontok, ha x_1 és x_2, illetve y_1 és y_2 azonos maradékot ad a 3-mal való osztásnál. **(4 pont)**

Hozzuk létre az $D_{u,v} = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid (x-u) \text{ és } (y-v) \text{ osztható 3-mal}\}$ halmazokat, minden $u, v \in \{0, 1, 2\}$ esetén. Ez a 9 halmaz valójában azt jelenti, hogy két pont pontosan akkor van ugyanabban a halmazban, ha a megfelelő koordinátáiknak a 3-mal való osztási maradéka azonos. **(4 pont)**

Mivel tíz szám van és 9 halmaz, ezért a skatulyaelv alapján valamelyik halmazban van két pont a tízből és így az előbbi tulajdonság alapján az ezek által meghatározott szakasz harmadolópontjai is rácspontok. (**1 pont**)

■

11. osztály

1. feladat (10 pont). Adott az $(a_n)_{n\geq 0}$ számsorozat, amelyre

$$a_0 = 1 \quad \text{és} \quad a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n = a_n a_{n+1},$$

bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén.

a) Határozd meg az $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ értékét!

b) Határozd meg a sorozat általános tagját! Bizonyítsd is be a kapott eredményt!

Jakab Tibor, Sepsiszentgyörgy, Matlap 8/L:3780

Első megoldás. Hivatalból (**1 pont**)

a) A rekurzió alapján: $a_0 = a_0 a_1$, ahonnan $1 = 1 \cdot a_1$, tehát $a_1 = 1$ (**1 pont**)
$a_0 + a_1 = a_1 a_2 \Rightarrow 1 + 1 = a_2 \Rightarrow a_2 = 2$.
$a_0 + a_1 + a_2 = a_2 a_3 \Rightarrow 1 + 1 + 2 = 2a_3 \Rightarrow a_3 = 2$.
$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = a_3 a_4 \Rightarrow 1 + 1 + 2 + 2 = 2a_4 \Rightarrow a_4 = 3$.
$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = a_4 a_5 \Rightarrow 1 + 1 + 2 + 2 + 3 = 3a_5 \Rightarrow a_5 = 3$.
$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = a_5 a_6 \Rightarrow 1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 3 = 3a_6 \Rightarrow a_6 = 4$.
$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = a_6 a_7 \Rightarrow 1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 4 = 4a_7 \Rightarrow a_7 = 4$.
$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = a_7 a_8 \Rightarrow 1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 4 + 4 = 4a_8 \Rightarrow a_8 = 5$.
$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 = a_8 a_9 \Rightarrow 1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 4 + 4 + 5 = 5a_9 \Rightarrow a_9 = 5$.
$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 = a_9 a_{10} \Rightarrow 1+1+2+2+3+3+4+4+5+5 = 5a_{10} \Rightarrow a_{10} = 6$.
(**3 pont**)

b) Az előző alpont alapján azt sejtjük, hogy $a_{2k} = a_{2k+1} = k + 1$. Ezt a matematikai indukcióval bizonyítjuk. Feltételezzük, hogy a tulajdonság igaz k-ig, azaz $a_0 = a_1 = 1$, $a_2 = a_3 = 2$, ... , $a_{2k} = a_{2k+1} = k + 1$ és bizonyítjuk $k + 1$ esetén, azaz, hogy $a_{2k+2} = a_{2k+3} = k + 2$. Az előző alpont alapján a tulajdonság igaz 0, 1, 2, 3, 4 esetén. (**2 pont**)
A rekurzió alapján

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2k} + a_{2k+1} = a_{2k+1} \cdot a_{2k+2},$$

azaz

$$1 + 1 + 2 + 2 + \cdots + (k + 1) + (k + 1) = (k + 1) \cdot a_{2k+2}.$$

Tehát

$$2 \cdot \frac{(k + 1)(k + 2)}{2} = (k + 1) \cdot a_{2k+2} \Rightarrow a_{2k+2} = k + 2.$$

Hasonlóan

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2k} + a_{2k+1} + a_{2k+2} = a_{2k+2} \cdot a_{2k+3},$$

azaz

$$1 + 1 + 2 + 2 + \cdots + (k + 1) + (k + 1) + (k + 2) = (k + 2) \cdot a_{2k+3},$$

ahonnan

$$2 \cdot \frac{(k+1)(k+2)}{2} + (k+2) = (k+2) \cdot a_{2k+3} \Rightarrow a_{2k+3} = k+1+1 = k+2.$$

Tehát bebizonyítottuk, hogy $a_{2k+2} = a_{2k+3} = k+2$. A matematikai indukció elve alapján következik, hogy $a_{2k} = a_{2k+1} = k+1$ minden $k \in \mathbb{N}$ esetén. (**3 pont**)

$\blacksquare$

Megjegyzés. Az általános tag képlete írható $a_n = \left[\frac{n}{2}\right] + 1$ alakban is.

Második megoldás. Hivatalból (**1 pont**)

a) A rekurzió alapján: $a_0 = a_0 a_1$, ahonnan $1 = 1 \cdot a_1$, tehát $a_1 = 1$. (**1 pont**)

Átalakítjuk az adott összefüggést:

$$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n = a_n a_{n+1},$$
$$a_{n+1} = \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}{a_n},$$
$$a_{n+1} = \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}{a_n} = \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1}}{a_n} + 1 = \underbrace{\frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1}}{a_{n-1}}}_{a_n} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_n} + 1.$$

Ebből következik, hogy:

$$a_{n+1} = a_{n-1} + 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$ (**2 pont**)

Tehát

$$\begin{array}{lll} a_2 = a_0 + 1 = 2, & a_3 = a_1 + 1 = 2, & a_4 = a_2 + 1 = 3, \\ a_5 = a_3 + 1 = 3, & a_6 = a_4 + 1 = 4, & a_7 = a_5 + 1 = 4, \\ a_8 = a_6 + 1 = 5, & a_9 = a_7 + 1 = 5, & a_{10} = a_8 + 1 = 6. \end{array}$$ (**1 pont**)

b) Az előző alpontban kiszámított tagok alapján sejtjük, hogy

$$a_n = \left[\frac{n}{2}\right] + 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

A $P(n) : a_n = \left[\frac{n}{2}\right] + 1$ állítást a matematikai indukció módszerével igazoljuk.
Ellenőrizzük a $P(0)$ és $P(1)$ kijelentéseket:

$$P(0) : a_0 = \left[\frac{0}{2}\right] + 1 = 1 \quad \text{és} \quad P(1) : a_1 = \left[\frac{1}{2}\right] + 1 = 1 \quad \text{igazak.}$$ (**2 pont**)

Feltételezzük, hogy $P(k) : a_k = \left[\frac{k}{2}\right] + 1$ és $P(k+1) : a_{k+1} = \left[\frac{k+1}{2}\right] + 1$ igaz és igazoljuk, hogy $P(k+2) : a_{k+2} = \left[\frac{k+2}{2}\right] + 1$ is igaz. De mivel $a_{k+2} = a_k + 1$, kapjuk, hogy:

$$a_{k+2} = \left[\frac{k}{2}\right] + 1 + 1 = \left[\frac{k+2}{2}\right] + 1.$$

Tehát a matematikai indukció elve alapján $a_n = \left[\frac{n}{2}\right] + 1$, bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén. (**3 pont**)

■

2. feladat (10 pont). a) Adj példát olyan $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ mátrixra, amelyre $A^2 + I_2 = O_2$.

b) Igazold, hogy végtelen sok olyan $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ mátrix létezik, amelyre $A^2 + I_2 = O_2$.

c) Igazold, hogy végtelen sok olyan $B, C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ invertálható mátrixokból álló páros létezik, amelyre

$$B^2 \neq I_2,\ C^2 \neq I_2 \quad \text{és} \quad B^2 + C^2 = O_2.$$

Csapó Hajnalka, Csíkszereda

Megoldás. Hivatalból (**1 pont**)

a) Olyan mátrixot kell találnunk, amely teljesíti az $A^2 = -I_2$ egyenlőséget.

Egy lehetséges példa: $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ellenőrzés: $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_2$, így $A^2 + I_2 = O_2$. Tehát a feltétel teljesül. (**2 pont**)

b) Legyen az A mátrix általános alakja $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Ekkor, felhasználva az $A^2 + I_2 = O_2$ feltételt,

$$A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2 + bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Az alábbi egyenletrendszert kell megoldani:

$$\begin{cases} a^2 + bc = -1, \\ b(a+d) = 0, \\ c(a+d) = 0, \\ d^2 + bc = -1. \end{cases}$$

Ha $b(a+d) = 0$ (vagy $c(a+d) = 0$), a megoldás során két esetet különböztetünk meg:

i) $b = 0$, de ekkor $a^2 = -1$ és $d^2 = -1$, tehát $A \notin \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
ii) $a + d = 0 \Rightarrow a = -d$, tehát

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}.$$

Hasonlóan kapjuk a $c(a + d) = 0$ esetben is. Vagyis az egyenletrendszer megoldása az $a = -d$ feltétel mellett mindazokat a számokat tartalmazza, melyekre fennáll az $a^2 + bc = -1$ feltétel, azaz $bc = -a^2 - 1$. (**2 pont**)

Egy ilyen mátrix lehetséges alakja:

$$A = \begin{pmatrix} a & a^2+1 \\ -1 & -a \end{pmatrix}.$$

Ekkor

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & a^2+1 \\ -1 & -a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & a^2+1 \\ -1 & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 - a^2 - 1 & a^3 + a - a^3 - a \\ -a + a & -a^2 - 1 + a^2 \end{pmatrix} = -I_2$$

Tehát $A^2 + I_2 = O_2$, bármely $a \in \mathbb{R}$ esetén, így végtelen sok ilyen mátrix van, mert minden $a \in \mathbb{R}$ értékre más-más mátrixot kapunk. (**2 pont**)

Megjegyzés. Egy másik lehetőség, ha használjuk a Cayley–Hamilton-összefüggést:

$$A^2 - \mathrm{Tr}A \cdot A + \det A \cdot I_2 = O_2.$$

Az $A^2 + I_2 = O_2$ igaz minden olyan $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ mátrixra, amelyre $\mathrm{Tr}A = 0$ és $\det A = 1$.

Tehát, ha

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}.$$

és $\det A = 1$, akkor ez az A teljesíti a feltételt.

A $\det A = -a^2 + bc = 1$ egyenlőség ugyanahhoz a $bc = -a^2 - 1$ összefüggéshez vezet.

c) Legyen $A = \begin{pmatrix} a & a^2+1 \\ -1 & -a \end{pmatrix}$, ahol $a \in \mathbb{R}$. Ekkor $A^2 + I_2 = O_2$. Ha $C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ egy olyan mátrix, amelyre $C^2 \neq I_2$ és $AC = CA$, akkor az előbbi egyenlőséget a C^2 mátrixszal beszorozva, kapjuk:

$$A^2C^2 + C^2 = O_2.$$

Ekkor $A^2C^2 = AACC = ACAC = (AC)^2$, tehát, ha $B = AC$ invertálható és $B^2 \neq I_2$, akkor ez teljesíti a feltételt. (**1 pont**)

Ha létezik ilyen C, akkor $\det(AC) = \det A \det C \neq 0$, mert A és C invertálható.

Szerkesszünk ilyen C mátrixot! Legyen $C = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, Ekkor

$$AC = \begin{pmatrix} a & a^2+1 \\ -1 & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + a^2z + z & ay + a^2t + t \\ -x - az & -y - at \end{pmatrix},$$

$$CA = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & a^2+1 \\ -1 & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax-y & a^2x+x-ay \\ az-t & a^2z+z-at \end{pmatrix} \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Úgy kell megválasszuk az x, y, z, t értékét, hogy $AC = CA$ legyen, tehát

$$\begin{cases} ax + a^2z + z = ax - y, \\ ay + a^2t + t = a^2x + x - ay, \\ -x - az = az - t, \\ -y - at = a^2z + z - at. \end{cases}, \quad \text{azaz} \quad \begin{cases} y = -z(a^2+1), \\ (t-x)(a^2+1) = -2ay, \\ t - x = 2az, \\ y = -z(a^2+1). \end{cases}$$

Legyen $z = -1$, ekkor $y = a^2 + 1$ és $t - x = -2a$, utóbbiakat válasszuk úgy, hogy $t = 0$ és $x = 2a$.
Ekkor $C = \begin{pmatrix} 2a & a^2+1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\det C = a^2 + 1 \neq 0$, tehát invertálható.

$$C^2 = \begin{pmatrix} 2a & a^2+1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2a & a^2+1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a^2-1 & 2a^3+2a \\ -2a & -a^2-1 \end{pmatrix} \neq I_2, \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

Nem kell ellenőrizzük, hogy $AC = CA$, mert úgy választottuk a C-t, hogy ez teljesüljön.

$$B = AC = \begin{pmatrix} a & a^2+1 \\ -1 & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2a & a^2+1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2-1 & a^3+a \\ -a & -a^2-1 \end{pmatrix}$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} a^2-1 & a^3+a \\ -a & -a^2-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^2-1 & a^3+a \\ -a & -a^2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3a^2+1 & -2a^3-2a \\ 2a & a^2+1 \end{pmatrix} \neq I_2, \quad \forall a \in \mathbb{R}^*.$$

Tehát a B és C teljesíti a feltételeket, bármely $a \in \mathbb{R}^*$ esetén. (**1 pont**)

Megjegyzés. Ha nincs meg a szerkesztés, csak meg van adva B és C alakja és be van bizonyítva, hogy teljesíti a feltételeket, akkor jár a **3 pont.** ■

Második megoldás a c) alpontra. A b) alpontban bemutatott számoláshoz hasonlóan kapjuk, hogy a

$$B^2 + n^2 I_2 = O_2$$

mátrixegyenletnek a

$$B = \begin{pmatrix} a & a^2+n^2 \\ -1 & -a \end{pmatrix}$$

mátrix megoldása minden $a \in \mathbb{R}$ és $n \in \mathbb{N}$ és $n \geq 2$ esetén. Az egyszerűség kedvéért választhatunk $a = 0$-t.
Másrészt, ha $C = nI_2$, akkor $C^2 = n^2 I_2$. Innen következik, hogy minden $n \geq 2$ esetén a

$$B = \begin{pmatrix} 0 & n^2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad C = \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix}$$

mátrixok invertálhatóak, négyzetük nem egyenlő I_2-vel, illetve teljesítik a $B^2 + C^2 = O_2$ összefüggést. ■

3. feladat (10 pont). Adott az $(x_n)_{n\geq 1}$ pozitív tagú sorozat, amelyre

$$x_1 = 3 \quad \text{és} \quad 3x_{n+1}^2 \cdot x_n = 6 + x_n^3, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

a) Igazold, hogy az $(x_n)_{n\geq 1}$ sorozat konvergens, majd határozd meg a határértékét!

b) Számítsd ki a $\lim\limits_{n\to\infty} (n \cdot x_n^3 - 3n)$ határértéket!

Mátéfi István, Marosvásárhely

Megoldás. Hivatalból (**1 pont**)

a) Mivel a sorozat pozitív tagú, ezért alulról korlátos. (**1 pont**)
Átalakítjuk az adott összefüggést:

$$x_{n+1}^2 = \frac{6 + x_n^3}{3x_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Felhasználva a számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenséget:

$$x_{n+1}^2 = \frac{3+3+x_n^3}{3x_n} \geq \frac{\sqrt[3]{3\cdot 3\cdot x_n^3}}{x_n} = \frac{\sqrt[3]{9}\cdot x_n}{x_n} = \sqrt[3]{9}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Tehát $x_{n+1}^2 \geq \sqrt[3]{9}$, minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén. Mivel $x_n > 0$ bármely $n \in \mathbb{N}^*$ esetén, kapjuk, hogy

$$x_n \geq \sqrt[3]{3}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Vizsgáljuk a monotonitást:

$$x_{n+1}^2 - x_n^2 = \frac{6+x_n^3}{3x_n} - x_n^2 = \frac{6-2x_n^3}{3x_n} = \frac{2(3-x_n^3)}{3x_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Mivel $x_n \geq \sqrt[3]{3}$, minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén, következik, hogy

$$x_{n+1}^2 - x_n^2 \leq 0 \Leftrightarrow (x_{n+1} - x_n)(x_{n+1} + x_n) \leq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Az $(x_n)_{n\geq 1}$ pozitív tagú sorozat, ezért $x_{n+1} + x_n > 0$, így $x_{n+1} - x_n \leq 0$, minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén, azaz a sorozat csökkenő. (**2 pont**)
A sorozat csökkenő és alulról korlátos, tehát konvergens és létezik $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \in \mathbb{R}$. (**1 pont**)
Legyen $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$, határértékre térve a rekurzív összefüggésben kapjuk, hogy $3l^3 = 6 + l^3$, ahonnan $l = \sqrt[3]{3}$, tehát $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt[3]{3}$. (**1 pont**)

b)

$$\lim_{n\to\infty} (n \cdot x_n^3 - 3n) \overset{[\infty-\infty]}{=} \lim_{n\to\infty} \left(n \cdot (x_n^3 - 3)\right) \overset{[\infty\cdot 0]}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\frac{1}{x_n^3-3}}$$

$$\overset{(C.S.)}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{n+1-n}{\frac{1}{x_{n+1}^3-3}-\frac{1}{x_n^3-3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(x_{n+1}^3-3)(x_n^3-3)}{x_n^3-x_{n+1}^3} \qquad \textbf{(1 pont)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(x_{n+1}-\sqrt[3]{3}\right)\left(x_{n+1}^2+x_{n+1}\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{3^2}\right)\left(x_n-\sqrt[3]{3}\right)\left(x_n^2+x_n\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{3^2}\right)}{(x_n-x_{n+1})\left(x_{n+1}^2+x_{n+1}x_n+x_n^2\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(x_{n+1}^2+x_{n+1}\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{3^2}\right)\left(x_n^2+x_n\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{3^2}\right)}{x_{n+1}^2+x_{n+1}x_n+x_n^2} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\left(x_{n+1}-\sqrt[3]{3}\right)\left(x_n-\sqrt[3]{3}\right)}{x_n-x_{n+1}}$$

$$= \frac{3\cdot\sqrt[3]{9}\cdot 3\cdot\sqrt[3]{9}}{3\cdot\sqrt[3]{9}} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\left(x_{n+1}-\sqrt[3]{3}\right)\left(x_n-\sqrt[3]{3}\right)(x_n+x_{n+1})}{x_n^2-x_{n+1}^2}$$

$$= 3\cdot\sqrt[3]{9} \lim_{n\to\infty} \frac{\left(x_{n+1}-\sqrt[3]{3}\right)\left(x_n-\sqrt[3]{3}\right)(x_n+x_{n+1})}{\frac{2(x_n^3-3)}{3x_n}} \qquad \textbf{(1 pont)}$$

$$= 3\cdot\sqrt[3]{9} \lim_{n\to\infty} \frac{3\left(x_{n+1}-\sqrt[3]{3}\right)\left(x_n-\sqrt[3]{3}\right)(x_n+x_{n+1})\,x_n}{2\left(x_n-\sqrt[3]{3}\right)\left(\sqrt[3]{3^2}+x_n\sqrt[3]{3}+x_n^2\right)}.$$

$$= 3\cdot\sqrt[3]{9} \lim_{n\to\infty} \frac{3\left(x_{n+1}-\sqrt[3]{3}\right)(x_n+x_{n+1})\,x_n}{2(\sqrt[3]{3^2}+x_n\sqrt[3]{3}+x_n^2)} = 3\cdot\sqrt[3]{9}\cdot\frac{3\cdot 0\cdot 2\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{3}}{2\cdot 3\sqrt[3]{9}} = 0. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

■

4. feladat (10 pont). Egy $n\times 5$-ös téglalapot 1×5-ös téglalapokkal födünk le. Jelölje a_n a lefödések számát.

a) Szerkeszd meg az összes lehetséges lefödést, ha $n \in \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$.

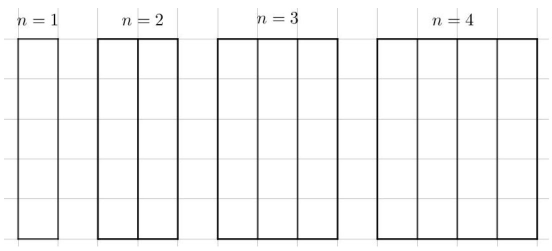
b) Vezess le egy rekurziót az $(a_n)_{n\geq 1}$ sorozatra!

c) Határozd meg az $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2025}\}$ halmazban az 5-tel osztható számok számát!

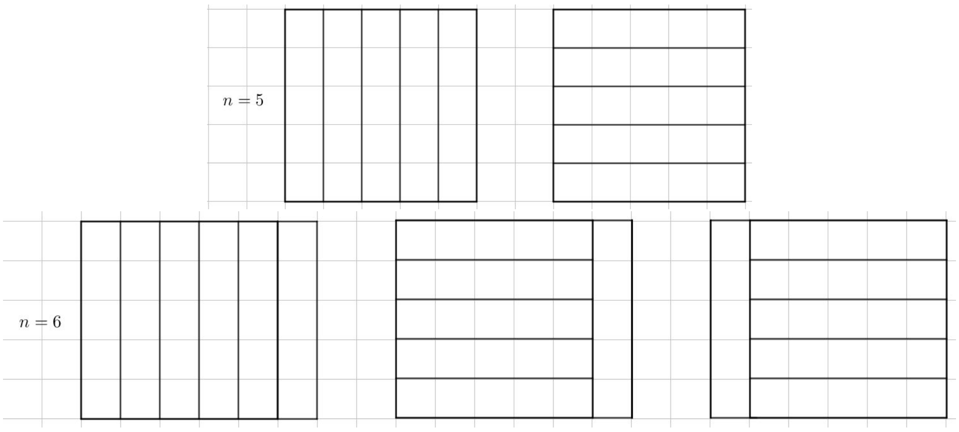
Csapó Hajnalka, Csíkszereda

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

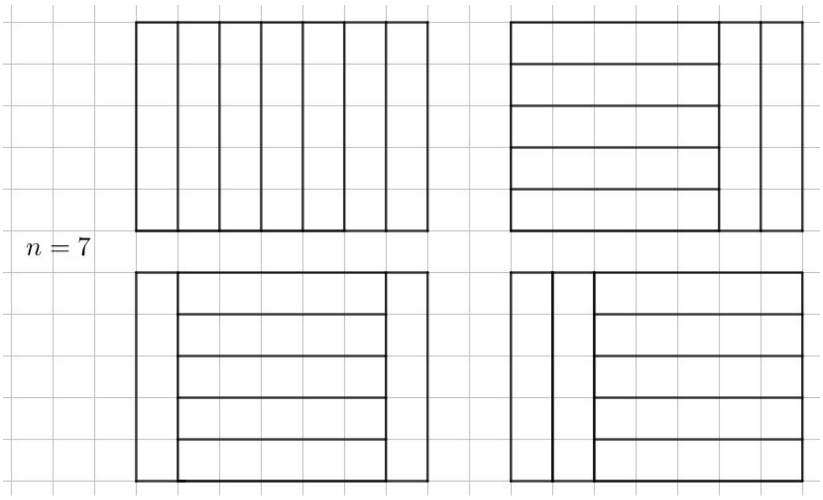
a)



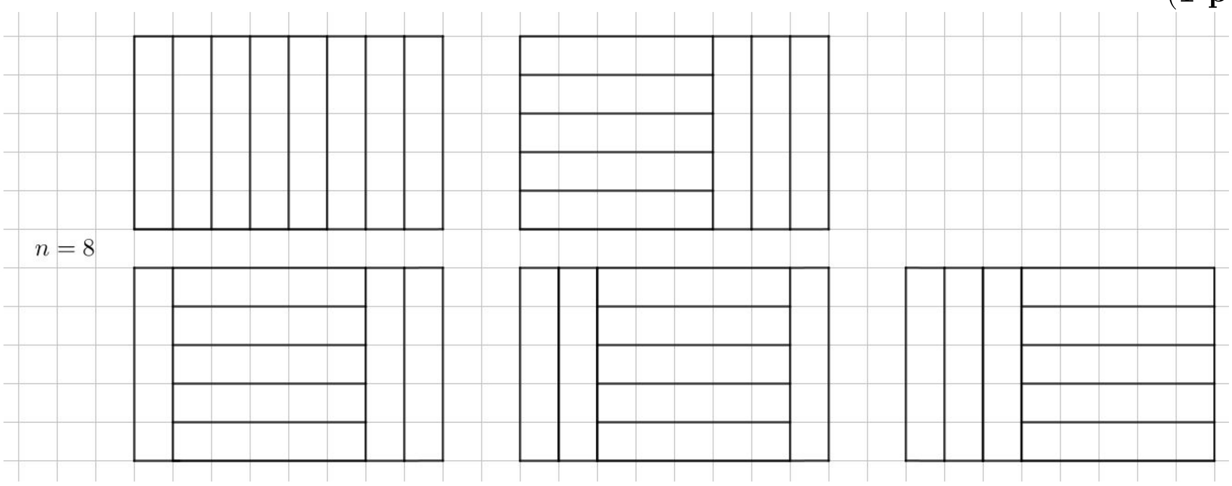
(1 pont)



(**1 pont**)

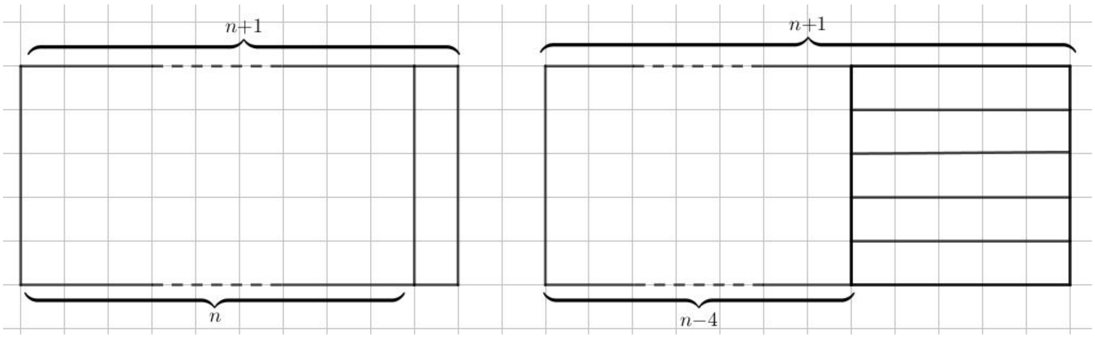


(**1 pont**)



(**1 pont**)

b) Ha $n \geq 5$, akkor egy $5 \times (n+1)$-es téglalapot megkaphatunk egy $5 \times n$-esből egy függőleges 5×1-es táglalap hozzáillesztésével vagy egy $5 \times (n-4)$-esből 5 darab 1×5-ös vízszintes téglalap hozzáillesztésével az ábrán látható módon



(**2 pont**)

Az elsőből a_n darab van és a másodikból a_{n-4}, tehát a rekurzió $a_{n+1} = a_n + a_{n-4}$. (**1 pont**)

c) Az $a_{n+1} = a_n + a_{n-4}$ rekurzióból következik, hogy ha $n \geq 5$, akkor a sorozat szigorúan növekvő, így az $\{a_5, a_6, \ldots, a_{2025}\}$ halmazban nincsenek ismétlődő elemek.

Az a) és b) alpontok alapján az 5-tel való osztási maradékok:

$$\underline{\mathbf{1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 0,\ 1,}}\ \mathbf{3,\ 1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 4,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,}\ 1,1,1,1,2,3,\ldots$$

Az 5-tel való maradékok periódusa 24 (a négy darab nullás után öt darab egyes következik), az $a_{24k+1}, \ldots, a_{24k+24}$ sorozatban 10 szám osztható 5-tel. (**1 pont**)

$2025 = 84 \cdot 24 + 9$, így 841 szám osztható 5-tel az első 2025 tag között. (**1 pont**)

■

12. osztály

1. feladat (10 pont). Adottak az $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = x \text{ és } g(x) = xe^{2-x}$$

függvények. Bizonyítsd be, hogy a $h\colon [0,4] \to \mathbb{R}$,

$$h(x) = \min\{f(x), g(x)\}$$

függvénynek van primitívje, majd határozd meg a h azon primitívjét, amely átmegy a $\left(3, 4 - \frac{4}{e}\right)$ koordinátájú ponton!

***

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**
Vizsgáljuk a $\phi\colon [0,4] \to \mathbb{R}, \phi(x) = g(x) - f(x) = xe^{2-x} - x = x(e^{2-x} - 1)$ függvény előjelét.
A ϕ függvény a $[0,2)$ intervallumon pozitív, a $\phi(2) = 0$, és a $(2,4]$ intervallumon negatív. Tehát

$$h(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } x \in [0,2] \\ xe^{2-x}, & \text{ha } x \in (2,4] \end{cases}. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

A h függvény folytonos a $[0,2)$ és a $(2,4]$ intervallumokon, mert elemi függvények összetétele és szorzata. **(1 pont)**
Mivel

$$\lim_{x \nearrow 2} h(x) = \lim_{x \searrow 2} h(x) = h(2) = 2,$$

ezért a h függvény folytonos a 2-ben is. Tehát h folytonos, ezért van primitívje. **(1 pont)**
Legyen H az h egy primitívje. Ha $x \in [0,2]$, akkor $H(x) = \frac{x^2}{2} + k_1$, ahol $k_1 \in \mathbb{R}$. Ha $x \in (2,4]$, akkor $H(x) = -e^{2-x}(x+1) + k_2$, ahol $k_2 \in \mathbb{R}$, mivel

$$\int xe^{2-x}dx = \int x(-e^{2-x})'dx = -xe^{2-x} + \int e^{2-x}dx = -e^{2-x}(x+1) + k_2. \qquad \textbf{(2 pont)}$$

Ahhoz, hogy H az h primitívje legyen, H folytonos és deriválható kell legyen. Következik, hogy

$$\lim_{x \nearrow 2} H(x) = \lim_{x \searrow 2} H(x) = H(2)$$

ahonnan $2 + k_1 = -3 + k_2$, vagyis $k_2 = k_1 + 5$, tehát

$$H(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} + k, & \text{ha } x \in [0,2] \\ -e^{2-x}(x+1) + k + 5, & \text{ha } x \in (2,4] \end{cases}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

A szerkesztés alapján a H deriválható a $[0,4]$ intervallumon és $H' = h$. **(2 pont)**
Mivel $H(3) = 4 - \frac{4}{e}$, ezért $-\frac{4}{e} + k + 5 = 4 - \frac{4}{e}$, így $k = -1$. Tehát

$$H(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} - 1, & \text{ha } x \in [0,2] \\ -e^{2-x}(x+1) + 4, & \text{ha } x \in (2,4] \end{cases}. \qquad \textbf{(2 pont)}$$

■

2. feladat (10 pont). Adott a

$$\mathbb{Z}[\varepsilon] = \{a + b\varepsilon \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \text{ halmaz, ahol } \varepsilon = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}.$$

a) Igazold, hogy $\mathbb{Z}[\varepsilon]$ kommutatív monoid a komplex számok szorzási műveletével!

b) Határozd meg a $\mathbb{Z}[\varepsilon]$ monoid invertálható elemeit!

c) Legyen $M = \{a^2 - ab + b^2 \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$. Igazold, hogy ha $x, y \in M$, akkor $x \cdot y \in M$!

***

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

a) Először igazolni fogjuk, hogy a $\mathbb{Z}[\varepsilon]$ zárt a komplex számok szorzási műveletére nézve. Legyen $z_1 = a_1 + \varepsilon b_1$ és $z_2 = a_2 + \varepsilon b_2$ két elem a $\mathbb{Z}[\varepsilon]$ halmazból. Felhasználva, hogy $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
z_1 \cdot z_2 &= (a_1 + \varepsilon b_1) \cdot (a_2 + \varepsilon b_2)\\
&= a_1 a_2 + \varepsilon^2 b_1 b_2 + \varepsilon a_1 b_2 + \varepsilon a_2 b_1\\
&= a_1 a_2 + (-\varepsilon - 1) b_1 b_2 + \varepsilon a_1 b_2 + \varepsilon a_2 b_1\\
&= a_1 a_2 - b_1 b_2 + \varepsilon(a_1 b_2 + a_2 b_1 - b_1 b_2)\\
&= a + \varepsilon b \in \mathbb{Z}[\varepsilon],
\end{aligned}$$

mert $a = a_1 a_2 - b_1 b_2 \in \mathbb{Z}$ és $b = a_1 b_2 + a_2 b_1 - b_1 b_2 \in \mathbb{Z}$. **(2 pont)**
Mivel a komplex számok szorzása kommutatív és asszociatív művelet, ezért a $\mathbb{Z}[\varepsilon]$-beli elemek szorzása is kommutatív és asszociatív művelet.
Az $1 = 1 + 0 \cdot \varepsilon \in \mathbb{Z}[\varepsilon]$ a $\mathbb{Z}[\varepsilon]$-beli elemek szorzásának a semleges eleme.
Összegezve a fentiek alapján kijelenthetjük, hogy $(\mathbb{Z}[\varepsilon], \cdot)$ kommutatív monoid. **(1 pont)**

b) Az $x = a + \varepsilon \cdot b \in \mathbb{Z}[\varepsilon]$ elem akkor invertálható, ha létezik $x' = a' + \varepsilon \cdot b' \in \mathbb{Z}[\varepsilon]$ úgy, hogy $x \cdot x' = 1$, ami akkor és csak akkor igaz, ha

$$aa' - bb' + \varepsilon(ab' + ba' - bb') = 1.$$

Ha $\alpha = aa' - bb'$ és $\beta = ab' + ba' - bb'$, akkor $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$. A fenti egyenlőség alapján

$$\alpha + \varepsilon\beta = 1 \iff \varepsilon\beta = 1 - \alpha.$$

Ha $\beta \neq 0$, akkor $\varepsilon = \frac{1-\alpha}{\beta} \in \mathbb{Q}$, ami ellentmondás, tehát $\beta = 0$. Innen következik, hogy $\alpha = 1$. Tehát

$$\begin{cases} aa' - bb' = 1\\ ba' + ab' - bb' = 0. \end{cases}$$ **(1 pont)**

Az a', b' ismeretlenű egyenletrendszer determinánsa

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & -b \\ b & a-b \end{vmatrix} = a^2 - ab + b^2.$$

Ha $\Delta = 0$, vagyis $a^2 - ab + b^2 = 0$, akkor $(a - \frac{1}{2}b)^2 + \frac{3}{4}b^2 = 0$, ahonnan $a = 0$ és $b = 0$, tehát $0 \cdot a' - 0 \cdot b' = 1$, ami lehetetlen.

