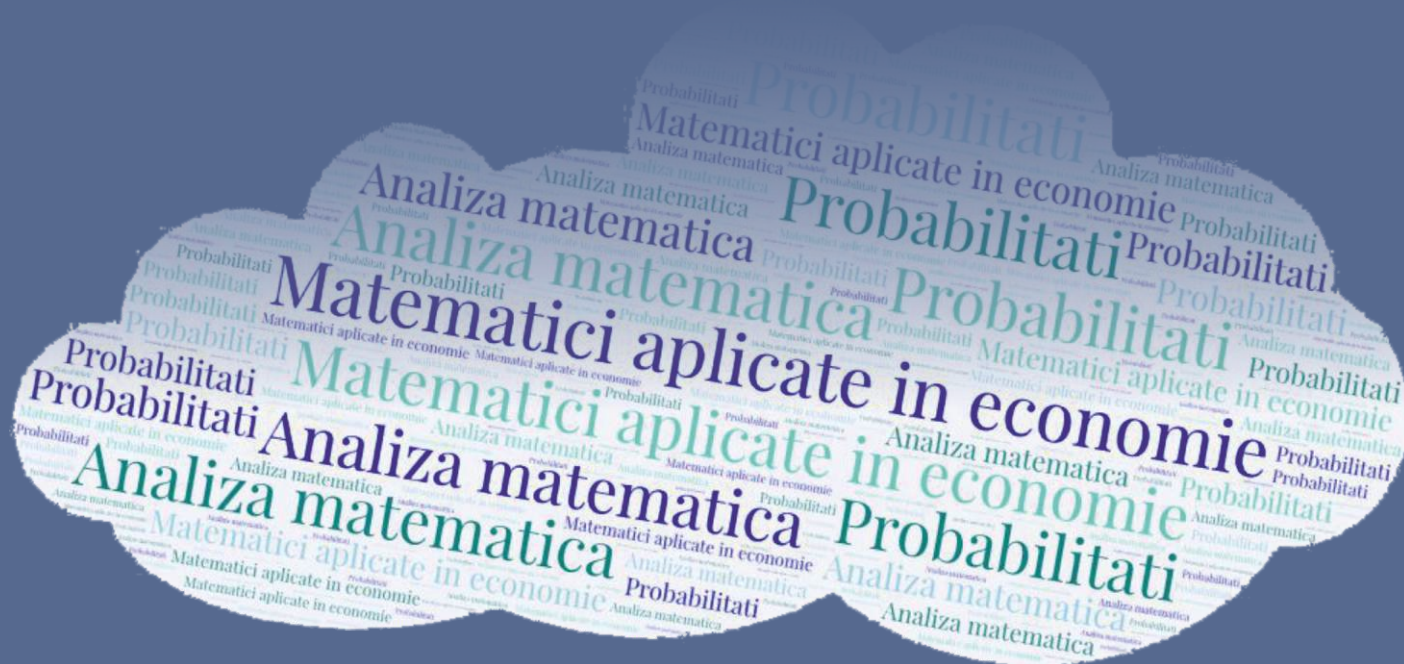


VOICHIȚA RADU

ÁGNES PÁLL-SZABÓ

MATEMATICI APLICATE ÎN ECONOMIE

Caiet de seminar



PRESA UNIVERSITARĂ CLUJEANĂ

Voichița RADU | Ágnes PÁLL-SZABÓ

MATEMATICI APLICATE ÎN ECONOMIE

Caiet de Seminar

PRESA UNIVERSITARĂ CLUJEANĂ

2026

Referenți științifici:

Prof. univ. dr. Paula Curt

Lect. univ. dr. Alexandru-Darius Filip

ISBN 978-606-37-3124-2

© 2026 Autoarele volumului. Toate drepturile rezervate. Reproducerea integrală sau parțială a textului, prin orice mijloace, fără acordul autoarelor, este interzisă și se pedepsește conform legii.

Universitatea Babeș-Bolyai
Presa Universitară Clujeană
Director: Codruța Săcelean
Str. B.P. Hasdeu nr. 51
400371 Cluj-Napoca, România
Tel.: (+40)-744-687.884
E-mail: editura@ubbcluj.ro
<http://www.editura.ubbcluj.ro/>
<https://libraria.ubbcluj.ro/>

Cuprins

Funcții reale de o variabilă reală	5
Funcții reale de mai multe variabile reale. Derivate parțiale de ordinul I. Aplicații economice.	13
Derivate parțiale de ordin superior. Diferențiale	18
Extreme	24
Extreme condiționate	32
Ajustarea datelor experimentale	39
Integrale euleriene	45
Simulare - Parțial	53
Probabilități	55
Scheme probabilistice	67
Variabile aleatoare discrete	76
Variabile aleatoare continue	86
Simulare	91
Materiale ajutătoare-Logaritmi	93
Materiale ajutătoare-Determinanți	94

Metoda lui Cramer.	
Sistem de 3 ecuații liniare cu 3 necunoscute.	97
Trigonometrie de bază.	99
Bibliografie	101

Funcții reale de o variabilă reală

A. Aspecte teoretice:

- În matematică, **derivata** este unul dintre conceptele fundamentale ale analizei matematice.
- Derivata este privită ca fiind **rata variației** cu care se modifică funcția atunci când se modifică argumentul.
- Ea este cea care ne ajută în studiul monotoniei, concavității, convexității, etc.
- Ne amintim și utilizăm formulele clasice de derivare pentru o funcție reală (vezi materialul ajutător).
- În economie, prin **valoare marginală** a unei funcții economice, înțelegem de fapt **derivata acesteia**.
- **Aplicație a derivatei în economie :**

Elasticitatea cererii în raport cu prețul = procentul de modificare al cererii C în raport cu schimbarea prețului p

$$E_C^{(p)} = - \frac{p \cdot C'(p)}{C(p)}$$

Interpretare

- $E_C^{(p)} > 1$ (cerere **elastică**) procentul cu care descrește cererea e mai mare ca procentul cu care crește prețul (nerentabil)
- $E_C^{(p)} < 1$ (cerere **inelastică**) procentul cu care descrește cererea e mai mic ca procentul cu care crește prețul (rentabil)
- $E_C^{(p)} = 1$ (**elasticitate unitară**) creșterea prețului cu 1 procent, implică descreșterea cererii cu 1 procent

Reamintim: FORMULE DE DERIVARE pentru o funcție de o variabilă reală:

$c'=0$	
$x'=1$	
$(x^n)' = nx^{n-1}$	$(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$
$(e^x)' = e^x$	$(e^u)' = e^u \cdot u'$
$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$	$(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$
$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2} \cdot u'$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$

Reguli de derivare:

$$(cf)' = c \cdot f'$$

$$(f \pm g)' = f' \pm g'$$

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + g' \cdot f$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - g' \cdot f}{g^2}$$

B. Aplicații practice:

1. Calculați derivatele (valorile marginale) ale funcțiilor $f(x)$ de mai jos:

(a) $f(x) = 5$

(b) $f(x) = 5x$

(c) $f(x) = 7x^3 - 2x^2 + 3x + 4$

(d) $f(x) = e^x + 7^x + \ln x$

(e) $f(x) = e^{2x^2+3}$

(f) $f(x) = (2x + 1)(5x - 2)$

(g) $f(x) = \ln(5x^2 + 3x + 7)$

(h) $f(x) = \sqrt{9x^2 - 1}$

(i) $f(x) = \frac{4x - 3}{7x + 2}$

2. Derivați funcția considerând ca fiind variabilă, fiecare parametru în parte :

(a) $g = a + bx + cx^2$

(b) $Q = a \cdot \ln b$

(c) $R = \frac{s - t}{2s + 3t}$

3. Fie funcția cerere în raport cu prețul $Q(p) = -p^2 + 5p + 50$. Calculați elasticitatea cererii în raport cu un preț unitar de 5 u.m. $E_Q^{(5)}$. Interpretați economic: este cererea elastică sau inelastică în raport cu acest preț? Avem sau nu rentabilitate?

TEMĂ - Funcții reale. Derivate clasice

1. Calculați derivatele (valorile marginale) ale funcțiilor $f(x)$ de mai jos în punctul $x = 1$:

- (a) $f(x) = 15$
- (b) $f(x) = 2x^2$
- (c) $f(x) = -6x^3 + 3x^2 + 4x - 4$
- (d) $f(x) = 2x^3 - 4x^2 - 5x + 6$
- (e) $f(x) = 3\sqrt{x}$
- (f) $f(x) = 3\sqrt[3]{x} + 2\sqrt{x}$
- (g) $f(x) = e^x + 2^x$
- (h) $f(x) = \ln x + 3\ln x^2$
- (i) $f(x) = (x^2 + 2) \cdot e^x$
- (j) $f(x) = \sqrt{2x^3 - x}$
- (k) $f(x) = (2x - 1) \cdot (3x + 7)$
- (l) $f(x) = (2x - 1) \cdot \ln(3x + 7)$
- (m) $f(x) = (x^2 - x + 2)^4$
- (n) $f(x) = \frac{4x + 9}{3x + 2}$
- (o) $f(x) = \frac{3x - 8}{x + 7}$
- (p) $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 5}{6x + 1}$

2. Calculați derivatele (valorile marginale) ale funcțiilor $f(x)$ de mai jos:

- a) $f(x) = -125$, $f(x) = 3x^{12}$, $f(x) = 2x^5 - 8x^3 - 13x + 47$
- b) $f(x) = e^{4x} + 5^x + 3\ln x$, $f(x) = e^{-x^2+3x+2}$, $f(x) = (2x+1)^2(5x-2)^3$
- c) $f(x) = \ln(4x^3 + 3x^2 + 5)$, $f(x) = \sqrt{12x^4 + 7x^2 + 8x + 50}$, $f(x) = \frac{3-5x}{11x+2}$

3. Derivați funcția considerând ca fiind variabilă, fiecare parametru în parte :

(a) $w = m + nt + p^3 t^2$

(b) $S = d \cdot \ln g$

(c) $M = s \cdot e^p$

(d) $L = \ln(2m + 3n)$

(e) $R = \frac{4s - 3t}{5s + t}$

4. Fie funcția cerere în raport cu prețul unitar, iar $a, b \in \mathbf{R}$:

(a) $Q = \frac{a - p}{b}$

(b) $Q = \frac{a - \sqrt{p}}{b}$

(c) $Q = b \cdot \ln(ap)$

(d) $Q = a \cdot \ln \frac{b}{p}$

(e) $Q = \frac{53 - p^2}{75}$

(f) $Q = 8p^{-12} + 13.$

Exprimați prețul în funcție de cerere și calculați valoarea marginală (derivata) acestuia.

5. Fie funcția cerere exprimată în raport cu prețul unitar, iar $a, b \in \mathbf{R}$:

(a) $Q = a + b \cdot p$

(b) $Q = a \cdot e^p$

(c) $Q = \frac{ap}{b + p}$

(d) $Q = 6 + 8p + 3p^2$

(e) $Q = 3 \cdot \frac{2 + p}{3 + p}.$

Calculați valoarea marginală a funcției cerere precum și elasticitatea cererii în raport cu prețul.

6. Fie funcția cerere în raport cu prețul $C(p) = 100 - p^2$. Calculați $E_C^{(4)}$ și interpretați economic.
7. Fie funcția cerere în raport cu prețul $C(p) = 500 - 2p$.
- a) Determinați $E_C^{(5)}$. Este cererea elastică sau inelastică în acest caz ?
 - b) Unde cererea este elastică respectiv inelastică în raport cu prețul p ?
8. O companie are funcția cerere $Q(p) = 400 - 2p$ și funcția cheltuielilor totale $C_T(Q) = 4Q^3 - 116Q^2 + 20Q + 1500$. Care este profitul maxim și care sunt valorile marginale pentru funcțiile venit și cheltuieli în raport cu cererea Q ?
9. Determinați valoarea minimă a funcției Cost marginal $C_M(x) = 200 - 24x + x^2$ (R: $C_{min} = C(12) = 56$).
10. Determinați valoarea maximă a funcției încasării totale $R(x) = 32x - x^2$ unde x este cererea de producție.

Răspunsuri.

1. (a) $f'(x) = 0$, $f'(1) = 0$
(b) $f'(x) = 4x$, $f'(1) = 4$
(c) $f'(x) = -18x^2 + 6x + 4$, $f'(1) = -8$
(d) $f'(x) = 6x^2 - 8x - 5$, $f'(1) = -7$
(e) $f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{x}}$, $f'(1) = 3/2$
(f) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + \frac{1}{\sqrt{x}}$, $f'(1) = 2$
(g) $f(x) = e^x + 2^x \cdot \ln 2$, $f'(1) = e + 2 \cdot \ln 2 = 4.104575$
(h) $f(x) = \frac{7}{x}$, $f'(1) = 7$
(i) $f(x) = (x^2 + 2x + 2) \cdot e^x$, $f'(1) = 5e = 13.591405$
(j) $f(x) = \frac{6x^2 - 1}{2\sqrt{2x^3 - x}}$, $f'(1) = 5/2$
(k) $f(x) = 12x + 11$, $f'(1) = 23$
(l) $f(x) = 2 \cdot \ln(3x + 7) + \frac{6x - 3}{3x + 7}$, $f'(1) = 2 \ln 10 + 3/10 = 4.905170$
(m) $f(x) = 4 \cdot (2x - 1) \cdot (x^2 - x + 2)^3$, $f'(1) = 32$
(n) $f(x) = \frac{-19}{(3x + 2)^2}$, $f'(1) = -19/25$
(o) $f(x) = \frac{29}{(x + 7)^2}$, $f'(1) = 29/64$
(p) $f(x) = \frac{2(3x^2 + x - 14)}{(6x + 1)^2}$, $f'(1) = -19/49$
2. a) $f'(x) = 0$, $f'(x) = 36x^{11}$, $f'(x) = 10x^4 - 24x^2 - 13$
b) $f'(x) = 4e^{4x} + 5^x \cdot \ln 5 + \frac{3}{x}$, $f'(x) = (3 - 2x)e^{-x^2 + 3x + 2}$, $f'(x) = (2x + 1)(50x + 7)(5x - 2)^2$
c) $f'(x) = \frac{12x^2 + 6x}{4x^3 + 3x^2 + 5}$, $f'(x) = \frac{24x^3 + 7x + 4}{\sqrt{12x^4 + 7x^2 + 8x + 50}}$, $f'(x) = \frac{-43}{(11x + 2)^2}$
3. (a) $w'_t = n + 2p^3t$, $w'_m = 1$, $w'_n = t$, $w'_p = 3t^2p^2$
(b) $S'_d = \ln g$, $S'_g = \frac{d}{g}$
(c) $M'_s = e^p$, $M'_p = s \cdot e^p$
(d) $L'_m = \frac{2}{2m + 3n}$, $L'_n = \frac{3}{2m + 3n}$
(e) $R'_s = \frac{19t}{(5s + t)^2}$, $R'_t = \frac{-19s}{(5s + t)^2}$

4. (a) $p = a - Qb$ $p' = -b$
 (b) $p = (a - Qb)^2$ $p' = -2ab + 2b^2Q$
 (c) $p = \frac{1}{a} \cdot e^{Q/b}$ $p' = \frac{1}{ab} \cdot e^{Q/b}$
 (d) $p = b \cdot e^{-Q/a}$ $p' = -\frac{b}{a} \cdot e^{-Q/a}$
 (e) $p = \sqrt{53 - 75Q}$ $p' = \frac{-75}{2\sqrt{53 - 75Q}}$
 (f) $p = \sqrt[12]{\frac{8}{Q - 13}}$ $p' = \frac{-1}{12} \sqrt[12]{\frac{8}{(Q - 13)^{13}}}$.

5. (a) $E_Q(p) = \frac{-pb}{a + pb}$
 (b) $E_Q(p) = -p$
 (c) $E_Q(p) = \frac{-b}{b + p}$
 (d) $E_Q(p) = \frac{-2p(4 + 3p)}{3p^2 + 8p + 6}$
 (e) $E_Q(p) = \frac{-p}{(2 + p)(3 + p)}$.

6. $E_C^{(p)} = \frac{2p^2}{100 - p^2} \Rightarrow E_C^{(4)} = 0.38 < 1 \Rightarrow$ cerere inelastică deci avem rentabilitate.

7. a) $E_C^{(5)} < 1$ prin urmare cererea este inelastică în acest caz.

b) Comparați $E_C^{(p)}$ cu 1. Pentru $p \in (125, 250)$ avem cerere elastică, pentru $p \in (0, 125)$ inelastică iar pentru $p = 125$ avem elasticitate unitară.

8. Venit=preț · cerere: $V = p \cdot Q$ iar Profitul = Venit - Cheltuieli: $P = V - C_T$.

- Ca să putem exprima profitul în funcție de cerere avem $p = 200 - Q/2$ și astfel $V(Q) = p(Q) \cdot Q$

$$\Rightarrow P = V(Q) - C_T(Q) = \left(200 - \frac{Q}{2}\right) \cdot Q - C_T(Q) = -4Q^3 + \frac{231Q^2}{2} + 180Q - 1500$$

Avem $Q_1 = 20$ și astfel $P_{max} = P(20) = 16300$ și $Q_2 = -0,75$ care nu convine. Prin urmare profitul maxim este de 16300 u.m.