Ha $\Delta \neq 0$, akkor

$$a' = \frac{a-b}{a^2-ab+b^2} \quad \text{és} \quad b' = \frac{b}{a^2-ab+b^2}.$$

Ekkor ha $a' \in \mathbb{Z}$ és $b' \in \mathbb{Z}$, vagyis $\frac{a-b}{a^2-ab+b^2} \in \mathbb{Z}$ és $\frac{b}{a^2-ab+b^2} \in \mathbb{Z}$, akkor

$$\frac{a}{a^2-ab+b^2} \in \mathbb{Z} \quad \text{és} \quad \frac{b}{a^2-ab+b^2} \in \mathbb{Z}.$$ (**1 pont**)

Ha $a = 0$, akkor $b = 1$ vagy $b = -1$, tehát $x = a + \varepsilon b = \varepsilon$ vagy $x = -\varepsilon$.
Ha $b = 0$, akkor $a = 1$ vagy $a = -1$, tehát $x = 1$ vagy $x = -1$.
Ha $a \neq 0$ és $b \neq 0$, akkor

$$\frac{a}{a^2-ab+b^2} = \frac{2a}{a^2+(a-b)^2+b^2} \in \mathbb{Z} \quad \text{és} \quad \frac{b}{a^2-ab+b^2} = \frac{2b}{a^2+(a-b)^2+b^2} \in \mathbb{Z}.$$

Ha $|a| > 2$, akkor

$$a^2 + (a-b)^2 + b^2 > 2|a| \implies \frac{2a}{a^2+(a-b)^2+b^2} \notin \mathbb{Z}.$$ (**1 pont**)

Tehát $|a| \leq 2$, ezért $a \in \{0, -1, +1, 2, -2\}$. Hasonlóan $b \in \{0, -1, +1, 2, -2\}$. Behelyettesítve azt kapjuk, hogy

$$\begin{cases} a = 1, \\ b = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} a = 0, \\ b = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} a = 0, \\ b = -1, \end{cases} \quad \begin{cases} a = -1, \\ b = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} a = 1, \\ b = 1, \end{cases} \quad \text{vagy} \quad \begin{cases} a = -1, \\ b = -1 \end{cases}$$

értékek felelnek meg. Tehát a $\mathbb{Z}[\varepsilon]$ invertálható elemei a következők:

$$1, \quad -1, \quad \varepsilon, \quad -\varepsilon, \quad 1+\varepsilon, \quad -1-\varepsilon.$$

Valóban

$$1^{-1} = 1, \quad (-1)^{-1} = -1, \quad \varepsilon^{-1} = -1-\varepsilon, \quad (-\varepsilon)^{-1} = 1+\varepsilon, \quad (1+\varepsilon)^{-1} = -\varepsilon, \quad (-1-\varepsilon)^{-1} = \varepsilon,$$

mely elemek a $\mathbb{Z}[\varepsilon]$ halmazban vannak. (**1 pont**)

c) Ha $x \in M$, akkor $x = a_1^2 - a_1b_1 + b_1^2 = (a_1 + \varepsilon b_1)(a_1 + \overline{\varepsilon} b_1)$, ahol $a_1, b_1 \in \mathbb{Z}$.
Ha $y \in M$, akkor $y = a_2^2 - a_2b_2 + b_2^2 = (a_2 + \varepsilon b_2)(a_2 + \overline{\varepsilon} b_2)$, ahol $a_2, b_2 \in \mathbb{Z}$.
Innen azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} xy &= (a_1 + \varepsilon b_1)(a_1 + \overline{\varepsilon} b_1)(a_2 + \varepsilon b_2)(a_2 + \overline{\varepsilon} b_2) \\ &= (a_1 + \varepsilon b_1)(a_2 + \varepsilon b_2)\overline{(a_1 + \varepsilon b_1)(a_2 + \varepsilon b_2)} \\ &= (m + \varepsilon n)(m + \overline{\varepsilon} n) \\ &= m^2 - mn + n^2 \in M, \end{aligned}$$ (**1 pont**)

ahol $m = a_1a_2 - b_1b_2 \in \mathbb{Z}$, $n = a_1b_1 + a_2b_1 - b_1b_2 \in \mathbb{Z}$. (**1 pont**)

■

3. feladat (10 pont). Tekintsük a Gauss-féle egész számok $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ halmazát.

a) Igazold, hogy bárhogyan is választunk ki öt elemet a halmazból, van köztük két olyan z_1 és z_2 elem, amelyre $\dfrac{z_1 + z_2}{2} \in \mathbb{Z}[i]$.

b) Igazold, hogy bárhogyan is választunk ki 13 elemet a halmazból, van köztük három olyan z_1, z_2 és z_3 elem, amelyre $\dfrac{z_1 + z_2 + z_3}{3} \in \mathbb{Z}[i]$.

***

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

a) Vizsgáljuk az öt elem valós és képzetes részének a paritását. Az öt elem közt biztosan van három olyan, amelyek valós részének ugyanaz a paritása. **(2 pont)**
Ezen három elem közül két elem képzetes részének a paritása megegyezik. Erre a két számra igaz, hogy

$$\frac{z_1 + z_2}{2} \in \mathbb{Z}[i].$$ **(2 pont)**

b) A $\mathbb{Z}[i]$ halmaz minden eleméhez rendeljük hozzá a

$$(0,0), \quad (0,1), \quad (0,2), \quad (1,0), \quad (1,1), \quad (1,2), \quad (2,0), \quad (2,1), \quad (2,2)$$

számpárok egyikét aszerint, hogy a valós és a képzetes résznek mennyi a 3-mal való osztási maradéka. Például a $z = 13 - 2i$-nek az $(1,1)$ számpár felel meg. Rendezzük ezeket a számpárokat a következő táblázatba:

(0,0)	(0,1)	(0,2)
(1,0)	(1,1)	(1,2)
(2,0)	(2,1)	(2,2)

(2 pont)

Tegyük fel, hogy a 13 elemet elhelyeztük a nekik megfelelő cellákba. Mivel három sor van, a skatulya elv alapján az egyik sorba legalább 5 elem kerül. Két esetet különböztetünk meg.

I. eset. Ha az adott sorban, amelyben az öt elem található, van olyan cella, amelyikbe három elem kerül, akkor ezeknek az elemeknek az átlaga teljesíti a megadott feltételt.

II. eset. Ha az adott sorban, amelyben az öt elem található, mindegyik cellában legfeljebb két elem van, akkor az adott sor mindegyik cellájában van elem, és ezek átlaga fogja teljesíteni a megadott feltételt. **(3 pont)**

Megjegyzés. Igazolható, hogy a b) alpont állítása teljesül már 9 tetszőlegesen választott elem esetén is.

■

4. feladat (10 pont). Adott az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = e^{\sin^2 x}$$

függvény. Legyen $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ az f egy olyan primitívje, melyre $F(0) = 0$.

a) Igazold, hogy F bijektív függvény!

b) Számítsd ki a

$$\lim_{n\to\infty} \left[F\left(\frac{1}{1}\right) + F\left(\frac{1}{2}\right) + F\left(\frac{1}{3}\right) + ... + F\left(\frac{1}{n}\right) \right] \text{határértéket!}$$

***

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

a) Mivel $F^{'}(x) = f(x) = e^{\sin^2 x} > 0$, minden $x \in \mathbb{R}$ esetén, ezért az F függvény szigorúan növekvő, tehát az F függvény injektív. **(1 pont)**
Alkalmazzuk Lagrange tételét az F függvényre az $[x, 0]$, illetve a $[0, x]$ intervallumon. Bármely $x \neq 0$ esetén létezik c_x a 0 és az x között úgy, hogy

$$F^{'}(c_x) = \frac{F(x) - F(0)}{x - 0}.$$

Mivel $F^{'}(c_x) = f(c_x)$ és $F(0) = 0$, ezért $F(x) = x \cdot f(c_x)$. **(2 pont)**
Ugyanakkor $0 \leq \sin^2 c_x \leq 1$, tehát $1 \leq e^{\sin^2 c_x} \leq e$, ezért

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = \lim_{x\to-\infty} xe^{\sin^2 c_x} = -\infty,$$
$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \lim_{x\to\infty} xe^{\sin^2 c_x} = +\infty.$$

Az F függvény folytonos, ezért a fentiek alapján következik, hogy az F szürjektív. **(1 pont)**
Tehát az F függvény injektív és szürjektív, így az F függvény bijektív. **(1 pont)**

b) Mivel bármely $x > 0$ esetén létezik $c_x \in (0, x)$ úgy, hogy $F(x) = x \cdot f(c_x)$, ezért bármely $k \in \mathbb{N}^*$ esetén létezik $c_k \in (0, \frac{1}{k})$ úgy, hogy $F\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{k} \cdot f(c_k)$, tehát

$$F\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{k} e^{\sin^2 c_k}$$ **(1 pont)**

és $0 < \sin^2 c_k < \sin^2 \frac{1}{k}$, tehát $e^0 < e^{\sin^2 c_k} < e^{\sin^2 \frac{1}{k}}$. A kapott egyenlőtlenséget beszorozva $\frac{1}{k}$-val felírhatjuk, hogy

$$\frac{1}{k} < \frac{1}{k} e^{\sin^2 c_k} < \frac{1}{k} e^{\sin^2 \frac{1}{k}}.$$

(1 pont)

Ha k helyére rendre behelyettesítjük 1-től n-ig a természetes számokat, és összeadjuk az egyenlőtlenségeket, azt kapjuk, hogy:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} < F\left(\frac{1}{1}\right) + F\left(\frac{1}{2}\right) + F\left(\frac{1}{3}\right) + ... + F\left(\frac{1}{n}\right)$$ **(1 pont)**

Mivel $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = +\infty$, ezért

$$\lim_{n\to\infty}\left[F\left(\frac{1}{1}\right)+F\left(\frac{1}{2}\right)+F\left(\frac{1}{3}\right)+...+F\left(\frac{1}{n}\right)\right]=+\infty. \qquad (\textbf{1 pont})$$

■

Országos döntő - I. forduló

5. osztály

1. feladat (10 pont). Adott a következő számpiramis:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 3 & 1 & 3 & & \\ & 5 & 3 & 1 & 3 & 5 & \\ 7 & 5 & 3 & 1 & 3 & 5 & 7 \\ \multicolumn{7}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \end{array}$$

a) Számítsd ki a 10-dik sorban szereplő számok összegét!

b) Melyik teljes négyzet kétszerese 1-gyel nagyobb, mint a 100-dik sorban szereplő számok összege?

Orbán Ilona-Kármen, Berettyószéplak
Durugy Erika, Torda

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

a)

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccc}
 & & & & & & & & & 1 & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & 3 & 1 & 3 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & 5 & 3 & 1 & 3 & 5 & & & & & & & \\
 & & & & & & 7 & 5 & 3 & 1 & 3 & 5 & 7 & & & & & & \\
 & & & & & 9 & 7 & 5 & 3 & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & & & & & \\
 & & & & 11 & 9 & 7 & 5 & 3 & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & & & & \\
 & & & 13 & 11 & 9 & 7 & 5 & 3 & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & 13 & & & \\
 & & 15 & 13 & 11 & 9 & 7 & 5 & 3 & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & 13 & 15 & & \\
 & 17 & 15 & 13 & 11 & 9 & 7 & 5 & 3 & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & 13 & 15 & 17 & \\
19 & 17 & 15 & 13 & 11 & 9 & 7 & 5 & 3 & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & 13 & 15 & 17 & 19
\end{array}$$

A 10-dik sor első eleme 19, **(1 pont)**
tehát a 10-dik sorban található számok összege

$$19+17+15+13+11+9+7+5+3+1+3+5+7+9+11+13+15+17+19 = \quad \textbf{(1 pont)}$$
$$= 19+17+15+13+11+9+7+5+3+1$$
$$1+3+5+7+9+11+13+15+17+19$$

$$\begin{aligned} &-1 \\ &= 20+20+20+20+20+20+20+20+20+20-1 \\ &= 20 \cdot 10 - 1 = 199. \end{aligned}$$ (**1 pont**)

b) Észrevesszük, hogy az n-edik sorból az első szám $2 \cdot n - 1$ alakú. Ezért a 100-dik sor első eleme

$$2 \cdot 100 - 1 = 199.$$ (**1 pont**)

Az 1-től 200-ig 200 darab természetes szám van, amelyek fele páratlan. Ezért 1-től 199-ig 100 darab páratlan szám van. (**1 pont**)
Kiszámítjuk 1-től 199-ig a páratlan számok összegét:

$$\begin{aligned} \text{Ö} &= 1+3+5+\ldots+195+197+199, \\ \text{Ö} &= 199+197+195+\ldots+5+3+1. \end{aligned}$$

Észrevesszük, hogy a fenti két sor egymás alatti tagjait összeadva, mindig 200-at kapunk, összesen 100 darabot, tehát

$$\begin{aligned} 2 \cdot \text{Ö} &= \underbrace{200+200+200+\ldots+200+200+200}_{100 \text{ darab.}}, \\ 2 \cdot \text{Ö} &= 100 \cdot 200. \end{aligned}$$ (**2 pont**)

Tehát a 100-dik sorban szereplő számok összege:

$$\begin{aligned} 199+197+\ldots+3+1+3+\ldots+197+199 &= 2 \cdot \text{Ö} - 1, \\ 199+197+\ldots+3+1+3+\ldots+197+199 &= 100 \cdot 200 - 1. \end{aligned}$$ (**1 pont**)

A 100-dik sorban szereplő számok összegénél 1-gyel nagyobb természetes szám:

$$(100 \cdot 200 - 1) + 1 = 2 \cdot 100^2.$$

Tehát a keresett teljes négyzet: $10000 = 100^2$. (**1 pont**)

■

2. feladat (10 pont). Határozd meg azt a legkisebb $\overline{abcd}$ alakú természetes számot, amelyre $\overline{abcd}$ teljes négyzet és $(\overline{cb} + \overline{ad}) : (\overline{cd} - \overline{ab}) = 9$.

Simon József, Csíkszereda

Első megoldás. Hivatalból (**1 pont**)
A következő egyenértékű átalakításokat végezzük:

$$(\overline{cb} + \overline{ad}) : (\overline{cd} - \overline{ab}) = 9 \iff (\overline{cb} + \overline{ad}) = 9 \cdot (\overline{cd} - \overline{ab})$$ (**1 pont**)

$$\iff 10c + b + 10a + d = 9 \cdot (10c + d - 10a - b)$$

$$\iff 10c + b + 10a + d = 90c + 9d - 90a - 9b$$ (**1 pont**)

$$\begin{aligned} &\Longleftrightarrow 100a + 10b = 80c + 8d \\ &\Longleftrightarrow 10 \cdot (10a + b) = 8 \cdot (10c + d) \\ &\Longleftrightarrow 5 \cdot \overline{ab} = 4 \cdot \overline{cd}. \end{aligned}$$ (**2 pont**)

Az $\overline{abcd}$ számot kifejezzük a $\overline{cd}$ függvényében:

$$\overline{abcd} = 100 \cdot \overline{ab} + \overline{cd} = 20 \cdot 5 \cdot \overline{ab} + \overline{cd} = 20 \cdot 4 \cdot \overline{cd} + \overline{cd} = 81 \cdot \overline{cd}.$$ (**2 pont**)

Mivel $\overline{abcd}$ teljes négyzet és 81 is az, ezért $\overline{cd}$ is teljes négyzet kell legyen.
Így a $\overline{cd}$ lehetséges értékei:

$$16, \quad 25, \quad 36, \quad 49, \quad 64 \quad \text{vagy} \quad 81.$$ (**1 pont**)

Ha $\overline{cd} = 16$, akkor $\overline{abcd} = 81 \cdot 16 = 1296$. Mivel $5 \cdot 12 \neq 4 \cdot 96$, ezért 1296 nem felel meg. (**1 pont**)
Ha $\overline{cd} = 25$, akkor $\overline{abcd} = 81 \cdot 25 = 2025$ és $5 \cdot 20 = 4 \cdot 25$, ezért $\overline{abcd} = 2025$. (**1 pont**)

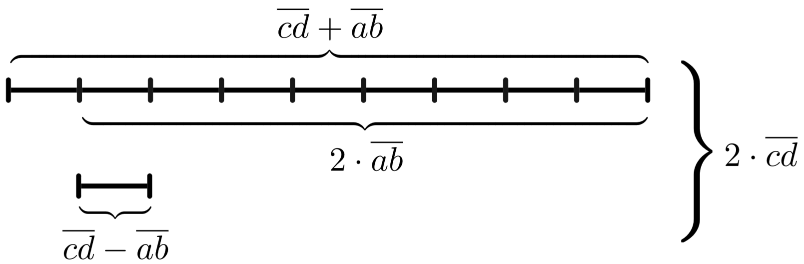
■

Megjegyzés. Mivel $5 \cdot \overline{ab} = 4 \cdot \overline{cd}$, ezért az is következik, hogy a $\overline{cd}$ olyan teljes négyzet, amely osztható 5-tel, tehát csak a 25 lehet. Így nem szükséges az esetek tárgyalása a megoldáshoz.

Második megoldás. Hivatalból (**1 pont**)
A következő egyenértékű átalakításokat végezzük:

$$\begin{aligned} (\overline{cb} + \overline{ad}) : (\overline{cd} - \overline{ab}) = 9 &\Longleftrightarrow (\overline{cb} + \overline{ad}) = 9 \cdot (\overline{cd} - \overline{ab}) \\ &\Longleftrightarrow (\overline{cd} + \overline{ab}) = 9 \cdot (\overline{cd} - \overline{ab}). \end{aligned}$$ (**1 pont**) (**1 pont**)

Ábrázoljuk a kapott egyenlőséget:



(**2 pont**)
Így $2 \cdot \overline{ab} = 8e$ (ahol $e = \overline{cd} - \overline{ab}$ az egységet jelöli) és $2 \cdot \overline{cd} = 10e$, tehát $\overline{ab} = 4e$ és $\overline{cd} = 5e$.
(**1 pont**)
Az $\overline{abcd}$ számot kifejezzük az e egység függvényben:

$$\overline{abcd} = 100 \cdot \overline{ab} + \overline{cd} = 400 \cdot e + 5 \cdot e = 405 \cdot e.$$ (**1 pont**)

Mivel $\overline{abcd}$ teljes négyzet, ezért

$$405 \cdot e = 81 \cdot 5 \cdot e = k^2.$$ (**1 pont**)

A feltétel akkor teljesül legelőször, ha $e = 5$. (**1 pont**)
Tehát $\overline{ab} = 4 \cdot 5 = 20$ és $\overline{cd} = 5 \cdot 5 = 25$, amelyek teljesítik a

$$(\overline{cd} + \overline{ad}) : (\overline{cd} - \overline{ab}) = (20 + 25) : (25 - 20) = 9$$

feltételt. Tehát a legkisebb négyjegyű természetes szám, ami teljesíti a feltételeket

$$\overline{abcd} = 2025 = 45^2.$$ (**1 pont**)

■

3. feladat (10 pont). Az alábbi összeadásban a különböző betűk különböző számjegyeket és az azonos betűk azonos számjegyeket helyettesítenek. Határozd meg az összeg azon legnagyobb értékét, amely osztható a számjegyei összegével!

$$\begin{array}{r} \text{LÁM}+ \\ \text{APA} \\ \text{FEJ} \\ \hline \text{1LEA} \end{array}$$

András Szilárd, Csíkdelne

Megoldás. Hivatalból (**1 pont**)

Az összeadás csak akkor lehetséges, ha

$$\begin{aligned} M + J &= 10, \\ Á + P + 1 = 10 &\implies Á + P = 9, \\ A + F + 1 = 10 &\implies A + F = 9. \end{aligned}$$ (**2 pont**)

Az $\overline{1LEA}$ szám, akkor a legnagyobb, ha $L = 9$. (**1 pont**)
A 10 és 9 lehetséges felbontásai a fenti feltételnek megfelelően:

$$10 = 8 + 2 = 7 + 3 = 6 + 4, \quad \text{illetve} \quad 9 = 8 + 1 = 7 + 2 = 6 + 3 = 5 + 4.$$ (**1 pont**)

I. eset. Az $L = 9$ és $\overline{1LEA}$ a lehető legnagyobb szám, ezért azt vizsgáljuk, először, hogy lehet-e $E = 8$.
Mivel különböző betűknek különböző számjegyek felelnek meg, a következő lehetőségek maradnak.

a) Ha $M + J = 7 + 3$, akkor $A + F = 5 + 4$, így az $Á + P$-nek nem marad megfelelő felbontás.
b) Ha $M + J = 6 + 4$, akkor $A + F = 7 + 2$, így az $Á + P$-nek nem marad megfelelő felbontás.

Tehát $E \neq 8$. (**2 pont**)

II. eset. Vizsgáljuk most az $L = 9$ és $E = 7$ lehetőséget.

a) Ha $M + J = 6 + 4$, akkor $A + F = 8 + 1$, így az $Á + P$-nek nem marad megfelelő felbontás.

b) Ha $M + J = 8 + 2$, akkor

$$A + F = 6 + 3 \text{ és } Á + P = 5 + 4$$

vagy

$$A + F = 5 + 4 \text{ és } Á + P = 6 + 3.$$

Tehát a lehetséges eredmények:

$$1976, \quad 1975, \quad 1974 \quad \text{és} \quad 1973.$$ (**2 pont**)

Nem vettük még figyelembe azt a feltételt, hogy az $\overline{1LEA}$ osztható kell legyen a számjegyeinek az összegével, vagyis az $1 + L + E + A$ számmal. Mivel

$$23 \nmid 1976, \quad 22 \nmid 1975 \quad \text{és} \quad 21 \mid 1974,$$

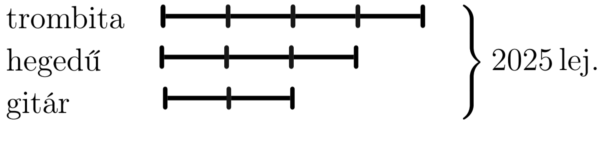
ezért a legnagyobb összeg $\overline{1LEA} = 1974$ lehet, ha az $Á, M, P, F, J$ számjegyeket is sikerült megadnunk. Egy ilyen lehetőség például $Á = 6$, $M = 8$, $P = 3$, $F = 4$ és $J = 2$.
(**1 pont**)

■

4. feladat (10 pont). Három testvér, Péter, Zsolt és Erzsébet, összesen 2025 lejt kapott a nagymamájuktól, hogy hangszereket vásároljanak. Péter egy gitárt, Zsolt egy hegedűt, Erzsébet pedig egy trombitát szeretne. Tudjuk, hogy Erzsébet négyszer annyi pénzt kapott, mint Zsolt. A gitár ára a trombita árának felével, illetve a hegedű árának 2/3-ával egyenlő. Péter rájön, hogy a 2025 lej teljes felhasználásával mindhárman meg tudnák venni a kiválasztott hangszert, ha ő a kapott pénze 1/6-át odaadná a testvéreinek. Hány lejbe kerülnek az egyes hangszerek, illetve hány lejt kapott Péter, Zsolt és Erzsébet külön-külön a nagymamától?

Szász Szilárd, Marosvásárhely
Durugy Erika, Torda

Megoldás. Hivatalból (**1 pont**)
Először megállapítjuk a hangszerek árát, ábrázolás módszerét alkalmazzuk. (Ha a gitár ára 2 egység, akkor a hegedű ára 3 egység és a trombita ára 4 egység.)



(**2 pont**)

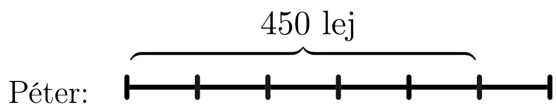
A hangszerek ára 9 egység, ami pontosan 2025 lej, ahonnan egy egység ára

$$2025 : 9 = 225 \text{ lej}.$$

Tehát a gitár ára $2 \cdot 225\,\text{lej} = 450\,\text{lej}$, a hegedű ára $3 \cdot 225\,\text{lej} = 675$ lej, valamint a trombita ára $4 \cdot 225\,\text{lej} = 900\,\text{lej}$. (**1 pont**)

Péternek 450 lejre van szüksége a gitár, Zsoltnak 675 lejre van szüksége a hegedű, illetve Erzsébetnek 900 lejre van szüksége a trombita megvásárlására. A továbbiakban megállapítjuk az unokák által kapott összegeket.

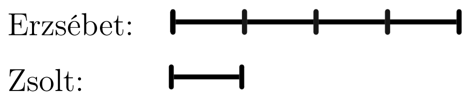
Péter a kapott pénzösszeg 5/6-át költi el gitárra:



Az ábra alapján egy egység $450 : 5 = 90\,\text{lej}$, így Péter $6 \cdot 90 = 540\,\text{lejt}$ kapott. (**2 pont**)

Tehát Erzsébetnek és Zsoltnak együtt $2025 - 540 = 1485\,\text{lejt}$ adott nagymama. (**1 pont**)

Mivel Erzsébet 4-szeresét kapta a Zsolt által kapott összegnek:



Ezért egy egység

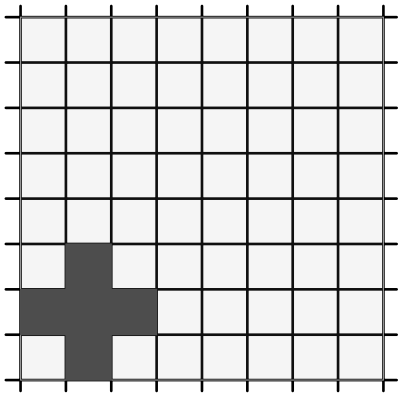
$$1485 : 5 = 297,$$ (**2 pont**)

tehát Zsolt 297 lejt, Erzsébet 1188 lejt kapott. (**1 pont**)

■

6. osztály

1. feladat (10 pont). Az alábbi 8×8-as táblán elhelyeztünk egy 5 egységnégyzetből álló keresztet. Legfeljebb hány ilyen kereszt helyezhető el átfedés nélkül a 8×8-as táblán?

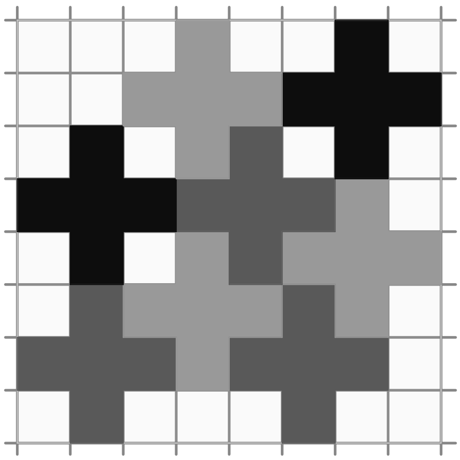


András Szilárd, Csíkdelne

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

A diák rajzzal indokolja a megoldást: nyolc kereszt helyezhető el a feltételeknek megfelelően.

(5 pont)



Igazoljuk, hogy 8-nál több kereszttel nem lehetséges az elhelyezés.

Ahhoz, hogy a legalsó sorban lefedjünk egy négyzetet, a felette lévő sorban kell legyen 3 egymás melletti lefedett négyzetünk. Mivel $8 < 3 \cdot 3$, ezért egyik szélén lévő sorban és oszlopban sem lehet 2-nél több négyzetet lefedni. **(1 pont)**

A sarkokat nem tudjuk lefedni. Emiatt a 28 kicsi négyzetből, ami a négyzet oldalaira illeszkedik legalább 20 lefedetlenül kell maradjon. **(1 pont)**

A további $64 - 20 = 44$ egységnégyzetből még 4-nek kell lefedetlenül maradnia, mivel egy kereszt 5 egységnégyzetet fed, tehát a lefedett egységnégyzetek száma 5 többszöröse. **(1 pont)**

Ez alapján $40 : 5 = 8$-nál több keresztet nem lehet elhelyezni a táblán. **(1 pont)**

■

2. feladat (10 pont). Határozd meg az összes olyan $\overline{abcd}$ alakú természetes számot, amelyre egyidőben teljesülnek a következő feltételek:

a) $\dfrac{\overline{ab}}{4} = \dfrac{\overline{cd}}{5}$;

b) $\overline{ad} + c = 27$.

Simon József, Csíkszereda

Első megoldás. Hivatalból (**1 pont**)
Az a) feltételből következik, hogy $5 \cdot \overline{ab} = 4 \cdot \overline{cd}$. (**1 pont**)
Mivel $5 \mid 4 \cdot \overline{cd}$ és $5 \nmid 4$, ezért $5 \mid \overline{cd}$. (**1 pont**)
Ebből következik, hogy $d = 0$ vagy $d = 5$. (**1 pont**)
Mivel a b) feltételnek is kell teljesülnie, ezért $\overline{ad} \in \{20, 25\}$. (**1 pont**)

I. eset. Ha $\overline{ad} = 20$, akkor $c = 7$. (**1 pont**)
Visszahelyettesítve az a) feltételbe kapjuk, hogy $\frac{\overline{2b}}{4} = \frac{70}{5} = 14$. Ekkor $\overline{2b} = 56$, ami ellentmondás. (**1 pont**)

II. eset. Ha $\overline{ad} = 25$, akkor $c = 2$. (**1 pont**)
Visszahelyettesítve az a) feltételbe kapjuk, hogy $\frac{\overline{2b}}{4} = \frac{25}{5} = 5$. Ekkor $\overline{2b} = 20$, tehát $b = 0$. (**1 pont**)

A keresett szám tehát $\overline{abcd} = 2025$. (**1 pont**)

■

Második megoldás. Hivatalból (**1 pont**)
Az aránypárok származtatásából, illetve az utolsó számjegyek felcserélésével kapjuk, hogy

$$\frac{\overline{ab}}{4} = \frac{\overline{cd}}{5} = \frac{\overline{ab} + \overline{cd}}{4 + 5} = \frac{\overline{ad} + \overline{cb}}{9}.$$ (**1 pont**)

A feltevés alapján $\overline{ad} = 27 - c$, amit behelyettesítve az előbbi törtbe, azt kapjuk, hogy

$$\frac{\overline{ad} + \overline{cb}}{9} = \frac{27 - c + 10c + b}{9} = \frac{9c + 27 + b}{9} = c + 3 + \frac{b}{9}.$$

Tehát

$$\frac{\overline{ab}}{4} = \frac{\overline{cd}}{5} = c + 3 + \frac{b}{9}.$$ (**1 pont**)

Mivel $\frac{\overline{ab}}{4}$ véges tizedes tört, ezért $\frac{b}{9}$ is véges tizedes tört, tehát $b = 9$ vagy $b = 0$. (**2 pont**)

I. eset. Ha $b = 9$, akkor $\frac{\overline{a9}}{4} = \frac{\overline{cd}}{5}$, ahonnan $4 \cdot \overline{cd} = 5 \cdot \overline{a9}$.

Mivel a $4 \cdot \overline{cd}$ páros szám, az $5 \cdot \overline{a9}$ pedig páratlan, ezért az egyenlőség nem áll fenn.

Tehát $b \neq 9$. (**1 pont**)

II. eset. Ha $b = 0$, akkor $\frac{\overline{a0}}{4} = c + 3$, azaz $10a = 4c + 12$. **(1 pont)**
Az $\overline{ad} + c = 27$ feltételből adódik, hogy $10a + d + c = 27$. A fenti egyenlőség alapján

$$4c + 12 + d + c = 27 \iff 5c + d = 15.$$

Innen kapjuk, hogy d osztható 5-tel, tehát $d \in \{0, 5\}$. **(1 pont)**
Ha $d = 0$, akkor $c = 3$, így a $10a = 4c + 12$ egyenlőség alapján $10a + 3 = 27$, ami ellentmondás. **(1 pont)**
Ha $d = 5$, akkor $c = 2$, így a $10a = 4c + 12$ összefüggésből kapjuk, hogy $a = 2$. Tehát a keresett szám $\overline{abcd} = 2025$. **(1 pont)**

■

Harmadik megoldás. Hivatalból **(1 pont)**
Az $\frac{\overline{ab}}{4} = \frac{\overline{cd}}{5}$ feltételből kapjuk, hogy $5 \cdot \overline{ab} = 4 \cdot \overline{cd}$, amelyben $5 \cdot \overline{ab}$ és $4 \cdot \overline{cd}$ is a 20 többszöröse. **(2 pont)**
Ha $5\overline{ab} = 4\overline{cd} = 20$, akkor $\overline{ab} = 4$, ami ellentmond annak, hogy $\overline{ab}$ kétjegyű szám.
Ha $5\overline{ab} = 4\overline{cd} = 40$, akkor $\overline{ab} = 8$, ami ellentmond annak, hogy $\overline{ab}$ kétjegyű szám. **(1 pont)**
Ha $5\overline{ab} = 4\overline{cd} = 60$, akkor $\overline{ab} = 12$ és $\overline{cd} = 15$. Ekkor a második feltétel nem teljesül, mert $15+1 \neq 27$. **(1 pont)**
Ha $5\overline{ab} = 4\overline{cd} = 80$, akkor $\overline{ab} = 16$ és $\overline{cd} = 20$. Ekkor a második feltétel nem teljesül, mert $10+2 \neq 27$. **(1 pont)**
Ha $5\overline{ab} = 4\overline{cd} = 100$, akkor $\overline{ab} = 20$ és $\overline{cd} = 25$. Ekkor a második feltétel is teljesül, mert $25 + 2 = 27$. **(1 pont)**
Ha $5\overline{ab} = 4\overline{cd} = 120$, akkor $\overline{ab} = 24$ és $\overline{cd} = 30$. Ekkor a második feltétel nem teljesül, mert $20 + 3 \neq 27$. **(1 pont)**
Ha $5\overline{ab} = 4\overline{cd} = 140$, akkor $\overline{ab} = 28$ és $\overline{cd} = 35$. Ekkor a második feltétel nem teljesül, mert $25 + 3 \neq 27$. **(1 pont)**
Ha $5\overline{ab} = 4\overline{cd} \geq 160$, akkor $\overline{ab} \geq 32$, innen $a \geq 3$, ami ellentmond a második feltételnek.
A fenti esetek tárgyalásából egy megoldást kaptunk: $\overline{abcd} = 2025$. **(1 pont)**

■

3. feladat (10 pont). Adott az $a = 3n + 2$, $b = 2n + 1$ és $c = n + 1$ szám, ahol n egy természetes szám.

a) Igazold, hogy az a és b relatív prímek!

b) Bizonyítsd be, hogy az $[a, b] + [a, c]$ szám négyzetszám, bármely n természetes szám esetén, ahol $[a, b]$ az a és b számok legkisebb közös többszörösét jelöli!