- Venitul exprimat în funcție de preț este $V(p) = p \cdot Q(p) = 400p - 2p^2$ deci $V'(p) = 400 - 4p$
- $C'_T(Q) = 12Q^2 - 232Q + 20$

9. $C'(x) = -24 + 2x$, $x = 12$ punct staționar $C''(x) = 2 > 0$ $C_{min} = C(12) = 56$

10. $R_{max} = R(16) = 256$

Funcții reale de mai multe variabile reale. Derivate parțiale de ordinul I. Aplicații economice.

A. Aspecte teoretice:

Un scop important al analizei economice este acela de a înțelege cum este afectată o variabilă dependentă (endogenă), f , de schimbarea uneia dintre celelalte variabile independente (exogene) $(x, y, \dots)$. Din moment ce suntem interesați de schimbarea uneia singure, vom schimba o singură variabilă o dată, și le vom păstra neschimbate pe celelalte.

Matematic, efectul schimbării este exprimat prin *derivata parțială* a unei funcții f în raport cu variabila considerată.

Din punct de vedere economic:

- **Valori marginale** = derivatele parțiale de ordinul I ale funcției scop (productivitate, cost, beneficiu, câștig, venit, încasare) :

$$f'_x, \quad f'_y$$

- **Rata de schimb parțială** = raportul dintre derivata parțială de ordinul I și funcția însăși

$$\rho_f^{(x)} = \frac{f'_x}{f}$$

$$\rho_f^{(y)} = \frac{f'_y}{f}$$

- **Elasticitatea parțială a unei funcții** = produsul dintre rata de schimb parțială și variabila în raport cu care facem derivarea

$$E_f^{(x)} = -x \cdot \rho_f^{(x)} = \frac{-x \cdot f'_x}{f}$$

$$E_f^{(y)} = -y \cdot \rho_f^{(y)} = \frac{-y \cdot f'_y}{f}$$

B. Aplicații practice:

1. Calculați derivatele parțiale de ordinul întâi pentru funcțiile de mai jos în punctele specificate:

(a) $f(x, y) = 2x^3 + 4y^2$, $(2, 3)$

(b) $f(x, y) = x^4 + 2x^3y - 3xy^2 + 2y^3 + 4$, $(-1, 2)$

(c) $f(x, y) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$, $(-2, 2)$

(d) $f(x, y) = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$, $(1, 0)$

(e) $f(x, y, z) = 3x^6y^2\sqrt{z}$, $(1, 1, 1)$

(f) $f(x, y, z) = 2x^2 + 3y + y^2 - 2yz + xz^2 + z^3$, $(-2, 4, 1)$

(g) $f(x, y) = \frac{5x - 3y}{x^2 + y^2}$, $(1, 1)$

2. Productivitatea unei anumite țări este descrisă de funcția

$$Q(L, K) = 4L^{1/4}K^{3/4}$$

unde L reprezintă forța de muncă, iar K este capitalul investit.

(a) Calculați Q'_L , Q'_K

(b) Care este productivitatea marginală a forței de muncă, respectiv a capitalului atunci când $L = 625$, $K = 10.000$. În acest caz, guvernul ar trebui să încurajeze investiția în capital sau în forța de muncă pentru a crește productivitatea totală?

3. Determinați productivitățile marginale, ratele de schimbare parțială și elasticitățile parțiale pentru

$$f(x, y, z) = 3\sqrt[3]{x^2} \cdot y \cdot \sqrt{z}$$

TEMĂ - Funcții reale de mai multe variabile reale. Derivate parțiale de ordinul întâi

1. Calculați derivatele parțiale de ordinul întâi pentru funcțiile de mai jos, în punctele (1,1) și respectiv (1,1,1):

(a) $f(x, y) = 5x^2 + 3y^3$

(b) $f(x, y) = 3x^4 - 5x^2y^3 - 4x^3y^2 - 3y^2 + 4x + 3y + 1$

(c) $f(p, q) = 4p^3q^2$

(d) $f(k, l) = 4\sqrt{k} \cdot l^3$

(e) $f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}$

(f) $f(p, q) = \frac{p^2 + q^2}{pq}$

(g) $f(x, y) = \sqrt{xy^3} + \frac{2}{x}$

(h) $f(s, t) = \frac{s+t}{3t} - \frac{2s+t^2}{\sqrt{s}}$

(i) $f(x, y) = \ln\left(y + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$

(j) $f(x, y, z) = 3x^2 + 2xy + y^2 - 3yz + xz^2 + z^3$

(k) $f(x, y, z) = x^y + y^z$

(l) $f(p, q, r) = pqr$

(m) $f(x, y, z) = 3x^3\sqrt{y^3}z^2$

(n) $f(r, s, t) = \frac{r}{s} + \frac{s}{t} + \frac{t}{r}$

2. Determinați productivitățile marginale pentru următoarele funcții de producție în punctul $(1, 1, 2)$:

(a) $f(x, y, z) = 3x^2 y^4 z^3$

(b) $f(p, q, r) = 4p^2 \sqrt{q} \cdot r$

(c) $f(x, y, z) = 2x + y - 5z$

Răspunsuri.

1. (a) 10, 9
(b) -6, -26
(c) 12, 8
(d) 2, 12
(e) $1/2$, $-1/2$
(f) 0, 0
(g) $-3/2$, $3/2$
(h) $-1/6$, $-7/3$
(i) $\frac{1}{\sqrt{2}+2}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}$
(j) 9, 1, 2
(k) 1, 1, 0
(l) 1, 1, 1
(m) 9, $9/2$, 6
(n) 0, 0, 0
2. (a) 48, 96, 36
(b) 16, 4, 4
(c) 2, 1, -5

Derivate parțiale de ordin superior. Diferențiale

A. Aspecte teoretice:

Derivatele parțiale de ordinul doi ale funcției $f(x, y)$ sunt

$$f''_{x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (f'_x)'_x, \quad f''_{y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (f'_y)'_y, \quad f''_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = (f'_x)'_y, \quad f''_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = (f'_y)'_x.$$

Derivatele parțiale de ordinul trei ale funcției $f(x, y)$ sunt

$$f'''_{x^3} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = (f''_{x^2})'_x, \quad f'''_{y^3} = \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = (f''_{y^2})'_y, \quad f'''_{x^2y} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = (f''_{x^2})'_y, \quad f'''_{y^2x} = \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x} = (f''_{y^2})'_x$$
$$f'''_{xy^2} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = (f''_{xy})'_y, \quad f'''_{yx^2} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} = (f''_{yx})'_x, \quad f'''_{yxy} = (f''_{yx})'_y, \quad f'''_{xyx} = (f''_{xy})'_x.$$

Se poate trece similar la derivatele parțiale de ordin superior ($n \geq 3$).

O funcție de n variabile reale are: n derivate parțiale de ordin I, n^2 derivate parțiale de ordinul II și n^3 derivate parțiale de ordinul III.

Observație 1: O parte din derivatele mixte de ordinul II și III ale funcțiilor elementare sunt egale:

$$f''_{xy} = f''_{yx}$$

$$f'''_{x^2y} = f'''_{xyx} = f'''_{yx^2}, \quad f'''_{xy^2} = f'''_{yxy} = f'''_{y^2x}$$

Prin urmare, nu contează ordinea de derivare ci doar de câte ori derivăm și în raport cu ce variabile.

Diferențialele de ordinul I și II pentru $f(x, y)$ sunt :

$$df_{(x,y)}(dx, dy) = f'_x \cdot dx + f'_y \cdot dy$$

$$d^2f_{(x,y)}(dx, dy) = f''_{x^2} \cdot dx^2 + 2f''_{xy} \cdot dx dy + f''_{y^2} \cdot dy^2$$

Diferențialele de ordinul I și II pentru $f(x, y, z)$ sunt :

$$df_{(x,y,z)}(dx, dy, dz) = f'_x \cdot dx + f'_y \cdot dy + f'_z \cdot dz$$

$$d^2f_{(x,y,z)}(dx, dy, dz) = f''_{x^2} \cdot dx^2 + f''_{y^2} \cdot dy^2 + f''_{z^2} \cdot dz^2 + 2f''_{xy} \cdot dx dy + 2f''_{xz} \cdot dx dz + 2f''_{yz} \cdot dy dz$$

B. Aplicații practice:

1. Calculați derivatele parțiale de ordinul 1,2 și 3, în punctul $a = (1,2)$ pentru

$$f(x, y) = 12x^5 + 8x^2y^2 + 7y^3$$

2. Calculați derivatele parțiale indicate:

(a) $f(x, y) = x^4y - 3xy^5 + 3x - 7y + 2$, $f'_x, f'_y, f''_{x^2}, f''_{xy}$ în $a = (-2, 1)$

(b) $f(r, \theta) = e^{r^2} \cdot \theta^3$, $f''_{r\theta}$ în $a = (4, 5)$

(c) $f(x, y, z) = x^3y^2(2z - 1)^7$, f'_y, f'_z, f''_{zy} în $a = (3, 2, 1)$

(d) $f(x, y, z) = e^{xyz}$, f''_{z^2}, f''_{xz} în $a = (1, 3, 1)$

(e) $f(s, t) = \frac{s+t}{s-t}$, f''_{st} în $a = (4, 2)$

3. Fie $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = 2x^3 + 3xy + 4y^3$. Calculați:

(a) f'_x, f'_y în punctul $a = (1, -1)$

(b) $df_{(1,-1)}(dx, dy)$

(c) $df_{(1,-1)}(2, 3)$

(d) $f''_{x^2}, f''_{y^2}, f''_{xy}, f''_{yx}$ în punctul $a = (1, -1)$

(e) $d^2f_{(1,-1)}$

(f) $d^2f_{(1,-1)}(5, 7)$

4. Calculați df și d^2f pentru f în punctul specificat:

(a) $f(x, y) = \ln(xy)$, $a = (1, 1)$ și $(dx, dy) = (2, 2)$

(b) $f(x, y, z) = x^2y^3z + xz - yz^2$, $a = (1, 2, 3)$ și $(dx, dy, dz) = (1, 1, 9)$

TEMĂ - Derivate parțiale de ordin superior. Diferențiale

1. Calculați derivatele parțiale de ordinul 1, 2 și 3 pentru funcțiile de mai jos. Calculați de asemenea valorile lor în punctele precizate.

(a) $f(x, y) = 2x^2y^4, a = (-2, 2)$

(b) $f(x, y) = 2\sqrt{xy}, a = (1, 1)$

(c) $f(x, y) = 3x^5 - 2xy^2 + y^3, a = (2, 1)$

(d) $f(x, y) = x^3y + xy^3, a = (-1, 1)$

(e) $f(x, y) = \frac{2x}{y} - \frac{y}{\sqrt{x}}, a = (1, 1)$

(f) $f(x, y) = y \ln x, a = (e, 1)$

(g) $f(x, y, z) = 3x^2y + 5xyz^2 - 2y^3z^2, a = (1, 1, 2)$

(h) $f(x, y, z) = y \cdot e^x + z^2 \cdot e^y, a = (1, 1, 1)$

2. Calculați derivatele parțiale specificate pentru funcțiile de mai jos:

(a) $f(x, y) = xy^3e^y, f''_{y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

(b) $f(p, q) = 3p^3q^2, f''_{p^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial p^2}$

(c) $f(k, l) = 5\sqrt{k}l^3, f''_{kl} = \frac{\partial^2 f}{\partial k \partial l}$

(d) $f(s, t) = \frac{2s-t}{s+2t}, f'''_{s^2t} = \frac{\partial^3 f}{\partial s^2 \partial t}$

(e) $f(p, q) = \frac{p^2 + q^2}{pq}, f''_{qp} = \frac{\partial^2 f}{\partial q \partial p}$

(f) $f(x, y, z) = 2x + y - 5z, f'''_{z^2y} = \frac{\partial^3 f}{\partial z^2 \partial y}$

(g) $f(r, s, t) = \ln\left(\frac{r}{s}\right) + \ln\left(\frac{s}{t}\right) + \ln\left(\frac{t}{r}\right), f'''_{rst} = \frac{\partial^3 f}{\partial r \partial s \partial t}$

3. Scrieți expresiile diferențialelor de ordinul întâi și doi pentru următoarele funcții. Calculați de asemenea expresiile diferențialelor găsite în punctele indicate.

(a) $f(x, y) = x^2 \ln y$, $a = (2, 5)$, $h = (3, 4)$

(b) $f(x, y) = x^2 y + x e^y$, $a = (-1, -2)$, $h = (1, 1)$

(c) $f(x, y) = \frac{\sqrt{x^2 + y^3}}{x - y}$, $a = (1, 2)$, $h = (2, 3)$

(d) $f(x, y, z) = 7x^3 y^2 z^5$, $a = (3, 2, 1)$, $h = (5, 3, 1)$

(e) $f(x, y, z) = \ln(x^2 y^3 - z^2 x)$, $a = (2, 2, 2)$, $h = (1, 1, 1)$

Răspunsuri.

1. (a) $(-128, 256), (64, 384, -256), (0, 384, 128, -384)$
(b) $(1, 1), (-1/2, -1/2, 1/2), (3/4, 3/4, -1/4, -1/4)$
(c) $(238, -5), (480, -2, -4), (720, 6, 0, -4)$
(d) $(4, -4), (-6, -6, 6), (6, -6, -6, 6)$
(e) $(5/2, -3), (-3/4, 4, -3/2), (15/8, -12, -3/4, 4)$
(f) $(1/e, 1), (-1/e^2, 0, 1/e), (2/e^3, 0, -1/e^2, 0)$
(g) $(26, -1, 12), (6, -48, 6, 26, 20, -4), (0, -48, 0, 6, 0, 0, -48, 10, -2, 20)$
(h) $(e, 2e, 2e), (e, e, 2e), (e, e, 0, e, 0, 0, 2e, 0, 2e)$
2. (a) $f''_{y^2} = xy(6 + 6y + y^2)e^y$
(b) $f''_{p^2} = 18pq^2$
(c) $f''_{kl} = \frac{15l^2}{2\sqrt{k}}$
(d) $f'''_{s^2t} = \frac{10(4t - s)}{(s + 2t)^4}$
(e) $f''_{qp} = -\frac{(p^2 + q^2)}{p^2q^2}$
(f) $f'''_{z^2y} = 0$
(g) $f'''_{rst} = 0$
3. (a) $df_{(2,5)}(3, 4) = 12\ln 5 + \frac{16}{5}, \quad d^2f_{(2,5)}(3, 4) = 18\ln 5 + \frac{416}{25}$
(b) $df_{(-1,-2)}(1, 1) = 5, \quad d^2f_{(-1,-2)}(1, 1) = \frac{1}{e^2} - 8$
(c) $df_{(1,2)}(2, 3) = -\frac{11}{3}, \quad d^2f_{(1,2)}(2, 3) = \frac{177}{6}$
(d) $df_{(3,2,1)}(5, 3, 1) = 9828, \quad d^2f_{(3,2,1)}(5, 3, 1) = 114282$
(e) $df_{(2,2,2)}(1, 1, 1) = \frac{17}{6}, \quad d^2f_{(2,2,2)}(1, 1, 1) = -\frac{91}{36}$

Extreme

A. Aspecte teoretice:

Algoritmul pentru găsirea punctelor de extrem:

Extremele funcțiilor de două variabile $f(x,y)$

$$\bullet \begin{cases} f'_x(x_0, y_0) = 0 \\ f'_y(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow (x_0, y_0)$ **punct critic** sau **punct staționar**.

• Matricea Hessiană:

$$H(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} f''_{x^2}(x_0, y_0, z_0) & f''_{xy}(x_0, y_0, z_0) \\ f''_{yx}(x_0, y_0, z_0) & f''_{y^2}(x_0, y_0, z_0) \end{pmatrix}$$

• Notăm

$$A_1 = f''_{x^2}(x_0, y_0), \quad A_2 = \begin{vmatrix} f''_{x^2}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{yx}(x_0, y_0) & f''_{y^2}(x_0, y_0) \end{vmatrix}$$

• **Criteriul lui Sylvester:**

1. Dacă $A_1 > 0$, $A_2 > 0 \Rightarrow (x_0, y_0)$ **punct minim local** al lui f
2. Dacă $A_1 < 0$, $A_2 > 0 \Rightarrow (x_0, y_0)$ **punct maxim local** al lui f
3. Dacă $A_2 < 0 \Rightarrow a$ nu este punct de extrem deci este **punct șa**.
4. In orice altă situație testul nu este concludent.

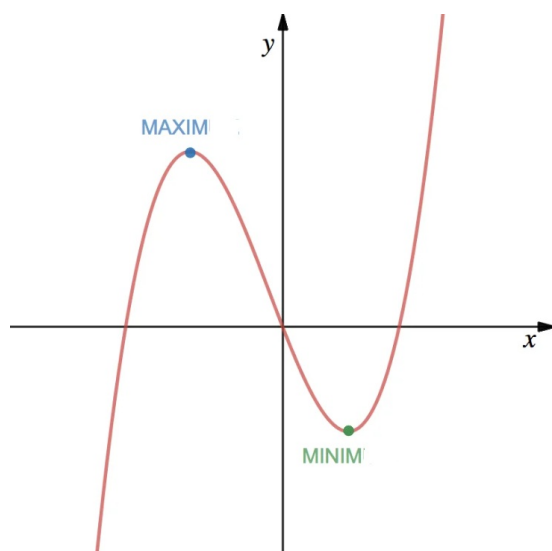


Figura 1: Punct minim, punct maxim

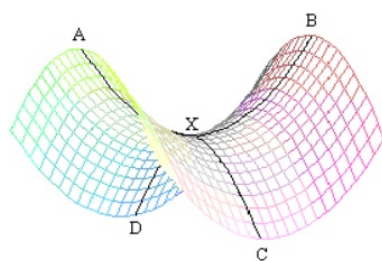


Figura 2: Punct şa

Extreme funcțiilor pentru trei variabile $f(x,y,z)$

$$\bullet \begin{cases} f'_x(x_0, y_0, z_0) = 0 \\ f'_y(x_0, y_0, z_0) = 0 \\ f'_z(x_0, y_0, z_0) = 0 \end{cases} \Rightarrow (x_0, y_0, z_0) \text{ punct critic sau punct staționar.}$$

• Matricea Hessiană:

$$H(x_0, y_0, z_0) = \begin{pmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0, z_0) & f''_{xy}(x_0, y_0, z_0) & f''_{xz}(x_0, y_0, z_0) \\ f''_{yx}(x_0, y_0, z_0) & f''_{yy}(x_0, y_0, z_0) & f''_{yz}(x_0, y_0, z_0) \\ f''_{zx}(x_0, y_0, z_0) & f''_{zy}(x_0, y_0, z_0) & f''_{zz}(x_0, y_0, z_0) \end{pmatrix}$$

$$\bullet \text{ Notăm } A_1 = f''_{xx}(x_0, y_0, z_0) \quad A_2 = \begin{vmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0, z_0) & f''_{xy}(x_0, y_0, z_0) \\ f''_{yx}(x_0, y_0, z_0) & f''_{yy}(x_0, y_0, z_0) \end{vmatrix}, \quad A_3 = \det(H)$$

• **Criteriul lui Sylvester:**

1. Dacă $A_1 > 0, A_2 > 0, A_3 > 0 \Rightarrow (x_0, y_0, z_0)$ **punct minim local** al lui f .
2. Dacă $A_1 < 0, A_2 > 0, A_3 < 0 \Rightarrow (x_0, y_0, z_0)$ **punct maxim local** al lui f .
3. Dacă $A_2 < 0$ sau $A_1 < 0, A_3 > 0$ sau $A_1 > 0, A_3 < 0 \Rightarrow a$ nu este punct de extrem deci este **punct șa**.
4. In orice altă situație testul nu este concludent.

B. Aplicații practice:

1. O fabrică produce două sortimente de bunuri. Profitul acestei fabrici este dat prin funcția $f(x, y) = -2x^2 + 2xy - 5y^2 + 6x + 6y$, unde x și y sunt cantitățile produse din cele două sortimente de bunuri. Să se determine pentru ce cantități din cele două bunuri se obține profitul maxim.

2. Găsiți extremele funcției:
 - (a) $f(x, y) = 2x^2 + \frac{4y^2}{x} - 24x, \quad x \neq 0$
 - (b) $f(x, y) = e^{x^2-4x} - \frac{9}{y} - 4y, \quad y \neq 0$
 - (c) $f(x, y, z) = 5 - 2x^2 - 2xy - 2y^2 - z^2 + yz - 3y$
 - (d) $f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + 2xy + 3z^2 + 2xz + 4z + 3$

TEMĂ - Extreme

1. Găsiți extremele funcțiilor de mai jos:

(a) $f(x, y) = 2x^2 + 6xy + 5y^2 + 2x + 8y + 6$

(b) $f(x, y) = -3x^2 + 4xy - 4y^2 + 4x - 4y - 5$

(c) $f(x, y) = x^3y^2(36 - x - y), \quad xy \neq 0$

(d) $f(x, y) = xy + \frac{64}{x} - \frac{8}{y}, \quad x, y \neq 0$

(e) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z$

2. Găsiți extremele funcțiilor de mai jos:

(a) $f(x, y) = 2x^2 + 4xy + 5y^2 - 4x + 6y + 3$

(b) $f(x, y) = -3x^2 + 2xy - 2y^2 + 6x - 4y + 1$

(c) $f(x, y) = x^2y^2(25 - x - y), \quad xy \neq 0$

(d) $f(x, y) = xy + \frac{72}{x} + \frac{24}{y}, \quad x, y \neq 0$

(e) $f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y + 4z$

3. O fabrică produce două tipuri de bunuri. Costul producerii acestor bunuri este dat prin funcția $f(x, y)$, unde x și y reprezintă cantitățile produse din fiecare tip de produs. Să se minimizeze costul atunci când

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy + 10.$$

4. O întreprindere produce două sortimente de marfă. Care este valoarea de minim a costului exprimat prin funcția

$$f(x, y) = x^2 + (y - 1)^2 + 8.$$

5. Determinați punctul de minim local pentru funcția $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z$.

6. O bancă oferă persoanelor fizice credite în valoare de 5000 u.m., 10000 u.m. și respectiv 50000 u.m. Pentru C_1 credite de 5000 u.m. contractate, banca obține un beneficiu de $200 - 3C_1$ u.m./credit. Pentru C_2 credite de 10000 u.m. contractate, beneficiul băncii este $500 - 7C_2$ u.m./credit. Contractarea unui număr de C_3 credite de 50000 u.m. aduce băncii un beneficiu de $560 - 4C_3$ u.m./credit. În cazul rambursărilor anticipate a creditelor contractate, pentru C credite lichidate înainte de termenul scadent, pierderile băncii sunt estimate la $450 + 80C$ u.m. Care ar fi numărul optim de credite contractate, de fiecare tip, astfel ca beneficiul băncii să fie maxim și care ar fi acest beneficiu ?

7. În decursul unui an, valorile totale ale importurilor și exporturilor unei țări, pentru un tip de produs importat și două tipuri de produse exportate, au fost estimate prin funcțiile $I: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și $E: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definite prin

Importuri (u.m.)	$I(x) = -2x^3 + 15x^2 - 36x + 237$
Exporturi (u.m.)	$E(y, z) = 2y^3 + 2z^3 - 15y^2 - 21z^2 + 24y + 72z + 365$

Să se determine cantitățile din cele trei tipuri de produse pentru care, la sfârșitul anului, balanța comercială are valoarea maximă și să se precizeze această valoare.

8. O fabrică produce trei tipuri de bunuri în cantitățile x , y și z . Să se calculeze pentru ce valori ale acestor cantități, se obține profitul maxim, dacă profitul este dat prin următoarea funcție

$$f(x, y, z) = x y^2 z^3 (14 - x - 2y - 3z), \quad x y z \neq 0.$$

Răspunsuri.

1. (a) $f_{\min} = f(7, -5) = -7$

(b) $f_{\max} = f\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right) = -\frac{7}{2}$

(c) $f_{\max} = f(18, 12) = 5.038.848$

(d) $f_{\max} = f(-8, 1) = -24$

(e) $f_{\min} = f(-1, -2, 3) = -14$

2. (a) $f_{\min} = f\left(\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}\right) = -2$

(b) $f_{\max} = f\left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right) = \frac{23}{5}$

(c) $f_{\max} = f(10, 10) = 50000$

(d) $f_{\min} = f(6, 2) = 36$

(e) $f_{\min} = f\left(-\frac{1}{2}, 3, -2\right) = -\frac{27}{2}$

3. $f_{\min} = f(1, 1) = 9$

4. $f_{\min} = f(0, 1) = 8$

5. $f_{\min} = f(-2/3, -1/3, 1) = -4/3$

6. **Indiciu:** Beneficiul total = Diferența între beneficiile pe fiecare tip de credit în parte și pierderile aferente

$$f(c_1, c_2, c_3) = c_1(200 - 3c_1) + c_2(500 - 7c_2) + c_3(560 - 4c_3) - 450 - 80(c_1 + c_2 + c_3)$$

$$f_{\max} = f(20, 30, 60) = 21.450 \text{ u.m.}$$

7. **Indiciu:** Balanța comercială = Valoarea exporturilor - Valoarea importurilor

$$f_{\max} = f(2, 1, 3) = 248$$

8. **Indiciu:** desfaceți parantezele, derivați iar apoi în expresia derivatelor parțiale dați din nou factor comun și după egalarea cu 0, simplificați.

$$f_{\max} = f(2, 2, 2) = 128$$

Extreme condiționate

A. Aspecte teoretice:

Metoda multiplicatorilor lui Lagrange

Fie $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$. Determinați punctele de extrem local ale funcției f care satisfac condiția (legătura) $g(x, y) = 0$.

Algoritm de rezolvare:

1. Construim **funcția lui Lagrange** $L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$, λ fiind multiplicatorul lui Lagrange.

2.

$$\begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ L'_\lambda = g(x, y) = 0 \end{cases} \Rightarrow (x_0, y_0, \lambda_0) \text{ punct staționar pentru } L.$$

3. Construim matricea **hessiană bordată**:

$$H_B(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 & g'_x & g'_y \\ g'_x & L''_{x^2} & L''_{xy} \\ g'_y & L''_{yx} & L''_{y^2} \end{pmatrix}$$

4. Calculăm valoarea matricei hessiene bordate în punctul staționar (x_0, y_0, λ_0) , adică $H_B(x_0, y_0, \lambda_0)$.

5. Stabilim natura punctului staționar:

- (i) Dacă $\det H_B(x_0, y_0, \lambda_0) < 0 \Rightarrow (x_0, y_0)$ punct de minim condiționat pentru f .
- (ii) Dacă $\det H_B(x_0, y_0, \lambda_0) > 0 \Rightarrow (x_0, y_0)$ punct de maxim condiționat pentru f .
- (iii) Dacă $\det H_B(x_0, y_0, \lambda_0) = 0 \Rightarrow$ criteriul este neconcludent.

Observație :

Dacă sunt mai multe puncte staționare, raționamentul se repetă pentru fiecare în parte.

Fie $f, g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Determinați punctele de extrem local ale funcției f care satisfac condiția (legătura) $g(x, y, z) = 0$.

1. Construim **funcția lui Lagrange** $L(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z)$.

2. Determinăm punctele staționare ale funcției L ,
rezolvând sistemul:

$$\begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ L'_z = 0 \\ L'_\lambda = g(x, y, z) = 0 \end{cases} \Rightarrow (x_0, y_0, z_0, \lambda_0) \text{ punct staționar pentru } L.$$

3. Construim matricea **hessiană bordată**:

$$H_B(x, y, z, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 & g'_x & g'_y & g'_z \\ g'_x & L''_{xx} & L''_{xy} & L''_{xz} \\ g'_y & L''_{yx} & L''_{yy} & L''_{yz} \\ g'_z & L''_{zx} & L''_{zy} & L''_{zz} \end{pmatrix}$$

4. Calculăm valoarea matricei hessiene bordate în punctul staționar (x_0, y_0, z_0) și λ_0 , adică $H_B(x_0, y_0, z_0, \lambda_0)$.

5. Calculăm determinanții:

$$H_{B3} = \begin{vmatrix} 0 & g'_x & g'_y \\ g'_x & L''_{xx} & L''_{xy} \\ g'_y & L''_{yx} & L''_{yy} \end{vmatrix},$$

$$H_{B4} = \det H_B(x, y, z, \lambda).$$

6. Stabilim natura punctului staționar:

- (a) Dacă $H_B3 < 0$ și $H_B4 < 0 \Rightarrow (x_0, y_0, z_0)$ **punct de minim condiționat** pentru f.
- (b) Dacă $H_B3 > 0$ și $H_B4 < 0 \Rightarrow (x_0, y_0, z_0)$ **punct de maxim condiționat** pentru f.
- (c) Dacă $H_B4 > 0 \Rightarrow (x_0, y_0, z_0)$ **punct șa condiționat** pentru f.
- (d) Dacă $H_B4 = 0 \Rightarrow$ criteriul este neconcludent.

B. Aplicații practice:

Calculați extremele funcțiilor de mai jos:

1. $f(x, y) = x^2 + y^2$ cu legătura $3x + 5y = 2$
2. $f(x, y) = 40x + 20y$ cu legătura $xy = 200$, $x, y > 0$
3. $f(x, y) = 3x + y$ cu legătura $36x^2 + y^2 = 20$
4. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + xz$ cu legătura $x + y + z = 6$
5. $f(x, y, z) = x - 2y + 2z$ cu legătura $x^2 + y^2 + z^2 = 1$
6. $f(x, y) = 2x + 5y$ cu legătura $xy = 10$
7. $f(x, y, z) = 2x + 3y + z$ cu legătura $x^2 + y^2 + z^2 = 14$

TEMĂ- Extreme condiționate

1. Să se determine punctele de extrem local legat pentru funcțiile de mai jos:

- (a) $f(x, y) = xy$ pentru orice $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, cu legătura $2x + 3y = 1$
- (b) $f(x, y) = 3xy - x^3 - y^3$ pentru orice $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, cu legătura $x + y = 2$
- (c) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 3x - 4y + 3$ pentru orice $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, cu legătura $x + 2y = 3$
- (d) $f(x, y) = x + 2y$ pentru orice $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, cu legătura $x^2 - y^2 = -3$
- (e) $f(x, y, z) = xy + xz + yz$ cu legătura $xyz = 1$, știind că $x > 0, y > 0, z > 0$
- (f) $f(x, y, z) = 2x + y - 2z$ pentru orice $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, cu legătura $x^2 + y^2 + z^2 = 9$
- (g) $f(x, y, z) = xyz$ pentru orice $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, cu legătura $xy + yz + zx = 12$.

2. Să se determine punctele de extrem local legat pentru funcțiile de mai jos:

- (a) $f(x, y) = xy$ pentru orice $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, cu legătura $3x + 2y = 12$.
- (b) $f(x, y) = 4xy - x^2 - y^2$ pentru orice $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, cu legătura $x + y = 6$.
- (c) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 5$ pentru orice $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, cu legătura $x + y = 4$.
- (d) $f(x, y) = 3x + 4y$ pentru orice $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, cu legătura $x^2 + y^2 = 25$.
- (e) $f(x, y, z) = xy + xz + yz$ cu legătura $xyz = 8$, știind că $x > 0, y > 0, z > 0$.
- (f) $f(x, y, z) = 2x - 2y + z$ pentru orice $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, cu legătura $x^2 + y^2 + z^2 = 36$.
- (g) $f(x, y, z) = xyz$ pentru orice $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, cu legătura $xy + yz + zx = 27$.

3. Interiorul unei săli de cinema urmează să fie izolat fonic. În planul de izolare al sălii se urmărește folosirea unei cantități minime de material izolant, podeaua sălii fiind exclusă izolării fonice. Să se determine dimensiunile sălii de cinema dacă volumul ei este de 4000 m^3 .

4. O întreprindere produce o cantitate Q de produse utilizând capitalul K și forța de muncă L . Funcția de producție este

$$Q = F(K, L) = K^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{4}}.$$

Prețul unității de capital este 500 lei, iar prețul unității de forță de muncă este 400 lei. Se cere să se determine acele valori ale lui K și L care minimalizează cheltuielile știind că disponibilul pentru producție este de 5.000 bucăți .

5. Să se determine punctele de extrem local legat pentru funcția

$$f(x, y, z) = x + y + z \quad \text{cu legătura} \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$$

pentru orice

$$(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}.$$

Răspunsuri.

1. (a) $f_{max} = f\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{24}$

(b) $f_{max} = f(1, 1) = 1$

(c) $f_{min} = f(1, 1) = -2$

(d) $f_{max} = f(1, -2) = -3, f_{min} = f(-1, 2) = 3$

(e) $f_{min} = f(1, 1, 1) = 3$

(f) $f_{max} = f(2, 1, -2) = 9, f_{min} = f(-2, -1, 2) = -9$

(g) $f_{max} = f(2, 2, 2) = 8, f_{min} = f(-2, -2, -2) = -8$

2. (a) $f_{max} = f(2, 3) = 6.$

(b) $f_{max} = f(3, 3) = 18.$

(c) $f_{min} = f(1, 3) = -5.$

(d) $f_{max} = f(3, 4) = 25, f_{min} = f(-3, -4) = -25.$

(e) $f_{min} = f(2, 2, 2) = 12.$

(f) $f_{max} = f(4, -4, 2) = 18, f_{min} = f(-4, 4, -2) = -18.$

(g) $f_{max} = f(3, 3, 3) = 27, f_{min} = f(-3, -3, -3) = -27.$

3. $f(x, y, z) = xy + 2yz + 2xz$ cu legătura $xyz = 4000$

$$\Rightarrow f_{min} = f(20, 20, 10) = 1200 \text{ u.m.}$$

4. $f(K, L) = 500K + 400L$ cu legătura $K^{1/2}L^{1/4} = 5000$

$$\Rightarrow f_{min} = f(10^5, 5^4 \cdot 10^2) = 75.000.000 \text{ u.m.}$$

5. $f_{min} = f(3, 3, 3) = 9 \text{ u.m.}$

Ajustarea datelor experimentale

A. Aspecte teoretice:

Este o aplicație la **determinarea punctelor de extrem a unei funcții**.