Faluvégi Melánia, Zilah

Első megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

a) Legyen d az a és b számok egy közös osztója. Ekkor $d \mid (3n+2)$ és $d \mid (2n+1)$. (**1 pont**)
A d osztja ezeknek a számoknak bármilyen többszörösét is. Így $d \mid 2 \cdot (3n+2)$ és $d \mid 3 \cdot (2n+1)$. (**1 pont**)
A d szám osztja ezek különbségét is, ezért $d \mid [(6n+4)-(6n+3)]$. (**1 pont**)
Innen $d \mid 1$, amiből $d=1$, vagyis a és b relatív prímek. (**1 pont**)

b) Mivel a és b relatív prímek, ezért $[a,b] = a \cdot b$. (**1 pont**)
Igazolni fogjuk, hogy az a és c is relatív prímek. Legyen az a és c számok közös osztója d, ekkor $d \mid (3n+2)$ és $d \mid (n+1)$ és mivel $d \mid (3n+2)$ és $d \mid 3(n+1)$ következik, hogy $d \mid [(3n+3)-(3n+2)]$, azaz $d \mid 1$, amiből következik, hogy $d=1$. Ezért $(a,c)=1$. (**1 pont**)
Mivel a és c relatív prímek, ezért $[a,c] = a \cdot c$. (**1 pont**)
Használva a fenti részeredményeket

$$\begin{aligned}
[a,b]+[a,c] &= ab+ac \\
&= a \cdot (b+c) && \textbf{(1 pont)} \\
&= (3n+2)(2n+1+n+1) \\
&= (3n+2)(3n+2) \\
&= (3n+2)^2,
\end{aligned}$$

ami négyzetszám. (**1 pont**)

■

Második megoldás. Hivatalból (**1 pont**)

a) Észrevesszük, hogy $c = a - b$. (**1 pont**)
Így ha egy d szám oszt a három szám közül kettőt, akkor a harmadik számot is osztania kell. (**1 pont**)
Abból, hogy a d osztja a b-t és c-t következik, $d \mid (2n+1)$, vagyis $d \mid [(n+1)+n]$ és $d \mid (n+1)$.
A $d \mid [(n+1)+n]$ és a $d \mid (n+1)$ összefüggésekből következik $d \mid n$. (**1 pont**)
Ha $d \mid n$ és $d \mid (n+1)$, akkor $d=1$. (**1 pont**)
Ezzel azt igazoltuk, hogy a, b és c páronként relatív prímek. (**1 pont**)

b) Az a) alpont szerint $(a,b)=1, (a,c)=1$, ezért $[a,b]=a \cdot b$ és $[a,c]=a \cdot c$. (**2 pont**)
Így $[a,b]+[a,c] = ab+ac = a \cdot (b+c)$. (**1 pont**)
A $c = a-b$ egyenlőség alapján $[a,b]+[a,c] = ab+ac = a \cdot (b+c) = a \cdot a = a^2$, ami négyzetszám. (**1 pont**)

■

4. feladat (10 pont). Adottak az $\widehat{AOA_1}$, $\widehat{A_1OA_2}$, $\widehat{A_2OA_3}$, ..., $\widehat{A_{n-1}OA}$ egy pont körüli, egymással kongruens 24°-os szögek. Legyenek ugyanazon az ábrán az $\widehat{AOB_1}$, $\widehat{B_1OB_2}$, $\widehat{B_2OB_3}$, ..., $\widehat{B_{m-1}OA}$ egy pont körüli, egymással kongruens 18°-os szögek úgy, hogy az A_1 és B_1 az OA egyenes ugyanazon oldalán helyezkedjenek el.

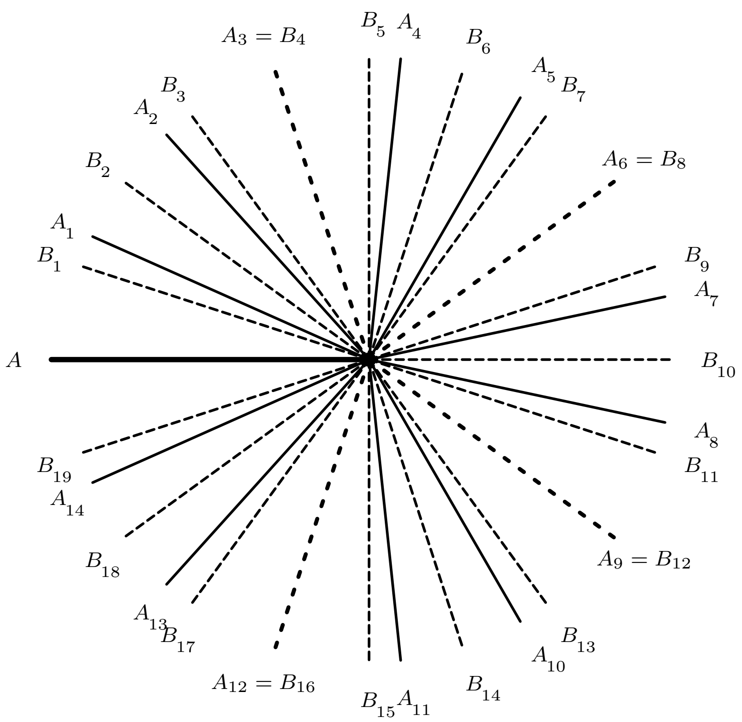
a) Összesen hányszor esnek egybe a szögek szárai az OA félegyenesen kívül?

b) Az O pont körül legtöbb hány olyan szög van, amelyek belső tartományai páronként nem metszik egymást?

c) Hány derékszög van az ábrán?

Simon József, Csíkszereda

Megoldás. Hivatalból (**1 pont**)



a) Az OA_i és OB_j szárak pontosan akkor esnek egybe, ha az AOA_i és AOB_j szögek mértéke megegyezik, vagyis $i \cdot 24° = j \cdot 18°$. Tehát ebben az esetben az AOA_i (és AOB_j) szög mértéke közös többszöröse a 24°-nak és a 18°-nak. A legkisebb közös többszörös a 72°, tehát az első közös szár $OA_3 = OB_4$ ($3 = \frac{72}{24}$ és $4 = \frac{72}{18}$), amelyre $\widehat{AOA_3} = \widehat{AOB_4} = 72°$. (**1 pont**)
Mivel $360 : 72 = 5$, tehát a szögek közös szárainak száma 5 az OA félegyenessel együtt. (**1 pont**)
Az OA félegyenesen kívül a szögek szárai négyszer esnek egybe. (**1 pont**)

b) Egyrészt maximális szögszám esetén a szögek összege 360° kell legyen, különben növelni tudjuk a szögek számát. Másrészt akkor lesz a szögek száma a legnagyobb, ha a választott szögek egyike sem bontható fel OA_i vagy OB_j félegyenesek segítségével kisebb szögekre. Tehát minden OA_i és OB_j félegyenes valamelyik szögnek szára kell legyen. (**1 pont**)
A 24°-os szögek száma $360 : 24 = 15$, így az OA_i félegyenesek száma az OA félegyenessel együtt

15. A 18°-os szögek száma pedig $360 : 18 = 20$, így az OB_j félegyenesek száma az OA félegyenessel együtt 20. **(1 pont)**
Mivel 5 közös szár is van az OA félegyenest is beleszámítva, a különböző félegyenesek száma

$$15 + 20 - 5 = 30.$$

Ez a 30 félegyenes 30 darab szöget határoz meg az O pont körül, amelyek belső tartományai páronként nem metszik egymást. Tehát a szögek maximális száma 30. **(1 pont)**

c) Ha bevezetjük az $A = A_0 = B_0$ jelöléseket, akkor elvben három fajta derékszög állhat elő: $\widehat{A_iOA_j}$, $\widehat{B_iOB_j}$ és $\widehat{A_iOB_j}$ alakúak.
Az $\widehat{A_iOA_j}$ szögek mértéke a 24° többszöröse, de mivel $\frac{90}{24} = \frac{15}{4}$ nem egész szám, így ez a fajta szög nem lehet derékszög. **(1 pont)**
Az $\widehat{B_iOB_j}$ szögek mértéke a 18° többszöröse, de mivel $\frac{90}{18} = 5$. Így ezek a fajta szögek lehetnek derékszögek és 5 darab $\widehat{B_iOB_{i+1}}$ szögből tevődnek össze:

$$\widehat{AOB_5} = \widehat{B_0OB_5} = 90°, \quad \widehat{B_1OB_6} = 90°, \quad \widehat{B_2OB_7} = 90°, \quad \ldots,$$
$$\widehat{B_3OB_8} = 90°, \quad \ldots, \quad \widehat{B_{15}OA} = \widehat{B_{15}OB_0} = 90°, \quad \widehat{B_{16}OB_1} = 90°,$$
$$\widehat{B_{17}OB_2} = 90°, \quad \widehat{B_{18}OB_3} = 90°, \quad \widehat{B_{19}OB_4} = 90°.$$
(1 pont)

Az $\widehat{A_iOB_j}$ alakú derékszögek esetén az OA_i félegyenes egybeesik valamelyik OB_k félegyenessel, tehát az $\widehat{A_iOB_j}$ alakú derékszögek tulajdonképpen $\widehat{B_kOB_j}$ alakú derékszögek, amelyeket már megszámoltunk.
Tehát összesen 20 darab derékszög van (pontosan annyi mint az OB_i félegyenesek száma az OA félegyenessel együtt). **(1 pont)**

■

7. osztály

1. feladat (10 pont). a) Hasonlítsd össze az m és n számokat, ha

$$m=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{\sqrt{2\cdot 1}}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3\cdot 2}}+\cdots+\frac{\sqrt{2025}-\sqrt{2024}}{\sqrt{2025\cdot 2024}} \quad \text{és}$$

$$n=5^{2025}-4\cdot 5^{2024}-4\cdot 5^{2023}-\cdots-4\cdot 5^{2}-4\cdot 5-4.$$

b) Adottak az x, y, z szigorúan pozitív racionális számok úgy, hogy

$$\frac{5y+4z-3x}{7x}=\frac{5z+4x-3y}{7y}=\frac{5x+4y-3z}{7z}.$$

Igazold, hogy ha $a=\dfrac{(5y+4z)\cdot(5z+4x)\cdot(5x+4y)}{2025xyz}$, akkor $\sqrt{a}$ racionális szám!

Oláh-Ilkei Árpád, Sepsiszentrgyörgy
Fodor Erika, Beszterce

Megoldás. Hivatalból (**1 pont**)

a) Tekintsük az m számot. Az összegben szereplő tagokat a következőképpen alakíthatjuk:

$$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{\sqrt{2\cdot 1}}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{1}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{1}}-\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{1}}=\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3\cdot 2}}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{4\cdot 3}}=\frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{4}\cdot\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{4}\cdot\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}\cdot\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}},$$

$$\ldots$$

$$\frac{\sqrt{2025}-\sqrt{2024}}{\sqrt{2025\cdot 2024}}=\frac{\sqrt{2025}-\sqrt{2024}}{\sqrt{2025}\cdot\sqrt{2024}}=\frac{\sqrt{2025}}{\sqrt{2025}\cdot\sqrt{2024}}-\frac{\sqrt{2024}}{\sqrt{2025}\cdot\sqrt{2024}}=\frac{1}{\sqrt{2024}}-\frac{1}{\sqrt{2025}}.$$

(**1 pont**)

Ahonnan

$$\begin{aligned} m&=\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2024}}-\frac{1}{\sqrt{2025}}\\ &=\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2025}}=1-\frac{1}{\sqrt{2025}}\\ &=1-\frac{1}{45}=\frac{44}{45}. \end{aligned}$$

(**1 pont**)

Tekintsük az n számot. Mindenik 4-es felírható úgy, mint $5-1$, így az n szám a következőképpen alakul:

$$n=5^{2025}-4\cdot 5^{2024}-4\cdot 5^{2023}-\cdots-4\cdot 5^{2}-4\cdot 5-4$$

$$\begin{aligned}
&= 5^{2025} - (5-1)\cdot 5^{2024} - (5-1)\cdot 5^{2023} - \cdots - (5-1)\cdot 5^2 - (5-1)\cdot 5 - (5-1) && \textbf{(1 pont)}\\
&= 5^{2025} - 5\cdot 5^{2024} + 5^{2024} - 5\cdot 5^{2023} + 5^{2023} - \cdots - 5\cdot 5^2 + 5^2 - 5\cdot 5 + 5 - 5 + 1\\
&= 5^{2025} - 5^{2025} + 5^{2024} - 5^{2024} + 5^{2023} - \cdots - 5^3 + 5^2 - 5^2 + 5 - 5 + 1\\
&= 1\,. && \textbf{(1 pont)}
\end{aligned}$$

Tehát $m = 1 - \dfrac{1}{45} = \dfrac{44}{45}$ és $n = 1$, azaz megállapíthatjuk, hogy $m < n$. **(1 pont)**

b) Felhasználva az egyenlő arányok sorozatának tulajdonságát, miszerint

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{b_1 + b_2 + b_3}\,,$$

felírhatjuk a következőket:

$$\begin{aligned}
\frac{5y+4z-3x}{7x} = \frac{5z+4x-3y}{7y} = \frac{5x+4y-3z}{7z} &= \frac{(5y+4z-3x)+(5z+4x-3y)+(5x+4y-3z)}{7x+7y+7z}\\
&= \frac{6x+6y+6z}{7x+7y+7z}\\
&= \frac{6(x+y+z)}{7(x+y+z)}\\
&= \frac{6}{7}\,. && \textbf{(1 pont)}
\end{aligned}$$

Tehát $\dfrac{5y+4z-3x}{7x} = \dfrac{5z+4x-3y}{7y} = \dfrac{5x+4y-3z}{7z} = \dfrac{6}{7}$. Vegyük ezeket az arányokat páronként.

$$\begin{aligned}
\frac{5y+4z-3x}{7x} &= \frac{6}{7} \implies 5y+4z-3x = 6x \implies 5y+4z = 9x,\\
\frac{5z+4x-3y}{7y} &= \frac{6}{7} \implies 5z+4x-3y = 6y \implies 5z+4x = 9y,\\
\frac{5x+4y-3z}{7z} &= \frac{6}{7} \implies 5x+4y-3z = 6z \implies 5x+4y = 9z. && \textbf{(1 pont)}
\end{aligned}$$

Ezekből felírható, hogy

$$a = \frac{(5y+4z)\cdot(5z+4x)\cdot(5x+4y)}{2025xyz} = \frac{9x\cdot 9y\cdot 9z}{2025xyz} = \frac{9^3xyz}{9^2\cdot 5^2xyz} = \frac{9}{25}. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Ahonnan $\sqrt{a} = \sqrt{\dfrac{9}{25}} = \dfrac{3}{5} \in \mathbb{Q}$. **(1 pont)**

$\blacksquare$

2. feladat (10 pont). Az ABC háromszögben $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$. A háromszögbe írt kör BC-t K pontban, AB-t M pontban, míg AC-t N pontban érinti.

a) Határozd meg az AM, BK, CN szakaszok hosszát az a, b és c függvényében!

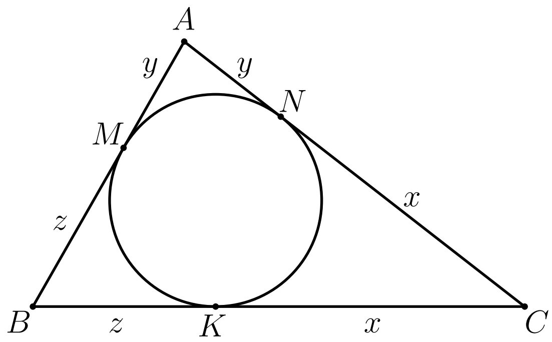
b) Igazold, hogy ha az ABC háromszög kerülete 12 egység, akkor teljesül a

$$\sqrt{CN+CK}+\sqrt{BM+BK}+\sqrt{AM+AN}\leq 6$$

egyenlőtlenség!

Barta-Zágoni Csongor, Marosvásárhely

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**



a) Mivel egy külső pontból ugyanazon körhöz húzott érintő szakaszok hossza egyenlő, ezért $CK = CN = x$, $AM = AN = y$, illetve $BM = BK = z$. **(1 pont)**
A feltétel alapján $a = x + z$, $b = x + y$ és $c = y + z$. Ezeket összeadva a következőt kapjuk:

$$a+b+c=2(x+y+z),$$
$$\frac{a+b+c}{2}=x+y+z\,, \quad \textbf{(1 pont)}$$

ahonnan rendre

$$y=(x+y+z)-(x+z)=\frac{a+b+c}{2}-a=\frac{b+c-a}{2},$$
$$x=(x+y+z)-(y+z)=\frac{a+b+c}{2}-c=\frac{a+b-c}{2},$$
$$z=(x+y+z)-(x+y)=\frac{a+b+c}{2}-b=\frac{a+c-b}{2}.$$

Tehát $AM=\frac{b+c-a}{2}$, $BK=\frac{a+c-b}{2}$ és $CN=\frac{a+b-c}{2}$. **(2 pont)**

b) Az *a)* alpont jelöléseit felhasználva igazolni kell, hogy

$$\sqrt{CN+CK}+\sqrt{BM+BK}+\sqrt{AM+AN}\leq 6,$$
$$\sqrt{2y}+\sqrt{2z}+\sqrt{2x}\leq 6, \quad \textbf{(1 pont)}$$

ahol $x+y+z=\frac{a+b+c}{2}=\frac{12}{2}=6.$ **(1 pont)**
Felhasználva a számtani és mértani középarányosok közötti egyenlőtlenségeket a következőket írhatjuk hogy:

$$\sqrt{2y}\leq\frac{y+2}{2},\quad \sqrt{2z}\leq\frac{z+2}{2},\quad \sqrt{2x}\leq\frac{x+2}{2}. \quad \textbf{(1 pont)}$$

A három egyenlőtlenség megfelelő oldalait összeadva adódik, hogy

$$\sqrt{2y}+\sqrt{2z}+\sqrt{2x}\le\frac{x+y+z+6}{2}, \qquad \textbf{(1 pont)}$$
$$\sqrt{2y}+\sqrt{2z}+\sqrt{2x}\le\frac{6+6}{2},$$
$$\sqrt{2y}+\sqrt{2z}+\sqrt{2x}\le 6\,.$$

Tehát $\sqrt{CN+CK}+\sqrt{BM+BK}+\sqrt{AM+AN}\le 6$. **(1 pont)**

Megjegyzés. Egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $x=y=z=2$, azaz $a=b=c=4$.

■

3. feladat (10 pont). a) Igazold, hogy két, 7-tel nem osztható, természetes szám négyzetének összege nem osztható 7-tel!

b) Tekintsük az $1^2,2^2,3^2,\ldots,2025^2$ számokat. Legfennebb hány darab természetes számot választhatunk ki az adott számokból úgy, hogy ne legyen közöttük három olyan szám, amelyeknek összege osztható 7-tel?

Simon József, Csíkszereda

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

a) A 7-tel nem osztható természetes számok $7k+1, 7k+2, 7k+3, 7k+4, 7k+5, 7k+6$ alakúak, ahol k természetes szám. **(1 pont)**
Vizsgáljuk a négyzeteik 7-tel való osztási maradékát.

$(7k+1)^2=(7k+1)\cdot(7k+1)=49k^2+7k+7k+1=7\cdot(7k^2+2k)+1,$ tehát $7m+1$ alakú.
$(7k+2)^2=(7k+2)\cdot(7k+2)=49k^2+14k+14k+4=7\cdot(7k^2+4k)+4,$ tehát $7m+4$ alakú.
$(7k+3)^2=(7k+3)\cdot(7k+3)=49k^2+42k+9=7\cdot(7k^2+6k+1)+2,$ tehát $7m+2$ alakú.
$(7k+4)^2=(7k+4)\cdot(7k+4)=49k^2+56k+16=7\cdot(7k^2+8k+2)+2,$ tehát $7m+2$ alakú.
$(7k+5)^2=(7k+5)\cdot(7k+5)=49k^2+70k+25=7\cdot(7k^2+10k+3)+4,$ tehát $7m+4$ alakú.
$(7k+6)^2=(7k+6)\cdot(7k+6)=49k^2+84k+36=7\cdot(7k^2+16k+5)+1,$ tehát $7m+1$ alakú.

Az előbbiek alapján a 7-tel nem osztható természetes számok négyzetei $7m+1, 7m+2, 7m+4$ alakúak lehetnek, ahol m természetes szám. **(2 pont)**

Megjegyzés. Ha kiszámítjuk az első 15 természetes szám négyzetének a 7-tel való osztási maradékát, akkor az ismétlődés alapján szintén felírhatjuk, hogy a maradék 1, 2 vagy 4 lehet. Így belátva is helyes a megoldás.

Ezek közül semelyik két számnak az összege nem osztható 7-tel, ezzel az állítást igazoltuk. **(1 pont)**

b) Mivel $2025 = 7 \cdot 289 + 2$, ezért 290 darab $7k + 1$ alakú szám van 1 és 2025 között, valamint 290 darab $7k + 2$ alakú szám. (**1 pont**)
A $7k + 3$, $7k + 4$, $7k + 5$, $7k + 6$ és $7k$ alakú számok mindegyikéből 289 darab van 1 és 2025 között. (**1 pont**)
Ahhoz, hogy a kiválasztott számok között ne legyen három, amelynek az összege osztható 7-tel, az szükséges, hogy a 7-tel osztható teljes négyzetek közül legfeljebb 2 legyen, a többiek között pedig ne forduljon elő mindhárom lehetséges maradék (mert $1 + 2 + 4 = 7$). (**1 pont**)
Ehhez legfeljebb $2 \cdot 579 = 1158$ darab 7-tel nem osztható számot választhatunk ki, mert ennél több esetén mindhárom maradék előfordulna a kiválasztott számok között. Így összesen legtöbb $2 + 1158 = 1160$ számot választhatunk ki és ez el is érhető, ha kiválasztjuk az összes $7k + 1$, $7k + 6$, $7k + 2$, $7k + 5$ alakú szám négyzetét és két 7-tel osztható szám négyzetét. (**2 pont**)

■

4. feladat (10 pont). Egy O középpontú körön adott az E pont. Az E középpontú kisebb sugarú kör az előbbi kört az A és B pontokban metszi. Legyen a kisebb körön P egy olyan pont, amely a nagyobbik kör belsejében van. Az E pontból az AP, illetve BP szakaszokra húzott merőleges egyenesek az O középpontú kört másodszor rendre a C, illetve D pontokban metszik. Legyen EL az O középpontú kör átmérője.

Igazold, hogy:

a) az A, P és D, valamint a B, P és C pontok kollineárisak;

b) az $ADLC$ egyenlő szárú trapéz;

c) $EP \perp CD$.

Simon József, Csíkszereda

Megoldás. Hivatalból (**1 pont**)

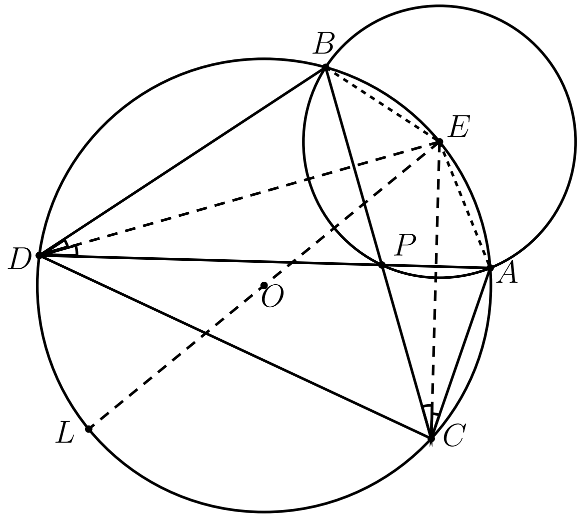
a) Az ED egyenes a PB húr felezőmerőlegese, ezért

$$\widehat{BDE} = \widehat{EDP}. \quad \textbf{(1 pont)}$$

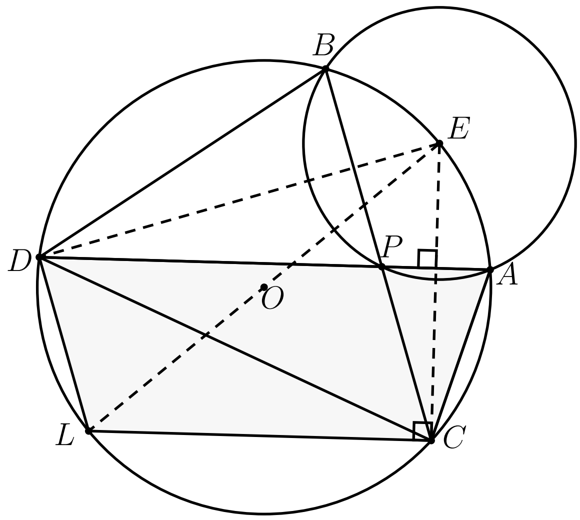
Az $EA = EB$, mivel ezek a kisebb kör sugarai, ezért az O középpontú körben felírhatjuk, hogy $EA = EB$, ahonnan $\overset{\frown}{AE} = \overset{\frown}{EB}$, így

$$\widehat{BDE} = \widehat{EDA}. \quad \textbf{(1 pont)}$$

A fentiek alapján következik, hogy $\widehat{EDP} = \widehat{EDA}$, emiatt az A, P, D pontok kollineárisak. (**1 pont**)
Hasonlóan $\widehat{ACE} = \widehat{ECP}$ és $\widehat{ACE} = \widehat{ECB}$, ahonnan $\widehat{ECP} = \widehat{ECB}$, tehát B, P, C pontok kollineárisak. (**1 pont**)



1. ábra. Az a) alponthoz



2. ábra. A b) alponthoz

b) Mivel az EL átmérő az O középpontú körben, C pont a körön van, vagyis

$$\widehat{ECL} = 90^\circ \Longleftrightarrow EC \perp CL\,. \tag{3}$$

Az *a)* alpont alapján a D, P, A pontok kollineárisak, a feladat feltételei szerint pedig $EC \perp PA$, tehát

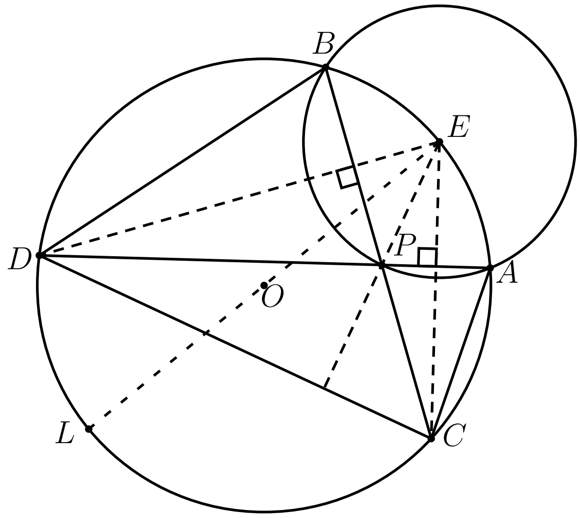
$$EC \perp DA\,. \tag{4}$$

Az (3) és (4) alapján $DA \parallel CL$. Mivel $\widehat{LCA} > \widehat{LCE} = 90^\circ$, ezért AC nem lehet párhuzamos DL-lel, tehát $ADLC$ trapéz. (**2 pont**)

Mivel $DA \parallel CL$, ezért $\widehat{CDA} \equiv \widehat{DCL}$, viszont mindkettő kerületi szög, így

$$\widehat{CDA} = \frac{\overset{\frown}{CA}}{2} = \widehat{DCL} = \frac{\overset{\frown}{DL}}{2} \Longrightarrow \overset{\frown}{CA} = \overset{\frown}{DL} \Longrightarrow CA = DL\,.$$

Összefoglalva tehát az $ADLC$ négyszög egyenlő szárú trapéz. (**1 pont**)



3. ábra. A c) alponthoz

c) Tekintsük az EDC háromszöget. A feltételek alapján $ED \perp BP$, de az a) alpont alapján B, P, C pontok kollineárisak, azaz $CP \perp ED$.
Hasonlóan $EC \perp AP$, de az *a)* alpont alapján tudjuk, hogy D, P, A pontok kollineárisak, azaz $DP \perp EC$. (**1 pont**)
Mivel $CP \perp ED$ és $DP \perp EC$, ezért P magasságpontja az EDC háromszögnek, ahonnan $EP \perp DC$. (**1 pont**)

■

8. osztály

1. feladat (10 pont). a) Oldd meg a valós számok halmazán a

$$\{x+3\}+2[x+3]+\sqrt{x^2+3(2x+3)}=4$$

egyenletet, ahol $\{a\}$ és $[a]$ rendre az a valós szám tört-, illetve egészrészét jelöli!

b) Legyen $a, b, c > 0$ úgy, hogy $abc = 2025$. Igazold, hogy

$$\frac{a+b}{a^2+b^2}+\frac{b+c}{b^2+c^2}+\frac{c+a}{c^2+a^2}\leq\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{45}.$$

Mátyás Ildikó Beáta, Szatmárnémeti
Turdean Katalin, Zilah

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

a) Értelmezés szerint $\{x+3\} = x+3-[x+3]$, így az eredeti egyenletünk

$$x+3+[x+3]+\sqrt{x^2+6x+9}=4$$

alakra hozható. A gyök alatt lévő kifejezés a rövidített számítási képletek szerint $(x+3)^2$. **(1 pont)**
Az egyenlet tehát a még egyszerűbb

$$x+3+[x+3]+|x+3|=4, \qquad \textbf{(1 pont)}$$

alakra hozható. Az $x+3$ előjele szerint két lehetséges eset van. Ha $x+3<0$, akkor

$$x+3+[x+3]-(x+3)=4,$$

vagyis $[x+3]=4$. Az egészrész értelmezése alapján $4\leq x+3<5$, ami ellentmond az $x+3<0$ feltételnek, tehát ebben az esetben nincs megoldás. **(1 pont)**
Ha $x+3\geq 0$, akkor

$$x+3+[x+3]+x+3=4,$$

ami ekvivalens átalakítással az $[x+3]=-2-2x$ alakra hozható. Ha $y=-2-2x$, akkor $y=[\frac{-2-y}{2}+3]$ és y egész szám. Az új egyenletünk tehát $y=[\frac{4-y}{2}]$. **(1 pont)**
Az egészrész értelmezése alapján

$$y\leq\frac{4-y}{2}<y+1.$$

Elemi átalakításokkal kapjuk, hogy

$$\frac{2}{3}<y\leq\frac{4}{3},$$

de y egész, tehát $y=1$. Visszahelyettesítéssel az $x=-\frac{3}{2}$ eredményhez jutunk, ami helyes is lesz, mert $x+3=\frac{3}{2}>0$. **(1 pont)**

b) Becsüljük a tagokat külön-külön! Legyenek $x, y > 0$ tetszőleges valós számok. A számtani és négyzetes közepek közötti egyenlőtlenségek alapján $\frac{x+y}{2} \leq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$, ami elemi átalakításokkal az

$$\frac{x+y}{x^2+y^2} \leq \frac{2}{x+y}$$

alakra hozható. **(1 pont)**

A számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenségek alapján viszont $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$, vagyis

$$\frac{2}{x+y} \leq \frac{1}{\sqrt{xy}}.$$ **(1 pont)**

Az előbbi egyenlőtlenségek alapján

$$\frac{x+y}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{\sqrt{xy}}.$$ **(1 pont)**

Alkalmazva ezt az egyenlőtlenséget a feladatban kitűzött egyenlőtlenség bal oldalán megjelenő tagokra, írhatjuk, hogy

$$\frac{a+b}{a^2+b^2} + \frac{b+c}{b^2+c^2} + \frac{c+a}{c^2+a^2} \leq \frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ca}} = \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{\sqrt{abc}} = \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{45},$$

ahonnan következik a kért egyenlőtlenség. **(1 pont)**

Megjegyzés. Az egyenlőség akkor és csakis akkor áll fenn, ha $a = b = c = \sqrt[3]{2025}$.

■

2. feladat (10 pont). Adott egy 45×45-ös négyzetrács, amelyben a természetes számok 1-től 2025-ig sorrendben követik egymást, a mellékelt ábra szerint.