Să presupunem că într-un proces concret participă 2 mărimi măsurabile (experimental) ale căror valori să fie notate cu x și y .

Dependența dintre cele două mărimi poate fi descrisă de o funcție $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $y = f(x)$. Problema care se pune este determinarea lui f dintr-o clasă $\mathcal{F}$ ale cărei valori în punctele x_i să "se apropie cât mai mult" de datele determinate experimental y_i , $i = \overline{1, n}$.

Această metodă se va numi **ajustarea datelor experimentale** cu **metoda celor mai mici pătrate**.

Cel mai convenabil este să aproximăm aceste date (ajustăm) printr-un polinom de grad I sau II:

- | | | | | | |
|---|-------|-------|-------|-------|-----|
| x | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | ... |
| y | y_1 | y_2 | y_3 | y_4 | ... |

- | | | | | | | | |
|---------|---------|---------|---------|---------|-------|-------------|-------------|
| x_i^0 | x_i^1 | x_i^2 | x_i^3 | x_i^4 | y_i | $y_i x_i^1$ | $y_i x_i^2$ |
| .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. | .. |
| s_0 | s_1 | s_2 | s_3 | s_4 | t_0 | t_1 | t_2 |

- dreaptă $P_1(x) = a_0 + a_1 x$,

$$\begin{cases} s_0 a_0 + s_1 a_1 = t_0 \\ s_1 a_0 + s_2 a_1 = t_1 \end{cases}$$

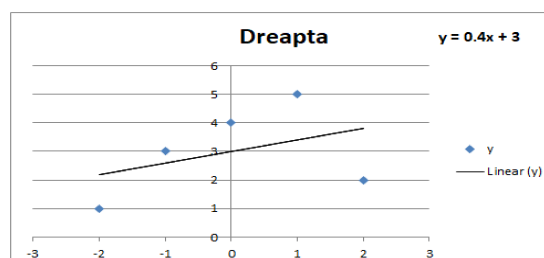


Figura 3: Ajustare prin dreaptă

respectiv

- parabolă $P_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$.

$$\begin{cases} s_0 a_0 + s_1 a_1 + s_2 a_2 = t_0 \\ s_1 a_0 + s_2 a_1 + s_3 a_2 = t_1 \\ s_2 a_0 + s_3 a_1 + s_4 a_2 = t_2 \end{cases}$$

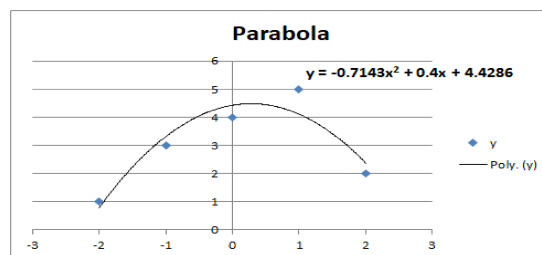


Figura 4: Ajustare prin parabolă

Putem generaliza problema aproximând funcția printr-un polinom de gradul m .

B. Aplicații practice:

1. Avem veniturile unui mic întreprinzător pe ultimii 3 ani (în mii lei) astfel: în anul 2019 un venit de 1.5, în 2020, 1.2 iar în 2021, 0.9.

a. Găsiți ecuația dreptei ce ajustează aceste date.

b. Faceți prognoza pentru următorii 2 ani

2. Evoluția curs leu/euro la începutul anului este dată în tabelul următor:

luna	Ian	Feb	Mar	Apr
Curs valutar	4.37	4.39	4.40	4.43

a. Găsiți ecuația dreptei, respectiv a parabolei ce ajustează aceste date.

b. Care va fi raportul leu/euro la în luna august ?

3. Ajustați printr-o dreaptă, respectiv parabolă, datele numerice:

x	-1	0	1	2
y	2	1	2	11

4. Ajustați printr-o dreaptă, respectiv parabolă, datele numerice:

x	-2	-1	0	2	3
y	7	9	11	7	15

TEMĂ - Ajustarea datelor experimentale

1. Media temperaturilor înregistrate în luniile aprilie, mai și iunie a fost de 15° , 20° și respectiv 23° . Care va fi prognoza pentru luna august având în vedere că cercetătorii au observat o creștere liniară (ajustare printr-o dreaptă) a temperaturii până la începutul lunii septembrie.

2. O companie producătoare de ciocolată a determinat date referitoare la cota de piață și respectiv prețul de vânzare pe kilogram al ciocolatei timp de patru luni consecutive. S-au obținut astfel următoarele rezultate:

Preț pe kg (euro)	4.5	5.2	4.7	4.9
Cota de piață	10	8	8.9	9.1

Să se ajusteze aceste date numerice printr-o dreaptă. Presupunând că în luna a 5-a prețul pe kg este $x = 2$ să se găsească cota de piață y .

3. În urma unui studiu privind cererea unor produse de primă necesitate, s-au obținut următoarele date pentru venitul x al unei persoane și cererea y a produselor respective:

Venit (mii Dolari)	1	2	4	8
Cerere (mii Dolari)	0.4	1	1.6	2

Să se ajusteze aceste date printr-o dreaptă.

4. Profitul înregistrat de către o firmă în 2004 este de 5.1 milioane €, în 2007 este de 8.3 milioane €, iar în 2009 este de 2.3 milioane €. Să se ajusteze aceste valori printr-o dreaptă, respectiv parabolă și să se calculeze previziunea profitului pentru 2012 și 2013.

5. Numărul calculatoarelor vândute lunar de către o firmă este dat în tabelul de mai jos.

luna	ianuarie	martie	aprilie
nr.calc.	30	45	50

Să se ajusteze printr-o dreaptă, respectiv parabolă, datele de mai sus și să se preconizeze numărul de calculatoare ce urmează a fi vândute în luna septembrie și decembrie (pentru fiecare caz în parte).

6. Ajustați printr-o dreaptă, respectiv parabolă, datele numerice:

x	-2	-1	0	1	2
y	9	4	2	4	11

7. Ajustați printr-o dreaptă, respectiv parabolă, datele numerice:

x	-2	-1	0	2	3
y	5	2	1	7	15

Răspunsuri.

1. **Indiciu:** Pentru simplificare setăm aprilie:=4, mai:=5, iunie:=6.
Vom avea ecuația dreptei $y = -2/3 + 4x \Rightarrow y = f(8) = 31.3^\circ$.
Prin urmare, în luna august vor fi 31.3° .
2. Dreapta de ajustare: $y = 21.25 - 2.54x$, $y = f(2) = 16.17$
3. Dreapta de ajustare: $y = 0.46 + 0.21x$
4. Setăm 2004 := 1, 2007 := 4, 2009 := 6 : $y = 6.82 - 0.43x$, $y = 0.78 + 5.13x - 0.81x^2$.
5. Dreapta de ajustare: $y = 23.57 + 6.79x$, Parabola de ajustare: $y = 20 + 10.83x - 0.83x^2$.
6. Dreapta de ajustare: $y = 0.4x + 6$, Parabola de ajustare: $y = 2x^2 + 0.4x + 2$
7. Dreapta de ajustare: $y = \frac{175}{86}x + \frac{223}{43}$, Parabola de ajustare: $y = \frac{119}{88}x^2 + \frac{49}{88}x + \frac{10}{11}$

Integrale euleriene

A. Aspecte teoretice:

Funcția BETA : $B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx$

Proprietăți :

1. $B(p, 1) = \frac{1}{p}, B(1, 1) = 1$

2. $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \pi$

3. $B(p, q) = B(q, p)$

4. Dacă $p > 1 \Rightarrow B(p, q) = \frac{p-1}{p+q-1} B(p-1, q)$

5. Dacă $q > 1 \Rightarrow B(p, q) = \frac{q-1}{p+q-1} B(p, q-1)$

6. Dacă $m, n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow B(m, n) = \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}$

7. Dacă $0 < p < 1, p+q=1 \Rightarrow B(p, q) = \frac{\pi}{\sin p\pi}$

Funcția GAMA : $\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} dx$

Proprietăți :

1. $\Gamma(1) = 1$

2. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

3. Dacă $p > 1 \Rightarrow \Gamma(p) = (p-1)\Gamma(p-1)$

4. Dacă $m \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \Gamma(m) = (m-1)!$

5. Relația lui Euler: $B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \forall p > 0, q > 0$

B. Aplicații practice:

1. Calculați :

a) $\Gamma(4)$

b) $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)$

c) $B(3,4)$

d) $B\left(\frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right)$

e) $B\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$

f) $\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)$

g) $B\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$

h) $B(1 + B(1, 2), B(2, 1))$

i) $\Gamma\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\right)$

2. Cu ajutorul integralelor lui Euler, calculați:

(a) $\int_2^{\infty} x \cdot e^{2-x} dx$

(b) $\int_0^{\infty} x \cdot e^{2-x} dx$

(c) $\int_0^1 \sqrt[4]{\left(\frac{1-x}{x}\right)^3} dx$

(d) $\int_0^1 \sqrt{x-x^2} dx$

(e) $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x} + 4x^2 + 5x\sqrt{x}}{e^x} dx$

(f) $\int_0^1 x^{10} (1-x)^8 dx$

(g) $\int_0^1 x \sqrt{\frac{x}{1-x}} dx$

TEMĂ - Integrale euleriene

1. Să se calculeze valorile funcțiilor gama și beta de mai jos:

a) $\Gamma(7)$; $\Gamma(\log_2 32)$; $B(1, 1)$; $B(3, 6)$;

b) $\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)$; $B\left(\frac{1}{6}, \frac{11}{6}\right)$; $B\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 3\right)$;

c) $B\left(4, \frac{\pi}{2}\right)$; $B\left(B\left(2, \frac{1}{2}\right), 2\right)$; $B\left(\frac{n+1}{n}, \frac{n-1}{n}\right)$, $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$.

2. Folosind proprietățile funcțiilor gama și beta, calculați:

a) $B\left(4, \frac{1}{6}\right) + 3\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)$;

b) $B\left(\frac{1}{4}, \frac{15}{4}\right) + 2\Gamma(3) - \Gamma(4)$.

3. Folosind proprietățile integralelor euleriene, să se calculeze următoarele integrale:

1)

$$\int_0^1 \sqrt{x}(x-1)^2 dx$$

2)

$$\int_0^1 \frac{x-1}{\sqrt{x}} dx$$

3)

$$\int_0^1 \frac{(x-1)^3}{\sqrt[4]{x}} dx$$

4)

$$\int_0^1 \frac{1-x}{2\sqrt{x}} dx$$

5)

$$\int_0^1 \frac{1+2x+3x^2}{\sqrt{1-x}} dx$$

6)

$$\int_0^1 \frac{(x+1)^2}{\sqrt[3]{1-x}} dx$$

7)

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[99]{x}-1}$$

8)

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{1-x} + \sqrt[3]{x}-1}{x-1} dx$$

9)

$$\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x}\right) \sqrt{x} dx$$

10)

$$\int_0^1 x^2 \sqrt{\frac{x}{1-x}} dx$$

11)

$$\int_0^1 x \sqrt{x} (\sqrt{x} - 1)^4 dx$$

12)

$$\int_{-1}^0 \sqrt[3]{x}(x+1) dx$$

13)

$$\int_0^{1/2} (2x-1)^3 \sqrt[3]{4x} dx$$

14)

$$\int_{-1/2}^0 x \sqrt{2x+1} dx$$

15)

$$\int_0^{1/3} \sqrt{x-3x^2} dx$$

16)

$$\int_1^\infty \frac{\sqrt[3]{x-1}}{x^2} dx$$

17)

$$\int_0^3 x \sqrt{\frac{x}{3-x}} dx$$

18)

$$\int_{-1}^0 x \sqrt[3]{x+1} dx$$

19)

$$\int_{-2}^\infty \frac{x+1}{\sqrt[3]{e^{x+2}}} dx$$

20)

$$\int_1^2 \frac{x-2}{\sqrt[4]{x-1}} dx$$

21)

$$\int_0^\infty x^3 e^{-x} dx$$

22)

$$\int_0^\infty \frac{x^2 + x + 1}{e^x} dx$$

23)

$$\int_0^\infty x e^{-\sqrt{2x}} dx$$

24)

$$\int_0^\infty (x+1)^2 e^{-x} dx$$

25)

$$\int_0^\infty (x^3 + 1) e^{-2x+1} dx$$

26)

$$\int_0^\infty \frac{x e^{x-1}}{e^{3x}} dx$$

27)

$$\int_0^\infty x^2 e^{-3x^2} dx$$

28)

$$\int_0^\infty \frac{x-1}{2e^x} dx$$

29)

$$\int_0^\infty \frac{e^x + 1}{e^{2x}} dx$$

30)

$$\int_0^\infty \frac{e^x - x}{e^{3x}} dx$$

31)

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{2x}(x+1)}{e^{3x+2}} dx$$

32)

$$\int_0^{\infty} x^3 e^{-3x+1} dx$$

33)

$$\int_0^{\infty} x e^{-(x+3)} dx$$

34)

$$\int_{-3}^{\infty} x e^{-(x+3)} dx$$

35)

$$\int_1^{\infty} x^2 e^{-\frac{x-1}{4}} dx$$

Răspunsuri

Reamintim valoarea constantei matematice

$$\pi = 3.1415926535.$$

1. (a) 720, 24, 1, $\frac{1}{168} = 0.005952$
 (b) $\pi\sqrt{2} = 4.442883$, $\frac{5\pi}{3} = 5.235988$, $\frac{20\sqrt{2}-24}{7} = 0.612039$
 (c) $\frac{96}{\pi(2+\pi)(4+\pi)(6+\pi)} = 0.091035$, $\frac{9}{28} = 0.321429$, $\frac{\pi}{n \cdot \sin(\frac{\pi}{n})}$
2. a) $\frac{7776}{1729} + \frac{45\sqrt{\pi}}{8} = 14.46745025$, b) $\frac{77\sqrt{2\pi}-256}{128} = 0.67267176$
3. (1) $\frac{16}{105}$, (2) $-\frac{4}{3}$, (3) $\frac{512}{1155}$, (4) $\frac{8}{5}$ ($x = \sqrt{t}$), (5) $\frac{118}{15}$, (6) $\frac{111}{70}$, (7) $-\frac{99}{98}$, (8) 1
 (9) $-\frac{4}{3}$, (10) $\frac{5\pi}{16}$, (11) $\frac{1}{315}$ ($\sqrt{x} = t$), (12) $-\frac{9}{28}$ ($x+1 = t$), (13) $-\frac{3^5}{880\sqrt{32}}$ ($2x = t$)
 (14) $-\frac{1}{3}$ ($2x+1 = t$), (15) $\frac{\sqrt{3}}{72}$ ($3x = t$), (16) $\frac{2\pi\sqrt{3}}{9}$ ($1/x = t$), (17) $\frac{27\pi}{8}$ ($x/3 = t$)
 (18) $-\frac{9}{10}$ ($x+1 = t$), (19) $6\left(\frac{x+2}{3} = t\right)$, (20) $-\frac{16}{21}$ ($x-1 = t$), (21) 6, (22) 4
 (23) $\frac{1}{2}$ ($\sqrt{2x} = t$), (24) 5, (25) $\frac{7e}{8}$ ($2x = t$), (26) $\frac{1}{4e}$ ($2x = t$), (27) $\frac{\sqrt{3}\pi}{36}$ ($3x^2 = t$)
 (28) 0, (29) $\frac{3}{2}$, (30) $\frac{7}{18}$, (31) $\frac{2}{e^2}$, (32) $\frac{2e}{27}$ ($3x = t$), (33) $\frac{1}{e^3}$, (34) -2 ($x+3 = t$)
 (35) $164\left(\frac{x-1}{4} = t\right)$

Simulare - Parțial

Timp de lucru 40 minute

1 punct din oficiu

1. (2p) Productivitatea unei anumite țări este dată de $Q(K, L) = 30K^{\frac{3}{5}}L^{\frac{2}{5}}$ unde sunt folosite K unități de capital și L unități de forță de muncă.
- (a) Calculați Q'_K și Q'_L
 - (b) Care sunt valorile marginale ale producției dacă sunt cheltuite 25 unități ale forței de muncă și 50 ale capitalului?
 - (c) În acest caz, guvernul ar trebui să încurajeze investiția în capital sau în forța de muncă?
-

2. (2p) Calculați f'_x, f'_y, f'_z și f''_{xz} pentru $f(x, y, z) = \frac{1}{xy} + \frac{1}{x^3z} + \frac{1}{y^3z}$ cu $x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$ în $a = (1, 2, 1)$
-

3. (3p) Determinați extremele funcției

$$f(x, y) = 200x + 500y, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \text{cu legătura } xy = 1000.$$

4. (2p) Volumul vânzărilor unei companiei (în milioane bucăți) între anii 2013-2017 este prezentat mai jos :

Anul	2013	2014	2015	2016	2017
Număr	8	10	11	12	14

Găsiți ecuația dreptei ce ajustează volumul vânzărilor și estimați valoarea lui în 2018.

Răspuns:

$$1. Q'_K = 18 \left(\frac{L}{K} \right)^{2/5}, \quad Q'_L = 12 \left(\frac{K}{L} \right)^{3/5}$$

$$Q'_K(50, 25) = \frac{18}{\sqrt[5]{4}} = 13.641449, \quad Q'_L(50, 25) = 12 \sqrt[5]{8} = 18.188599$$

Guvernul ar trebui să încurajeze investiția în forța de muncă.

$$2. f'_x = -\frac{1}{x^2 y} - \frac{3}{x^4 z}, \quad f'_y = -\frac{1}{x y^2} - \frac{3}{y^4 z}, \quad f'_z = -\frac{1}{x^3 z^2} - \frac{1}{y^3 z^2} \text{ și } f''_{xz} = \frac{3}{x^4 z^2}$$

$$\text{Deci } f'_x(1, 2, 1) = -\frac{7}{2} = -3.5, \quad f'_y(1, 2, 1) = -\frac{7}{16} = -0.4375$$

$$f'_z(1, 2, 1) = -\frac{9}{8} = -1.125 \text{ și } f''_{xz}(1, 2, 1) = 3$$

$$3. f_{min} = f(50, 20) = 20.000, \quad f_{max} = f(-50, -20) = -20.000$$

$$4. \text{Setăm } 2013 := 1 \text{ prin urmare ecuația dreptei este } y = 6.8 + 1.4x \text{ iar pentru } 2018 \text{ avem } f(6) = 15.2$$

Probabilități

A. Aspecte teoretice:

Definiția clasică a probabilității :

$$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{\text{număr de cazuri favorabile}}{\text{număr de cazuri posibile}}.$$

Proprietăți elementare ale probabilității :

1. $P(\emptyset) = 0, P(\Omega) = 1 \Rightarrow P(A) \in [0, 1]$
2. $P(\bar{A}) = 1 - P(A), \forall A \in \mathcal{F}$
3. $P(B \setminus A) = P(B) - P(A \cap B), \forall A, B \in \mathcal{F}$
4. Dacă $A, B \in \mathcal{F}$, cu $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$ (monotonie)

Probabilitatea reuniunii = Formula de adunare a probabilităților

1. Pentru $\forall A, B \in \mathcal{F}$
 - dacă A și B **incompatibile** : $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
 - dacă A și B **compatibile** : $A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
2. Pentru $\forall A, B, C \in \mathcal{F}$
 - dacă A, B, C sunt două câte două incompatibile : $A \cap B = \emptyset, A \cap C = \emptyset, B \cap C = \emptyset$, atunci:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$$

- dacă A, B, C sunt oarecare (nu sunt două câte două incompatibile)

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

Definiție: Probabilitatea condiționată :

$$P(A|B) = P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\text{probabilitatea intersecției}}{\text{probabilitatea condiției}}$$

Definiție : Independența evenimentelor

- A și B sunt independente dacă $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
- A și B sunt dependente dacă $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B|_A) = P(B) \cdot P(A|_B)$ unde $P(A), P(B) \neq 0$.

OBSERVAȚIE : Dacă (A,B) sunt independente $\Rightarrow (\bar{A},B), (\bar{B},A), (\bar{A},\bar{B})$ independente.

Probabilitatea intersecției = Formula de înmulțire a probabilităților

Dacă $A, B, C \in \mathcal{F}$ (sunt dependente)

- $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$
- $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(C|A \cap B)$

Formula probabilității totale : Fie $(\mathcal{E}, \mathcal{F}, P)$ un câmp de probabilitate, $\{A_1, A_2, \dots, A_n\} \in \mathcal{F}$ un sistem complet de evenimente și $X \in \mathcal{F}$. Atunci

$$P(X) = P(A_1) \cdot P(X|A_1) + P(A_2) \cdot P(X|A_2) + \dots + P(A_n) \cdot P(X|A_n)$$

Formula lui Bayes :
$$P(A_j|X) = \frac{P(A_j \cap X)}{P(X)} = \frac{P(A_j) \cdot P(X|A_j)}{P(X)}$$

B. Aplicații practice:

1. Calculați:
 - a) 25 de studenți au rezervat un rând de 25 de locuri la o piesă de teatru. În câte moduri se pot așeza?
 - b) Într-o cutie sunt 14 bile numerotate de la 1 la 14, care se extrag una câte una. În câte moduri poate avea loc extragerea?
 - c) În câte moduri se poate alege o echipă de 4 persoane dintr-un colectiv de 10 profesori?

2. Un student are într-o zi 3 cursuri, la care poate participa sau nu. Fie A_i evenimentul "studentul merge la cursul i ", $i = 1, 2, 3$. Să se exprime cu ajutorul acestora, evenimentele:
 - a) studentul merge la toate cursurile
 - b) studentul merge la cel puțin un curs
 - c) studentul nu merge la nici un curs
 - d) studentul merge la un singur curs
 - e) studentul merge la doar 2 cursuri
 - f) studentul merge la cel mult 2 cursuri

3. Trei arcași trag la țintă o singură dată. Probabilitățile de a nimeri ținta sunt 0.3 pentru primul arcaș, 0.15 pentru al doilea și 0.25 pentru al treilea. Determinați probabilitatea (scrieți răspunsul cu 4 zecimale) ca:
 - (a) ținta să fie atinsă exact o dată
 - (b) ținta să fie atinsă de cel mult două ori
 - (c) ținta să fie atinsă doar de primul concurent.

4. Într-o urnă sunt 12 bile numerotate de la 1 la 12. Să se determine probabilitatea evenimentului ca bilele numerotate cu 5,7,11 să iasă la extragerile 5,7,11, atunci când se extrage pe rând câte o bilă (fără întoarcere).

5. Un lacăt are un cifru format din 4 cifre. Care este probabilitatea de a ghici cifrul dacă lacătul funcționează perfect, respectiv ultima cifră, din cauza unei defecțiuni, nu trebuie să coincidă cu cea din combinație ?

6. Probabilitatea ca un autobuz să plece în cursă din autogara din Cluj este 0.6. Dispunem în garaj de 2 autobuze: unul alb și unul roșu. Care este probabilitatea ca cel puțin un autobuz să plece în cursă dintre cele două? Dar dacă ar fi vorba de 3 autobuze?

7. Fie A și B evenimente pentru care:

$$P(A) = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{1}{3} \quad \text{și} \quad P(A \cap B) = \frac{1}{4}$$

Se cere:

(a) A și B sunt independente?

(b) $P(\bar{A}), P(\bar{B}), P(A \cup B), P(\bar{A} \cap \bar{B}), P(\bar{A} \cup \bar{B}), P(A|B), P(B|A), P(A - B)$

8. Fie $P(A|B) = \frac{1}{2}, P(B|A) = \frac{1}{2}$ și $P(A|\bar{B}) = \frac{1}{2}$.

Se cere:

(a) să se determine $P(A), P(B)$ și $P(A \cap B)$

(b) A și B sunt independente?

9. Irina iese la cumpărături în fiecare zi. Cumpărăturile obișnuite sunt: fructe, pâine și lapte. Cumpără aceste produse cu probabilitățile: 0,8, 0,5 și 0,3, independent unele de altele și de celelalte produse cumpărate. Determinați probabilitatea ca într-o zi Irina să cumpere toate cele 3 produse, respectiv cel puțin un produs din cele 3.

10. Un student are într-o zi 3 cursuri. Șansa de a participa la oricare dintre cursuri este de 0.7. Care este probabilitatea ca studentul să meargă la cel puțin un curs? Dar la toate cele 3 cursuri?
11. O familie obișnuită își petrece concediul de vară într-o excursie cu probabilitatea de 80%. Această excursie are destinația în țară cu o probabilitate de 50%. Locurile preferate ale turiștilor sunt litoralul (35%), stațiunile balneare (40%) și muntele (25%). Cu ce probabilitate își petrece vacanța de vară o familie obișnuită efectuând o excursie în țară și respectiv o excursie pe litoralul mării autohtone?
12. Fiecare literă a cuvintelor "PARTIDELE FUZIONEAZA" e scrisă pe un cartonaș. Se cere probabilitatea ca extrăgând succesiv 7 cartonașe să apară cuvântul "ELEFANT" (literele nu se reintroduc).
13. Fie 2 cutii cu bomboane roșii și galbene. În cutia 1, sunt 60 bomboane roșii și 40 galbene, iar în cutia 2 sunt 10 bomboane roșii și 20 galbene. Se extrage la întâmplare dintr-o cutie o bomboană. Care este probabilitatea ca aceasta să fie roșie?
14. Într-o secție a unei întreprinderi sunt 12 utilaje de același fel în exploatare: 3 provin de la fabrica F1, 4 de la F2 și 5 de la F3. Se știe că fabricile produc utilaje de calitate superioară în proporție de 90%, 80% și 75%.
- a) Care este probabilitatea ca luând la întâmplare un utilaj la verificat, acesta să fie de calitate superioară?
 - b) Care este probabilitatea ca utilajul ce a fost găsit de calitate superioară la verificare, să fi fost fabricat de F2?

15. (Examen medical) Fie un test medical având acuratețea de 90%. Fie A_1 evenimentul "pacientul e bolnav" și A_2 evenimentul "pacientul nu e bolnav". Știm că probabilitatea ca testul să fie pozitiv dacă pacientul e bolnav este 0.9, iar probabilitatea ca testul să fie pozitiv dacă pacientul nu e bolnav este 0.1. Șansa de contaminare este de 1 la 10000. Dacă rezultatul unui test este pozitiv, care este probabilitatea ca pacientul să fie bolnav?

TEMĂ - Probabilități

1. O monedă este aruncată de 3 ori și secvența de mărci (M) și steme (S) ce apare este înregistrată.
 - a) Scrieți spațiul evenimentelor elementare Ω
 - b) Scrieți următoarele evenimente, folosindu-le pe cele elementare: A: "să apară cel puțin 2 steme"
B: "primele 2 aruncări sunt steme" C: "ultima aruncare e marcă"
 - c) Determinați următoarele evenimente: $\bar{A}$; $A \cap B$; $A \cup C$.

2. În drum spre locul de muncă un om trece prin 3 intersecții consecutive, semaforizate. La fiecare semafor se oprește sau își continuă drumul. Dacă notăm cu A_i , $i = \overline{1,3}$ evenimentul "la intersecția i persoana își continuă drumul", să se exprime folosind A_1, A_2, A_3 următoarele evenimente:
 - a) persoana are liber la toate intersecțiile
 - b) persoana oprește la toate intersecțiile
 - c) persoana oprește la cel puțin o intersecție
 - d) persoana oprește la cel mult o intersecție.

3. La un telescaun pentru ski așteaptă 5 persoane. Un telescaun poate transporta doar 3 persoane odată.
 - a) În câte moduri se poate organiza primul grup?
 - b) Care este probabilitatea ca o persoană aleasă aleator dintre cei 5 să fie în primul transport? Dar în al doilea?

4. Se aruncă o monedă de două ori. Care este probabilitatea ca marca să apară cel puțin o dată?
5. Se aruncă 2 zaruri. Care este probabilitatea ca suma lor să fie 8. Dar un număr prim? Sau cel puțin 4?
6. Se aruncă 2 zaruri. Care este probabilitatea ca suma fețelor să fie 6, știind că suma acestor fețe a dat un număr par?
7. Presupunem că într-o cameră sunt 5 persoane. Care este probabilitatea ca cel puțin 2 persoane să aibă aceeași zi de naștere?
8. Un lift ce conține 5 persoane se poate opri la oricare din cele 7 etaje ale unei clădiri. Care este probabilitatea ca 2 persoane să nu coboare la același etaj?
9. Un card emis de o bancă are ca număr de identificare un număr de 7 cifre, ce nu poate începe cu cifra 0. Care sunt probabilitățile ca un număr de identificare:
 - a) să înceapă cu 456
 - b) să nu conțină cifre identice
 - c) să se termine cu 21.

10. Într-o grupă de studenți sunt 30 care vorbesc limba engleză, 15 vorbitori de limba germană și 8 studenți care cunosc limba franceză. Dintre cei vorbitori de limba engleză, 10 vorbesc și limba germană, iar 3 vorbesc și limba franceză. Pe de altă parte avem 3 studenți care vorbesc și limba germană, și limba franceză. Știind că, este un singur student care vorbește toate cele trei limbi, determinați numărul total al studenților din această grupă.
11. Un student se pregătește pentru 2 examene. Pe baza pregătirii sale el va promova primul examen cu o probabilitate de 60%, iar al doilea examen cu o probabilitate de 50%. Dacă rezultatele de la cele două examene sunt independente,
- a) care este probabilitatea de a promova ambele examene?
 - b) care este probabilitatea de a promova cel puțin unul dintre cele două examene?
12. Daltonismul este o tulburare a vederii cromatice (constând în incapacitatea de a deosebi unele culori), care afectează 8% din populația masculină și 1% din populația feminină. În România un nou-născut este fată cu o probabilitate de 51%. Determinați care este probabilitatea ca un nou-născut din România să sufere de daltonism.
13. La un workshop participă patru firme. Firmele sunt reprezentate de 4, 3, 3, respectiv 5 angajați. Dintre acești reprezentanți 1, 1, 1, 2 vorbesc limba germană. Un investitor din Germania este interesat de aceste firme și se adresează unui reprezentant. Care este probabilitatea ca reprezentantul ales aleator, să vorbească limba germană? Care este probabilitatea ca, dacă, un reprezentant ales aleator vorbește limba germană, atunci el provine de la a patra firmă?

14. O companie produce în 3 schimburi. Într-o anumită zi, 1% din articolele produse de primul schimb sunt defecte, 2% din cele produse în al doilea schimb și 3% din al treilea schimb. Dacă cele trei schimburi au aceeași productivitate, care este probabilitatea ca un produs din acea zi să fie defect? Dacă un produs este defect, care este probabilitatea ca el să fi fost fabricat în schimbul al treilea?

Răspunsuri.

1. (a) $\Omega = \{MMM, MMS, SMM, MSM, SSM, MSS, SMS, SSS\}$,
 (b) $A = \{SSM, MSS, SMS, SSS\}$, $B = \{SSM, SSS\}$,
 $C = \{SSM, SMM, MSM, SMM, MMM\}$
 (c) $\bar{A} = \{MMM, MMS, SMM, MSM\}$; $A \cap B = B$;
 $A \cup C = \{SSM, MSS, SMS, SSS, SMM, MSM, SMM, MMM\}$
2. (a) $A = A_1 \cap A_2 \cap A_3$
 (b) $B = \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 = \overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}$
 (c) $C = \bar{A}_1 \cup \bar{A}_2 \cup \bar{A}_3$
 (d) $D = A \cup (A_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3) \cup (\bar{A}_1 \cap A_2 \cap A_3) \cup (A_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3)$
3. a) $C_5^3 = 10$, b) $P(X) = \frac{1 \cdot C_4^2}{C_5^3} = 0.6$ și $P(\bar{X}) = 1 - P(X) = 0.4$
4. Pentru că $\Omega = \{MM, MS, SM, SS\}$ avem $P(X) = \frac{3}{4} = 0.75$
5. $P(A) = \frac{5}{36} = 0.1388889$, $P(B) = \frac{15}{36} = 0.4166667$, $P(C) = \frac{33}{36} = 0.9166667$
6. Probabilitatea ca suma fețelor să fie număr par este $P(B) = \frac{18}{36}$
 Probabilitatea ca suma fețelor să fie 6 este $P(A) = \frac{5}{36}$
 Prin urmare probabilitatea căutată este $P(A|B) = \frac{5}{18} = 0.2777778$
7. Avem $P(\bar{X}) = \frac{365 \cdot 364 \cdot \dots \cdot 361}{365^5} = 0.972865$
 Prin urmare $P(X) = 1 - P(\bar{X}) = 1 - 0.972865 = 0.027135$
8. $P(X) = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{7^5} = 0.149937$
9. $P(A) = \frac{10^4}{9 \cdot 10^6} = 0.001111$, $P(B) = \frac{9^2 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{9 \cdot 10^6} = 0.006048$, $P(C) = \frac{9 \cdot 10^4}{9 \cdot 10^6} = 0.01$
10. $|A \cup B \cup C| = 30 + 15 + 8 - 10 - 3 - 3 + 1 = 38$

11. $P(A \cap B) = 0.6 \cdot 0.5 = 0.3$ și respectiv $P(A \cup B) = 0.6 + 0.5 - 0.3 = 0.8$
12. Utilizând formula probabilității totale avem $P(X) = 0.49 \cdot 0.08 + 0.51 \cdot 0.01 = 0.0443$
13. Folosind formula probabilității totale și formula lui Bayes se obține 0.3333 respectiv 0.4.
14. Folosind formula probabilității totale și formula lui Bayes se obține 0.02 respectiv 0.5.