1	2	3	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	43	44	45
46	47	48	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	88	89	90
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$				$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$				$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$				$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
1981	1982	1983	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	2023	2024	2025

A négyzetrács 9 négyzetét lefedjük egy 3×3-as négyzetlappal. Számítsd ki a valószínűségét, hogy a lefedett kilenc szám összege osztható legyen 81-gyel!

Nagy Enikő Ilona, Nagyvárad
Mátyás Ildikó Beáta, Szatmárnémeti
Baja Zsolt, Kolozsvár

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

Legyen a lefedésre használt 3×3-as négyzetlap középső mezője által lefedett szám n. Amikor egy számról az eggyel alatta, vagy felette lévő számra lépünk, akkor az adott számérték 45-tel nő, vagy csökken. Ennek a tulajdonságnak a segítségével a négyzetlap többi elemét is kiszámíthatjuk, amint az alábbi ábra is mutatja.

$n-46$	$n-45$	$n-44$
$n-1$	n	$n+1$
$n+44$	$n+45$	$n+46$

(1 pont)

A lefedett számokat összeadva $9n$-et kapunk, ami pontosan akkor osztható 81-gyel ha n osztható 9-cel. **(1 pont)**

Az adott 45×45-ös négyzetrács $2025 : 9 = 225$ olyan számot tartalmaz, amely osztható 9-cel, de ezek közül ki kell zárnunk azokat, amelyek nem kerülhetnek a 3×3-as négyzetlap közepére. **(1 pont)**

Azokat a számokat kell kizárnunk, amelyek az első vagy utolsó sorban, illetve első vagy utolsó oszlopban vannak és 9-cel oszthatók. A továbbiakban ezeket fogjuk felsorolni.

Az első sorban 5 darab ilyen szám van: 9, 18, 27, 36 és 45. **(1 pont)**

Az utolsó sorban szintén 5 darab ilyen szám van: 1989, 1998, 2007, 2016 és 2025. **(1 pont)**

Egy oszlopon belül bármelyik két számnak a különbsége a $45 = 9 \times 5$ többszöröse, vagyis a 9-cel való maradék állandó az oszlopon belül.

Az első oszlopban mindegyik szám $9k + 1$ alakú, tehát itt nincs olyan, amelyet osztható 9-cel. **(1 pont)**

Az utolsó oszlopban lévő számok $45k$ alakúak, viszont ebből a 45-öt és 2025-öt már számoltuk. Tehát innen további $45 - 2 = 43$ számot kell kizárni. **(1 pont)**

Összesítve a kedvező esetek száma

$$225 - (5 + 5 + 43) = 225 - 53 = 172.$$ **(1 pont)**

A lehetséges esetek száma pedig $43 \times 43 = 1849$, tehát a keresett valószínűség

$$\mathcal{P} = \frac{172}{1849} = \frac{4}{43}.$$ **(1 pont)**

■

3. feladat (10 pont). A $VABCD$ szabályos négyoldalú gúlában V a gúla csúcsa, E a VB, F pedig a VD él felezőpontja, és $VA = AB = a$.

a) Határozd meg az AEF és VBD síkok által alkotott szög szinuszát!

b) Számítsd ki az AE és CF egyenesek által alkotott szög szinuszát!

Simon József, Csíkszereda

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

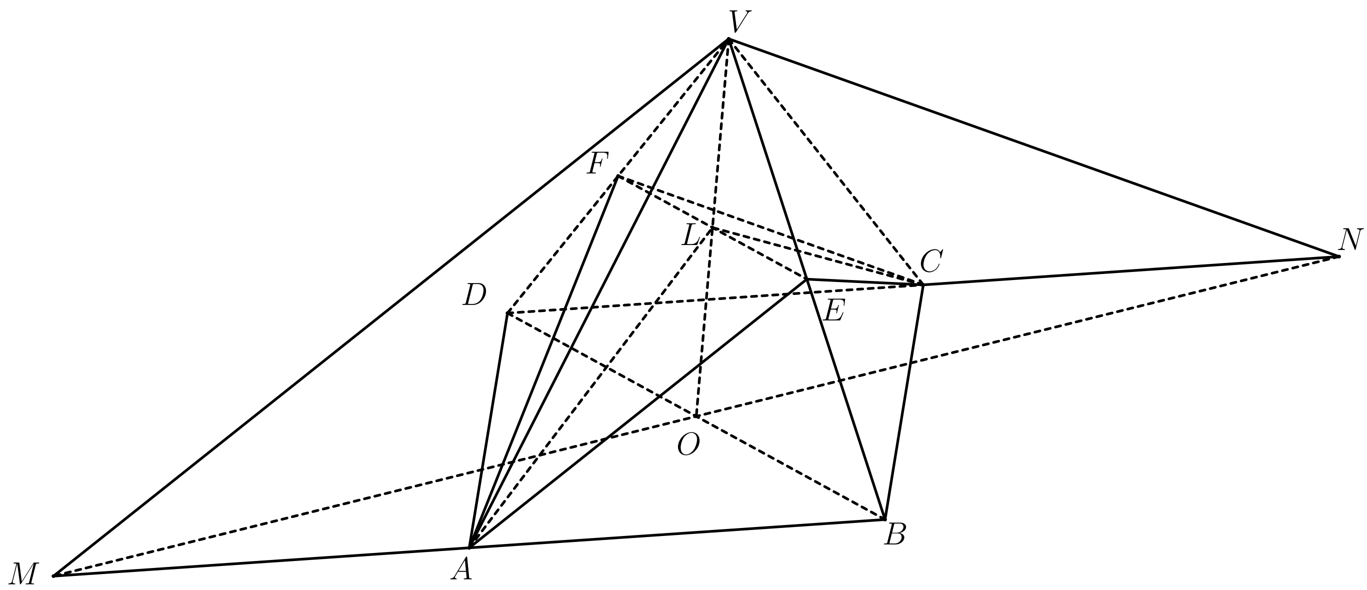
a) A feladat feltételei alapján a két sík EF-ben metszi egymást. Legyen $AC \cap BD = \{O\}$ és $VO \cap EF = \{L\}$.

A VBD háromszögben az EF középvonal, az L pontban felezi VO-t és $BD \parallel EF$. Ebből következik, hogy $VL \perp EF$, de a VFE háromszög egyenlő szárú, így L az EF felezőpontja.

A szerkesztésből adódóan $AF = AE$, tehát az AFE háromszög egyenlőszárú, amelyben AL felezi az alapot, így $AL \perp EF$. Ezeket összevonva, kijelenthetjük, hogy $[\widehat{(AEF),(VBD)}] = \widehat{ALO}$. (**1 pont**)

A VBD háromszögben $BD^2 = VB^2 + VD^2$. Pitagorasz fordított tétele alapján a háromszög derékszögű, ezért a VO oldalfelező az átfogó fele, vagyis

$$VO = \frac{a\sqrt{2}}{2} \quad \text{és} \quad LO = \frac{VO}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{4}.$$



Az ALO derékszögű háromszögben, Pitagorasz tétele alapján

$$AL^2 = AO^2 + OL^2 = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2 = \frac{10a^2}{16},$$

vagyis $AL = \frac{a\sqrt{10}}{4}$, (**1 pont**)

továbbá

$$\sin(\widehat{ALO}) = \frac{AO}{AL} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a\sqrt{10}}{4}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}. \quad (\textbf{1 pont})$$

b) Hosszabbítsuk meg a $(BA$ és $(DC$ félegyeneseket az $MA = AB$ és $NC = CD$ szakaszokkal! Ekkor a VBM háromszögben EA középvonal, tehát $VM \parallel AE$ és $VM = 2AE$. Mivel AE a VAB egyenlő oldalú háromszög magassága,

$$VM = 2\frac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}.$$

Analóg számolásokkal kapjuk, hogy $VN \parallel FC$ és $VN = a\sqrt{3}$. (**1 pont**)

A $VN \parallel FC$ és $VM \parallel EA$ összefüggések alapján

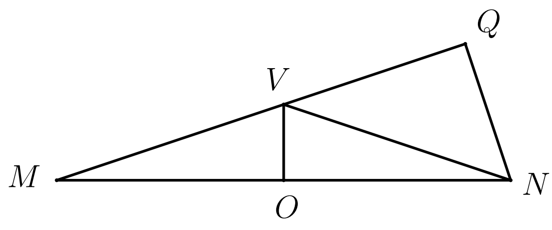
$$(\widehat{AE, CF}) = (\widehat{VM, VN}). \quad (\textbf{1 pont})$$

A szerkesztésből adódóan $MB = DN$ és $MB \parallel DN$, tehát az $MBND$ négyszög paralelogramma. A paralelogrammák átlói felezik egymást, vagyis az O pont, amely a BD átló felező pontja, rajta van

az MN szakaszon és $MN = 2 \cdot MO$. **(1 pont)**
A VOM háromszög derékszögű, ezért Pitagorasz tétele alapján

$$MO^2 = VM^2 - VO^2 = 3a^2 - \frac{2a^2}{4} = \frac{10a^2}{4},$$

ahonnan $MO = \frac{a\sqrt{10}}{2}$, tehát $MN = 2 \cdot MO = a\sqrt{10}$. **(1 pont)**
A VMN háromszögben $MN^2 > VM^2 + VN^2$, ezért a háromszög tompaszögű V-ben. Innen következik, hogy $(\widehat{VM, VN}) = 180° - \widehat{MVN}$. Legyen $Q \in MV$ úgy, hogy $NQ \perp MV$, ekkor $\widehat{NVQ} = 180° - \widehat{MVN}$.



A VMN háromszög területét kétféleképpen felírva kapjuk, hogy $NQ = \frac{MN \cdot VO}{VM} = \frac{a\sqrt{15}}{3}$. **(1 pont)**
A VQN derékszögű háromszögben

$$\sin(\widehat{NVQ}) = \frac{NQ}{VN} = \frac{\sqrt{5}}{3},$$

tehát az AE és EF egyenesek által alkotott szög szinuszának értéke $\frac{\sqrt{5}}{3}$. **(1 pont)**

Megjegyzés. Az a) alpontban az $AL \perp EF$ igazolható a három merőleges tételével is.
A b) alpontban maximális pontszám szerezhető akkor is, ha valaki az $\widehat{MVN}$ tompaszöggel és a $T_{MVN} = \frac{MV \cdot VN \cdot \sin(\widehat{MVN})}{2}$ összefüggéssel dolgozott, mert a kiegészítő szögek szinusza megegyezik.
Az $(\widehat{AE, FC})$ meghatározható úgy is, ha az FE szakaszon keresztül párhuzamosan eltoljuk az AF-et. Vagyis megszerkesztjük azt az $F' \in (ABD)$ pontot, amelyre $AF' \parallel FE$ és $AF' = FE$. Ekkor a $\sin(\widehat{CEF'})$ értéket kell kiszámolnunk.

■

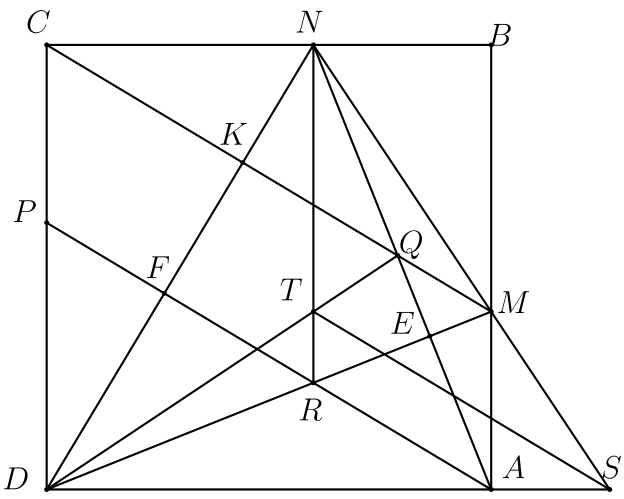
4. feladat (10 pont). Az $ABCD$ négyzet AB, BC és CD oldalainak belsejében felvesszük az M, N, illetve P pontokat úgy, hogy $AM = BN = CP$. A Q, R, S és T pontokra igaz, hogy $MC \cap AN = \{Q\}$, $DM \cap AP = \{R\}$, $MN \cap AD = \{S\}$ és $NR \cap DQ = \{T\}$.

a) Igazold, hogy R a DAN háromszög magasságpontja!

b) Bizonyítsd be, hogy $ST \parallel AR$!

Turdean Katalin, Zilah

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**



Megfelelő ábra elkészítése. (**1 pont**)

a) Az ABN és DAM háromszögek derékszögűek, valamint $AB = DA$ és $BN = AM$, ezért a két háromszög kongruens. Ennek alapján $\widehat{NAB} = \widehat{MDA}$. (**1 pont**)
Legyen $DM \cap AN = \{E\}$. Ekkor az AEM háromszögben

$$\widehat{EAM} + \widehat{EMA} = \widehat{NAB} + \widehat{DMA} = \widehat{MDA} + \widehat{DMA} = 90^\circ,$$

mert a DAM háromszög derékszögű. Mindezek alapján levonhatjuk, hogy

$$\widehat{AEM} = 180^\circ - (\widehat{EAM} + \widehat{EMA}) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ,$$

vagyis $AN \perp DM$. (**1 pont**)
Hasonló gondolatmenettel, ha bevezetjük az F pontot, amelyre $AP \cap DN = \{F\}$, akkor a $DN \perp AP$ állításhoz jutunk. (**1 pont**)
A DAN háromszögben a $DE \perp AN$, $AF \perp DN$ és $DE \cap AF = \{R\}$ tulajdonságok alapján R magasságpont. (**1 pont**)

b) A feladat feltételei alapján $AM \parallel PC$ és $AM = PC$, vagyis az $AMCP$ négyszög egy paralelogramma, ahonnan $AP \parallel MC$. A korábbiakban igazoltuk, azt is, hogy $DN \perp AP$, így következik, hogy $DN \perp MK$, ahol a K pont a DN és MC egyenesek metszéspontja. (**1 pont**)
A DMN háromszögben $MK \perp DN$, $NE \perp DM$ és $MK \cap NE = \{Q\}$, tehát a Q magasságpont, így $DQ \perp NM$. (**1 pont**)
Ha felhasználjuk, hogy a DS és a DA, valamint az NS és az NM egyenesek egybeesnek, akkor az eddigi eredményeink alapján $NR \perp DS$ és $DQ \perp NS$. A korábbi gondolatmenetekhez hasonlóan T magasságpont a DSN háromszögben, vagyis $ST \perp DN$. (**1 pont**)
Igazoltuk azt is, hogy $AP \perp DN$, de az R pont az AP egyenesen helyezkedik el, tehát $ST \parallel AR$.
(**1 pont**)

■

9. osztály

1. feladat (10 pont). Határozd meg azokat az (x, y) természetes számpárokat, amelyek teljesítik az

$$5x^2 + y^2 - 2xy + 6x - 2y = 8$$

összefüggést!

Spier Tünde, Arad
Szilágyi Judit, Kolozsvár
Tóth Csongor, Szováta

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**
A következő egyenértékű átalakításokat végezzük:

$$\begin{aligned}(x^2 + y^2 + 1 - 2xy - 2y + 2x) + (4x^2 + 4x + 1) - 2 &= 8,\\ (x - y + 1)^2 + (2x + 1)^2 &= 10.\end{aligned}$$

(4 pont)
Ugyanakkor $2x + 1 \in \mathbb{N}$ és $x - y + 1 \in \mathbb{Z}$, ezért a fenti egyenlőség akkor és csakis akkor teljesülhet, ha

$$\begin{cases} |x - y + 1| = 3 \\ 2x + 1 = 1 \end{cases} \quad \text{vagy} \quad \begin{cases} |x - y + 1| = 1 \\ 2x + 1 = 3 \end{cases}.$$ **(2 pont)**

Az $\begin{cases} |x - y + 1| = 3 \\ 2x + 1 = 1 \end{cases}$ egyenletek az $x = 0$ és $|1 - y| = 3$ összefüggésekhez vezetnek. Mivel y természetes szám, így $y = 4$. **(1 pont)**
Az $\begin{cases} |x - y + 1| = 1 \\ 2x + 1 = 3 \end{cases}$ egyenletek az $x = 1$ és $|2 - y| = 1$ összefüggésekhez vezetnek, ahonnan $y \in \{1, 3\}$. **(1 pont)**
Tehát a megoldások halmaza $M = \{(0, 4), (1, 1), (1, 3)\}$. **(1 pont)**

■

2. feladat (10 pont). Az a, b, c szigorúan pozitív valós számokra $a + b + c = 2025$. Igazold, hogy

$$\frac{a+b}{\sqrt{2025c + ab}} + \frac{b+c}{\sqrt{2025a + bc}} + \frac{a+c}{\sqrt{2025b + ac}} \geq 3.$$

Oláh Ilkei Árpád, Sepsiszentgyörgy

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**
Mivel $a + b + c = 2025$, ezért

$$\begin{aligned}2025c + ab &= (a + b + c)c + ab\\ &= ac + bc + c^2 + ab\\ &= (c + a)(c + b).\end{aligned}$$

Hasonlóan $2025a + bc = (a + b)(a + c)$ és $2025b + ac = (b + c)(b + a)$. **(2 pont)**
Ez alapján a bizonyítandó egyenlőtlenség az

$$\frac{a+b}{\sqrt{(c+a)(c+b)}} + \frac{b+c}{\sqrt{(a+b)(a+c)}} + \frac{a+c}{\sqrt{(b+a)(b+c)}} \geq 3.$$

egyenlőtlenséggel egyenértékű. A mértani és számtani közepek közti egyenlőtlenség alapján

$$\sqrt{(c+a)(c+b)} \leq \frac{a+b+2c}{2},$$

így

$$\frac{a+b}{\sqrt{(c+a)(c+b)}} \geq \frac{2(a+b)}{a+b+2c}.$$

Hasonlóan $\frac{b+c}{\sqrt{(a+b)(a+c)}} \geq \frac{2(b+c)}{b+c+2a}$ és $\frac{a+c}{\sqrt{(b+a)(b+c)}} \geq \frac{2(a+c)}{a+c+2b}$.
Összegezve a fenti egyenlőtlenségeket azt kapjuk, hogy

$$\frac{a+b}{\sqrt{(c+a)(c+b)}} + \frac{b+c}{\sqrt{(a+b)(a+c)}} + \frac{a+c}{\sqrt{(b+a)(b+c)}} \geq \frac{2(a+b)}{a+b+2c} + \frac{2(b+c)}{b+c+2a} + \frac{2(a+c)}{a+c+2b}.$$

(**3 pont**)

Igazoljuk, hogy

$$\frac{a+b}{a+b+2c} + \frac{b+c}{b+c+2a} + \frac{a+c}{a+c+2b} \geq \frac{3}{2}.$$

Az $a+b=x$, $b+c=y$ és $a+c=z$ jelöléseket használva $2(a+b+c)=x+y+z$, ahonnan $a+b+2c=y+z$, $b+c+2a=x+z$, valamint $a+c+2b=x+y$. Ez alapján a fenti egyenlőtlenség egyenértékű azzal, hogy

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} \geq \frac{3}{2}.$$

(**2 pont**)

Feltételezhetjük, hogy $x \leq y \leq z$, így $\frac{1}{y+z} \leq \frac{1}{x+z} \leq \frac{1}{x+y}$, tehát a rendezési tétel alapján

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} \geq \frac{y}{y+z} + \frac{z}{x+z} + \frac{x}{x+y},$$
$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} \geq \frac{z}{y+z} + \frac{x}{x+z} + \frac{y}{x+y}.$$

Összeadjuk a fenti egyenlőtlenségeket, elosztjuk 2-vel, így

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} \geq \frac{3}{2}.$$

(**2 pont**)

Ez utóbbi egyenlőtlenség Nesbitt-egyenlőtlenség néven ismert.

Megjegyzés. Az

$$\frac{a+b}{\sqrt{(c+a)(c+b)}} + \frac{b+c}{\sqrt{(a+b)(a+c)}} + \frac{a+c}{\sqrt{(b+a)(b+c)}} \geq 3.$$

egyenlőtlenséget bizonyíthatjuk a számtani és mértani közepek közti egyenlőtlenség alkalmazásával 3 változó esetén a következőképpen:

$$\frac{\frac{a+b}{\sqrt{(c+a)(c+b)}} + \frac{b+c}{\sqrt{(a+b)(a+c)}} + \frac{a+c}{\sqrt{(b+a)(b+c)}}}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{a+b}{\sqrt{(c+a)(c+b)}} \cdot \frac{b+c}{\sqrt{(a+b)(a+c)}} \cdot \frac{a+c}{\sqrt{(b+a)(b+c)}}}$$
$$= \sqrt[3]{1} = 1.$$

(**7 pont**)

■

3. feladat (10 pont). Ha $A = [\sqrt{1}] + [\sqrt{3}] + [\sqrt{5}] + \ldots + [\sqrt{2025}]$, igazold, hogy $A^2 - 1$ osztható 506-tal, ahol $[a]$ az a szám egészrészét jelöli!

Szilágyi Judit, Kolozsvár

Megoldás. Hivatalból (**1 pont**)
Észrevesszük, hogy $[\sqrt{1}] = [\sqrt{3}] = 1$, $[\sqrt{5}] = [\sqrt{7}] = 2$.
Ugyanakkor $[\sqrt{9}] = [\sqrt{11}] = [\sqrt{13}] = [\sqrt{15}] = 3$ és $[\sqrt{17}] = [\sqrt{19}] = [\sqrt{21}] = [\sqrt{23}] = 4$. (**2 pont**)
Általánosan

$$[\sqrt{4k^2-4k+1}] = [\sqrt{4k^2-4k+3}] = \ldots = [\sqrt{4k^2-1}] = 2k-1,$$
$$[\sqrt{4k^2+1}] = [\sqrt{4k^2+3}] = \ldots = [\sqrt{4k^2+4k-1}] = 2k, \quad \textbf{(2 pont)}$$

ami azt jelenti, hogy $\frac{4k^2-1-(4k^2-4k+1)}{2} + 1 = 2k$ darab tagnak $2k-1$ az egész része, valamint $\frac{4k^2+4k-1-(4k^2+1)}{2} + 1 = 2k$ darab tagnak $2k$ az egész része. (**1 pont**)
Mivel $\sqrt{2025} = 45$, így

$$\begin{aligned}
A &= 2\cdot 1 + 2\cdot 2 + 4\cdot 3 + 4\cdot 4 + \ldots + 2k\cdot(2k-1) + 2k\cdot 2k + \ldots + 44\cdot 43 + 44\cdot 44 + 45\\
&= 2\cdot 3 + 4\cdot 7 + \ldots + 2k(4k-1) + \ldots + 44\cdot 87 + 45\\
&= \sum_{k=1}^{22} 2k(4k-1) + 45 = \sum_{k=1}^{22}(8k^2-2k) + 45\\
&= 8\cdot\frac{22\cdot 23\cdot 45}{6} - 2\cdot\frac{22\cdot 23}{2} + 45 = 22\cdot 23\cdot 60 - 22\cdot 23 + 45. \quad \textbf{(2 pont)}
\end{aligned}$$

Ez alapján

$$A - 1 = 22\cdot 23\cdot 60 - 22\cdot 23 + 44 \,\vdots\, 22,$$
$$A + 1 = 22\cdot 23\cdot 60 - 22\cdot 23 + 46 \,\vdots\, 23.$$

Mivel $A^2 - 1 = (A-1)(A+1)$ és $(A-1) \,\vdots\, 22$, $(A+1) \,\vdots\, 23$, ezért $(A^2-1) \,\vdots\, 22\cdot 23 = 506$. (**2 pont**)

■

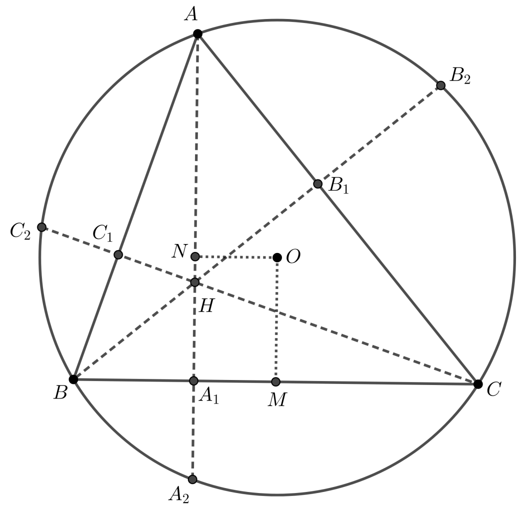
4. feladat (10 pont). Az ABC háromszög AA_1, BB_1 és CC_1 magasságai a háromszög köré írt O középpontú kört rendre az A_2, B_2 és C_2 pontokban metszik.

a) Igazold hogy az ABA_2C négyszög G_a súlypontja az OA_1 szakasz felezőpontja!

b) Ha H az ABC háromszög ortocentruma, G_1 és G_2 az $A_1B_1C_1$, illetve az $A_2B_2C_2$ háromszög súlypontja, igazold, hogy G_1 a HG_2 szakasz felezőpontja!

Tóth Csongor, Szováta

Megoldás. Hivatalból (**1 pont**)



a) Legyen M és N az O pontból a BC, illetve az AA_2 húrra húzott merőleges talppontja. Ekkor az M pont a BC szakasz felezőponjta, az N pont pedig az AA_2 szakasz felezőpontja. (**1 pont**)

Tehát

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{2} \quad \text{és} \quad \overrightarrow{ON} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA_2}}{2}. \qquad (\textbf{1 pont})$$

Továbbá az OMA_1N négyszög egy téglalap, mert szögei derékszögek, így

$$\overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OC}}{2} = 2\overrightarrow{OG_a},$$

tehát G_a az OA_1 szakasz felezőpontja. (**2 pont**)

b) Az előző alpont alapján

$$\overrightarrow{OA_1} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA_2}}{2}.$$

Hasonlóan $\overrightarrow{OB_1} = \frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB_2}}{2}$ és $\overrightarrow{OC_1} = \frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OC_2}}{2}$.

Összegezve azt kapjuk, hogy

$$\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1} = \frac{3(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OB_2} + \overrightarrow{OC_2}}{2}, \qquad (\textbf{2 pont})$$

ami egyenértékű azzal, hogy

$$3\overrightarrow{OG_1} = \frac{3\overrightarrow{OH} + 3\overrightarrow{OG_2}}{2}, \qquad (\textbf{2 pont})$$

végigosztva 3-mal, következik, hogy

$$\overrightarrow{OG_1} = \frac{\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OG_2}}{2},$$

ez pedig azt jelenti, hogy G_1 a HG_2 szakasz felezőpontja. (**1 pont**)

■

10. osztály

1. feladat (10 pont). Határozd meg azokat az $n \in \mathbb{N}^*$ és $z \in \mathbb{C}$ számokat, amelyek esetén

$$(\overline{z})^n = (i \cdot z + 2)^n,$$

ahol $i^2 = -1$.

Kovács Béla, Szatmárnémeti

Első megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

Legyen a z algebrai alakja $z = a + bi$, ahol $a, b \in \mathbb{R}$. A megadott feltételből következik, hogy $\left|(\overline{z})^n\right| = \left|(iz + 2)^n\right|$, ahonnan $|\overline{z}|^n = |iz + 2|^n$ és innen következik, hogy $|\overline{z}| = |iz + 2|$. Mivel $iz + 2 = ia - b + 2$, az előbbi összefüggés alapján

$$a^2 + b^2 = a^2 + (2 - b)^2,$$

vagyis $4 - 4b = 0$, ahonnan $b = 1$. **(3 pont)**

Tehát $z = a + i$, és a megadott összefüggés a

$$(\overline{z})^n = (iz + 2)^n \iff (a - i)^n = (ia + 1)^n \tag{5}$$

alakot ölti. Viszont

$$(ia + 1)^n = \frac{i^n}{i^n} \cdot (ia + 1)^n = (-i)^n (i \cdot (ia + 1))^n = i^n (-1)^n (-a + i)^n = i^n (a - i)^n, \qquad \textbf{(3 pont)}$$

ezért (5) alapján $(a - i)^n = i^n (a - i)^n$. Felhasználva, hogy $a - i \neq 0$, következik, hogy $i^n = 1$, tehát $n = 4k$, ahol $k \in \mathbb{N}^*$. **(3 pont)**

Tehát bármely $a \in \mathbb{R}$ és $k \in \mathbb{N}^*$ esetén a $z = a + i$ és $n = 4k$ számokra teljesül a kért összefüggés. ■

Második megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

Az adott egyenlőségből kapjuk, hogy

$$\varepsilon_n \cdot \overline{z} = i \cdot z + 2,$$

ahol ε_n egy n-edrendű egységgyök. **(2 pont)**

Ha $z = a + bi$, ahol $a, b \in \mathbb{R}$, akkor $\varepsilon_n (a - bi) = ai - b + 2$. Ebből következik, hogy

$$|\varepsilon_n (a - bi)| = |ai - b + 2| \Leftrightarrow |\varepsilon_n| \cdot |a - bi| = |ai - b + 2| \qquad \textbf{(2 pont)}$$

Mivel $|\varepsilon_n| = 1$, kapjuk, hogy $a^2 + b^2 = a^2 + (2 - b)^2$, ahonnan következik,
hogy $a \in \mathbb{R}$ és $b = 1$ **(2 pont)**

Tehát $z = a + i$. Ezt behelyettesítve az $\varepsilon_n \cdot \overline{z} = i \cdot z + 2$ összefüggésbe kapjuk, hogy $\varepsilon_n (a - i) = ai - 1 + 2$, tehát

$$\varepsilon_n = \frac{ai + 1}{a - i} = i. \qquad \textbf{(2 pont)}$$

Mivel $\varepsilon_n = i$, ezért $n = 4k$, ahol $k \in \mathbb{N}^*$. **(1 pont)**

■

2. feladat (10 pont). Oldd meg a valós számok halmazán a

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x+2y+1}+\sqrt[3]{x-y} = & 2 \\ 2x+y+\sqrt[3]{y-x} = & 5 \end{cases}$$

egyenletrendszert! *Papp Ilonka, Brassó*

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**
Bevezetve a $\sqrt[3]{x+2y+1}=a$ és $\sqrt[3]{x-y}=b$ változócseréket, a következőket kapjuk: $a+b=2$ és $a^3+b^3=2x+y+1$. **(2 pont)**
A második összefüggésből következik, hogy $2x+y=a^3+b^3-1$, így az előbbiek alapján a következő egyenletrendszerhez jutunk:

$$\begin{cases} a+b=2, \\ a^3+b^3-1-b=5. \end{cases}$$ **(2 pont)**

Kifejezve az első egyenletből az a ismeretlent és behelyettesítve a második egyenletbe, kapjuk, hogy

$$(2-b)^3+b^3-1-b=5 \Leftrightarrow 6b^2-13b+2=0.$$ **(2 pont)**

A fenti másodfokú egyenlet megoldásai $b_1=2$ és $b_2=\frac{1}{6}$. **(1 pont)**
Ha $b=2$, akkor $a=0$ és

$$\begin{cases} x+2y+1=0, \\ x-y=8. \end{cases}$$

ahonnan kapjuk, hogy $x=5$ és $y=-3$. **(1 pont)**
Ha $b=\frac{1}{6}$, akkor $a=\frac{11}{6}$ és

$$\begin{cases} x+2y+1=\frac{1331}{216}, \\ x-y=\frac{1}{216}. \end{cases}$$

ahonnan kapjuk, hogy $x=\frac{1117}{648}$ és $y=\frac{557}{324}$. **(1 pont)**

■

3. feladat (10 pont). Ha $x,y,z \in (0,1)$ vagy $x,y,z \in (1,+\infty)$ igazold, hogy

$$\frac{\left(\log_y x\right)^3}{\log_y z+\log_z x}+\frac{(\log_z y)^3}{\log_x y+\log_z x}+\frac{(\log_x z)^3}{\log_x y+\log_y z} \geq \frac{1}{2}\left(\sqrt{\log_x y}+\sqrt{\log_y z}+\sqrt{\log_z x}\right).$$

Pálhegyi-Farkas László, Nagyvárad

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**
Legyen $a=\log_x y$, $b=\log_y z$, $c=\log_z x$, innen következik, hogy $a\cdot b\cdot c=1$, ahol a,b,c pozitív valós számok. **(2 pont)**

$$\frac{\left(\log_y x\right)^3}{\log_y z+\log_z x}=\frac{\left(\frac{1}{a}\right)^3}{b+c}=\frac{1}{a^3(b+c)}=\frac{(bc)^2}{(abc)^2a(b+c)}=\frac{(bc)^2}{ca+ab}.$$

Hasonlóan eljárva a többi taggal, a kitűzött egyenlőtlenség a következő alakban írható fel:

$$\frac{(bc)^2}{ca+ab}+\frac{(ca)^2}{ab+bc}+\frac{(ab)^2}{bc+ca}\geq\frac{1}{2}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right).$$ **(1 pont)**

Az egyenlőtlenség bal oldalára alkalmazzuk a Bergström-egyenlőtlenséget (vagy más néven a Titu-lemmát, vagy a megfelelő Cauchy–Schwarz-egyenlőtlenséget) és kapjuk, hogy

$$\frac{(bc)^2}{ca+ab}+\frac{(ca)^2}{ab+bc}+\frac{(ab)^2}{bc+ca}\geq\frac{(ab+bc+ca)^2}{2(ab+bc+ca)}=\frac{ab+bc+ca}{2}.$$ **(3 pont)**

Másrészt

$$\frac{ab+bc+ca}{2}=\frac{1}{4}\left[(ab+bc)+(bc+ca)+(ca+ab)\right],$$

(1 pont)

alkalmazva a számtani-mértani közepek közti egyenlőtlenséget kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\left[(ab+bc)+(bc+ca)+(ca+ab)\right]&\geq\frac{1}{4}\left(2\sqrt{ab^2c}+2\sqrt{abc^2}+2\sqrt{a^2bc}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(\sqrt{(abc)b}+\sqrt{(abc)c}+\sqrt{(abc)a}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right),\end{aligned}$$ **(1 pont)**

amit igazolni kellett. **(1 pont)**

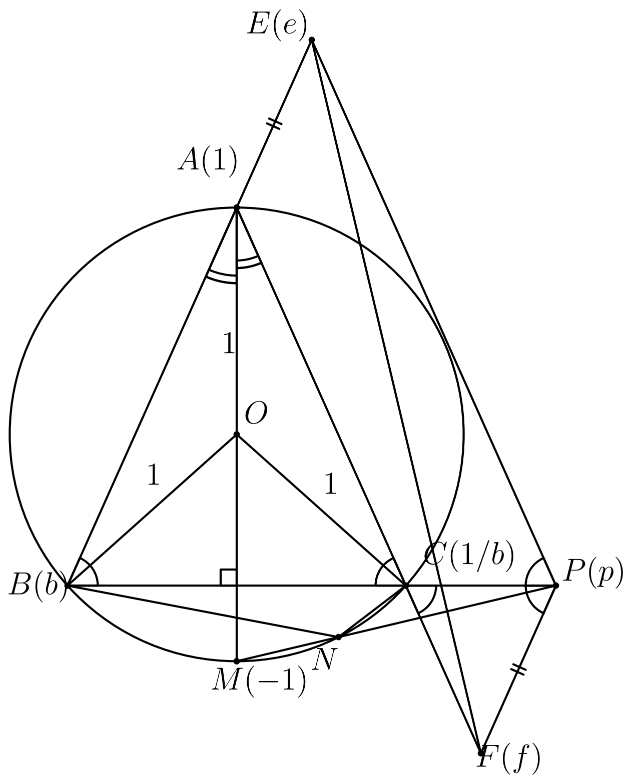
■

4. feladat (10 pont). Adott egy egységnyi sugarú körbe írt ABC egyenlő szárú háromszög, ahol $AB=AC$. A BC egyenesen legyen P egy pont úgy, hogy a C pont a BP szakasz belsejében van. A P ponton át az AC és AB oldalakhoz húzott párhuzamosok az AB és AC egyeneseket rendre az E és F pontokban metszik. Ha az A pont átmérősen ellentett pontja az M pont, igazold, hogy a PM egyenes merőleges az EF egyenesre!