Scheme probabilistice

A. Aspecte teoretice:

- Descriem anumite experimente aleatoare care apar des în aplicații cu ajutorul unor urne din care se extrag bile (**Urna** = vas în care se află bile, ce pot avea culori diferite)
- Toate bilele din urnă au aceeași șansă de a fi extrase
- Avem 2 cazuri: $\begin{cases} \text{cu 2 stări (bile de 2 culori)} \\ \text{cu mai multe stări (bile de mai multe culori)} \end{cases}$

1. Schema urnei cu bila nerevenită: "știm exact câte avem din fiecare"

Pentru 2 stări :

$$P(X) = \frac{C_a^k \cdot C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n}$$

Pentru mai multe stări :

$$P(X) = \frac{C_{a_1}^{k_1} \cdot C_{a_2}^{k_2} \cdot \dots \cdot C_{a_s}^{k_s}}{C_{a_1+a_2+\dots+a_s}^n}$$

2. Schema urnei cu bila revenită: "știm proporții sau procente"

Pentru 2 stări :

$$P(X) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

Pentru mai multe stări :

$$P(X) = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_s!} \cdot p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \dots \cdot p_s^{k_s}$$

3. Schema lui Pascal : "ultima" $P(Y_n^k) = C_{n-1}^{k-1} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$

4. Schema Geometrică : "singura și ultima" $P(Y_n^1) = p \cdot q^{n-1}$

5. Schema urnelor lui Poisson : "mai multe urne" $P(X) = \sum_{k=0}^n p_{i_1} \cdot p_{i_2} \cdot \dots \cdot p_{i_k} \cdot q_{i_{k+1}} \cdot \dots \cdot q_{i_n}$

B. Aplicații practice:

1. Dacă o familie are 5 copii, calculați probabilitatea ca:
 - a) 4 din 5 copii să fie băieți
 - b) cel puțin 2 să fie băieți.

2. Dintre costumele fabricate de o firmă specializată: 93% sunt standard, 4% rebuturi recuperabile, și 3% rebuturi nerecuperabile. Să se determine probabilitatea ca, luând la întâmplare 10 costume la verificat, 6 să fie standard, 3 rebuturi recuperabile și 1 nerecuperabil.

3. Pe un raft într-o librărie sunt 50 de cărți ce provin de la 2 depozite diferite: 20 de la depozitul D_1 și 30 de la D_2 . Intr-o zi s-au vândut 6 cărți. Calculați probabilitatea să se fi vândut același număr de cărți de la cele 2 depozite.

4. Avem 3 magazine ce vând fiecare haine casual și sport: $M_1(4, 4)$, $M_2(3, 5)$, $M_3(7, 3)$. Determinați probabilitatea ca o studentă ce a cumpărat câte o haină de la fiecare magazin:
 - a) să fi cumpărat o singură haină sport.
 - b) dar să fi cumpărat 3 haine casual?
 - c) dar cel puțin una casual?

5. Se știe că 3 din 4 clienți ce intră într-un magazin devin cumpărători. Calculați probabilitatea ca:
 - a) primul cumpărător să apară după 5 clienți ce nu au cumpărat nimic
 - b) până la al 2 lea cumpărător, 2 clienți să nu fi cumpărat nimic.

6. Într-un sac se află portocale, coapte în proporție de 80%. Un copil se joacă și scoate de 20 ori câte o portocală și o pune înapoi. Care este probabilitatea ca:
- a) ultima portocală extrasă să fie a 15 portocală coaptă nimerită?
 - b) dar dacă se fac 30 de extrageri?
7. Pe un raft cu 200 DVD-uri neetichetate se află împrăștiate 10 DVD-uri cu același film. Cineva caută acel film.
- a) știind că are dreptul la 10 încercări , care este probabilitatea să îl găsească la ultima încercare?
 - b) dar la cel mult a 4 a încercare?
8. Pentru a participa la un sondaj național sunt aleși 5 studenți dintr-o grupă de 30 de studenți: 13 băieți și 17 fete. Care este probabilitatea:
- a) să fie aleși exact 2 băieți
 - b) exact 3 fete
 - c) cel mult o fată
 - d) toți cei selectați sunt băieți (respectiv fete).
9. Pe parcursul unei săptămâni s-a dat predicția cursului valutar, astfel încât zilnic cursul poate să crească cu probabilitatea $1/4$ respectiv să scadă cu $3/4$. Care este probabilitatea ca:
- a) în 5 zile ale săptămânii cursul să crească
 - b) în cel mult 3 zile să crească.
10. Un vitezoman circulă zilnic pe autostrada Turda-Cluj. De regulă el depășește viteza admisă cu cel puțin 50 km/h. Probabilitatea ca într-o zi, să fie prins de poliție este 1%. Determinați probabilitatea ca vitezomanul să fie amendat prima dată în a 100 zi .

11. Fie 3 crescătorii de păsări. Din date statistice, pentru cele 3 ferme, se știe că probabilitatea ca într-o lună oarecare, producția de ouă să depășească 100.000 ouă este $p_1 = 0,3$, $p_2 = 0,4$, $p_3 = 0,3$. Calculați probabilitatea ca producția să fie depășită într-o lună de cel puțin 2 din cele 3 ferme.

TEMĂ- Scheme probabilistice

1. Pentru a participa la un proiect, dintr-o grupă cu 35 studenți (20 fete, 15 băieți) se aleg aleator 7 persoane. Care este probabilitatea ca între studenții aleși să fie:
 - a) exact 3 fete;
 - b) exact 2 băieți;
 - c) cel mult 1 băiat.
2. Un magazin are în stoc marfă de la 5 furnizori în următoarele cantități: 30 de la furnizorul F_1 , 100 de la F_2 , 50 de la F_3 , 80 de la F_4 și 40 de la F_5 . În decursul unei săptămâni, depozitul a vândut 50 bucăți. Care e probabilitatea ca din cele 50 de bucăți vândute, 10 să provină de la F_1 , 5 de la F_2 , 10 de la F_3 , 15 de la F_4 și 10 de la F_5 .
3. Pe parcursul unei săptămâni s-a dat predicția cursului valutar, astfel încât zilnic cursul poate să crească cu probabilitatea $\frac{1}{6}$, respectiv să scadă cu probabilitatea $\frac{5}{6}$. Stabiliți probabilitatea ca:
 - a) în 4 zile ale săptămânii cursul valutar să crească;
 - b) în cel mult 2 zile cursul valutar să crească;
 - c) în cel puțin 2 zile cursul valutar să crească.
4. Un supermarket vinde următoarele sortimente de cafea: naturală, cappuccino și espresso. Probabilitatea ca un client să cumpere cafea naturală este 0,6, cappuccino 0,3, iar espresso 0,1. Determinați probabilitatea ca, din 500 clienți, 250 să cumpere cafea naturală, 120 să cumpere cappuccino, iar 130 să cumpere espresso.
5. Care e probabilitatea ca al 100-lea client ce intră într-o bancă, să fie a 40-a persoană ce încheie un contract de creditare, dacă probabilitatea ca cineva să încheie un astfel de contract este de 0.75?

6. La trei reprezentanțe de telefonie mobilă se găsesc telefoane mobile clasice și android în următoarele proporții: la prima reprezentanță 20 clasice și 30 android, la a doua 23 clasice și 37 android, iar la a treia 34 clasice și 36 android. Se alege la întâmplare câte un telefon mobil de la fiecare reprezentanță, pentru a fi supus unor probe de verificare. Care e probabilitatea ca din cele 3 telefoane alese unul să fie clasic, iar două android?
7. *În catedrala Sfântul Anton din Padova, un vizitator este turist străin cu o probabilitate de 80%. Fiecare turist cumpără un suvenir cu o probabilitate de 60%, în timp ce localnicii cumpără suvenir cu o probabilitate de doar 5%. Care este probabilitatea ca un vizitator să cumpere un suvenir? Care este probabilitatea ca al 30-lea vizitator să fie a 10-a persoană care cumpără un suvenir?
8. *Alegem câte un costum de la 4 producători diferiți. La primul producător probabilitatea ca un costum să aibă vreun defect de fabricație este de 2%, la al doilea producător este de 3%, la al treilea este 5% și la al patrulea este 7%. Determinați probabilitatea evenimentului ca nici unul dintre cele 4 costume alese să nu fie cu defect. Dacă de la primul producător și de la al patrulea alegem câte un costum și de la al doilea și al treilea câte două costume, cu ce probabilitate nu vom avea nici un costum defect printre cele 6 alese?
9. Într-un lot de 400 piese, 10 sunt defecte. Se aleg aleator 20 piese. Să se calculeze probabilitatea ca între piesele alese 4 să fie defecte.
10. O comisie internațională este formată din 5 români, 7 italieni, 4 olandezi și 6 elvețieni. Se aleg la întâmplare 10 persoane pentru a forma o subcomisie. Să se calculeze probabilitatea ca din cele 10 persoane alese, 2 să fie români, 3 italieni, 3 olandezi și 2 elvețieni.

11. Pe parcursul a 10 zile de vară s-a dat prognoza meteo astfel încât zilnic pot cădea precipitații cu probabilitatea 0,2. Calculați probabilitatea de a ploua în 3 zile; în cel mult 2 zile; în cel puțin 3 zile.
12. Se aruncă un zar de 20 de ori. Să se calculeze probabilitatea ca de 8 ori să apară un număr prim, de 10 ori un număr compus și de 2 ori fața cu un punct.
13. Avem 4 grupe de studenți: în prima grupă sunt 20 fete și 5 băieți, în a doua grupă sunt 15 fete și 10 băieți, în a treia grupă sunt 10 fete și 15 băieți, în a patra grupă sunt 24 fete și 1 băiat. Se alege câte un student din fiecare grupă pentru a participa la o acțiune publicitară pentru promovarea unui produs. Să se calculeze probabilitatea ca între studenții aleși 3 să fie fete; să fie numai fete și respectiv să fie cel puțin o fată.
14. Un magazin oferă o promoție clienților. La fiecare cumpărătură cu valoarea peste 50 RON, cumpărătorul primește un bilet de răzuit. Dacă clientul reușește să colecteze 3 bilete cu logo-ul magazinului, el primește un voucher de cumpărături în valoare de 200 RON. Probabilitatea ca pe un bilet să apară logo-ul magazinului este de 10%. Care este probabilitatea evenimentului ca un cumpărător:
- a) să găsească al 3-lea logo pe al 10-lea bilet?
 - b) să obțină primul logo pe al 10-lea bilet?
15. *Probabilitățile ca dimensiunile unei piese de mașină să fie în limite mai mici, respectiv mai mari decât cele admisibile sunt de respectiv 0.07 și 0.1, iar probabilitatea ca o piesă să aibe dimensiunile în limite admisibile este 0.83. Dintr-un lot de 1000 de piese se extrag 140. Care este probabilitatea ca 5 dintre aceste 140 piese să aibe dimensiunile mai mici decât cele admisibile și 7 mai mari decât cele admisibile?

16. *La o baltă privată, la care se pescuiește în sistem "prinde și eliberează", se estimează că la fiecare lansare există 45% șanse de a prinde un pește. Calculați probabilitatea ca din 10 lansări să fie prinși 7 pești (știind că se poate prinde cel mult un pește la fiecare lansare). Dar probabilitatea ca din 7 încercări să fie prinși doi pești, cel de al doilea fiind prins la a 7-a lansare?

Răspunsuri.

1. Schema urnei cu bila nerevenită cu 2 stări: 0.2314, 0.2420, 0.97
2. Schema urnei cu bila nerevenită cu 5 stări: $P(X) = \frac{C_{30}^{10} \cdot C_{100}^5 \cdot C_{50}^{10} \cdot C_{80}^{15} \cdot C_{40}^{10}}{C_{300}^{50}}$
3. Schema urnei cu bila revenită cu 2 stări: 0.0156, 0.9042, 0.3302
4. Schema urnei cu bila revenită cu 3 stări:

$$P(X) = \frac{500!}{250! \cdot 120! \cdot 130!} \cdot (0.6)^{250} \cdot (0.3)^{120} \cdot (0.1)^{130}$$

5. Schema lui Pascal: $P(Y_{99}^{39}) = C_{99}^{39} \cdot (0.75)^{40} \cdot (0.25)^{60}$
6. Schema urnelor lui Poisson: 0.4249
7. Formula probabilității totale: 0.49, Schema lui Pascal: 0.0113
8. Schema urnelor lui Poisson cu 4 urne: 0.8399,

Schema urnelor lui Poisson cu 6 urne (dublăm urnele 2 și 3): 0.7739

9. Schema urnei cu bila nerevenită cu 2 stări: 0.0007548
10. Schema urnei cu bila nerevenită cu 4 stări: 0.0325
11. Schema urnei cu bila revenită cu 2 stări: 0.2013, 0.6778, 0.3222
12. Schema urnei cu bila revenită cu 3 stări: 0.01527
13. Schema urnelor lui Poisson: 0.4531, 0.1843, 0.9981
14. Schema lui Pascal: 0.0172, Schema geometrică: 0.0387
15. Schema urnei cu bila revenită cu 3 stări:

$$P(X) = \frac{140}{1000} \cdot \frac{140!}{5! \cdot 7! \cdot 128!} \cdot (0.7)^5 \cdot (0.1)^7 \cdot (0.83)^{128}$$

16. Schema urnei cu bila revenită cu 2 stări: 0.0738, Schema lui Pascal: 0.0611

Variable aleatoare discrete

A. Aspecte teoretice:

- ✓ O variabilă aleatoare de tip discret are repartiția

$$X: \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n & \dots \end{pmatrix}, \begin{cases} p_i \geq 0, i \in I \\ p_1 + p_2 + \dots + p_n + \dots = 1 \end{cases}$$

- ✓ Exemple de construcții de variabile aleatoare:

1. Un motor generează energie electrică ce este folosită intermitent de 10 muncitori ce lucrează independent. Fiecare muncitor utilizează energie electrică timp de 12 minute într-o oră. Notând cu X v.a. ce reprezintă numărul muncitorilor ce utilizează energie la un moment dat, scrieți distribuția v.a. X .

$$X: \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 10 \\ p_0 & p_1 & \dots & p_{10} \end{pmatrix}, \begin{cases} p_i \geq 0, i \in I \\ p_0 + p_1 + \dots + p_{10} = 1 \end{cases}$$

Unde probabilitățile sunt calculate cu ajutorul schemei urnei cu bila revenită și cu 2 stări:

$$p_k = C_{10}^k \left(\frac{1}{5}\right)^k \left(\frac{4}{5}\right)^{10-k}, k = \overline{0, 10} \text{ știind că probabilitatea ca un muncitor să lucreze la un moment dat este } p = \frac{12}{60} = \frac{1}{5} \text{ și să nu lucreze este } q = 1 - p = \frac{4}{5}.$$

2. La 3 unități (U_1, U_2, U_3) se găsesc articole ce provin de la 2 fabrici (F_1, F_2) în următoarele proporții: la U_1 , $1/3$ provin de la F_1 , la U_2 , $1/2$ de la F_1 , iar la U_3 , $3/4$ de la F_1 . Un client cumpără câte un articole de la fiecare unitate. Scrieți distribuția v.a. X = numărul articolelor cumpărate de client și care provin de la F_1 .

$$X: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{12} & \frac{3}{8} & \frac{5}{12} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}.$$

Unde probabilitățile au fost calculate cu ajutorul schemei urnelor lui Poisson, astfel încât

$$Q(t) = \left(\frac{1}{3}t + \frac{2}{3}\right) \left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{3}{4}t + \frac{1}{4}\right) \Rightarrow Q(t) = \frac{1}{8} \cdot t^3 + \frac{5}{12} \cdot t^2 + \frac{3}{8} \cdot t^1 + \frac{1}{12} \cdot t^0.$$

3. Se consideră un eșantion de 25 de clienți care intră într-un supermarket. Pentru a cerceta frecvența X cu care clienții fac apel la serviciile supermarketului de-a lungul unei săptămâni și respectiv pentru a

cerceta cheltuielile săptămânale Y în lei, ale clienților pentru procurarea de bunuri alimentare, s-au obținut următoarele date de selecție pentru X și Y :

X : 1, 2, 1, 4, 3, 2, 5, 6, 7, 7, 7, 1, 2, 3, 2, 3, 4, 6, 2, 4, 3, 1, 7, 2, 7

Y : 89, 90, 101, 88, 85, 77, 102, 100, 86, 97, 76, 121, 113, 110, 96, 92, 108, 112, 103, 109, 120.

$$X: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 6 & 4 & 3 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow X: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \frac{4}{25} & \frac{6}{25} & \frac{4}{25} & \frac{3}{25} & \frac{1}{25} & \frac{2}{25} & \frac{5}{25} \end{pmatrix}$$

Unde, pentru prima formă a variabilei (statisticii) X avem frecvențele absolute de apariție, în timp ce, pentru ce-a de a doua formă, avem frecvențele relative, adică probabilitățile de apariție (avem $n=20$ valori numărate, respectiv $N=6$ valori distincte ale variabilei).