Ugron Szabolcs, Sepsiszentgyörgy

Első megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

Ha a komplex sík kezdőpontjának az ABC háromszög köré írt kör O középpontját tekintjük úgy, hogy az A pont affixuma legyen az 1, vagyis az OA egyenes a valós tengely, akkor az M pont affixuma -1 lesz. Mivel a B és C pontok affixumai egység modulusú komplex számok és ezek egymás konjugáltjai, ezért ha a B pont affixuma a b komplex szám, akkor a C pont affixuma $1/b$ lesz. Továbbá legyen a P, E, F pontok affixuma rendre a p, e, f komplex szám. **(1 pont)**



Mivel a P pont a BC egyenesen van, ezért

$$\frac{p-b}{\overline{p}-\overline{b}}=\frac{c-b}{\overline{c}-\overline{b}} \Leftrightarrow \frac{p-b}{\overline{p}-\frac{1}{b}}=\frac{\frac{1}{b}-b}{b-\frac{1}{b}}=-1 \Leftrightarrow \overline{p}=b+\frac{1}{b}-p. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Hasonlóan, mivel az e pont az AB egyenesen van, ezért

$$\frac{e-1}{\overline{e}-1}=\frac{b-1}{\overline{b}-1} \Leftrightarrow \frac{e-1}{\overline{e}-1}=\frac{b-1}{\frac{1}{b}-1}=-b \Leftrightarrow \overline{e}=\frac{b+1-e}{b}. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

A PE egyenes párhuzamos az AC egyenessel, innen kapjuk, hogy

$$\frac{p-e}{\overline{p}-\overline{e}}=\frac{1-\frac{1}{b}}{1-b}=-\frac{1}{b} \Leftrightarrow \overline{e}=\overline{p}+bp-be. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

A fenti három összefüggés alapján kapjuk, hogy

$$\begin{gathered}
b+\frac{1}{b}-p+bp-be=1+\frac{1}{b}-\frac{e}{b} \iff \\
b(p+1)-(p+1)=be-\frac{e}{b} \iff \\
(p+1)(b-1)=e\cdot\frac{b^2-1}{b} \iff \\
e=\frac{(p+1)(b-1)b}{(b-1)(b+1)} \iff \\
e=\frac{(p+1)b}{b+1}.
\end{gathered} \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Mivel az F pont az AC egyenesen van kapjuk, hogy

$$\frac{f-\frac{1}{b}}{\overline{f}-b}=\frac{1-\frac{1}{b}}{1-b}=-\frac{1}{b} \Leftrightarrow \overline{f}=b+1-bf. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

A PF és AB egyenesek párhuzamosságából következik, hogy

$$\frac{p-f}{\overline{p}-\overline{f}} = \frac{1-b}{1-\frac{1}{b}} = -b \Leftrightarrow \overline{f} = \frac{p+b\overline{p}-f}{b}.$$ (**1 pont**)

A fenti két összefüggésből és abból, hogy $\overline{p} = b + \frac{1}{b} - p$ következik, hogy

$$\begin{aligned} b+1-bf &= \frac{p+b\left(b+\frac{1}{b}-p\right)-f}{b} \iff \\ b^2+b-b^2f &= p+b^2+1-bp-f \iff \\ b-1+p(b-1) &= f\left(b^2-1\right) \iff \\ (b-1)(p+1) &= f(b-1)(b+1), \end{aligned}$$ (**1 pont**)

és innen következik, hogy $f = \frac{p+1}{b+1}$. Mivel

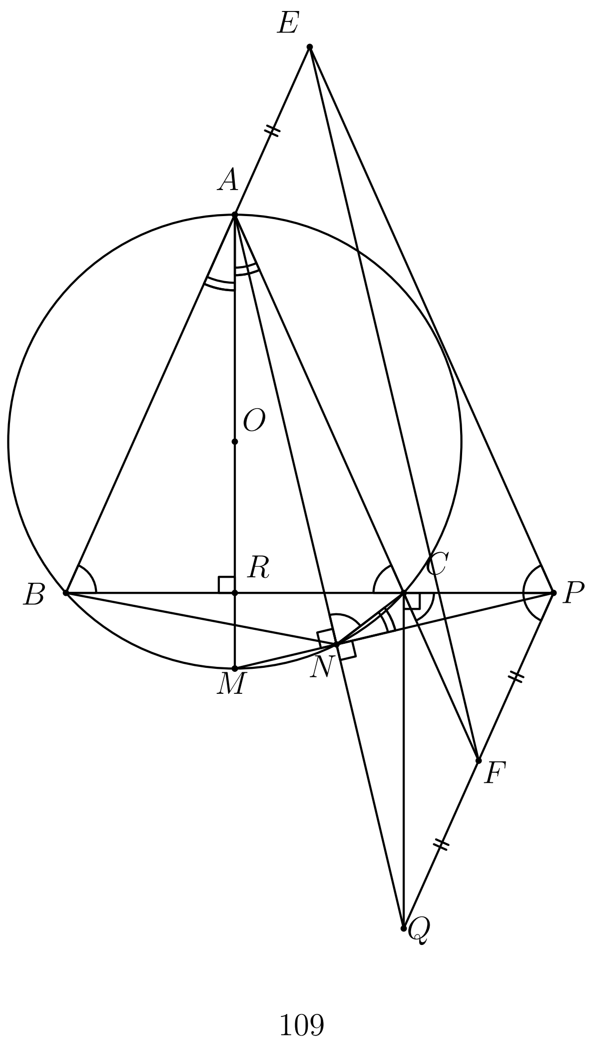
$$\frac{e-f}{\overline{e}-\overline{f}} = \frac{\frac{(p+1)(b-1)}{b+1}}{\frac{(\overline{p}+1)\left(\frac{1}{b}-1\right)}{\frac{1}{b}+1}} = -\frac{p+1}{\overline{p}+1} = -\frac{p-(-1)}{\overline{p}-(-1)},$$

következik, hogy $EF \perp PM$. (**1 pont**)

■

Második megoldás. Hivatalból (**1 pont**)

Legyen $PB \cap AM = \{R\}$, $MP \cap \mathcal{C}(O, OA) = \{N\}$, $AN \cap PF = \{Q\}$.



Az $\widehat{ABC} = \widehat{ANC} = \frac{\widehat{AC}}{2}$, az AMN_Δ félkörbe írt háromszög, ezért $\widehat{ANM} = 90°$, tehát $\widehat{ANP} = 90°$. Innen következik, hogy $\widehat{CNP} = \widehat{RAC} = \widehat{BAR}$. Mivel $AB \parallel PF$ következik, hogy $\widehat{ABC} = \widehat{CPF}$. Az előbbiek alapján következik, hogy $\widehat{QNC} + \widehat{QPC} = 180°$ ezért a $QNCP$ négyszög körbeírható.

(2 pont)

Mivel a $QNCP$ négyszög körbeírható innen következik, hogy $\widehat{QNP} = \widehat{QCP} = 90°$, illetve $\widehat{ABC} = \widehat{QPC}$ következik, hogy az ARB háromszög hasonló a QCP háromszöggel, innen kapjuk, hogy

$$\frac{QP}{AB} = \frac{CP}{RB} \implies QP = \frac{AB \cdot CP}{\frac{BC}{2}} = 2 \cdot \frac{AB \cdot CP}{BC}.$$ **(2 pont)**

Mivel $AB \parallel PF$ innen következik, hogy az FCP háromszög hasonló az ACB háromszöggel, innen kapjuk, hogy

$$\frac{FP}{AB} = \frac{CP}{CB} \Rightarrow FP = \frac{AB \cdot CP}{CB}.$$ **(2 pont)**

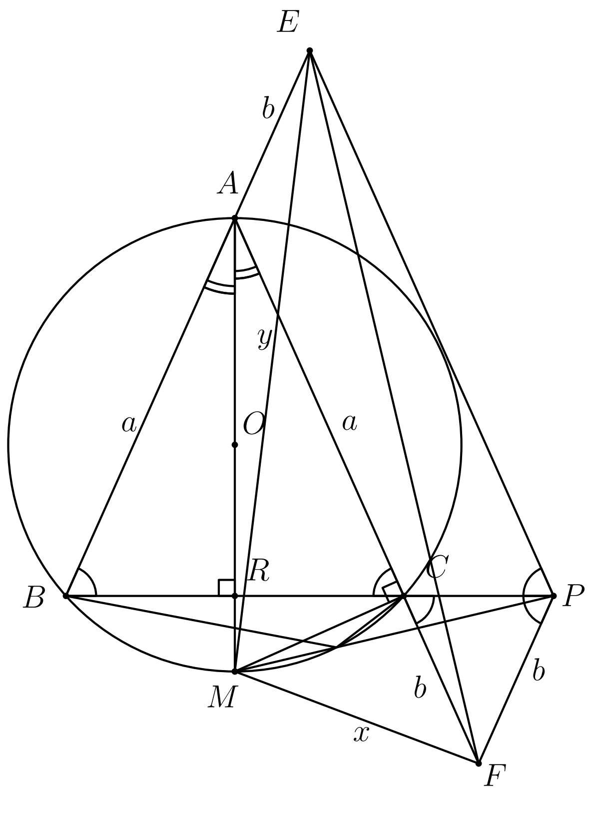
Az előbbi két összefüggésből következik, hogy $QP = 2 \cdot FP$, vagyis $QF = FP$, és mivel $AE \parallel PF$, $AF \parallel PE$, vagyis az $AFPE$ négyszög egy paralelogramma, ezért az $AQFE$ négyszög is paralelogramma. **(2 pont)**

Az előbbiekből következik, hogy $AQ \parallel EF$, és mivel $AQ \perp PQ$ következik, hogy $EF \perp MP$, amit igazolni kellett. **(1 pont)**

■

Harmadik megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

Legyen $AB = AC = a$, $CF = FP = b$, $MF = x$, $EM = y$ és $\widehat{ABC} = \alpha$.



A fenti jelöléseket használva, az ACM és FCM háromszögekből a Pitagorasz-tétel alapján következik, hogy $MC^2 + a^2 = AM^2$ és $MC^2 + b^2 = x^2$, ezekből következik, hogy

$$x^2 = AM^2 - a^2 + b^2.$$ **(2 pont)**

Az EAM háromszögben alkalmazzuk a koszinusztételt és kapjuk, hogy

$$\cos(90^\circ + \alpha) = \frac{b^2 + AM^2 - y^2}{2b \cdot AM}.$$

Az ABC háromszögben a szinusztétel alapján $\frac{a}{\sin\alpha} = AM$ és mivel $\cos(90^\circ + \alpha) = -\sin\alpha$, következik, hogy

$$\frac{b^2 + AM^2 - y^2}{2b \cdot AM} = -\frac{a}{AM} \implies b^2 + AM^2 - y^2 = -2a \implies y^2 = b^2 + AM^2 + 2ab \qquad \textbf{(4 pont)}$$

Az $EMFP$ négyszögben

$$EP^2 + MF^2 = (a+b)^2 + x^2 = a^2 + 2ab + b^2 + AM^2 - a^2 + b^2 = 2ab + 2b^2 + AM^2,$$
$$FP^2 + EM^2 = b^2 + y^2 = b^2 + b^2 + AM^2 + 2ab = 2ab + 2b^2 + AM^2.$$

A fenti két összefüggésből következik, hogy

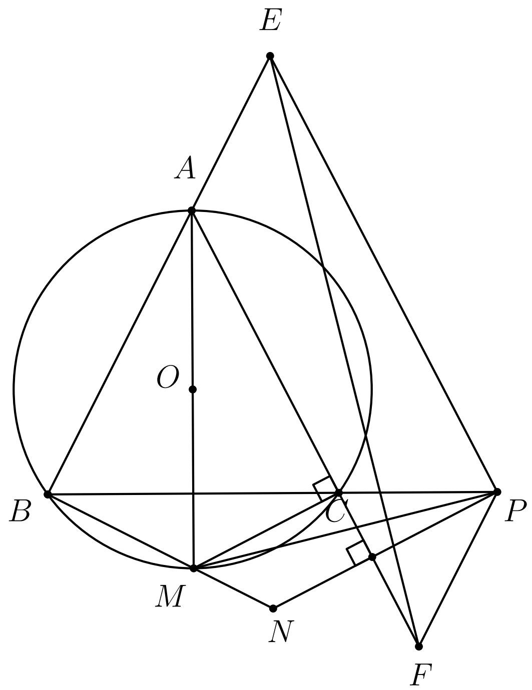
$$EP^2 + MF^2 = FP^2 + EM^2,$$

ami ekvivalens azzal, hogy az $EMFP$ négyszög ortodiagonális, tehát $MP \perp EF$. **(3 pont)**

■

Negyedik megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

Legyen $AB = AC = a$, $CF = FP = b$, valamint jelöljük N-nel a P pontból az AC egyenesre húzott merőleges és a BM egyenes metszéspontját.



Mivel $MC \parallel NP$ és $AB \parallel FP$ következik, hogy

$$\frac{BM}{MN} = \frac{BC}{CP} = \frac{AB}{FP} = \frac{a}{b} \Rightarrow MN = \frac{b \cdot BM}{a}. \qquad \textbf{(2 pont)}$$

Ugyanakkor következik, hogy

$$\frac{MC}{NP} = \frac{BC}{BP} = \frac{a}{a+b} \Rightarrow NP = \frac{(a+b)\cdot MC}{a}$$ **(2 pont)**

Mivel

$$\frac{NP}{AF} = \frac{\frac{(a+b)\cdot MC}{a}}{a+b} = \frac{MC}{a},$$

valamint

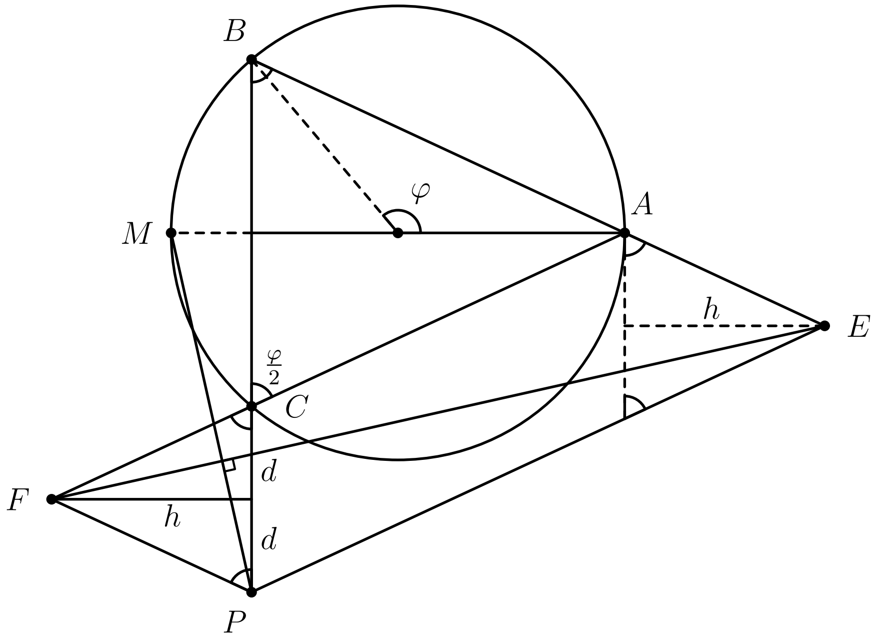
$$\frac{MN}{AE} = \frac{\frac{b\cdot MC}{a}}{b} = \frac{MC}{a},$$

következik, hogy $\frac{NP}{AF} = \frac{NM}{AE}$. **(3 pont)**

Mivel $\widehat{MNP} = \widehat{BMC} = \widehat{EAF}$, és $\frac{NP}{AF} = \frac{NM}{AE}$ következik, hogy az EAF háromszög hasonló az MNP_Δ háromszöggel és tudjuk, hogy $NP \perp AF$, $AE \perp MN$ kapjuk, hogy $MP \perp EF$, amit bizonyítani kellett. **(2 pont)**

■

Ötödik megoldás. Hivatalból **(1 pont)**



A komplex számsík origóját válasszuk meg a kör középpontjának úgy, hogy az A pont affixuma 1 legyen, vagyis az OA egyenes a valós tengely. Ekkor az M pont affixuma -1. Legyen az AOB szög mértéke φ, ekkor a B, C pontok affixumai rendre $b = \cos\varphi + i\sin\varphi$, $c = \cos\varphi - i\sin\varphi$. Mivel a BC egyenes párhuzamos az imaginárius tengellyel, ezért a P pont affixuma $p = c - 2id$, ahol $2d = |CP|$. Legyen h a CFP háromszögben az F pontból húzott magasság hossza, ekkor az F pont affixuma $f = c - id - h$. **(2 pont)**

Erre a magasságra írhatjuk, hogy

$$h = d\,\mathrm{tg}(\widehat{FCP}) = d\,\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2},$$

az utolsó egyenlőséget megkapjuk abból, hogy $\widehat{ACB}$ kerületi szög az $\widehat{AOB}$ középponti szög fele. Tehát

$$f = \cos\varphi - d\,\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2} - i\sin\varphi - id.$$

Az $AEPF$ négyszög egy paralelogramma, ezért az E pont affixuma $e = a + (p - f)$, vagyis

$$e = 1 + d\,\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2} - id. \qquad \textbf{(2 pont)}$$

Az MP egyenes pontosan akkor merőleges az EF egyenesre, ha $m - p = ir(e - f)$, valamilyen $r \neq 0$ valós szám esetén. **(1 pont)**

Ahhoz, hogy az utóbbi összefüggést belássuk, ekvivalens módon alakítjuk az $e - f$, majd $m - p$ komplex számokat. Írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned}
e - f &= 1 + d\,\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2} - id - \cos\varphi + d\,\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2} + i\sin\varphi + id\\
&= 1 - \cos\varphi + 2d\,\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2} + i\sin\varphi\\
&= 2\sin^2\frac{\varphi}{2} + 2d\,\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2} + i2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\\
&= \mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2}\left(2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2} + 2d + i2\cos^2\frac{\varphi}{2}\right)\\
&= \mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2}\left(\sin\varphi + 2d + i2\cos^2\frac{\varphi}{2}\right)\\
&= \mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2}\left(\sin\varphi + 2d + i(1 + \cos\varphi)\right)\\
&= -i\,\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2}\left(i(\sin\varphi + 2d) - 1 - \cos\varphi\right). \qquad \textbf{(3 pont)}
\end{aligned}$$

Másrészt,

$$m - p = -1 - \cos\varphi + i\sin\varphi + 2id = -1 - \cos\varphi + i(\sin\varphi + 2d),$$

tehát $e - f = -i\,\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2}(m - p)$, és ezért $EF \perp MP$. **(1 pont)**

■

11. osztály

1. feladat (10 pont). a) Az $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{N})$ (ahol $n \geq 2$) mátrixban minden $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ esetén $a_{ij} = 1$, ha $i \mid j$, különben $a_{ij} = 0$. Számítsd ki a $\det A$ értékét!

b) Az $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{N})$ (ahol $n \geq 2$) mátrixban minden $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ esetén $a_{ij} = 1$, ha i és j relatív prím, különben $a_{ij} = 0$. Számítsd ki a $\det A$ értékét!

Gábor Farkas Ferencz, Nagyenyed

Megoldás. Hivatalból (**1 pont**)

a) Számoljuk ki $n \in \{2, 3, 4, 5\}$ esetén a mátrix determinánsát.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$ (**2 pont**)

Ha $i > j$, akkor i biztosan nem osztja j-t, tehát $a_{ij} = 0$. Ez azt jelenti, hogy A egy felső háromszögmátrix, így determinánsa a főátlón lévő elemek szorzata. Az $a_{ii} = 1$ minden i esetén, mert minden szám osztja önmagát. Következésképpen $\det A = 1$. (**2 pont**)

b) Számoljuk ki $n \in \{2, 3, 4, 5\}$ esetén a mátrix determinánsát.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$ (**2 pont**)

Az utolsó két determináns azért nulla, mert második és negyedik oszlopuk azonos. Ez minden további determinánsra igaz, mert 2 és j pontosan akkor relatív prím, ha 4 és j relatív prím, azaz ha j páratlan. Tehát $\det A = 0$, ha $n \geq 4$. (**3 pont**)

■

2. feladat (10 pont). Legyen $b \geq 2$ egy természetes szám. Tekintsünk egy, a b számrendszerben felírt, $(x_n)_{n\geq 0}$ sorozatot, ahol $x_0 \in \mathbb{N}$ és x_{n+1} az x_n számjegyeinek az összege. Bizonyítsd be, hogy az $(x_n)_{n\geq 0}$ sorozat konvergens és számítsd ki a határértékét!

Tőtős György, Zilah

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**
Vizsgáljuk meg a sorozat monotonitását! Ehhez írjuk fel az x_n számot b számrendszerben.
Ha $k+1$ darab számjegyből áll ($k \geq 1$), akkor az x_n alakja

$$x_n = a_0 + a_1 b + a_2 b^2 + \ldots + a_k b^k,$$

ahol $a_0, \ldots, a_k \in \{0, 1, \ldots, b-1\}$ és $a_k \neq 0$. Ekkor $x_{n+1} = a_0 + a_1 + \ldots + a_k$. Kivonva egymásból a kettőt kapjuk, hogy

$$x_n - x_{n+1} = a_1(b-1) + a_2(b^2-1) + \ldots + a_k(b^k-1),$$

ami egy pozitív szám, mert $a_j(b^j-1) \geq 0$, ha $j < k$ és $a_k(b^k-1) > 0$. **(2 pont)**
Ha x_n egy számjegyű, vagyis ha $x_n \leq b-1$, akkor $x_{n+1} = x_n$. Az előbbi észrevételek alapján a sorozat csökkenő. **(1 pont)**
Mivel alulról korlátos, ezért konvergens, és a határérték egy természetes szám, mert a sorozat természetes számokból áll. **(1 pont)**
Az $x_{n+1} = 0$ csak akkor lehetséges ha $x_n = 0$, mert egy szám számjegyeinek összege bármely számrendszerben csak akkor nulla, ha maga a szám is nulla. Tehát ha van olyan n, amelyre $x_{n+1} = 0$, akkor $x_n = x_{n-1} = \ldots = x_1 = x_0 = 0$. Ebben az esetben a sorozat konstans. **(1 pont)**
Ha $x_0 > 0$, akkor a konvergencia miatt létezik $m, x > 0$ természetes szám, amelyre $x_n = x$, minden $n \geq m$ esetén. Mivel $x_{m+1} = x_m = x$ következik, hogy $0 < x < b$.
Figyeljük meg, hogy az $x_n - x_{n+1}$ különbség kifejezésében $(b-1) \mid (b^j-1)$ minden j természetes szám esetén, tehát $(b-1) \mid (x_n - x_{n+1})$. Ez persze akkor is teljesül ha $x_n = x_{n+1}$.
Ekkor az x_{n+1} szám $(b-1)$-gyel való osztási maradéka megegyezik az x_n szám $(b-1)$-gyel való osztási maradékával.
Így, induktívan az x_0, x számok $(b-1)$-gyel való osztási maradéka azonos. **(2 pont)**
Legyen r az x_0 szám $(b-1)$-gyel való osztási maradéka. Ekkor $b-1$ osztja $x-r$-et, ez csak úgy lehetséges ha $x = r$, amennyiben $r > 0$. **(1 pont)**
Ha $r = 0$, akkor $x = b-1$, mert ez az egyetlen szám az $\{1, \ldots, b-1\}$ halmazban, amely osztható $(b-1)$-gyel. **(1 pont)**
Összegezve, ha $x_0 = 0$, akkor a határérték nulla. Ellenkező esetben legyen r az x_0 szám $(b-1)$-gyel vett osztási maradéka. Ha $r \neq 0$, akkor a határérték r; ha $r = 0$, akkor $b-1$. ■

3. feladat (10 pont). Adott az $(a_n)_{n\geq 0}$ és $(b_n)_{n\geq 0}$ valós számsorozat, valamint az $\alpha \in (0,1)$ valós szám úgy, hogy

$$0 \leq a_{n+1} \leq \alpha \cdot a_n + b_n,$$

minden $n \geq 0$ esetén, és $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$. Igazold, hogy az $(a_n)_{n\geq 0}$ sorozat konvergens és határértéke nulla!

Tőtős György, Zilah

Első megoldás. Hivatalból **(1 pont)**
Írjuk egymás alá az egyenlőtlenségeket az $n, n-1, \ldots, 1, 0$ értékekre, majd rendre szorozzuk be az $1, \alpha^1, \ldots, \alpha^{n-1}, \alpha^n$ számokkal.

$$a_{n+1} \leq \alpha a_n + b_n,$$

$$\begin{aligned}\alpha a_n &\le \alpha^2 a_{n-1} + \alpha b_{n-1},\\ &\vdots\\ \alpha^{n-1} a_2 &\le \alpha^n a_1 + \alpha^{n-1} b_1,\\ \alpha^n a_1 &\le \alpha^{n+1} a_0 + \alpha^n b_0.\end{aligned}$$

Összeadva ezeket kapjuk, hogy

$$a_{n+1} \le \alpha^{n+1} a_0 + \sum_{k=0}^{n} \alpha^{n-k} b_k,$$

minden $n \ge 0$ esetén. **(4 pont)**

Tudjuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha^{n+1} a_0 = 0$, mert $\alpha \in (0,1)$. Továbbá azt is tudjuk, hogy $0 \le a_{n+1}$ minden $n \ge 0$ esetén. Így a fogó tétele alapján elégséges belátnunk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \alpha^{n-k} b_k = 0. \quad \textbf{(1 pont)}$$

Kiemelve az α^n szorzót az összegből, kapjuk, hogy

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha^{n-k} b_k = \alpha^n \sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{\alpha^k} = \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{b_k}{\alpha^k}}{\frac{1}{\alpha^n}}. \quad \textbf{(2 pont)}$$

Az $(\alpha^{-n})_{n\ge 0}$ sorozat növekvő és nem korlátos, így alkalmazhatjuk a Cesàro–Stolz-lemmát és írhatjuk, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \alpha^{n-k} b_k = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{b_{n+1}}{\alpha^{n+1}}}{\frac{1}{\alpha^{n+1}} - \frac{1}{\alpha^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{1-\alpha} = 0. \quad \textbf{(2 pont)}$$

Tehát $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. ■

Második megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

A megoldás menete a

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \alpha^{n-k} b_k = 0$$

határérték belátásánál tér el az előző megoldástól. **(5 pont)**

Az ötlet, hogy nagy k esetén a b_k számok lesznek közel nullához, míg kis k esetén az $\sum\limits_{k} \alpha^{n-k}$ összeg lesz közel nullához. Pontosabban, vizsgáljuk a következő felső becslést

$$\left|\sum_{k=0}^{n} \alpha^{n-k} b_k\right| \le \sum_{k=0}^{n} \alpha^{n-k} |b_k| = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \alpha^{n-k} |b_k| + \sum_{k=\left[\frac{n}{2}\right]+1}^{n} \alpha^{n-k} |b_k|. \quad \textbf{(1 pont)}$$

Tudjuk, hogy a $(b_n)_{n\ge 0}$ sorozat konvergens, ezért korlátos, vagyis létezik $M > 0$ úgy, hogy $|b_n| \le M$, minden $n \ge 0$ esetén. Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges és $\lambda > 0$ rögzített szám úgy, hogy $\lambda(M + \frac{1}{1-\alpha}) = 1$. Ekkor létezik $n_0 > 0$ úgy, hogy minden $n \ge n_0$ esetén $|b_n| < \varepsilon \cdot \lambda$. Következésképpen

$$\left|\sum_{k=0}^{n} \alpha^{n-k} b_k\right| \le M \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \alpha^{n-k} + \varepsilon \cdot \lambda \sum_{k=\left[\frac{n}{2}\right]+1}^{n} \alpha^{n-k}, \quad \textbf{(1 pont)}$$

bármely $n \geq 2n_0$ esetén. A második mértani haladvány összeg tovább növelhető

$$\sum_{k=\left[\frac{n}{2}\right]+1}^{n} \alpha^{n-k} \leq \sum_{k=0}^{n} \alpha^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \alpha^{k} = \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha} \leq \frac{1}{1-\alpha}. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Az első összeg értéke

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \alpha^{n-k} = \frac{\alpha^n - \alpha^{n-\left[\frac{n}{2}\right]-1}}{1-\alpha^{-1}}.$$

Látható, hogy ennek a határértéke 0, ha n tart a végtelenhez, így létezik $n_1 > 0$ úgy, hogy minden $n \geq n_1$ esetén

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \alpha^{n-k} \leq \varepsilon\lambda.$$

Ekkor tetszőleges $n \geq \max\{2n_0, n_1\}$ esetén

$$\left|\sum_{k=0}^{n} \alpha^{n-k} b_k\right| \leq M\varepsilon\lambda + \varepsilon\lambda\frac{1}{1-\alpha} = \varepsilon\left(M + \frac{1}{1-\alpha}\right)\lambda = \varepsilon. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Tehát $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. ■

4. feladat (10 pont). Az $A = (a_{ij})_{i,j=1,2,3} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ mátrix teljesíti a $2A^3 - 7A^2 + 4A + 4I_3 = O_3$ összefüggést. Igazold, hogy a

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

összeg osztható hárommal! ***

Első megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

Tényezőkre bontjuk a $2A^3 - 7A^2 + 4A + 4I_3$ mátrixot.

$$2A^3 - 7A^2 + 4A + 4I_3 = 2A^3 - 4A^2 - 3A^2 + 6A - 2A + 4I_3 = (A - 2I_3)(2A^2 - 3A - 2I_3).$$

A $2A^2 - 3A - 2I_3$ mátrix tovább bontható $(A - 2I_3)(2A + I_3)$ alakra. Tehát

$$O_3 = 2A^3 - 7A^2 + 4A + 4I_3 = (A - 2I_2)^2(2A + I_2).$$

Az előbbi összefüggés alapján

$$\det(2A + I_3)(\det(A - 2I_3))^2 = 0. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

A $\det(2A + I_3)$ egy páratlan szám, mert a kifejtésében csak a főátlón lévő elemek szorzata páratlan, a többi szorzat páros. Tehát $\det(A - 2I_3) = 0$. **(1 pont)**

Jelöljük a kijelentésben szereplő kifejezést S-el. Ekkor tetszőleges $a, b \in \mathbb{Z}$ esetén

$$\det(aA + bI_3) = a^3 \det(A) + a^2 bS + ab^2 \operatorname{Tr}(A) + b^3.$$

Ez igazolható a

$$\begin{vmatrix} b_{11}+b'_{11} & b_{12}+b'_{12} & b_{13}+b'_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b'_{11} & b'_{12} & b'_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix},$$

tulajdonság többszöri alkalmazásával. (**1 pont**)
Ugyanakkor a $(2A+I_3)(A-2I_3)^2 = O_3$ egyenlőségből következik, hogy $(A-2I_3)^2 = O_3$, mert a $2A+I_3$ mátrix invertálható, ahonnan $A^2 = 4A - 4I_3$. Innen

$$(\det A)^2 = 64 \det(A - I_3). \qquad (\textbf{2 pont})$$

Mivel $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$, következik, hogy $\det A, \det(A-I_3) \in \mathbb{Z}$, tehát $64 \mid (\det A)^2$, ahonnan $8 \mid \det A$. Tehát létezik olyan k egész szám, amelyre $\det A = 8k$. (**1 pont**)
Továbbá,

$$\det(A - I_3) = \det A - S + \operatorname{Tr} A - 1.$$

Felhasználva, hogy $\det(A-2I_3) = \det A - 2S + 4\operatorname{Tr} A - 8 = 0$ kapjuk, hogy $8k - 2S + 4\operatorname{Tr} A - 8 = 0$, ahonnan $S = 4k + 2\operatorname{Tr} A - 4$.
A $\det A$-ra és $\det(A - I_3)$-ra levezetett összefüggések alapján

$$\begin{aligned} 64k^2 &= 64(8k - S + \operatorname{Tr} A - 1), \\ \operatorname{Tr} A &= k^2 - 8k + 1 + S, \\ \operatorname{Tr} A &= -k^2 + 4k + 3. \end{aligned} \tag{1}$$

Visszahelyettesítve az S-et megadó kifejezésbe

$$\begin{aligned} S &= 4k + 2(k^2 - 8k + 1 + S) - 4, \\ S &= -2k^2 + 12k + 2. \end{aligned} \tag{2}$$

(**1 pont**)

Mivel $(A-2I_3)^2 = O_3$, következik, hogy $(A-2I_3)^3 = O_3$, vagyis

$$A^3 = 6A^2 - 12A + 8I_3 = 6(4A - 4I_3) - 12A + 8I_3 = 12A - 16I_3.$$

Determinánst számolva $(\det A)^3 = 64\det(3A - 4I_3)$, kifejtve a jobb oldalt és felhasználva, hogy $\det A = 8k$ írhatjuk, hogy

$$8^3k^3 = 64(27\det A - 36S + 48\operatorname{Tr} A - 64).$$

Behelyettesítve az S-re és $\operatorname{Tr} A$-ra kapott kifejezéseket (lásd (1) és (2)) kapjuk, hogy

$$8k^3 = 27 \cdot 8k - 36(-2k^2 + 12k + 2) + 48(-k^2 + 4k + 3) - 64,$$

leegyszerűsítve kapjuk, hogy

$$k^3 = 3k^2 - 3k + 1,$$

vagyis $(k-1)^3 = 0$, tehát $k = 1$. Következésképpen $S = 12$, ami osztható hárommal. (**2 pont**)

■

Második megoldás. Hivatalból **(1 pont)**
Észrevesszük, hogy a kijelentésben az összeg nem más mint $\mathrm{Tr}(A^*)$.
Tényezőkre bontjuk a $2A^3 - 7A^2 + 4A + 4I_3$ mátrixot

$$2A^3 - 7A^2 + 4A + 4I_3 = 2A^3 - 4A^2 - 3A^2 + 6A - 2A + 4I_3 = (A - 2I_3)(2A^2 - 3A - 2I_3).$$

A $2A^2 - 3A - 2I_3$ mátrix tovább bontható az $(A - 2I_3)(2A + I_3)$ alakra. Tehát

$$O_3 = 2A^3 - 7A^2 + 4A + 4I_3 = (A - 2I_2)^2(2A + I_2).$$ **(1 pont)**

A mátrix karakterisztikus egyenlete $\det(A - xI_3) = 0$, azaz

$$x^3 - \mathrm{Tr}(A)x^2 + \mathrm{Tr}(A^*)x - \det(A) = 0.$$ **(1 pont)**

Mivel $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$, következik, hogy $\mathrm{Tr}(A), \mathrm{Tr}(A^*), \det(A)$ egész számok, így $-\frac{1}{2}$ nem lehet megoldása a karakterisztikus egyenletnek, mert a nevezője 2, és ez nem osztja a főegyütthatót, ami 1. Vagyis $\det(2A + I_3) \neq 0$, következésképpen $(2A + I_3)$ invertálható. **(1 pont)**
A $(2A + I_3)(A - 2I_3)^2 = O_3$ egyenlőséget beszorozva a $(2A + I_3)$ mátrix inverzével, azt kapjuk, hogy $(A - 2I_3)^2 = O_3$. **(1 pont)**
Ha $B = A - 2I_3$, akkor $B^2 = O_3$, tehát $(B - yI_3)(B + yI_3) = B^2 - y^2I_3 = -y^2I_3$, vagyis $B - yI_3$ invertálható bármely $y \in \mathbb{C}^*$ esetén. Ez azt jelenti, hogy $\det(B - yI_3) \neq 0$, azaz $\det(A - (y+2)I_3) \neq 0$ egyetlen $y \in \mathbb{C}^*$ esetén sem, azaz $\det(A - xI_3) \neq 0$, ha $x \neq 2$. **(2 pont)**
Mivel a

$$-\det(A - xI_3) = x^3 - \mathrm{Tr}(A)x^2 + \mathrm{Tr}(A^*)x - \det(A) = 0,$$

egyenletnek $x = 2$-n kívül nincs más megoldása, ezért

$$x^3 - \mathrm{Tr}(A)x^2 + \mathrm{Tr}(A^*)x - \det(A) = (x - 2)^3.$$

Következésképpen $\mathrm{Tr}(A^*) = 12$, ami osztható hárommal. **(3 pont)**
■

Megjegyzés. Az utóbbi megoldás másképpen is folytatható, attól kezdve, hogy $(A - 2I_3)^2 = O_3$. A mátrix bármilyen λ sajátértéke teljesíti az $(x - 2)^2 = 0$ egyenletet. Következésképpen

$$\det(A - xI_3) = (-1)^3(x - 2)^3,$$

ahonnan $\mathrm{Tr}(A^*) = 12$, ami osztható hárommal.

12. osztály

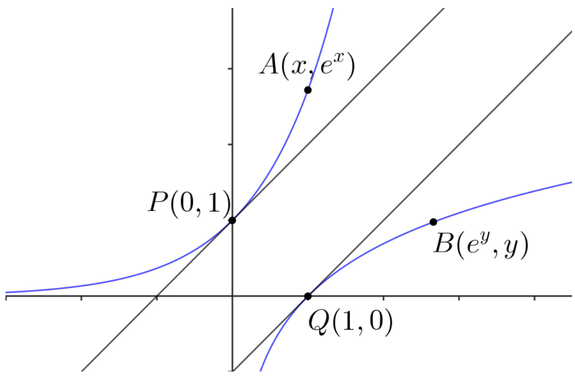
1. feladat (10 pont). Határozd meg az

$$f(x,y)=\sqrt{(x-e^y)^2+(y-e^x)^2}$$

kifejezés minimumát, ha $x,y\in\mathbb{R}$. *Dávid Géza, Székelyudvarhely*

Megoldás. Hivatalból (**1 pont**)
Látható, hogy az $f(x,y)$ az $A(x,e^x)$ és $B(e^y,y)$ pontok távolsága. (**1 pont**)

Tekintsük a $g\colon\mathbb{R}\to(0,+\infty)$, $g(x)=e^x$ függvényt. A g bijektív és konvex, mert $g'(x)>0$, bármely $x\in\mathbb{R}$ esetén, $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=0$, $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=+\infty$ és $g''(x)>0$, bármely $x\in\mathbb{R}$ esetén. Ugyanakkor $g^{-1}\colon(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\ln x$ konkáv függvény. (**1 pont**)
A g és a g^{-1} grafikus képei egymás szimmetrikusai az első szögfelezőre nézve. Az A pont a g függvény grafikus képének egy pontja, a B pedig a g^{-1} függvény grafikus képének egy pontja. Tehát azt kell meghatározni, hogy az AB szakasz hossza mikor lesz minimális. (**1 pont**)



A $P(0,1)$ pontban a g függvény grafikus képének az érintője az $y=x+1$ egyenletű egyenes, míg a g^{-1} függvény grafikus képéhez a $Q(1,0)$ pontban húzott érintő egyenlete $y=x-1$. (**2 pont**)
Mivel g konvex, grafikus képe az $y=x+1$ egyenletű egyenes fölött helyezkedik el. Analóg módon, mivel a g^{-1} konkáv, grafikus képe az $y=x-1$ egyenletű egyenes alatt helyezkedik el. (**1 pont**)
Figyelembe véve, hogy a két egyenes párhuzamos, (**1 pont**)
azt kapjuk, hogy

$$AB\geq PQ=\sqrt{2},$$

mert PQ a két egyenes távolsága. (**1 pont**)
Tehát $\min(f(x,y))=\sqrt{2}$, és ezt az értéket az $x=0,y=0$ esetben veszi fel. (**1 pont**)

■

2. feladat (10 pont). A $(G,\cdot)$ véges csoport esetén létezik olyan $f\colon G\to G$ morfizmus, melyre $f(x^2)=x$, bármely $x\in G$.

a) Igazold, hogy a $(G,\cdot)$ kommutatív csoport!

b) Igazold, hogy ha a G csoport ciklikus, akkor nem lehet páros sok eleme!

c) Határozd meg az összes ilyen f függvényt, ha a G-nek páratlan sok eleme van!

Baja Zsolt, Kolozsvár

Megoldás. Hivatalból (**1 pont**)

a) Tetszőleges $x, y \in G$ esetén

$$xy = f(x^2)f(y^2) = f(x)f(x)f(y)f(y). \quad (\textbf{1 pont})$$

Ugyanakkor

$$xy = f((xy)^2) = f(xyxy) = f(x)f(y)f(x)f(y).$$

Az előbbi észrevételek alapján $f(x)f(x)f(y)f(y) = f(x)f(y)f(x)f(y)$, ahonnan azt kapjuk, hogy

$$f(x)f(y) = f(y)f(x), \quad \forall x, y \in G. \quad (\textbf{1 pont})$$

Másrészt $yx = f(y^2) \cdot f(x^2) = f(x^2) \cdot f(y^2) = xy$.
Tehát $xy = yx$, bármely $x, y \in G$ esetén, azaz a $(G, \cdot)$ kommutatív csoport. (**1 pont**)

b) Feltételezzük, hogy $|G| = 2n$, és hogy a $(G, \cdot)$ ciklikus, tehát létezik $x \in G$ úgy, hogy

$$G = \{x, x^2, x^3, ..., x^{2n-1}, x^{2n} = e\} \text{ és } x^k \neq e, \text{ ha } k \in \{1, 2, 3, ..., 2n-1\}. \quad (\textbf{1 pont})$$

Ekkor $x = f(x^2) = f(x^2 \cdot e) = f(x^2 \cdot x^{2n}) = f(x^{2(n+1)}) = x^{n+1}$, ahonnan azt kapjuk, hogy $x^n = e$, ami ellentmondás, tehát ha G ciklikus, akkor nem lehet páros sok eleme. (**2 pont**)

c) Legyen $|G| = 2n+1$ és x egy tetszőleges elem a G-ből. Ekkor

$$f(x) = f(x \cdot e) = f(x \cdot x^{2n+1}) = f(x^{2n+2}) = f((x^{n+1})^2) = x^{n+1},$$

tehát $f(x) = x^{n+1}$, bármely $x \in G$ esetén. (**1 pont**)
Be kell még látnunk, hogy ez az f valóban csoportmorfizmus. Ha $x, y \in G$ tetszőlegesek, akkor

$$f(xy) = (xy)^{n+1} \quad \text{és} \quad f(x)f(y) = x^{n+1} \cdot y^{n+1}.$$

Az a) alpontban igazoltuk, hogy a $(G, \cdot)$ kommutatív csoport, ezért $(xy)^{n+1} = x^{n+1} \cdot y^{n+1}$, bármely $x, y \in G$ esetén, tehát (**1 pont**)

$$f(xy) = f(x) \cdot f(y), \quad \forall x, y \in G. \quad (\textbf{1 pont})$$

Létezik a feladat c) alpontjában megfogalmazott feltételeknek megfelelő csoport, például a $(\mathbb{Z}_{2n+1}, +)$.

■

3. feladat (10 pont). Számítsd ki az

$$\int (1 + u^2) \ln(1 + \sqrt{2 + u^2})\, du$$

határozatlan integrált!

Szilágyi Zsolt, Kolozsvár

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

Parciális integrálással kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
I &= \int (1+u^2)\ln(1+\sqrt{2+u^2})\mathrm{d}u \\
&= \left(u+\frac{u^3}{3}\right)\ln(1+\sqrt{2+u^2}) - \int \left(u+\frac{u^3}{3}\right)\frac{1}{1+\sqrt{2+u^2}}\cdot\frac{u}{\sqrt{2+u^2}}\mathrm{d}u \\
&= \left(u+\frac{u^3}{3}\right)\ln(1+\sqrt{2+u^2}) - \frac{1}{3}\underbrace{\int \frac{u^4+3u^2}{(1+\sqrt{2+u^2})\cdot\sqrt{2+u^2}}\mathrm{d}u}_{J}.
\end{aligned} \qquad \textbf{(2 pont)}$$

Továbbá

$$\begin{aligned}
J &= \int (u^4+3u^2)\cdot\frac{1}{1+\sqrt{2+u^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2+u^2}}\mathrm{d}u \\
&= \int (u^4+3u^2)\cdot\frac{\sqrt{2+u^2}-1}{1+u^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2+u^2}}\mathrm{d}u \\
&= \int [(1+u^2)(2+u^2)-2]\cdot\left(\frac{1}{1+u^2}-\frac{1}{(1+u^2)\sqrt{2+u^2}}\right)\mathrm{d}u \\
&= \int \left(2+u^2-\frac{2}{1+u^2}-\frac{2+u^2}{\sqrt{2+u^2}}+\frac{2}{(1+u^2)\sqrt{2+u^2}}\right)\mathrm{d}u \\
&= \underbrace{\int\left(2+u^2-\frac{2}{1+u^2}\right)\mathrm{d}u}_{J_1} - \underbrace{\int\sqrt{2+u^2}\mathrm{d}u}_{J_2} + \underbrace{\int\frac{2}{(1+u^2)\sqrt{2+u^2}}\mathrm{d}u}_{J_3}.
\end{aligned} \qquad \textbf{(2 pont)}$$

Rendre kiszámoljuk a három integrált.

$$J_1 = \int\left(2+u^2-\frac{2}{1+u^2}\right)\mathrm{d}u = 2u+\frac{u^3}{3}-2\,\mathrm{arctg}\,u+\mathcal{C}. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

A J_2 integrált parciális integrálással számolhatjuk ki:

$$\begin{aligned}
J_2 &= \int\sqrt{2+u^2}\mathrm{d}u = u\sqrt{2+u^2} - \int\frac{u^2}{\sqrt{2+u^2}}\mathrm{d}u = u\sqrt{2+u^2} - \int\frac{u^2+2-2}{\sqrt{2+u^2}}\mathrm{d}u \\
&= u\sqrt{2+u^2} + \int\frac{2}{\sqrt{2+u^2}}\mathrm{d}u - \int\sqrt{2+u^2}\mathrm{d}u = u\sqrt{2+u^2} + 2\ln(u+\sqrt{2+u^2}) - J_2,
\end{aligned}$$

ahonnan

$$J_2 = \int\sqrt{2+u^2}\mathrm{d}u = \frac{u}{2}\sqrt{2+u^2} + \ln(u+\sqrt{2+u^2}) + \mathcal{C}, \qquad \textbf{(1 pont)}$$

A J_3 kiszámításához $u=\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,t$ helyettesítést fogunk végezni: $\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{2}\mathrm{d}t}{\cos^2 t}$, illetve

$$u^2 = 2\,\mathrm{tg}^2\,t \iff \frac{u^2}{2} = \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} \iff \frac{u^2}{2} = \frac{\sin^2 t}{1-\sin^2 t} \iff \frac{u^2}{2+u^2} = \frac{\sin^2 t}{1} \iff \frac{u}{\sqrt{2+u^2}} = \sin t.$$

Ezek alapján

$$J_3 = \int\frac{2}{(1+u^2)\sqrt{2+u^2}}\mathrm{d}u = \int\frac{2}{(1+2\,\mathrm{tg}^2\,t)\sqrt{2+2\,\mathrm{tg}^2\,t}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\cos^2 t}\mathrm{d}t$$

$$= \int \frac{2\sqrt{2}\cos t}{(\cos^2 t + 2\sin^2 t)\sqrt{2}} \mathrm{d}t = \int \frac{2\cos t}{1+\sin^2 t} \mathrm{d}t = 2\,\mathrm{arctg}(\sin t) + \mathcal{C}$$

$$= 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{u}{\sqrt{2+u^2}} + \mathcal{C}. \qquad \textbf{(2 pont)}$$

Összegezve

$$\int (1+u^2)\ln(1+\sqrt{2+u^2})\mathrm{d}u = \left(u + \frac{u^3}{3}\right)\ln(1+\sqrt{2+u^2}) - \frac{1}{3}\left(2u + \frac{u^3}{3} - 2\,\mathrm{arctg}\,u\right)$$
$$+ \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}u\sqrt{2+u^2} + \ln(u+\sqrt{2+u^2})\right) - \frac{2}{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{u}{\sqrt{2+u^2}} + \mathcal{C}$$
$$= \left(u + \frac{u^3}{3}\right)\ln(1+\sqrt{2+u^2}) + \frac{1}{3}\ln(u+\sqrt{2+u^2}) - \frac{2u}{3} - \frac{u^3}{9}$$
$$+ \frac{u}{6}\sqrt{2+u^2} + + \frac{2}{3}\,\mathrm{arctg}\,u - \frac{2}{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{u}{\sqrt{2+u^2}} + \mathcal{C}. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

■

4. feladat (10 pont). Legyen $(G,\cdot)$ egy 2025 elemű csoport, H egy olyan valódi részcsoportja, amelynek legalább 675 eleme van, és X egy olyan nemüres részhalmaza a G-nek, amelyre $X \cdot H = X$. (Ha $A, B \subset G$, akkor $A \cdot B = \{a \cdot b \mid a \in A, b \in B\}$.)

a) Hány eleme lehet a H-nak?

b) Hány eleme lehet az X-nek?

c) Az X elemszámának minden lehetséges értéke esetén adj példát olyan G-re, H-ra és X-re, amelyekre a fenti feltételek teljesülnek!

András Szilárd, Csíkdelne
Lukács Andor, Kolozsvár

Első megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

a) Lagrange tételéből következik, hogy a H elemeinek a száma osztója 2025-nek. **(1 pont)**
Mivel $2025 = 3^4 \cdot 5^2 = 3 \cdot 675$, ezért a 675 a 2025 legnagyobb valódi osztója. Mivel H valódi részcsoportja a G-nek, és $|H| \geq 675$, ezért $|H| = 675$. **(1 pont)**

b) Legyen $X = \{x_1, x_2, ..., x_k\}$ és $H = \{h_1, h_2, ..., h_{675}\}$, ahol $h_1 = e$ a G semleges eleme. Ekkor

$$X \cdot H = \{x_1h_1, x_2h_1, ..., x_kh_1, x_1h_2, x_2h_2, ..., x_kh_2, ..., x_1h_{675}, x_2h_{675}, ..., x_kh_{675}\}.$$

Ha $m \neq n$, akkor $x_ih_m \neq x_ih_n$, tehát $x_1h_1, x_1h_2, x_1h_3, ..., x_1h_{675}$ páronként különbözőek és elemei az $X \cdot H$ -nak, ezért az X-nek is, tehát X-nek van legalább 675 eleme. **(1 pont)**
Tekintsük az $x_1h_1, x_1h_2, x_1h_3, ..., x_1h_{675}$ elemeket. Ez 675 különböző elem az $X \cdot H$ halmazból, vagyis

az X-ből. Továbbbá tegyük fel, hogy ezek az elemek az $x_1, x_2, ..., x_{675}$. Ha X-nek 675-nél több eleme van, akkor legyen x_{676} egy olyan elem, amely különbözik az $x_1, x_2, ..., x_{675}$ elemektől.
Az $x_{676}h_1, x_{676}h_2, ..., x_{676}h_{675}$ páronként különbözőek és $x_{676}h_i \neq x_p$, ahol $i = \overline{1, 675}$ és $p = \overline{1, 675}$. Valóban, ha $x_{676}h_i = x_p$, akkor $x_{676}h_i = x_1 \cdot h_j$, mert $\{x_1h_1, x_1h_2, x_1h_3, ..., x_1h_{675}\} = \{x_1, x_2, ..., x_{675}\}$, ahonnan azt kapjuk, hogy $x_{676} = x_1 \cdot h_j \cdot h_i^{-1} = x_1 \cdot h$, ahol $h = h_i \cdot h_j^{-1} \in H$. De $x_1 \cdot h \in \{x_1, x_2, ..., x_{675}\}$, ami ellentmondás, mert x_{676} nem eleme a $\{x_1, x_2, ..., x_{675}\}$ halmaznak. (**2 pont**)
Tehát $x_{676}h_1, x_{676}h_2, ..., x_{676}h_{675}$ elemei az $X \cdot H$-nak és ezáltal az X-nek is. Tehát az X-nek van további 675 eleme. Legyenek ezek $x_{676}, x_{677}, ..., x_{1350}$.
Ha X-nek van az $x_1, x_2, ..., x_{1350}$ elemektől különböző eleme, akkor az legyen x_{1351}. Az előbbi gondolatmenet alapján $x_{1351}h_1, x_{1351}h_2, ..., x_{1351}h_{675}$ páronként különbözőek és különbözőek az $x_1, x_2, ..., x_{1350}$ elemektől, tehát az X-nek van további 675 eleme.
Tehát X elemeinek a száma nem lehet más mint $675, 1350$ vagy 2025. (**2 pont**)

c) Legyen $G = (\mathbb{Z}_{2025}, +)$ és $H = \{\hat{0}, \hat{3}, \hat{6}, ..., \widehat{2022}\}$. (**1 pont**)

- Ha $k = 675$, akkor $X = H$ megfelelő.
- Ha $k = 1350$, akkor $X = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{3}, \hat{4}, \hat{6}, \hat{7}, ..., \widehat{2022}, \widehat{2023}\}$ megfelelő.
- Ha $k = 2025$, akkor $X = \mathbb{Z}_{2025}$ megfelelő. (**1 pont**)

■

Második megoldás a b) alpontra. Lagrange tételének a bizonyítását használjuk fel. Eszerint, ha H részcsoportja G-nek, akkor

- minden $g \in G$ esetén $|g \cdot H| = |H|$, mivel tetszőleges $g \in G$ esetén az $f\colon H \to gH$, $f(h) = gh$ függvény injektív és szürjektív, tehát bijektív; (**1 pont**)

- tetszőleges $g_1, g_2 \in G$ esetén, a g_1H és g_2H halmazok vagy diszjunktak, vagy megegyeznek. Valóban, ha létezik $x \in g_1H \cap g_2H$, akkor $x = g_1h_1 = g_2h_2$ valamilyen $h_1, h_2 \in H$ értékekre, tehát $g_1 = g_2h_2h_1^{-1} \in g_2H$, tehát $g_1H \subseteq g_2H$, és analóg módon $g_2H \subseteq g_1H$. (**2 pont**)

Legyen $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$, tehát

$$XH = x_1H \cup x_2H \cup \cdots \cup x_kH.$$

Mivel a gH halmazok páronként diszjunktak, vagy megegyeznek, és mindegyik számossága $|H|$, következik, hogy $|X| = |XH|$ többszöröse $|H|$-nak. (**2 pont**)

■

Országos döntő - II. forduló

9. osztály

1. feladat (10 pont). Határozd meg azokat a p, q, r prímszámokat, amelyekre

$$p \cdot q + 6 = r \cdot (r - 1).$$

Tóth Csongor, Szováta
Spier Tünde, Arad

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**
Mivel $r-1$ és r egymás utáni természetes számok, ezért $r \cdot (r-1)$ páros. **(1 pont)**
Ugyanakkor a 6 páros szám, így a $p \cdot q$ is páros kell legyen, tehát $p = 2$ vagy $q = 2$. **(2 pont)**
Ha $p = 2$, akkor $2q + 6 = r(r-1)$, ahonnan

$$q + 3 = \frac{r(r-1)}{2},$$

innen

$$q = \frac{(r+2)(r-3)}{2}.$$

Mivel $q > 0$, a fenti azonosság szerint $r - 3 > 0$, így r páratlan, azaz $r = 2k + 1$ alakú. Ez alapján

$$q = (2k+3)(k-1).$$

Mivel q prímszám és $2k + 3 > 3$, következik, hogy $k - 1 = 1$, azaz $k = 2$, $r = 5$, valamint $q = 7$.
(4 pont)
Ha $q = 2$, akkor hasonlóan kapjuk, hogy $p = 7$ és $r = 5$. Tehát

$$(p, q, r) \in \{(2, 7, 5), (7, 2, 5)\}.$$ **(2 pont)**

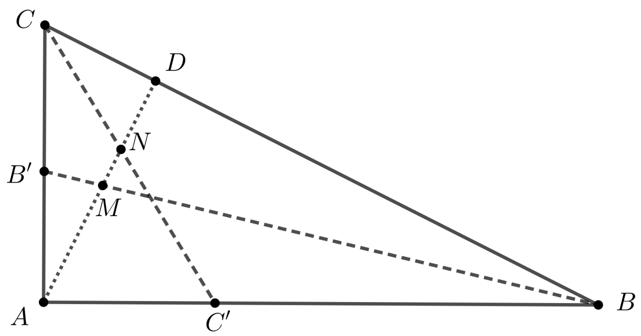
■

2. feladat (10 pont). Az A-ban derékszögű ABC háromszög AD magassága ($D \in BC$) a B és C szögek szögfelezőit az M, illetve N pontban metszi. Igazold, hogy

$$\left(\frac{ND}{AN}\right)^2 + \left(\frac{MD}{AM}\right)^2 = 1.$$

Tóth Csongor, Szováta

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**



Megfelelő ábra elkészítése. (**1 pont**)

Az ACD háromszögben a szögfelezőtétel alapján

$$\frac{ND}{NA} = \frac{CD}{CA}. \qquad (\mathbf{2\ pont})$$

Másrészt a DAC és ABC háromszögek hasonlóak ($\widehat{A} = \widehat{D} = 90°, \widehat{C}$ közös szög), így

$$\frac{CD}{CA} = \frac{CA}{CB}. \qquad (\mathbf{2\ pont})$$

A fentiek alapján

$$\frac{ND}{NA} = \frac{CA}{CB} \Longrightarrow \left(\frac{ND}{NA}\right)^2 = \frac{CA^2}{CB^2}. \qquad (\mathbf{1\ pont})$$

Hasonlóan a BDA háromszögben BM szögfelező, valamint a BDA háromszög hasonló a BAC háromszöggel, tehát

$$\frac{MD}{MA} = \frac{BD}{BA} = \frac{AB}{CB} \Longrightarrow \left(\frac{MD}{AM}\right)^2 = \frac{AB^2}{CB^2}. \qquad (\mathbf{2\ pont})$$

Összeadjuk a két összefüggést, majd alkalmazzuk a Pitagorasz tételét, azt kapjuk, hogy

$$\left(\frac{ND}{NA}\right)^2 + \left(\frac{MD}{AM}\right)^2 = \frac{CA^2}{CB^2} + \frac{AB^2}{CB^2} = \frac{CB^2}{CB^2} = 1. \qquad (\mathbf{1\ pont})$$

■

Megjegyzés. A $\frac{CD}{CA} = \cos C = \sin B$ és $\frac{BD}{BA} = \cos B = \sin C$ összefüggések alapján a megoldás rövidebben is leírható.

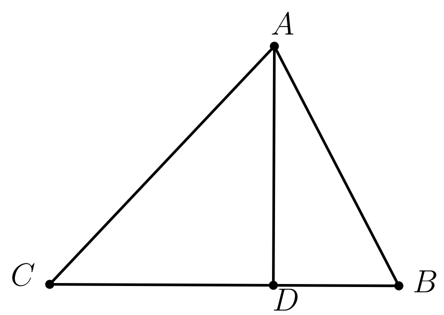
3. feladat (10 pont). Az ABC hegyesszögű háromszögben AD magasság, $D \in BC$. Az AD, AB, BC és CA szakaszok centiméterben kifejezett hosszai egymás utáni természetes számok, ebben a sorrendben.

a) Számítsd ki a ABC háromszög oldalainak hosszát!

b) Igazold, hogy a háromszögbe írt kör sugarának centiméterben kifejezett hossza természetes szám!

Dávid Géza, Székelyudvarhely
Szilágyi Judit, Kolozsvár

Megoldás. Hivatalból (**1 pont**)



a) Legyenek a szakaszok hosszai rendre $AD = n$, $AB = n+1$, $BC = n+2$, $CA = n+3$, ahol $n \in \mathbb{N}^*$. Továbbá legyen $BD = x$, $DC = y$. Ha az ADB és ADC háromszögekben felírjuk Pitagorasz tételét és felhasználjuk a $BC = BD + DC$ egyenlőséget, a következő egyenletrendszerhez jutunk:

$$\begin{cases} x^2 + n^2 = (n+1)^2 \\ y^2 + n^2 = (n+3)^2 \\ x + y = n + 2, \end{cases}$$ **(2 pont)**

amely egyenértékű azzal, hogy

$$\begin{cases} x^2 = 2n + 1 \\ y^2 = 6n + 9 \\ x + y = n + 2. \end{cases}$$

A harmadik egyenletből $y = n + 2 - x$, ahonnan a második egyenlet alapján következik, hogy

$$(n + 2 - x)^2 = 6n + 9,$$

azaz

$$(n + 2)^2 - 2(n + 2)x + x^2 = 6n + 9.$$

Az első egyenlet alapján következik, hogy $(n + 2)^2 - 2(n + 2)x + 2n + 1 = 6n + 9$, vagyis

$$2(n + 2)x = n^2 - 4,$$

ahonnan

$$x = \frac{(n + 2)(n - 2)}{2(n + 2)} = \frac{n - 2}{2}.$$ **(3 pont)**

Visszahelyettesítve az első egyenletbe azt kapjuk, hogy

$$\frac{n^2 - 4n + 4}{4} = 2n + 1,$$

ahonnan következik, hogy $n(n - 12) = 0$. Mivel $n \neq 0$, ezért $n = 12$. **(1 pont)**

Tehát $AB = n + 1 = 13$ cm, $BC = n + 2 = 14$ cm és $AC = n + 3 = 15$ cm. **(1 pont)**

b) Legyen I a háromszögbe írt kör középpontja és r a sugár hossza centiméterben kifejezve. A háromszög területe

$$T = \frac{BC \cdot AD}{2} = \frac{14 \cdot 12}{2} = 84 \text{ cm}^2.$$ **(1 pont)**

Ugyanakkor $T_{ABC} = T_{BIC} + T_{CIA} + T_{AIB}$, ahonnan azt kapjuk, hogy

$$84 = \frac{BC \cdot r}{2} + \frac{CA \cdot r}{2} + \frac{AB \cdot r}{2},$$

ahonnan

$$r = \frac{2 \cdot 84}{BC + CA + AB} = 2 \cdot \frac{84}{42} = 4.$$

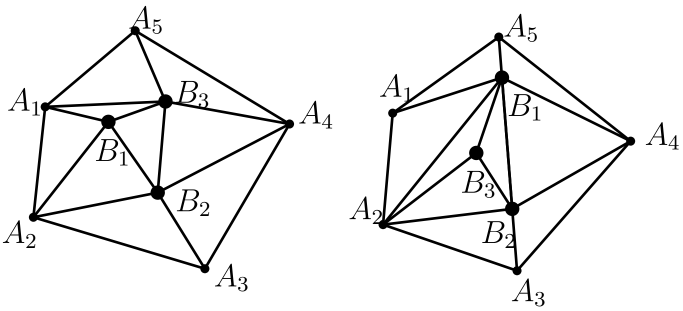
Tehát a beírt kör sugara 4 cm. **(1 pont)**

■

4. feladat (10 pont). Egy 1000 oldalú konvex sokszög belsejében felveszünk n pontot. Jelöljük $\mathcal{H}$-val a sokszög csúcsaiból és a felvett pontokból alló halmazt. A sokszöget osszuk fel páronként diszjunkt belsejű *üres* háromszögekre úgy, hogy a háromszögek csúcsai a $\mathcal{H}$-ból legyenek. Egy háromszöget *üres* háromszögnek nevezünk, ha sem a belsejében, sem az oldalainak belsejében nem tartalmaz $\mathcal{H}$-beli pontot. Az alábbi ábrákon két ilyen felbontást szemléltetünk egy ötszög és a belsejében felvett három pont esetén.

a) Létezik-e olyan n érték, amelyre a felbontás 2025 üres háromszögből áll?

b) Milyen k értékekre létezik olyan $n > 0$, amelyre a felbontás k darab üres háromszögből áll?