Pentru variabila Y, pentru început, vom ordona crescător șirul cheltuielile săptămânale. Stările variabilei Y, ordonate crescător, sunt: 76, 77, 78, 84, 85, 86, 88, 89, 90, 91, 92, 96, 97, 100, 101, 102, 103, 105, 108, 109, 110, 112, 113, 120, 121 ($n=20$)

Dorim să construim o variabilă (serie statistică) formată cu $R=5$ clase (intervale). Cunoaștem valoarea minimă $x_{min} = 76$ și valoarea maximă $x_{max} = 121$. Lungimea unui interval este:

$$\lambda = \frac{x_{max} - x_{min}}{R} = \frac{121 - 76}{5} = 45/5 = 9.$$

Obținem variabila aleatoare continuă (seria unidimensională continuă) adusă la o formă discretă:

$$Y: \begin{pmatrix} [76, 85) & [85, 94) & [94, 103) & [103, 112) & [112, 121) \\ 4 & 7 & 5 & 5 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow Y: \begin{pmatrix} 80.5 & 89.5 & 98.5 & 107.5 & 116.5 \\ \frac{4}{25} & \frac{7}{25} & \frac{5}{25} & \frac{5}{25} & \frac{4}{25} \end{pmatrix}$$

✓ Operațiile care se pot efectua cu ajutorul variabilelor aleatoare sunt (X și Y două v.a.) :

Adunarea cu o constantă $c + X$: $\left(\begin{array}{c} c + x_i \\ p_i \end{array} \right)_{i \in I}$

Înmulțirea cu o constantă $c \cdot X$: $\left(\begin{array}{c} c \cdot x_i \\ p_i \end{array} \right)_{i \in I}$

Ridicarea la putere ($k \in \mathbb{N}$) X^k : $\left(\begin{array}{c} x_i^k \\ p_i \end{array} \right)_{i \in I}$

Suma a două v.a. $X + Y$: $\left(\begin{array}{c} x_i + y_j \\ p_{ij} \end{array} \right)_{i \in I, j \in J}$

Produsul a două v.a. $X \cdot Y$: $\left(\begin{array}{c} x_i y_j \\ p_{ij} \end{array} \right)_{i \in I, j \in J}$

unde $p_{ij} = P(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\})$

Dacă X și Y sunt independente avem $p_{ij} = p_i \cdot q_j$.

✓ **Funcția de repartiție:** $F: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$, $F_X(x) \stackrel{\text{def}}{=} P(\{X \leq x\})$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq x_1 \\ p_1, & x_1 < x \leq x_2 \\ p_1 + p_2, & x_2 < x \leq x_3 \\ p_1 + p_2 + p_3, & x_3 < x \leq x_4 \\ \dots \\ \sum_{j=1}^i p_j, & x_{i-1} < x \leq x_i \\ \dots \\ 1, & x > x_n \end{cases}$$

✓ Caracteristici numerice:

- Valoarea medie: $m = M(X) = \sum_{i \in I} x_i p_i$ cu proprietățile:
 1. $M(a) = a$
 2. $M(a \cdot X) = a \cdot M(X)$
 3. $M(X + Y) = M(X) + M(Y)$
 4. $M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y)$, dacă X, Y sunt independente
- Moment de ordin k : $m_k = M_k(X) = \sum_{i \in I} (x_i)^k p_i$
- Dispersia sau moment centrat de ordin 2: $D(X) = M[(X - m)^2] = \sum_{i \in I} (x_i - m)^2 \cdot p_i$ cu proprietățile:
 1. $D(X) \geq 0$
 2. $D(c) = 0$, $D(c \cdot X) = c^2 \cdot D(X)$
 3. $D(X + Y) = D(X) + D(Y)$, $D(X - Y) = D(X) + D(Y)$ dacă X, Y sunt independente
 4. $D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$
- Abaterea medie pătratică: $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$
- Moment centrat de ordin k : $\mu_k = M[(X - m)^k]$

B. Aplicații practice:

1. Fie v.a. independente:

$$X: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & a \end{pmatrix} \text{ și } Y: \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ \frac{1}{5} & b & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

- Aflați $a, b \in \mathbb{R}$
- Scrieți distribuțiile v.a. $3X, X^{-1}, Y^2, Y^{-1}, X+Y, X \cdot Y$
- Calculați $M(X), M(Y), M(X+Y), M(3X-2Y), M_2(X), M_2(Y)$
- Calculați dispersia, abaterea medie pătratică și μ_2, μ_3 pentru variabilele X, Y și $2X-5Y$.

2. Fie v.a. discretă

$$X: \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ p_1 & \frac{1}{3} & p_2 \end{pmatrix}$$

- Determinați p_1, p_2 știind că valoarea medie a v.a. X este $1/3$
- Calculați momentele de ordinul 2 și 3
- Calculați dispersia, abaterea medie pătratică și μ_2, μ_3
- Calculați valoarea medie și dispersia pentru v.a. $Y = 3X + 2$

3. Se consideră un eșantion de 20 de clienți care intră într-un supermarket. Pentru a cerceta frecvența X cu care clienții fac apel la serviciile supermarketului de-a lungul unei săptămâni și respectiv pentru a cerceta cheltuielile săptămânale Y în lei, ale clienților pentru procurarea de bunuri alimentare, s-au obținut următoarele date de selecție pentru X și Y :

$X: 1, 2, 1, 4, 3, 2, 5, 6, 1, 2, 3, 2, 3, 4, 6, 2, 4, 3, 1, 2$

$Y: 89, 90, 101, 88, 85, 77, 102, 100, 86, 97, 76, 121, 113, 110, 96, 92, 108, 112, 103, 109.$

- Scrieți distribuțiile v.a. X și respectiv Y (grupată în 5 clase = intervale)
- Calculați $M(X), M(Y), M_2(X), M_2(Y)$
- Calculați dispersia și abaterea medie pătratică pentru variabilele X, Y .

4. Fie v.a. independente:

$$X: \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ q & \frac{1}{3} & p \end{pmatrix} \text{ și } Y: \begin{pmatrix} 1 & 2 & a+1 \\ \frac{2}{3}-p & q & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Aflați $a \in \mathbb{R}^*$ a.î. variabila aleatoare $2X-3Y$ să aibă dispersia $\frac{14}{3}$.

TEMĂ - Variabile aleatoare discrete

1. Fie variabilele aleatoare independente X și Y cu distribuțiile

$$X: \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \quad \text{și} \quad Y: \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

- Construiți variabilele aleatoare X^3 , Y^2 , $3X$, $X + Y$, XY , $3X + Y^2$
- Calculați valoarea medie pentru toate variabilele construite
- Calculați dispersia lui X , Y , $X+Y$ și abaterea medie pătratică a lor.

2. Determinați p și q astfel încât

$$X: \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{p}{4} & \frac{1}{3} & \frac{q}{3} \end{pmatrix} \quad \text{și} \quad Y: \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ \frac{p+1}{4} & q \end{pmatrix}$$

să reprezinte distribuțiile a două variabile aleatoare de tip discret.

- Scrieți $F_X(x)$ și $F_Y(y)$
- Calculați $P_1 = P\left(0 < X < \frac{1}{2}\right)$ și $P_2 = P\left(-1 < Y < \frac{2}{3}\right)$.

3. Considerăm variabilele aleatoare independente

$$X: \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ p + \frac{1}{6} & q + \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad \text{și} \quad Y: \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & 2p + q & p^2 \end{pmatrix}.$$

- Scrieți distribuția variabilei $2XY$.
- Calculați valorile medii ale variabilelor X , Y și $2XY$.

4. Se aruncă o monedă de 3 ori consecutiv. Fie X variabila aleatoare ce reprezintă numărul de mărci apărute. Scrieți distribuția lui X și apoi să se calculeze valoare medie, dispersia și abaterea medie pătratică.

5. Fie v.a. discretă: $X: \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & p_2 & p_3 \end{pmatrix}$

- Determinați p_2, p_3 știind că valoarea medie a v.a. X este $5/4$
- Calculați momentele de ordinul 2 și 3 pentru v.a. X
- Calculați dispersia, abaterea medie pătratică și momentele centrate de ordinul 2 și 3
- Calculați valoarea medie și dispersia pentru v.a. $Y = 4X - 7$.

6. Fie v.a. independente: $X: \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ p + \frac{1}{6} & q + \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ și $Y: \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ \frac{1}{3} & 2p + q & 12p^2 \end{pmatrix}$

- Aflați $p, q \in \mathbb{R}$
- Calculați valoarea medie și dispersia v.a. $X, Y, XY, Z = X^2 - 3Y^2$.

7. Calculați valoarea medie, momentele de ordinul 2 și 3, dispersia, abaterea medie pătratică și momentele centrate de ordinul 2 și 3 pentru v.a. de mai jos:

(a) $X: \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 & 4 \\ 0.1 & 0.3 & a & 0.4 \end{pmatrix}$

(b) $X: \begin{pmatrix} -3 & 1 & 6 & 7 \\ 0.2 & b & 0.4 & 0.1 \end{pmatrix}$

(c) $X: \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0.14 & 0.2 & p \end{pmatrix}$

8. Numărul vizitatorilor unui muzeu, în mai multe zile consecutive ale unei luni, a fost: 12, 13, 32, 24, 31, 15, 17, 11, 42, 44, 19, 33, 15. Calculați valoarea medie, momentele de ordinul 2 și 3, dispersia și abaterea medie pătratică pentru această v.a.

9. Cererea pe piață a unui model specificat de laptop, într-o anumită lună din an este cuprinsă în tabelul următor:

cererea x_i	1	2	5	7	8	9	10	12	14	15
frecvența n_i	7	2	3	4	6	1	2	10	1	2

Calculați cererea medie de laptopuri și valoarea momentului centrat de ordinul 2.

Răspunsuri.

1. • Valorile medii sunt: -0.75, 2.2, -2.25, 0.25, -0.75, -0.05
- Valorile dispersiilor sunt: 0.1875, 1.2, 1.3875
- Abaterile medii patratice sunt: 0.4330, 1.0955, 1.17792

2. • $p = 5/2 = 2.5$, $q = 1/8 = 0.125$, $P_1 = 0$, $P_2 = 1/8 = 0.125$
- Funcțiile de repartiție sunt:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ 0.625, & x \in [-1, 0) \\ 0.9583, & x \in [0, 1) \\ 1, & x \geq 1 \end{cases} \quad F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < -2 \\ 0.875, & y \in [-2, 0) \\ 1, & y \geq 0 \end{cases}$$

3. • $p = \frac{\sqrt{3}-1}{2} = 0.37$, $q = \frac{4-3\sqrt{3}}{6} = -0.20$
- $M(X) = -0.21$, $M(Y) = -0.2$, $M(2XY) = 0.084$

4. $M(X) = 1.5$, $D(X) = 0.75$, $\sigma(X) = 0.86$

5. • $p_2 = 1/4$, $p_3 = 1/2$, $m_2 = 9/4$, $m_3 = 17/4$, $\mu_2 = D(X) = 9/16$, $\sigma(X) = 3/4$,
- $\mu_3 = -25/32$, $M(Y) = -2$, $D(Y) = 9$

6. • $p = 1/6$, $q = 0$, $M(X) = M(Y) = 0$, $D(X) = 2/3$, $D(Y) = 8/3$,
- $M(XY) = 0$, $D(XY) = 16/9$, $M(Z) = -22/3$, $D(Z) = 290/9$

7. (a) $a = 0.2$, $M(X) = 1.7$, $m_2 = 8.1$, $m_3 = 24.5$, $D(X) = 5.21$, $\sigma(X) = 2.28$, $\mu_3 = -6.984$

(b) $b = 0.3$, $M(X) = 2.8$, $m_2 = 21.4$, $m_3 = 115.6$, $D(X) = 13.56$, $\sigma(X) = 3.68$, $\mu_3 = -20.312$

(c) $p = 0.66$, $M(X) = 2.9$, $m_2 = 11.5$, $m_3 = 42.26$, $D(X) = 3.09$, $\sigma(X) = 1.76$

8. $m = 23.6239$, $m_2 = 683.3846$, $m_3 = 10469.0769$, $D(X) = 122.05917$, $\sigma(X) = 11.048039$

9. $m = 7.76$, $D(X) = 19.65$

Variable aleatoare continue

A. Aspecte teoretice:

- ✓ O variabilă aleatoare de tip continuu are repartiția

$$X: \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}_{x \in \mathbb{R}}, \quad \begin{cases} f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1 \end{cases}$$

- ✓ Caracteristici numerice:

- Valoarea medie: $m = M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx$ cu proprietățile:

1. $M(a) = a$
2. $M(a \cdot X) = a \cdot M(X)$
3. $M(X + Y) = M(X) + M(Y)$
4. $M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y)$, dacă X, Y sunt independente

- Moment de ordin k: $m_k = M_k(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \cdot f(x) dx$

- Dispersia sau moment centrat de ordin 2: $D(X) = M[(X - m)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m)^2 \cdot f(x) dx$ cu proprietățile:

1. $D(X) \geq 0$
2. $D(c) = 0$, $D(c \cdot X) = c^2 \cdot D(X)$
3. $D(X + Y) = D(X) + D(Y)$, $D(X - Y) = D(X) + D(Y)$ dacă X, Y sunt independente
4. $D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$

- Abaterea medie pătratică: $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$

- Moment centrat de ordin k: $\mu_k = M[(X - m)^k]$

B. Aplicații practice:

1. Fie v.a. continuă: $X: \left(\begin{matrix} x \\ f(x) \end{matrix} \right)_{x \in \mathbb{R}}$ unde $f(x) = \begin{cases} c \cdot x^3 \sqrt{x}, & x \in [0, 1] \\ 0, & x \notin [0, 1] \end{cases}$

- Care este valoarea constantei c a.î. $f(x)$ să fie densitate de probabilitate?
- Calculați valoarea medie și momentele de ordinul 2 și 3 ale v.a. X
- Calculați dispersia, abaterea medie pătratică și μ_2, μ_3

2. Fie v.a. continuă $X: \left(\begin{matrix} x \\ f(x) \end{matrix} \right)_{x \in \mathbb{R}}$ unde $f(x) = \begin{cases} x \cdot e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$

- Calculați valoarea medie și momentele de ordinul 2 și 3 ale v.a. X
- Calculați dispersia, abaterea medie pătratică și μ_2, μ_3
- Calculați valoarea medie și dispersia pentru v.a. $Y = 5X - 2$

3. Fie v.a. continuă $X: \left(\begin{matrix} x \\ f(x) \end{matrix} \right)_{x \in \mathbb{R}}$ unde $f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2}{2}, & x \in [0, 1] \\ 2 - x, & x \in (1, 2] \end{cases}$

- Calculați valoarea medie și momentele de ordinul 2 și 3 ale v.a. X
- Calculați dispersia, abaterea medie pătratică și μ_2, μ_3

TEMĂ - Variabile aleatoare continue

Considerăm constanta matematică $e = 2.718281$.

1. Să se determine k astfel încât funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dată prin

$$f(x) = \begin{cases} kx, & x \in (0, 1) \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

să fie o densitate de probabilitate pentru o variabilă X de tip continuu.

Calculați valoarea medie precum și momentele și momentele centrate de ordinul 2 și 3.

2. Să se determine a astfel încât funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dată prin

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a}{x}, & x \in [1, e] \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

să fie o densitate de probabilitate pentru o variabilă X de tip continuu.

Calculați valoarea medie, momentele de ordinul 2 și 3, dispersia, abaterea medie pătratică și momentele centrate de ordinul 2 și 3.

Calculați de asemenea $M(1000X + 750)$ și $D(4X + 10)$.

3. Să se determine constanta a astfel încât funcția

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ a^2 x^3, & x \in [0, 1] \\ \frac{1}{2} a^2 x e^{-x+1}, & x > 1 \end{cases}$$

să reprezinte densitate de probabilitate a unei v. a. de tip continuu.

Calculați valoarea medie, momentul de ordinul 2, dispersia și abaterea medie pătratică a variabilei X .

4. Calculați valoarea medie, momentele de ordinul 2 și 3, dispersia, abaterea medie pătratică și momentele centrate de ordinul 2 și 3 pentru variabilele aleatoare de mai jos:

$$(a) \quad X: \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}_{x \in \mathbb{R}} \quad \text{unde } f(x) = \begin{cases} 3 \cdot e^{-3x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

$$(b) \quad X: \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}_{x \in \mathbb{R}} \quad \text{unde } f(x) = \begin{cases} 12(x^3 - 2x^2 + x), & x \in [0, 1] \\ 0, & x \notin [0, 1] \end{cases}$$

Răspunsuri.

1.
 - $k = 2$ și $m = M(X) = 2/3 = 0.6667$, $m_2 = 1/2 = 0.5$, $m_3 = 2/5 = 0.4$
 - $\mu_2 = D(X) = 1/18 = 0.0556$, $\mu_3 = -1/135 = -0.007407$
2.
 - $a = 1$ și $m = M(X) = e - 1 = 1.718281$
 - $m_2 = \frac{e^2 - 1}{2} = 3.194526$, $m_3 = \frac{e^3 - 1}{3} = 6.3618395$
 - $\mu_2 = D(X) = 0.2420364$, $\sigma(X) = 0.4919719$, $\mu_3 = 0.041$
 - $M(1000X + 750) = 2468.281$, $D(4X + 10) = 3.8725824$
3.
 - $a = \frac{2}{\sqrt{5}}$ sau $a = -\frac{2}{\sqrt{5}}$
 - $m = M(X) = \frac{4}{25} + \frac{4e}{5} = 2.3346248$, $m_2 = \frac{2}{15} + \frac{12e}{5} = 6.6572077$
 - $D(X) = 1.2067348$, $\sigma(X) = 1.0985148$
4. (a) $m = M(X) = 1/3 = 0.333333$, $m_2 = 2/9 = 0.222222$, $m_3 = 2/9 = 0.222222$
 $D(X) = \mu_2 = 1/9 = 0.111111$, $\sigma(X) = 1/3 = 0.333333$, $\mu_3 = 0$
(b) $M(X) = 2/5 = 0.4$, $m_2 = 1/5 = 0.2$, $m_3 = 4/35 = 0.1143$
 $D(X) = \mu_2 = 1/25 = 0.04$, $\sigma(X) = 1/5 = 0.2$, $\mu_3 = 2/125 = 0.024$

Simulare

Timp de lucru 40 minute

1 punct din oficiu

-
1. (2p) Trei concurenți trag la țintă o singură dată. Probabilitățile de a nimeri ținta sunt $1/3$ pentru primul concurent, $1/7$ pentru al doilea și $1/4$ pentru al treilea. Determinați probabilitatea (scrieți răspunsul cu 4 zecimale) ca:

- (a) ținta să fie atinsă exact o dată
 - (b) ținta să fie atinsă doar de primul concurent.
-

2. (2p) Un muncitor produce cu probabilitățile 0.9, 0.07 și 0.03 o piesă bună, o piesă cu un defect remediable și un rebut. Muncitorul a produs 3 piese într-o oră.