Szilgyi Judit, Kolozsvár

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

a) Jelöljük $A_1, A_2, \dots, A_{1000}$-rel a sokszög csúcsait és $B_1, B_2, \dots, B_n$-nel a belső pontokat. Kiszámítjuk a felbontásban szereplő üres háromszögek szögeinek összegét kétféleképpen.
Ha a felbontás 2025 háromszögből áll, akkor ez a szögösszeg $2025 \cdot 180°$. **(1 pont)**
Másrészt az üres háromszögek szögeinek összege egyenlő a sokszög csúcsai körül, illetve a belső pontok körül létrejött szögek összegével. **(1 pont)**
A sokszög A_i csúcsa körül létrejött szögek összege éppen az A_i szög. Így a sokszög csúcsai körül létrejött szögek összege a sokszög szögeinek összegével egyenlő, azaz $180° \cdot (1000 - 2)$. **(2 pont)**
Egy B_i pont körül létrejött szögek összege $360°$, tehát a $B_1, B_2, \dots, B_n$ pontok körül létrejött szögek összege $n \cdot 360°$. **(1 pont)**
A fentiek alapján, ha létezik 2025 üres háromszögből álló felbontás, akkor

$$2025 \cdot 180° = 998 \cdot 180° + n \cdot 360°,$$

ahonnan $2n + 998 = 2025$. **(1 pont)**
Az egyenlőség bal oldala páros, a jobb oldala páratlan, tehát nem létezik ilyen n érték. **(1 pont)**

b) A fenti gondolatmenet alapján

$$k \cdot 180° = 998 \cdot 180° + n \cdot 360°,$$

vagyis

$$2n + 998 = k.$$

Ennek az egyenletnek minden 1000-nél nagyobb vagy egyenlő páros k értékre van megoldása. **(2 pont)**

■

5. feladat (10 pont). Tekintsük a $H = \{6, 7, 8, \ldots, 21\}$ számhalmazt. Igazold, hogy H-ból bárhogy választunk ki 7 számot, a kiválasztottak között létezik 3 olyan, amellyel hegyesszögű háromszög szerkeszthető! *Bíró Béla, Sepsiszentgyörgy*

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**
Az $a < b < c$ számok akkor és csakis akkor lehetnek egy hegyesszögű háromszög oldalhosszúságai, ha $a + b > c$ és $a^2 + b^2 > c^2$. **(2 pont)**
Ezt figyelembe véve tekintsük a H halmaznak a következő diszjunkt részhalmazait:

$$H_1 = \{6, 7, 8, 9\},$$

$$H_2 = \{10, 11, 12, 13, 14\},$$

$$H_3 = \{15, 16, 17, 18, 19, 20, 21\}.$$ **(3 pont)**

Mivel $6+7 > 9$, $6^2+7^2 > 9^2$, továbbá $10+11 > 14$, $10^2+11^2 > 14^2$ és $15+16 > 21$, $15^2+16^2 > 21^2$, ezért a H_1, H_2, H_3 halmazok bármelyikéből választott $a < b < c$ számok teljesítik az $a + b > c$ és $a^2 + b^2 > c^2$ feltételeket. **(2 pont)**
A skatulyaelv alapján a H halmazból választott bármely 7 szám között van három olyan, amely ugyanannak a H_i részhalmaznak eleme. Ez a három szám teljesíti a kért feltételt. **(2 pont)**

■

6. feladat (10 pont). Egy természetes számot teljes hatványnak nevezünk, ha felírható a^b alakban, ahol $a, b \in \mathbb{N}$ és $b \geq 2$. Határozd meg azt a legnagyobb természetes számot, amelyet nem lehet felírni páronként különböző teljes hatványok összegeként! *András Szilárd, Csíkdelne*

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**
Tekintjük az n szám kettes számrendszerbeli felírását. Ha az n szám $4k$ vagy $4k + 1$ alakú ($k \in \mathbb{N}$), akkor a kettes számrendszerbeli alakjának az utolsó előtti számjegye 0, tehát a kettes számrendszerbeli felírása csak páronként különböző teljes hatványokat tartalmaz (ezek mindegyikének az alapja 2).

(2 pont)

Ha $n = 4k + 2 \geq 10$ ($k \in \mathbb{N}$), akkor $n = 4k + 2 = 10 + 4(k - 2) = 9 + 1 + 4(k - 2)$ és a $4(k - 2)$ szám kettes számrendszerbeli reprezentációjával kiegészítve az előbbi felírást (ebben nincs 1-es) megkapjuk az n szám egy lehetséges felírását páronként különböző teljes hatványok összegeként. **(2 pont)**

Ha $n = 4k + 3$ és $n \geq 27$, akkor $n = 27 + 4(k - 6)$, és a $4(k - 6)$ szám kettes számrendszerbeli felírását használva ismét megkapjuk az n-nek egy előállítását páronként különböző hatványok összegeként. Mindezt összevetve ha $n \geq 24$, akkor biztosan felírható páronként különböző teljes hatványok összegeként. **(2 pont)**

A továbbiakban belátjuk, hogy a 23 nem írható fel ilyen alakban. Ha felírható volna, akkor az előállításában csak a $\{0, 1, 4, 8, 9, 16\}$ számok szerepelhetnének. Mivel $1 + 4 + 8 + 9 = 22 < 23$, az előállításban szerepelnie kell a 16-nak. Ekkor viszont a 7 előállítható kellene legyen további páronként különböző teljes hatványok összegeként. Ez viszont nem lehetséges, mert csak a $\{0, 1, 4\}$ teljes hatványok kisebbek mint 7 és ezek összege kisebb, mint 7. (**3 pont**)

■

10. osztály

1. feladat (10 pont). Oldd meg az $x^3 + 8y^3 + 27z^3 - 18xyz = 29$ egyenletet a nullától különböző természetes számok halmazán! *(***)*

Megoldás. Hivatalból (**1 pont**)
Felhasználva az

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$$

összefüggést, szorzattá alakítjuk az egyenlet bal oldalát:

$$\begin{aligned} 29 &= x^3 + 8y^3 + 27z^3 - 18xyz \\ &= x^3 + (2y)^3 + (3z)^3 - 3(x \cdot 2y \cdot 3z) \\ &= (x + 2y + 3z)(x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 2xy - 3xz - 6yz). \end{aligned}$$ (**2 pont**)

Mivel $x, y, z \in \mathbb{N}^*$, $x + 2y + 3z \geq 6$ és 29 prímszám, ezért

$$x + 2y + 3z = 29 \quad \text{és} \quad x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 2xy - 3xz - 6yz = 1.$$ (**1 pont**)

Másrészt,

$$x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 2xy - 3xz - 6yz = \frac{1}{2}\left[(x - 2y)^2 + (x - 3z)^2 + (2y - 3z)^2\right],$$

tehát $(x - 2y)^2 + (x - 3z)^2 + (2y - 3z)^2 = 2$. (**1 pont**)
Ha az $x, 2y, 3z$ számok páronként különböznek egymástól, akkor

$$(x - 2y)^2 + (x - 3z)^2 + (2y - 3z)^2 \geq 3,$$

ami ellentmondás. Így az $x, 2y, 3z$ számok közül legalább kettő egyenlő. (**1 pont**)
Vizsgáljuk az

$$(x - 2y)^2 + (x - 3z)^2 + (2y - 3z)^2 = 2$$

egyenletet aszerint, hogy melyik két kifejezés egyenlő.

I. eset. Ha $x = 2y$, akkor behelyettesítve az $x - 3z$ kifejezésbe kapjuk, hogy $x - 3z = 2y - 3z$. A tárgyalt egyenletből $(2y - 3z)^2 = 1$. Így $2y - 3z = 1$ vagy $2y - 3z = -1$.

(a) Ha $2y - 3z = 1$, akkor $3z = 2y - 1$. Írhatjuk, hogy $x + 2y + 3z = 2y + 2y + 2y - 1 = 29$, ahonnan $6y = 30$, vagyis $y = 5$, és így $x = 10$ és $z = 3$.

(b) Ha $2y - 3z = -1$, akkor $3z = 2y + 1$. Írhatjuk, hogy $x + 2y + 3z = 2y + 2y + 2y + 1 = 29$, ahonnan $6y = 28$, vagyis nincs megoldás a természetes számok halmazán. (**1 pont**)

II. eset. Ha $x = 3z$, akkor behelyettesítve az $x - 2y$ kifejezésbe kapjuk, hogy $x - 2y = 3z - 2y$. A tárgyalt egyenletből $(2y - 3z)^2 = 1$.

Így $2y - 3z = 1$ vagy $2y - 3z = -1$.

(a) Ha $2y - 3z = 1$, akkor $2y = 3z + 1$. Írhatjuk, hogy $x + 2y + 3z = 3z + 3z + 1 + 3z = 29$, ahonnan $9z = 28$, vagyis nincs megoldás a természetes számok halmazán.

(b) Ha $2y - 3z = -1$, akkor $2y = 3z - 1$. Írhatjuk, hogy $x + 2y + 3z = 3z + 3z - 1 + 3z = 29$, ahonnan $9z = 30$, így nincs megoldás a természetes számok halmazán. **(1 pont)**

III. eset. Ha $2y = 3z$, akkor behelyettesítve az $x - 2y$ kifejezésbe kapjuk, hogy $x - 2y = x - 3z$. A tárgyalt egyenletből $(x - 3z)^2 = 1$.

Így $x - 3z = 1$ vagy $x - 3z = -1$.

(a) Ha $x - 3z = 1$, akkor $x = 3z + 1$. Írhatjuk, hogy $x + 2y + 3z = 3z + 1 + 3z + 3z = 29$, ahonnan $9z = 28$, vagyis itt sincs megoldás a természetes számok halmazán.

(b) Ha $x - 3z = -1$, akkor $x = 3z - 1$. Írhatjuk, hogy $x + 2y + 3z = 3z - 1 + 3z + 3z = 29$, ahonnan $9z = 30$, vagyis nincs megoldás a természetes számok halmazán. **(1 pont)**

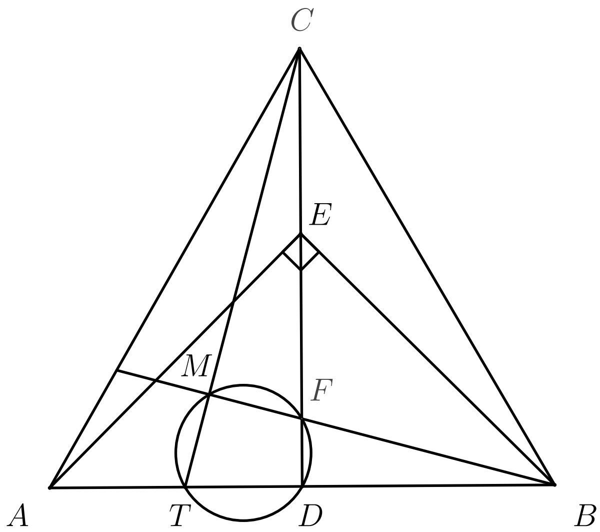
Az esettárgyalásból következik, hogy az egyetlen megoldás $x = 10, y = 5$ és $z = 3$. **(1 pont)**

■

2. feladat (10 pont). Az ABC egyenlő oldalú háromszögben D a C-ből kiinduló magasság talppontja, az E pont a CD szakasz egy pontja úgy, hogy $\widehat{AEB}$ derékszög. Legyen F a C pontnak az E pont szerinti szimmetrikusa. Az $\widehat{ACD}$ szögfelezője az AB oldalt a T pontban, a BF egyenest az M pontban metszi. Igazold, hogy $MTDF$ húrnégyszög!

Rákóczi Erik, Kolozsvár

Első megoldás. Hivatalból **(1 pont)**



Legyen $DB = 1$, ekkor $BC = 2$ és $ED = \frac{AB}{2} = 1$. **(1 pont)**

Mivel az ABC háromszög egyenlő oldalú, ezért $CD = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$, ahonnan

$$EC = CD - ED = \sqrt{3} - 1 \quad \text{és} \quad FD = CD - 2 \cdot EC = \sqrt{3} - 2(\sqrt{3} - 1) = 2 - \sqrt{3}. \quad \textbf{(2 pont)}$$

Ekkor $\operatorname{tg}\widehat{DBF} = \dfrac{FD}{BD} = \dfrac{2-\sqrt{3}}{1} = 2-\sqrt{3}$, ahonnan $\widehat{DBF} = 15°$. (**3 pont**)

De $\widehat{TCD} = \dfrac{\widehat{ACD}}{2} = 15°$, és $CD \perp BD$, így $\widehat{TCD}$ és $\widehat{FBD}$ merőleges szárú szögek, ezért $CM \perp BM$.
Így $\widehat{TMF} + \widehat{TDF} = 180°$, vagyis $MTDF$ körbeírható. (**3 pont**)

■

Megjegyzés. Az $\widehat{FBD} = 15°$ igazolható a $\operatorname{tg} 15° = 2-\sqrt{3}$ összefüggés nélkül is. Valóban, Az EBF háromszögben kiszámíthatjuk szinusztétellel az $x = \angle EBF$ szöget. Mivel az FDB derékszögű háromszög, ezért

$$FB^2 = FD^2 + DB^2 = (2-\sqrt{3})^2 + 1,$$

tehát

$$FB = \sqrt{(2-\sqrt{3})^2 + 1}.$$

Az EBF háromszögben a szinusztételt felírva:

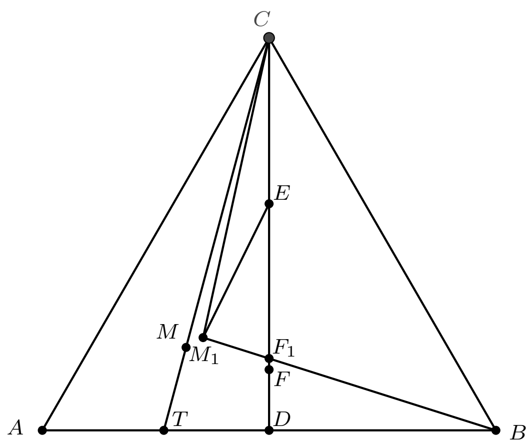
$$\frac{\sin 45°}{\sin x} = \frac{\sqrt{(2-\sqrt{3})^2+1}}{\sqrt{3}-1}.$$

Ebből négyzetre emeléssel kapjuk, hogy

$$\frac{\frac{1}{2}}{\sin^2 x} = \frac{1+(2-\sqrt{3})^2}{4-2\sqrt{3}} = 2,$$

tehát $\frac{1}{4} = \sin^2 x$. Mivel $90° > x > 0$, ezért $\sin x$ pozitív, így $\sin x = \frac{1}{2}$, amelyből $x = 30°$.

Második megoldás. Hivatalból (**1 pont**)
Az AEB_Δ egy félnégyzet. Megszerkesztjük a BC oldalra is befele a CM_1B félnégyzetet és legyen $BM_1 \cap CD = \{F_1\}$. Ekkor $\widehat{M_1CE} = 45° - \widehat{DCB} = 45° - 30° = 15°$. (**1 pont**)



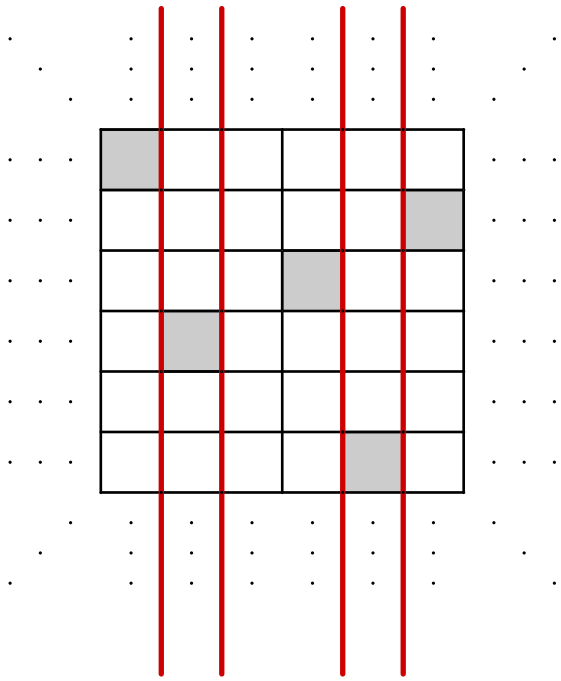
Viszont szimmetriai okok miatt $M_1E \parallel AC$, ahonnan $\widehat{CM_1E} = \widehat{ACM} = \widehat{M_1CE} = 15°$ és CEM_1 egyenlő szárú háromszög, így $CE = EM_1$. (**2 pont**)
Az EM_1F_1 háromszögben $\widehat{EM_1F_1} = 90° - 15° = 75°$ és $\widehat{M_1EF_1} = 30°$ (mivel külső szöge az M_1EC háromszögnek), tehát $\widehat{EF_1M_1} = 75°$, vagyis $EM_1 = EF_1$. (**2 pont**)
Tehát $CE = EF_1$, ami azt jelenti, hogy a szerkesztés után felvett F_1 pont egybeesik a feladatban

szereplő F ponttal. (**1 pont**)
Másrészt $\widehat{M_1CE} = 15°$, de $\widehat{DCA} = 30°$ vagyis M_1 pont rajta van a $\widehat{DCA}$ szögfelezőjén. Ekkor a BF_1 egyenes a $\widehat{DCA}$ szögfelezőjét metszi az M_1 pontban, de BF_1 egyenes azonos a BF egyenessel, vagyis a szerkesztett M_1 pont egybeesik a feladatban megadott M ponttal. (**2 pont**)
Ekkor $\widehat{BM_1C} = \widehat{BMC} = \widehat{BMT} = 90°$, illetve $\widehat{CDA} = 90°$, tehát az $MFDT$ körbeírható. (**1 pont**)
■

3. feladat (10 pont). Adott egy 2025×2025-ös négyzetrács, melyben minden sorban és minden oszlopban egyetlen mező van feketére színezve, minden más mező fehér színű. Egy lépésben kiválasztunk egy sort vagy egy oszlopot és az ebben található mezők színét megváltoztatjuk. Elérhető-e, hogy valahány lépés után két sor vagy két oszlop színezése azonos legyen?

Ugron Szabolcs, Sepsiszentgyörgy

Megoldás. Hivatalból (**1 pont**)
Hogyha van két azonos színezésű oszlop, akkor sorok átszínezésével elérhető, hogy a két oszlop csak fekete (vagy csak fehér) legyen. Tehát a feladat ekvivalens a következővel: elérhető-e, hogy valahány lépés után két sor teljesen fekete legyen? (**3 pont**)
Válasszunk ki két tetszőleges oszlopot. Mivel ezek magasabbak, mint két egységnégyzet, ezér biztosan lesz két olyan sor, amely metszete a kiválasztott oszlopokkal 3 fehér és egy fekete mezőt tartalmaz. (**2 pont**)



Ahhoz, hogy elérjük a két teljesen egyszínű oszlopot, ezt a négy mezőt is teljesen feketére kellene átszínezzük. Ha egy sort vagy oszlopot átszínezünk, a fekete mezők száma vagy változatlan marad, vagy pedig kettővel nő. Tehát ebben a négy mezőben a fekete mezők számának paritása invariáns. Kezdetben egy fekete mező van, így sosem tudjuk elérni a 4 fekete mezőt.
Ha a két kiválasztott oszlopnak van ilyen része, ami nem színezhető teljesen feketére, akkor a két oszlopot sem lehet teljesen feketére színezni. Ez azt jelenti, hogy nem lehet semmilyen más azonos

színezést sem elérni a két oszlopban.
Mivel a kiválasztott oszlopok tetszőlegesek voltak, ezért a bizonyítás teljes. (**4 pont**)

■

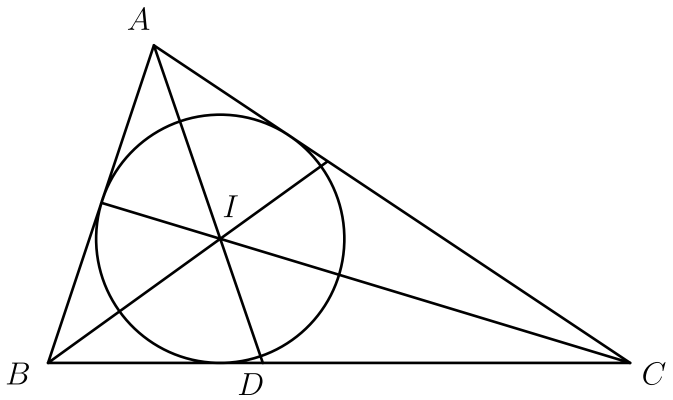
4. feladat (10 pont). Jelöljük I-vel az ABC háromszögbe írt kör középpontját.

a) Igazold, hogy ha az AI egyenes a BC oldalt a D pontban metszi, akkor $\dfrac{AI}{AD} = \dfrac{T_{ABI}+T_{ACI}}{T_{ABC}}$.

b) Igazold, hogy
$$\frac{AI}{\sqrt{p(p-a)}}+\frac{BI}{\sqrt{p(p-b)}}+\frac{CI}{\sqrt{p(p-c)}}\le 2,$$
ahol a, b, c a háromszög oldalai és p a háromszög félkerülete!

Pálhegyi-Farkas László, Nagyvárad

Első megoldás. Hivatalból (**1 pont**)



a) Legyen h a B pontnak, illetve h_1 pedig a C pontnak az AD egyenestől való távolsága. Ekkor
$$\frac{T_{ABI}+T_{ACI}}{T_{ABC}}=\frac{T_{ABI}+T_{ACI}}{T_{ABD}+T_{ADC}}=\frac{\frac{h\cdot AI}{2}+\frac{h_1\cdot AI}{2}}{\frac{h\cdot AD}{2}+\frac{h_1\cdot AD}{2}}=\frac{(h+h_1)\cdot AI}{(h+h_1)\cdot AD}=\frac{AI}{AD}.$$ (**3 pont**)

b)
$$\begin{aligned}\frac{T_{ABI}+T_{ACI}}{T_{ABC}}&=\frac{AB\cdot AI\cdot\sin\frac{A}{2}+AC\cdot AI\cdot\sin\frac{A}{2}}{AB\cdot AC\cdot\sin A}\\&=\frac{(AB+AC)\cdot AI\cdot\sin\frac{A}{2}}{AB\cdot AC\cdot 2\cdot\sin\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{A}{2}}\\&=\left(\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}\right)\cdot\frac{AI}{2\cdot\cos\frac{A}{2}}\\&=\frac{AI\cdot\sqrt{bc}}{\frac{2}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}\cdot\sqrt{p(p-a)}}.\end{aligned}$$

Hasonlóan következik, hogy
$$\frac{T_{ABI}+T_{BCI}}{T_{ABC}}=\frac{BI\cdot\sqrt{ac}}{\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{c}}\cdot\sqrt{p(p-b)}}\quad\text{és}\quad\frac{T_{BCI}+T_{ACI}}{T_{ABC}}=\frac{CI\cdot\sqrt{ab}}{\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\cdot\sqrt{p(p-c)}}.$$ (**3 pont**)

Vegyük észre, hogy

$$\frac{T_{ABI}+T_{ACI}}{T_{ABC}}+\frac{T_{ABI}+T_{BCI}}{T_{ABC}}+\frac{T_{BCI}+T_{ACI}}{T_{ABC}}=\frac{2T_{ABC}}{T_{ABC}}=2. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Felhasználva a mértani és harmonikus közepek közötti egyenlőtlenséget írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned}
2 &= \frac{AI\cdot\sqrt{bc}}{\frac{2}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}\cdot\sqrt{p(p-a)}}+\frac{BI\cdot\sqrt{ac}}{\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{c}}\cdot\sqrt{p(p-b)}}+\frac{CI\cdot\sqrt{ab}}{\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\cdot\sqrt{p(p-c)}}\\
&\geq \frac{AI\cdot\sqrt{bc}}{\sqrt{bc}\cdot\sqrt{p(p-a)}}+\frac{BI\cdot\sqrt{ac}}{\sqrt{ac}\cdot\sqrt{p(p-b)}}+\frac{CI\cdot\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}\cdot\sqrt{p(p-c)}}\\
&= \frac{AI}{\sqrt{p(p-a)}}+\frac{BI}{\sqrt{p(p-b)}}+\frac{CI}{\sqrt{p(p-c)}}. \qquad \textbf{(2 pont)}
\end{aligned}$$

■

Második megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

a) A megoldás és pontozás menete az első megoldással megegyező.

b) Írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\frac{AI}{\sqrt{p(p-a)}}+\frac{BI}{\sqrt{p(p-b)}}+\frac{CI}{\sqrt{p(p-c)}} &= \frac{\frac{r}{\sin\frac{A}{2}}}{\sqrt{bc}\cdot\cos\frac{A}{2}}+\frac{\frac{r}{\sin\frac{B}{2}}}{\sqrt{ac}\cdot\cos\frac{B}{2}}+\frac{\frac{r}{\sin\frac{C}{2}}}{\sqrt{ab}\cdot\cos\frac{C}{2}}\\
&= \frac{2r}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\sqrt{bc}}+\frac{2r}{2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\sqrt{ac}}+\frac{2r}{2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}\sqrt{ab}}\\
&= \frac{2r}{\sqrt{bc}\cdot\sin A}+\frac{2r}{\sqrt{ac}\cdot\sin B}+\frac{2r}{\sqrt{ab}\cdot\sin C} \qquad \textbf{(3 pont)}\\
&= 2r\left(\frac{1}{a\sqrt{bc}}\cdot\frac{a}{\sin A}+\frac{1}{b\sqrt{ac}}\cdot\frac{b}{\sin B}+\frac{1}{c\sqrt{ab}}\cdot\frac{c}{\sin C}\right)\\
&= 2r\left(\frac{2R}{a\sqrt{bc}}+\frac{2R}{b\sqrt{ac}}+\frac{2R}{c\sqrt{ab}}\right)\\
&= 4Rr\left(\frac{1}{a\sqrt{bc}}+\frac{1}{b\sqrt{ac}}+\frac{1}{c\sqrt{ab}}\right)\\
&= 4\cdot\frac{abc}{4T}\cdot\frac{T}{p}\cdot\left(\frac{1}{a\sqrt{bc}}+\frac{1}{b\sqrt{ac}}+\frac{1}{c\sqrt{ab}}\right)\\
&= \frac{1}{p}\left(\sqrt{bc}+\sqrt{ac}+\sqrt{ab}\right) \qquad \textbf{(1 pont)}\\
&\leq \frac{2}{a+b+c}\cdot\left(\frac{b+c}{2}+\frac{a+c}{2}+\frac{a+b}{2}\right)\\
&= \frac{2}{a+b+c}\cdot(a+b+c)=2. \qquad \textbf{(2 pont)}
\end{aligned}$$

Egyenlőség pontosan akkor van, ha $a=b=c$. ■

Harmadik megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

a) A megoldás és pontozás menete az első megoldással megegyező.

b) A szögfelezőtételt használva írhatjuk, hogy $BD = \frac{ac}{b+c}$ és

$$\frac{AI}{ID} = \frac{c}{\frac{ac}{b+c}} = \frac{b+c}{a}.$$

Innen

$$\frac{AI}{AD} = \frac{b+c}{a+b+c}.$$

Fel fogjuk használni, hogy

$$AD = \frac{2\sqrt{bc \cdot p(p-a)}}{b+c}.$$

Ekkor

$$AI = \frac{b+c}{a+b+c} \cdot AD = \frac{2\sqrt{bc \cdot p(p-a)}}{a+b+c}.$$ **(3 pont)**

Így

$$\frac{AI}{\sqrt{p(p-a)}} = \frac{2\sqrt{bc}}{a+b+c}.$$

Hasonlóan

$$\frac{BI}{\sqrt{p(p-b)}} = \frac{2\sqrt{ca}}{a+b+c}, \quad \text{és} \quad \frac{CI}{\sqrt{p(p-c)}} = \frac{2\sqrt{ab}}{a+b+c}.$$ **(1 pont)**

Ekkor

$$\begin{aligned}
\frac{AI}{\sqrt{p(p-a)}} + \frac{BI}{\sqrt{p(p-b)}} + \frac{CI}{\sqrt{p(p-c)}} &= 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{bc}}{a+b+c} + \frac{\sqrt{ca}}{a+b+c} + \frac{\sqrt{ab}}{a+b+c} \right) \\
&= \frac{2}{a+b+c} \cdot \left(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} \right) \\
&\leq \frac{2}{a+b+c} \cdot \left(\frac{a+b}{2} + \frac{b+c}{2} + \frac{c+a}{2} \right) \\
&= \frac{2}{a+b+c} \cdot \frac{2(a+b+c)}{2} \\
&= 2.
\end{aligned}$$ **(2 pont)**

■

5. feladat (10 pont). a) Bizonyítsd be, hogy minden $k \geq 2$ természetes szám esetén létezik olyan $2k$ számjegyű teljes négyzet, amely az első k és az utolsó k számjegyéből alkotott két szám összegének a négyzete!

b) Igazold, hogy az előbbi feltételt teljesítő számok közt végtelen sok k esetén találunk olyat is, amely osztható a számjegyei összegével! Például $k = 2$ esetén egy ilyen szám a 2025.

András Szilárd, Csíkdelne

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

a) Ha az N természetes szám teljesíti a feltételt, akkor felírható $N = x \cdot 10^k + y$ alakban, ahol x az első, y pedig az utolsó k számjegyéből alkotott szám. Így x pontosan k számjegyű és y legfeljebb k számjegyű. A feltételek alapján az

$$x \cdot 10^k + y = (x + y)^2$$

egyenletet megoldásait keressük. (**1 pont**)

Átrendezve az x ismeretlenű

$$x^2 + (2y - 10^k)x + y^2 - y = 0$$

másodfokú egyenlethez jutunk. Ennek diszkriminánsa

$$\Delta = 10^{2k} - 4y \cdot 10^k + 4y, \qquad \textbf{(1 pont)}$$

amely $y = 1$ esetén teljes négyzet. (**1 pont**)

Ebben az esetben $x = 10^k - 2$ és az

$$N = \underbrace{9\ldots9}_{k}{}^2 = \underbrace{99\ldots9}_{k-1}8\underbrace{00\ldots0}_{k-1}1 = (\underbrace{99\ldots9}_{k-1}8 + 1)^2$$

számokhoz jutunk. (**1 pont**)

Megjegyzés. Az $y = \frac{10^k}{4}$ választás is jó minden páros k esetén. Ha $k = 2$, akkor $2025 = 45^2$ és a $3025 = 55^2$.

b) Az N számjegyeinek az összege $9k$, tehát elégséges lenne végtelen sok olyan k számot találni, amelyre

$$(10^k - 1) \vdots 9k.$$

Ez $k = 1$, $k = 3$ és $k = 9$ esetén teljesül, ezért a $k = 3^v$ alakú számokra igazoljuk, hogy általában is teljesül. Ehhez a matematikai indukció módszerét használjuk és a

$$P(v):\quad (10^{3^v} - 1) \vdots 3^{v+2}$$

állítást igazoljuk. A $v \in \{0, 1\}$ esetben igaz, mert $9 \vdots 9$ és $999 \vdots 27$. Ha igaz valamilyen v-re, akkor

$$10^{3^{v+1}} - 1 = (10^{3^v})^3 - 1 = (10^{3^v} - 1)(10^{2\cdot 3^v} + 10^{3^v} + 1),$$

tehát az indukciós feltétel alapján az utóbbi felbontás első zárójele osztható 3^{v+2}-nel, míg a második zárójelben egy 3-mal osztható szám található (a nemnulla számjegyei 1-esek és 3 van belőlük), tehát a szorzat osztható 3^{v+3}-nal. Ezzel igazoltuk, hogy az $N = \underbrace{99\ldots9}_{3^v-1}8\underbrace{00\ldots0}_{3^v-1}1$ számok teljesítik a feltételeket. (**5 pont**)

■

6. feladat (10 pont). a) Az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy tetszőleges másodfokú függvény. Ha az $f(x)$, $f(x+1)$, $f(x+2)$ behelyettesítési értékek egészek valamilyen egész x értékre, akkor igazold, hogy $f(x+n)$ szintén egész, bármilyen n egész szám esetén!

b) Jelöljük $\mathcal{M}$-mel az origó középponttú, 7 egység sugarú körlap belsejében levő rácspontok halmazát (az $A(x, y)$ pontot rácspontnak nevezzük, ha $x, y \in \mathbb{Z}$). Az M halmaz elemei közül legtöbb hány lehet egy másodfokú függvény grafikus képén?

András Szilárd, Csíkdelne

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

a) Legyen $f(x) = ax^2 + bx + c$ alakú, ahol $a, b, c \in \mathbb{R}$. Ekkor

$$\begin{aligned} f(x+1) - f(x) &= a(x+1)^2 + b(x+1) + c - ax^2 - bx - c \\ &= ax^2 + 2ax + a + bx + b + c - ax^2 - bx - c \\ &= 2ax + a + b \ \in \mathbb{Z}\,, \\ f(x+2) - f(x+1) &= a(x+2)^2 + b(x+2) + c - a(x+1)^2 - b(x+1) - c \\ &= ax^2 + 4ax + 4a + bx + 2b + c - ax^2 - 2ax - a - bx - b - c \\ &= 2ax + 3a + b \ \in \mathbb{Z}\,. \end{aligned}$$

Ezeket a kifejezéseket kivonva kapjuk, hogy

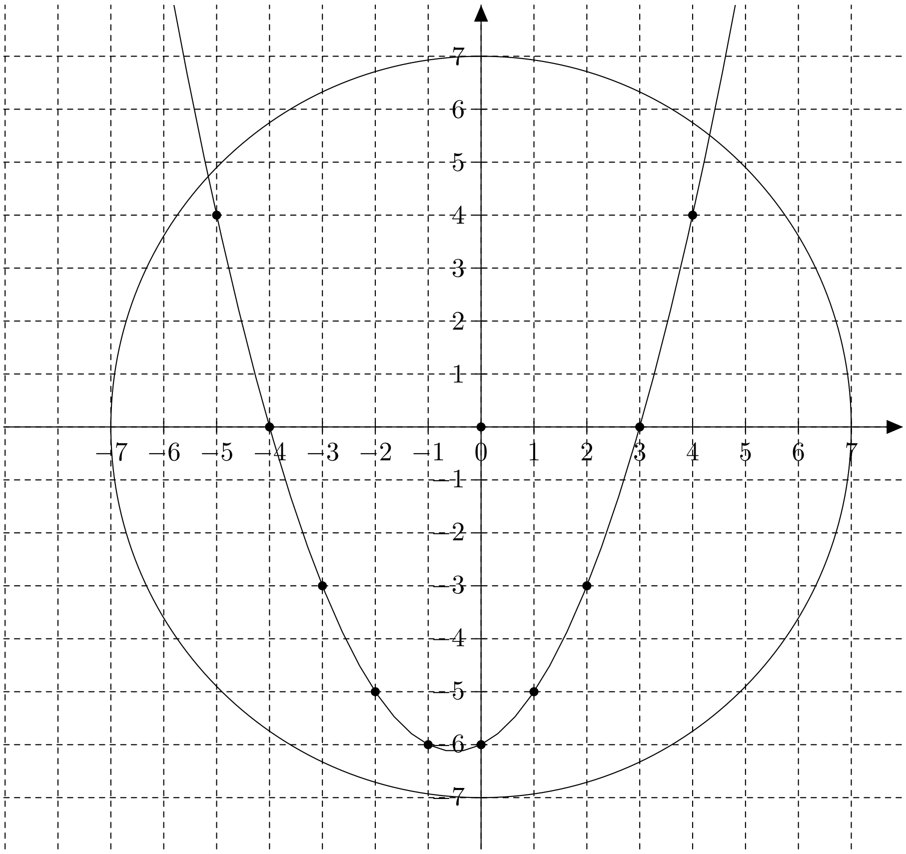
$$f(x+2) + f(x) - 2f(x+1) = 2a \implies 2a \ \in \mathbb{Z}\,.$$

Másrészt

$$\begin{aligned} f(x+n) &= a(x+n)^2 + b(x+n) + c \\ &= ax^2 + 2anx + an^2 + bx + bn + c \\ &= ax^2 + bx + c + 2anx + an^2 + bn \\ &= f(x) + 2anx + an^2 + bn \\ &= f(x) + 2anx + an + an(n-1) + bn \\ &= f(x) + n(2ax + a + b) + an(n-1) \\ &= f(x) + n\left(f(x+1) - f(x)\right) + 2a \cdot \frac{n(n-1)}{2}\,, \end{aligned}$$

ahol az $f(x) \in \mathbb{Z}$, $n\left(f(x+1) - f(x)\right) \in \mathbb{Z}$, $2a \in \mathbb{Z}$ és $\frac{n(n-1)}{2} \in \mathbb{Z}$. Tehát következik, hogy tetszőleges n egész számra az $f(x+n)$ is egész érték. **(3 pont)**

b) A szimmetria miatt feltételezhetjük, hogy $a > 0$. Tekintsük az $f(x+1) - f(x)$ különbséget: $f(x+1) - f(x) = 2ax + a + b$, ami egy elsőfokú függvény, azaz szigorúan monoton, tehát ha az f függvény minden egész x értékre egész értéket vesz fel, akkor a parabola csökkenő vagy növekvő ágán az egymást követő rácspontok ordinátái közt fellépő különbségek nem ismétlődhetnek. **(1 pont)**
Tehát ha lenne 6 pont egy ilyen ágon, akkor a legnagyobb és a legkisebb ordináta közti különbség legalább $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ volna. Ez viszont nem lehetséges, mert a kör átmérője 14. Emiatt ebben az esetben az egy ágra illeszkedő rácspontok száma legfeljebb 5. **(2 pont)**



4. ábra.