- (a) Calculați probabilitatea ca între cele 3 piese, să fi produs o piesă bună, una cu defect remediable și una rebut
 - (b) Calculați probabilitatea ca între cele 3 piese, să fi produs o singură piesă bună
 - (c) Indicați schema clasică folosită.
-

3. (3p) Variabila aleatoare X are următoarea repartiție:

$$X : \begin{pmatrix} -1 & 1 & a \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

- (a) Determinați $a \in \mathbb{R}_+^*$ știind că dispersia lui X este $\frac{20}{9}$
 - (b) Calculați valoarea medie a variabilelor X și $Y = 3X + 2$.
-

4. (1p) Se consideră o selecție formată din clienții unei stații de benzină pentru a cerceta cantitatea X de benzină (în litri) cumpărată de acești clienți în decursul unei săptămâni. S-au obținut următoarele date de selecție: 34, 30, 40, 34, 45, 34, 34, 20, 30, 40, 34, 34, 45, 40, 30, 34, 20, 30, 40, 45, 34, 20, 30, 34, 40, 45, 20, 30, 34, 34, 34, 34, 34, 34, 30, 30, 34, 34, 30, 34, 30, 34, 34. Calculați cantitatea medie de benzină cumpărată de un client într-o săptămână.
-

5. (1p) Fie variabila aleatoare continuă X pentru care avem definită funcția

$$f(x) = \begin{cases} Ax, & x \in [0, 5) \\ A(10 - x), & x \in [5, 10]. \end{cases}$$

- (a) Pentru ce valoare a lui A , f este funcție densitate de probabilitate?
 - (b) Calculați valoarea medie a variabilelor aleatoare X și $Y = 2X + 2$.
-

Răspuns:

$$1. P(X) = \frac{1}{3} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{3}{4} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{3}{4} + \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{7} = 0.4285714$$
$$P(Y) = \frac{1}{3} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{14} = 0.2142857$$

2. Schema urnei cu bila revenită și cu 3 stări

$$P(A) = \frac{3!}{1! \cdot 1! \cdot 1!} 0.9 \cdot 0.07 \cdot 0.03 = 0.01134$$

$$P(A) = \frac{3!}{1! \cdot 1! \cdot 1!} 0.9 \cdot 0.07 \cdot 0.03 + \frac{3!}{1! \cdot 2!} 0.9 \cdot 0.07^2 + \frac{3!}{1! \cdot 2!} 0.9 \cdot 0.03^2 = 0.027$$

$$3. M(X) = \frac{a-1}{6}, m_2 = \frac{5+a^2}{6} \text{ prin urmare } D(X) = \frac{5a^2+2a+29}{36} \text{ și astfel}$$
$$a=3, \quad M(X)=1/3=0.3333333, \quad M(Y)=3$$

$$4. M(X)=33.49$$

$$5. A=1/25=0.04, \quad M(X)=5, \quad M(Y)=12$$

Materiale ajutătoare-Logaritmi

Definiție:

Fie $a > 0, a \neq 1$ și $x > 0$. Se numește logaritmul numărului x în baza a , și se notează $\log_a x$, numărul real y definit prin:

$$y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x.$$

$\log_a x$ - se citește **logaritm în baza a din x** .

Exemplu:

$2^3 = 8 \Leftrightarrow \log_2 8 = 3$, spunem că 3 este exponentul la care se ridică baza 2 pentru a obține valoarea 8 sau 3 este logaritmul în baza 2 a lui 8.

Dacă $a > 0, a \neq 1$ și $x > 0$, atunci $a^{\log_a x} = \log_a a^x = x$.

Proprietăți:

1. Dacă $a > 0, a \neq 1$, atunci $\log_a 1 = 0$.
2. Dacă $a > 0, a \neq 1$, atunci $\log_a a = 1$.
3. **(Adunarea)** Dacă $x, y > 0, a > 0, a \neq 1$, atunci $\log_a x + \log_a y = \log_a (x \cdot y)$.
Logaritmul produsului a două numere este egal cu suma logaritmilor celor două numere.
4. **(Scăderea)** Dacă $x, y > 0, a > 0, a \neq 1$, atunci $\log_a x - \log_a y = \log_a \left(\frac{x}{y}\right)$.
Logaritmul câtului este egal cu diferența dintre logaritmul numărătorului și logaritmul numitorului.
5. Dacă $x > 0, a > 0, a \neq 1$, atunci $\log_a \left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a x$.
6. **(Înmulțirea cu un număr real)** Dacă $x > 0, n \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1$, atunci $n \cdot \log_a x = \log_a x^n$.
Logaritmul puterii unui număr este egal cu produsul dintre exponentul puterii și logaritmul numărului.
7. **(Formula de schimbare a bazei)**
Dacă $x > 0, a, b > 0, a, b \neq 1$, atunci $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$.
8. Dacă $a, b > 0, a, b \neq 1$, atunci $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$.

Notații:

1. $\log_{10} x = \lg x$
2. $\log_e x = \ln x$, unde $e \approx 2,718281$ constanta lui Euler.

Materiale ajutătoare-Determinanți

Determinanți de ordin doi

Definiție 1 Fie $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ o matrice pătratică de ordinul doi.

Determinantul matricei A este:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Determinanți de ordin trei

Definiție 2 Fie $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ o matrice pătratică de ordinul trei. **Determinantul matricei A** este:

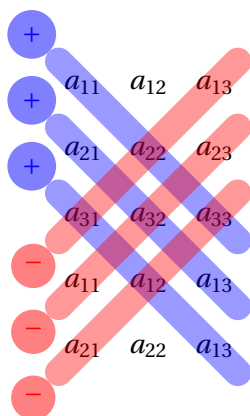
$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Regula lui Sarrus

Definiție 3 Se completează sub determinant cu primele două linii și se face produsul elementelor de pe diagonale.

Produsul elementelor de pe **diagonala principală** (diagonala descendentă) vor fi cu semnul plus, iar cele de pe **diagonala secundară** (diagonala ascendentă) cu semnul minus.

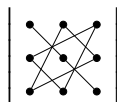
$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{23}a_{32}a_{11} + a_{33}a_{12}a_{21})$$



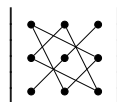
Regula triunghiului

Primul termen cu plus se găsește înmulțind elementele de pe diagonala principală, iar ceilalți doi, înmulțind elementele situate în vârfurile celor două triunghiuri care au o latură paralelă cu diagonala principală. După aceeași regulă, referitoare la diagonala secundară, se obțin termenii cu minus. Atât regula lui Sarrus cât și regula triunghiului se aplică numai determinantilor de ordin 3.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$



«+»



«-»

Proprietățile determinantilor

- Dacă toate elementele unei linii (sau coloane) dintr-o matrice sunt nule, atunci determinantul matricii este nul.
- Dacă într-o matrice schimbăm două linii (sau două coloane) între ele obținem o matrice care are determinantul egal cu opusul determinantului matricii inițiale.
- Dacă o matrice are două linii (sau coloane) identice, atunci determinantul său este nul.
- Dacă toate elementele unei linii (sau coloane) ale unei matrici sunt înmulțite cu un număr α , obținem o matrice al cărei determinant este egal cu numărul α înmulțit cu determinantul matricii inițiale.

- Dacă elementele a două linii (sau coloane) ale unei matrice sunt proporționale, atunci determinantul este nul.

Determinantul de ordin 4

Pentru calculul determinantului de ordin 4, este necesar reducerea ordinului acestuia de la ordinul 4 la ordinul 3. Într-o linie sau coloană vom face 3 zerouri prin transformări elementare (înmulțirea unei linii printr-un număr real nenul sau înlocuirea unei linii cu suma dintre ea și o altă linie). Al patrulea număr nenul din linie sau coloană se află în linia i și coloana j . Atunci determinantul de ordinul 4 va fi egal cu numărul nenul înmulțit cu $(-1)^{i+j}$ înmulțit cu subdeterminantul de ordinul 3 rămas după tăierea liniei și coloanei numărului nenul.

Exemplu:

Pe prima linie vom face 3 zerouri, prin următoarea metodă:

înmulțim prima coloană cu -2 și adunăm cu coloana a doua,

înmulțim prima coloană cu -3 și adunăm cu coloana a treia,

înmulțim prima coloană cu 2 și adunăm cu coloana a patra.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 5 & 1 \\ 4 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 8 & -1 \\ 4 & -7 & -13 & 11 \\ 3 & -4 & -8 & 10 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 8 & -1 \\ -7 & -13 & 11 \\ -4 & -8 & 10 \end{vmatrix} = 120$$

Materiale ajutătoare-Metoda lui Cramer.

Sistem de 3 ecuații liniare cu 3 necunoscute.

Definiție 4 Un sistem de n ecuații liniare cu n necunoscute se numește **sistem de tip Cramer** dacă **determinantul matricei sistemului este nenul**.

Fie sistemul de trei ecuații liniare cu trei necunoscute:

Definiție 5 Fie (S)
$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$
 și matricea asociată $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$.

Dacă sistemul (S) este de tip Cramer atunci acesta este compatibil determinat și se rezolvă cu ajutorul formulelor:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}$$

unde $\Delta = \det(A)$, $\Delta_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$, $\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}$, $\Delta_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$

Exemplu Să se determine soluția sistemului:
$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ 2x - y + z = 2 \\ x + z = 1 \end{cases}$$

Rezolvare Matricea sistemului este:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Delta = \det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 1 + 0 + 1 + 2 - 0 = 1 \neq 0$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 - 1 + 0 + 1 + 2 - 0 = 0$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 2 + 2 - 2 - 4 - 1 = -1$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 2 + 0 + 2 + 2 - 0 = 1$$

Aplicând regula lui Cramer obținem:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = 0, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = -1, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = 1$$

În concluzie sistemul este compatibil determinat cu soluția: $(0, -1, 1)$.

Materiale ajutătoare-Trigonometrie de bază.

1. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \forall x \in \mathbb{R}$ -formula fundamentală a trigonometriei

2. $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$

3. $\sin(90^\circ - x) = \cos x, \quad \cos(90^\circ - x) = \sin x$

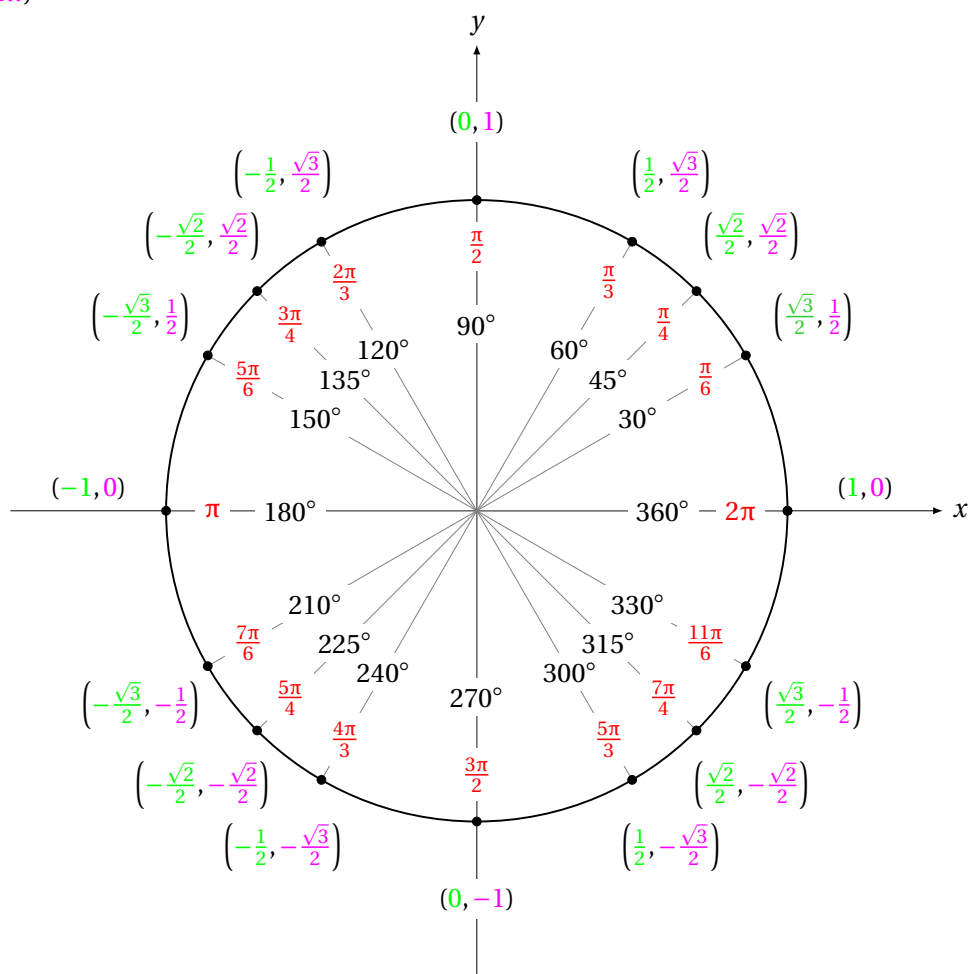
4. $\sin(180^\circ - x) = \sin x, \quad \cos(180^\circ - x) = -\cos x$

5. $\sin(-x) = -\sin x, \quad \cos(-x) = \cos x$

Valorile funcțiilor trigonometrice

x(grade)	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
x(radiani)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\operatorname{ctg} x$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	-

$(\cos x, \sin x)$



Bibliografie

- [1] Chiang, A.C., Wainwright, K., *Fundamental Methods of Mathematical Economics*, Fourth Edition, McGraw Hill, 2004.
- [2] Chiru, I.E., Curt, P., *Mathematics for Economics: A Problem-Solving Approach*, Ed. Alma Mater, Cluj-Napoca, 2025.
- [3] Curt, P., Filip, D.A., *Quantitative Methods in Economics*, Ed. Mediamira, Cluj-Napoca, 2009.
- [4] Curt, P., *Mathematics for Economics*, Ed. Alma Mater, Cluj-Napoca, 2024.
- [5] Durrett, R., *Probability: Theory and Examples*, Cambridge University Press, 2010.
- [6] Grinstead, C.I.M., *Introduction to Probability*, [http://www.dartmouth.edu/~chance.reaching_aids/books_articles/probability_book/amsbook.mac.pdf](http://www.dartmouth.edu/~chance/reaching_aids/books_articles/probability_book/amsbook.mac.pdf)
- [7] Kemeny, J.G., Snell, J.L., Thompson, G.L., *Introduction to Finite Mathematics*, Third Edition, Prentice-Hall, 1974.
- [8] Krishnan, V., *Probability and Random Processes*, John Wiley, New York, 2006.
- [9] Luderer, B., Nollan, V., Veffers, K., *Mathematical Formulas for Economists*, 3rd Edition, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006.

- [10] Hoffmann, L.D., Bradley, G.L., *Calculus: For Business, Economics, and the Social and Life Sciences*, Brief 10th Edition, McGraw-Hill Higher Education, 2010.
- [11] Mureșan, A.S., *Matematici pentru economiști*, vol. 1, 2, Lito Univ. Babeș-Bolyai, Cluj-Napoca, 1991.
- [12] Mureșan, A.S., și colectiv, *Matematici aplicate în economie*, Ed. Mega, 2012.
- [13] Sheldon, R., *A First Course in Probability*, 5th edition, Prentice-Hall Inc., 1998.
- [14] Sheldon, R., *Introduction to Probability and Statistics for Engineers and Scientists*, 5th Edition, Academic Press, 2014.
- [15] Simon, C.P., Blume, L., *Mathematics for Economists*, W.W. Norton Company Inc., New York, 1994.
- [16] Stewart, J., *Calculus: Early Transcendentals*, 8th Edition, Cengage Learning, 2015.
- [17] Stirzaker, D., *Elementary Probability*, 2nd Edition, Cambridge University Press, 2003.
- [18] Sydsaeter, K., Hammond, P., Strom, A., *Economists' Mathematical Manual*, 4th Edition, Springer-Verlag, 2005.
- [19] Sydsaeter, K., Strom, A., Berck, P., *Essential Mathematics for Economic Analysis*, 4th Edition, Pearson, 2012.



ISBN 978-606-37-3124-2