Ugyanakkor, ha az f nem minden egész x-re vesz fel egész értéket, akkor bármely három egymást követő egész érték közt legalább az egyikre f nem vehet fel egész értéket. A -6 és 6 között összesen 13 egész szám van, tehát ebben az esetben is legfeljebb $4 \cdot 2 + 1 = 9$ rácspont lehetne a parabolán.

(**1 pont**)

Másrészt a mellékelt 4. ábrán látható $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x(x+1)}{2} - 6$ függvény grafikus képének mindkét ága pontosan 5 rácspontot tartalmaz a körlap belsejéből, tehát az $\mathcal{M}$ halmaz pontjai közül legtöbb 10 illeszkedhet ugyanarra a parabolára. (**2 pont**)

■

11-12. osztály

1. feladat (10 pont). Oldd meg az

$$(xy+6)^2 = x^2 + y^2$$

egyenletet az egész számok halmazán!

Bencze Mihály, Brassó

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**
Legyen $s = x + y$ és $p = xy$. Ekkor az egyenlet $(p+6)^2 = s^2 - 2p$, vagyis $p^2 + 14p + 36 = s^2$. Kialakítva a teljes négyzetet a bal oldalon, kapjuk, hogy $(p+7)^2 - 13 = s^2$, vagyis **(2 pont)**

$$(p+7-s)(p+7+s) = 13. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

Mivel s, p egész számok és 13 prím, ezért négy eset lehetséges:

$$\begin{cases} p+7+s = 13 \\ p+7-s = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} p+7+s = 1 \\ p+7-s = 13, \end{cases} \quad \begin{cases} p+7+s = -13 \\ p+7-s = -1, \end{cases} \quad \begin{cases} p+7+s = -1 \\ p+7-s = -13. \end{cases} \qquad \textbf{(2 pont)}$$

Az első két esetben összeadva a két egyenletet kapjuk, hogy $2p + 14 = 14$, ahonnan $p = 0$. Így $s = 6$ az első esetben, illetve $s = -6$ a másodikban. Ez azt jelenti, hogy $(x, y) \in \{(\pm 6, 0), (0, \pm 6)\}$.
Az utolsó két esetben $p = -14$, ahonnan $s = -6$ a harmadik esetben és $s = 6$ a negyedik esetben. **(2 pont)**

Viszont az

$$\begin{cases} x+y = -6 \\ xy = -14, \end{cases} \quad \begin{cases} x+y = 6 \\ xy = -14 \end{cases}$$

szimmetrikus rendszerek egyikének sincs egész megoldása, mert a megfelelő másodfokú egyenlet diszkriminánsa $6^2 + 4 \cdot 14 = 92$, ami nem teljes négyzet. **(1 pont)**
Tehát a megoldáshalmaz $M = \{(\pm 6, 0), (0, \pm 6)\}$. **(1 pont)**

■

2. feladat (10 pont). Adott egy n oldalú konvex sokszög ($n \geq 4$), amelyet valamilyen módon felbontunk háromszögekre belső pontban egymást nem metsző átlók segítségével. Az adott felbontás esetén nevezzük nullás csúcsnak a sokszög azon csúcsait, amelyekből nem indul ki átló, illetve nevezzük belső háromszögnek azokat, amelyek minden oldala átló. Ha N a nullás csúcsok száma, illetve B a belső háromszögek száma, akkor igazold, hogy

$$N = B + 2.$$

Szilágyi Zsolt, Kolozsvár

Első megoldás. Hivatalból **(1 pont)**
A sokszög háromszögekre való felosztása során három fajta háromszög keletkezik.

1. Olyan háromszög, amelyeknek egy oldala behúzott átló és két oldala a sokszögnek is oldala. Ezek számát jelöljük K-val.

2. Olyan háromszög, amelyeknek két oldala behúzott átló és egy oldala a sokszögnek is oldala. Ezek számát jelöljük M-mel.

3. Olyan háromszög, amelyeknek mindhárom oldala behúzott átló. Ezek a belső háromszögek, amelyek száma B.

(**1 pont**)

Az első fajta háromszög pontosan egy csúcsából nem indul ki behúzott átló, illetve a második és harmadik fajta háromszögek mindegyik csúcsából indul ki behúzott átló. Így a nullás csúcsok száma megegyezik az első fajta háromszögek számával, vagyis $K = N$. (**1 pont**)

A sokszög oldalainak számát kétféleképpen számolhatjuk meg. Egyrészt a sokszög minden oldala pontosan egy háromszögnek oldala. Másrészt az első fajta háromszögek a sokszög oldalaiból $2K$ darabot és a második fajta háromszögek pedig M darabot tartalmaznak, a harmadik fajta háromszögek pedig egyetlen darabot sem tartalmaznak. Ezek alapján a következő összefüggést írhatjuk fel:

$$n = 2K + M. \tag{6}$$

(**2 pont**)

A sokszög behúzott átlóinak kétszeresét kétféleképpen is megszámolhatjuk. Ehhez előbb megszámoljuk, hogy hány háromszögre bontjuk a sokszöget, illetve ehhez hány átlóra van szükség.

Az n oldalú sokszög $n-2$ háromszögre bomlik fel, amit a következőképpen láthatunk be. A sokszög szögeinek összegét kétféleképpen számolhatjuk meg. A sokszög felosztása során a sokszög egy rögzített A csúcsánál található szög felbomlik ezen csúcsot tartalmazó háromszögek A csúcsainál található szögekre. Egyrészt az n oldalú sokszög szögeinek összege $(n-2)\cdot 180°$, másrészt ha h a háromszögek száma, akkor ugyanezen összeg egyenlő $h \cdot 180°$-val, ahonnan a háromszögek száma $h = n-2$. (**1 pont**)

A háromszögekre bontás során összesen $n-3$ darab átlót húzunk be, amit a következőképpen tudunk belátni. Mielőtt behúznánk az első átlót a sokszög egy darabból áll. Az első átló behúzásával két részre bontjuk a sokszöget. A második átló behúzásával az egyik darabot újra két részre bontjuk, tehát három darabra bomlik a sokszög. Minden újabb átló behúzásával egy meglévő darabot bontunk ketté, így eggyel növelve a darabok számát. Tehát k átló behúzása után $k+1$ darabra bomlik a sokszög. Ha a sokszög $n-2$ háromszögre bontásához k darab átlóra van szükség, akkor $k+1 = n-2$, ahonnan $k = n-3$. (**1 pont**)

A sokszög minden behúzott átlója pontosan két háromszögnek oldala. Továbbá a behúzott átlókból az első fajta háromszögek K darabot, a második fajta háromszögek $2M$ darabot, a harmadik fajta háromszögek pedig $3B$ darabot tartalmaznak. Tehát

$$2(n-3) = K + 2M + 3B. \tag{7}$$

(**2 pont**)

A (7) egyenlőségből kivonva a (6) egyenlőség kétszeresét kapjuk, hogy

$$2\cdot(n-3) - 2n = (K + 2M + 3B) - 2\cdot(2K + M) \iff -6 = -3K + 3B \iff K = B + 2$$

Mivel $K = N$, így kapjuk, hogy $N = B + 2$. (**1 pont**)

■

Második megoldás. Hivatalból (**1 pont**)
Nevezzük nullás háromszögnek azokat a felbontásban szereplő háromszögeket, amelyeknek van nullás csúcsa. Matematikai indukcióval belátjuk, hogy bármilyen felbontásban lesz legalább két nullás háromszög. Az állítás $n = 4$ esetén igaz. Ha elfogadjuk az állítást tetszőleges $k > 4$ oldalú sokszög tetszőleges felbontására, és egy, a felbontásban szereplő átló mentén két részre osztjuk a sokszöget, akkor

- ha az egyik rész háromszög, akkor ez az eredeti háromszögnek nullás háromszöge volt, és a másik résznek van legalább két nullás háromszöge, amelyek közül csak az egyik lehet a vágáshoz használt átló mentén;
- ha mindkét rész legalább négyszög, akkor az indukciós feltevés szerint mindkét részben lesz legalább két nullás háromszög, amelyek közül legfennebb egy-egynek lehet az egyik oldala a vágáshoz használt átló.

A matematikai indukció elve alapján tehát az állítás igaz minden $n \geq 4$ oldalú sokszögre. (**5 pont**)
Belátjuk, hogy a feladat állítása igaz, ismét matematikai indukcióval. Ha $n = 4$, az állítás igaz. Tegyük fel, hogy az állítás igaz tetszőleges k csúcsú konvex sokszög esetén és legyen P egy tetszőleges $k+1$ csúcsú konvex sokszög, amelyet tetszőlegesen felbontottunk háromszögekre a feltételek szerint. Válasszunk ki egy nullás háromszöget (ami biztosan létezik). Jelölje Q azt a felbontott k-szöget, amelyet úgy kapunk a P-ből és a felbontásából, hogy levágjuk a kiválasztott háromszöget. Két esetet különböztetünk meg:

- Ha a levágott háromszög megmaradó oldala a P felbontásában belső háromszöghöz tartozik, akkor $N_P = N_Q + 1$ és $B_P = B_Q + 1$.
- Ha a levágott háromszög megmaradó oldala a P felbontásában nullás háromszöghöz tartozik, akkor $N_P = N_Q$ és $B_P = B_Q$.

Mindkét esetben azt kapjuk, hogy $N_P = B_P + 2$. (**4 pont**)
■

Harmadik megoldás. Hivatalból (**1 pont**)
Az egyenlőséget a csúcsok száma szerinti indukcióval igazoljuk. Az $n = 4$ esetben a négyszög egyetlen átlóval két háromszögre osztható és a négyszögnek két csúcsa van, amelyből nem indul ki átló. Tehát $B = 0$ és $N = 2$. (**1 pont**)
Feltételezzük, hogy minden n-nél kisebb oldalszámú konvex sokszögre igaz a tulajdonság, ahol n legalább 5. Be fogjuk látni, hogy az n oldalú sokszögekre is igaz.
Jelöljük K-val a megadott n oldalú konvex sokszöget. Legyen PQ a K felbontásában szereplő egyik átló. A PQ átló az n oldalú K sokszöget két, K_1 és K_2 konvex sokszögre bontja. A K felbontása származtatja a K_1, illetve K_2 sokszögek egy-egy háromszögekre való felbontását egymást nem metsző átlókkal. Megjegyezzük, hogy a K sokszög PQ átlója a K_1 és K_2 sokszögeknek oldala, illetve a K nullás csúcsai egyben a K_1 és K_2 sokszögeknek is nullás csúcsai. (**1 pont**)
Jelölje N_1 és N_2 a K azon nullás csúcsainak számát, amelyek a K_1-nek, illetve K_2-nek is csúcsai. Mivel P és Q nem nullás csúcsai a K-nak, ezért

$$N = N_1 + N_2. \tag{8}$$

Jelölje B_1 és B_2 a K azon belső háromszögeinek számát, amelyek a K_1-nek, illetve K_2-nek is (nem feltétlen belső) háromszögei. Ekkor

$$B = B_1 + B_2.$$ (**2 pont**)

Megjegyezzük, hogy a K_1 és K_2 belső háromszögei a K-nak is belső háromszögei. A K azon két háromszöge, amelynek egyik oldala a PQ átló, azok lehetnek a K belső háromszögei, de nem belső háromszögek a K_1 és K_2 sokszögekben. Mivel $n \geq 5$, ezért a K_1 és K_2 sokszögek nem lehetnek egyszerre háromszögek. Tegyük fel, hogy K_1 biztosan nem háromszög, illetve K_2 lehet háromszög vagy sem. (**1 pont**)
Jelölje Δ a K_1 felbontásában azt a háromszöget, amelynek egyik oldala a PQ. A K_1 sokszög P és Q szomszédos csúcsainak valamelyikéből ki kell induljon legalább egy átló.

- Először tekintjük azt az esetet, amikor csak az egyik csúcsból indul ki átló, például a P-ből kiindul átló, de a Q-ból nem. Ekkor a Δ nem belső háromszöge sem a K sokszögnek, sem a K_1 sokszögnek, ezért a K_1 belső háromszögeinek száma egyenlő B_1-gyel. A Q nullás csúcsa a K_1 sokszögnek, míg a P nem, így a K_1 nullás csúcsainak száma egyenlő $(N_1 + 1)$-gyel. A K_1 sokszögre használva az indukciós feltevést kapjuk, hogy $(N_1 + 1) - B_1 = 2$, ahonnan $N_1 - B_1 = 1$. (**1 pont**)

- Most tekintjük azt az esetet, amikor a K_1 sokszög P és Q csúcsaiból indul ki átló. Ekkor a P és Q nem nullás csúcsai a K_1 sokszögnek, tehát a K_1 sokszög nullás sokszögeinek száma egyenlő N_1-gyel. A Δ háromszög belső háromszöge a K-nak, de nem belső háromszöge a K_1-nek, ezért a K_1 belső háromszögeinek száma egyenlő $(B_1 - 1)$-gyel. A K_1 sokszögre használva az indukciós feltevést kapjuk, hogy $N_1 - (B_1 - 1) = 2$, ahonnan $N_1 - B_1 = 1$. (**1 pont**)

Ezzel beláttunk, hogy a K_1 (legalább 4 oldalú) konvex sokszögben

$$N_1 - B_1 = 1. \tag{9}$$

Végül két esetet különböztetünk meg aszerint, hogy K_2 legalább négyszög vagy csak háromszög.

- Ha K_2 legalább négyszög, akkor a fenti tárgyaláshoz hasonlóan belátható, hogy $N_2 - B_2 = 1$. Innen a (8), (**2 pont**), (9) összefüggések felhasználásával kapjuk, hogy

$$N - B = (N_1 + N_2) - (B_1 + B_2) = (N_1 - B_1) + (N_2 - B_2) = 1 + 1 = 2. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

- Ha K_2 háromszög, akkor K-nak nem esik belső háromszöge a K_2-be, így $B = B_1$. Továbbá a K_2 azon csúcsa, amely nem esik egybe a P és Q-val a K sokszög nullás csúcsa, így a $N = N_1 + 1$. Ezekből a (9) összefüggés felhasználásával kapjuk, hogy

$$N - B = (N_1 + 1) - B_1 = 1 + N_1 - B_1 = 2. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

■

3. feladat (10 pont). Egy $30\,\mathrm{cm}^2$ területű ABC háromszög mindhárom szögének tangense egész szám. Mekkora a háromszög köré írható kör sugara?

Kaiser Dániel, Kolozsvár

Megoldás. Hivatalból (**1 pont**)
A feltételek alapján a háromszög nem lehet derékszögű, tehát

$$\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C. \qquad \textbf{(1 pont)}$$

A $\operatorname{tg} A = x, \operatorname{tg} B = y, \operatorname{tg} C = z$ jelölésekkel az $x + y + z = xyz$ egész megoldásait keressük. A szimmetria miatt feltételezhetjük, hogy $x \leq y \leq z$. Mivel egy háromszögnek legfeljebb egy tompaszöge lehet, ezért $y, z \in \mathbb{N}^*$. Ha $x < 0$, akkor az

$$x(1 - yz) = -y - z$$

egyenlőség alapján $1 - yz > 0$, ami ellentmondás. **(2 pont)**

Ha $x > 0$, akkor $0 < x \leq y \leq z$ alapján $x + y + z \leq 3z$, tehát $xyz \leq 3z$, vagyis $xy \leq 3$. Mivel $x, y \in \mathbb{N}^*$, ezért csak az $x = 1$, $y = 1$, az $x = 1$, $y = 2$ vagy az $x = 1$, $y = 3$ esetek lehetségesek. Az első és a harmadik esetben ellentmondáshoz jutunk, a másodikban pedig az $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$ megoldáshoz. Tehát a háromszög szögei csak $\operatorname{arctg} 1$, $\operatorname{arctg} 2$ és $\operatorname{arctg} 3$ lehetnek. **(3 pont)**

Másrészt

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg} 2) = \frac{1 + 2}{1 - 1 \cdot 2} = -3,$$

tehát $\operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} 3 = \pi$, vagyis az előbbi szögek valóban egy háromszög szögei. **(1 pont)**

A $T = \frac{abc}{4R}$ összefüggés és a szinusztétel alapján adódik a $T = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$ összefüggés. Másrészt, a $\sin^2 t = \frac{\operatorname{tg}^2 t}{1+\operatorname{tg}^2 t}$ összefüggés alapján $\sin A = \frac{3}{\sqrt{10}}$, $\sin B = \frac{2}{\sqrt{5}}$ és $\sin C = \frac{1}{\sqrt{2}}$, tehát

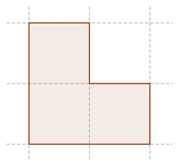
$$R = \sqrt{\frac{30}{2 \cdot \frac{6}{10}}} = 5.$$ **(2 pont)**

■

4. feladat (10 pont). Egy $2n \times 2n$-es, $4n^2$ egységnégyzetből álló négyzet alakú tábla egyik egységnégyzetét kivettük.

a) Bizonyítsd be, hogy ha $n \in \{1, 2, 4\}$, akkor a megmaradt rész hézag és átfedés nélkül lefedhető az alábbi ábrán látható, 3 egységnégyzetből álló alakzat segítségével, ha ebből elégséges számú áll a rendelkezésünkre, és ezeket bármilyen pozícióban elhelyezhetjük a táblán!

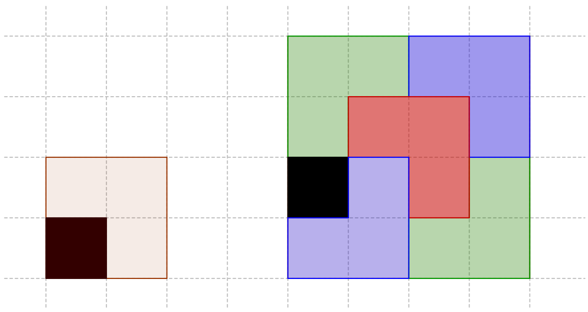
b) Határozd meg az összes olyan $n \in \mathbb{N}^*$ számot, amely esetén a megmaradt rész hézag és átfedés nélkül lefedhető az előbbi alakzatok segítségével!



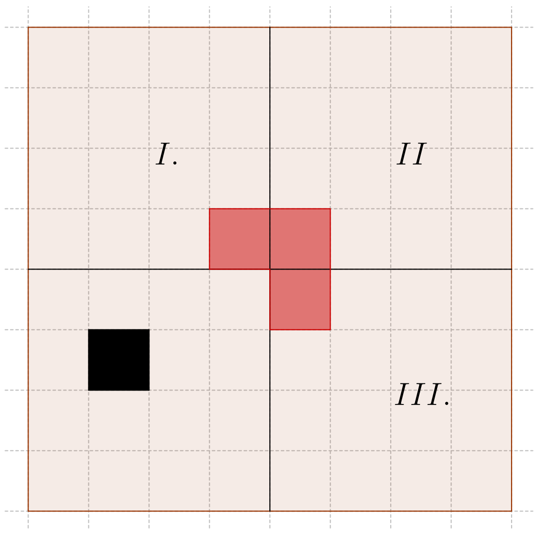
András Szilárd, Csíkdelne

Megoldás. Hivatalból **(1 pont)**

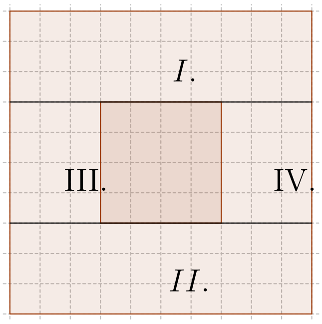
a) 2×2-es tábla esetén ha kiveszünk egy egységnégyzetet, a maradék pontosan egy olyan alakzat lesz, ami a kijelentésben szerepel. A továbbiakban nevezzük ezt az alakzatot L-triminónak. 4×4-es tábla esetén vágjuk szét a táblát 4 darab 2×2-es táblára. A szimmetria miatt elégséges azt megvizsgálni, hogy lefedhető-e a maradék, ha a bal alsó 2×2-es részből vesszük ki az egységnégyzetet. Így a bal alsó 2×2-es rész lefedhető lesz és a többi három 2×2-es rész mindegyikéből kivesszük az eredeti tábla középpontját tartalmazó egységnégyzetet. Így a maradékok ismét lefedhetők L-triminókkal és a 2×2-es részek összeillesztése után a középen üresen maradó három egységnégyzetre illeszkedik egy L-trimínó. (**2 pont**)

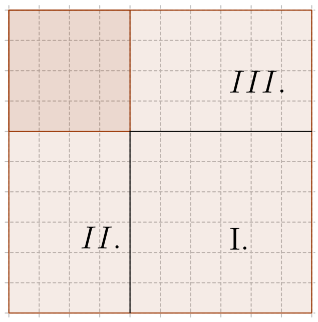


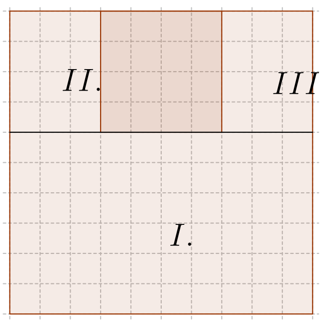
Hasonló gondolatmenettel beláthatjuk, hogy a 8×8-as táblán is lefedhető a maradék L-triminókkal ha egy tetszőleges egységnégyzetet kiveszünk: ha a bal alsó 4×4-es részből kiveszünk egy egységnégyzetet, akkor az lefedhető marad, ha a többi három 4×4-es részből kivesszük az eredeti tábla középpontjára illeszkedő egységnégyzeteket, akkor L-triminókkal lefedhető részeket kapunk és a középpont körül a három egységnégyzet helyére egy L-trimínó illeszkedik. (**2 pont**)



b) 10×10-es tábla esetén az ötlet az, hogy az eredeti táblát felvágjuk egy olyan részre, amelyről kiveszünk egy egységnégyzetet és a maradék lefedhető lesz (itt 4×4-es részt használunk) és a többit olyan részekre, amelyek biztosan lefedhetők. Ehhez vegyük észre, hogy ha egy téglalap egyik oldala páros, a másik 3-mal osztható, akkor a téglalap felbontható 3×2-es darabokra és ezek lefedhetők. A következő három ábra mutatja, ezeket a szétvágásokat aszerint, hogy a kivett egységnégyzet hol helyezkedik el az eredeti táblán (a szimmetria miatt további esetekre nincs szükség). (**2 pont**)







A továbbiakban ugyanezt a konstrukciót használjuk csak induktívan $(2k) \times (2k)$ méretű tábláról $(2k+6) \times (2k+6)$ méretű táblára úgy, hogy a $(2k) \times (2k)$ méretű táblát előbb a nagyobb tábla közepére helyezzük (így marad egy három egységnyi szélességű keret), majd az egyik csúcsába és végül valamelyik oldal közepére. Mindhárom esetben a $(2k) \times (2k)$ méretű táblán kívüli részek lefedhetőek lesznek 3×2-es téglalapokkal, tehát L-triminókkal is és az indukciós feltevés alapján a $(2k) \times (2k)$ méretű tábláról elhagyva egy egységnégyzetet az is lefedhető lesz. Így a 8×8-as táblából kiindulva rendre megkapjuk a 14×14-es, 20×20-as és általában a $(6k+2) \times (6k+2)$-es táblákat és a 10×10-es táblából kiindulva a $(6k+4) \times (6k+4)$-es táblákat. Ha $n \,\vdots\, 3$, akkor a megmaradt részen a mezők száma nem osztható hárommal, tehát ebben az esetben a lefedés nem valósítható meg. Tehát a maradék pontosan akkor fedhető le, ha n nem osztható 3-mal. (**3 pont**)

■

5. feladat (10 pont). Legyen ABC egy egyenlő szárú háromszög, amelyben a $\widehat{BAC} = 100°$. Az ABC szög szögfelezője az AC oldalt E pontban, az EBC szög szögfelezője az AC oldalt pedig D pontban metszi. Megszerkesztjük az ABE háromszög AF magasságát és az ABD háromszög AG magasságát. Legyen H az AF és BC egyenesek metszéspontja.

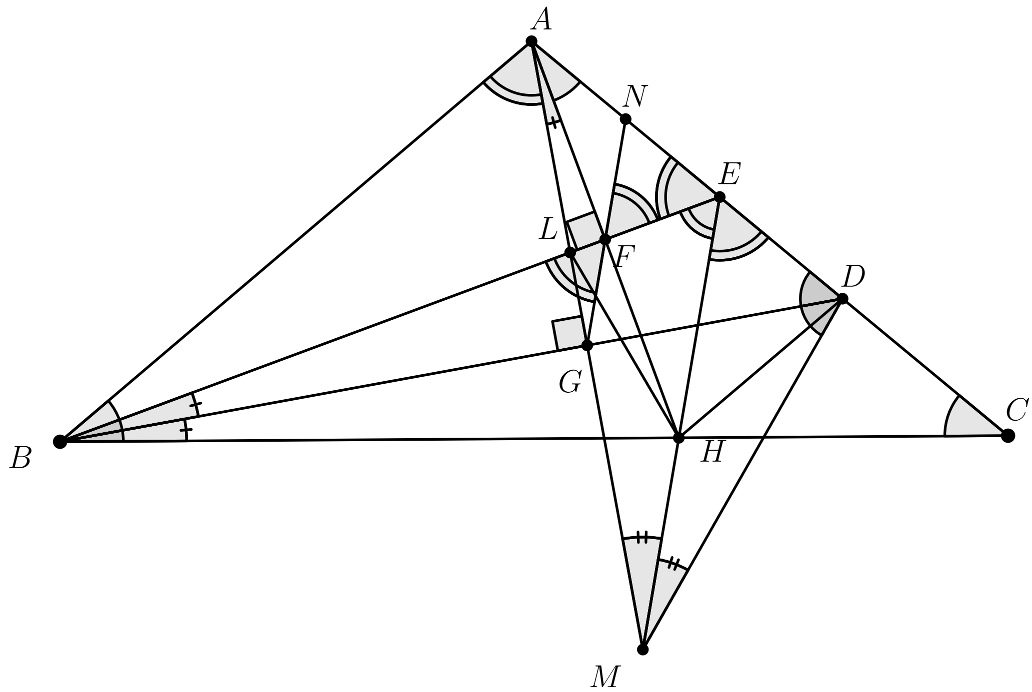
a) Igazold, hogy $FG \parallel HE$.

b) Bizonyítsd be, hogy a $HD \parallel AB$.

Mészár Julianna, Nagyszalonta
Pálhegyi-Farkas László, Nagyvárad

Megoldás. Hivatalból (**1 pont**)

a) A feladat feltételei alapján $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = 40°$, $\widehat{ABE} = \widehat{EBC} = 20°$, $\widehat{EBD} = \widehat{DBC} = 10°$, tehát $\widehat{ABG} = 30°$. (**2 pont**)



A fentiek alapján az ABF derékszögű háromszögből $\widehat{BAF} = 70°$, az ABG derékszögű háromszögből $\widehat{BAG} = 60°$, tehát $\widehat{FAG} = 10°$ és $\widehat{FAE} = 30°$.
Az AEF derékszögű háromszögből $\widehat{AEF} = 60°$. **(1 pont)**
A BF az AHB háromszögben szögfelező és magasság is, tehát BF az AH felezőmerőlegese. Így $\widehat{HEF} = \widehat{AEF} = 60°$ **(1 pont)**
Az $ABGF$ húrnégyszög, mert $\widehat{AFB} = \widehat{AGB} = 90°$, tehát $\widehat{BAG} = \widehat{BFG} = 60°$.
Az eddigiek alapján $\widehat{BEH} = \widehat{BFG} = 60°$, tehát $HE \parallel FG$.

b) Legyen $\{N\} = GF \cap AC$. Ekkor $\widehat{NFE} = \widehat{BFG} = 60°$, tehát a $30° - 60° - 90°$-os háromszögben FN oldalfelező. **(1 pont)**
Legyen $\{M\} = EH \cap AG$. Az AEM háromszögben $NG \parallel ME$ és N az AE felezőpontja, tehát NG középvonal, így G az AM felezőpontja, ahonnan DG az AM felezőmerőlegese. Következésképpen az ADM háromszög egyenlő szárú. Tehát szögei $\widehat{DAM} = \widehat{DMA} = 40°$ és $\widehat{ADM} = 100°$. **(1 pont)**
Az AEM háromszögből $\widehat{AME} = 20°$, tehát EM az LED és LMD szögnek is szögfelezője, ahonnan EM az LD felezőmerőlegese, ahol $\{L\} = AG \cap BE$. Ez alapján $LEH_\Delta \equiv DEH_\Delta$, innen $\widehat{EDH} = \widehat{ELH}$. **(1 pont)**
Mivel LF az AH felezőmerőlegese, következik, hogy $\widehat{LHF} = \widehat{LAF} = 10°$, tehát $\widehat{FLH} = 80°$. **(1 pont)**
Az előzőek alapján $\widehat{EDH} = 80°$, tehát $\widehat{CDH} = 100° = \widehat{BAC}$, ahonnan $AB \parallel DH$. **(1 pont)**

■

6. feladat (10 pont). Bizonyítsd be, hogy végtelen sok olyan nem nullában végződő N teljes négyzet létezik, amely osztható a számjegyei négyzetösszegével, és amelyre N-et elosztva a számjegyei négyzetösszegével a hányados is négyzetszám!

András Szilárd, Csíkdelne

Megoldás. Hivatalból (**1 pont**)
Ahhoz, hogy a feltétel teljesüljön a számjegyek négyzetösszege is négyzetszám kell legyen. (**1 pont**)
Ezért szerkesszünk olyan számokat, amelyekben a számjegyek négyzetösszege egy előre rögzített négyzetszám, és amelynek az alakját valamilyen képletekkel le tudjuk írni.
A számjegyek négyzetösszegét tudjuk kontrollálni, ha olyan számokat szerkesztünk, amelyekben a számjegyeket ismerjük. Erre a legegyszerűbb megoldás, ha a binom négyzetének kifejtése alapján két számjegy közé 0-kat írunk:
$12^2 = 144 \Leftrightarrow 1002^2 = 1004004$. Az $1^2+4^2+4^2 = 33$ nem négyzetszám, ezért keresnünk kell egy olyan esetet, ami ezt a követelményt teljesíti. Egy ilyen például a

$$205^2 = (200+5)^2 = 40000 + 2000 + 25 = 42025,$$

amelyben a számjegyek négyzetösszege 49. (**4 pont**)

$$2\underbrace{00\ldots0}_{k-1}5^2 = (2\cdot 10^k+5)^2 = 4\cdot 10^{2k} + 2\cdot 10^{k+1} + 25 = 4\underbrace{00\ldots0}_{k-2}2\underbrace{00\ldots0}_{k-1}25,$$

tehát elégséges, ha találunk végtelen sok olyan k értéket, amelyre

$$2\underbrace{00\ldots0}_{k-1}5 \equiv 0 (\text{mod } 7).$$

Ez rendre ekvivalens az alábbiakkal:

$$\begin{aligned} 2\cdot 10^k + 5 &\equiv 0(\text{mod } 7,) \\ 2\cdot 10^k &\equiv 2(\text{mod } 7), \\ 10^k &\equiv 1(\text{mod } 7). \end{aligned}$$

Másrészt a kis-Fermat tétel (vagy Euler-tétel, vagy egyszerűen számolás) alapján

$$10^6 \equiv 1(\text{mod } 7),$$

tehát

$$10^{6n} \equiv 1(\text{mod } 7)$$

és így a $(2\cdot 10^{6n}+5)^2, n \geq 1$ számok teljesítik a kért feltételeket. (**4 pont**)

■