Gabriela OLTEANU

MATHEMATIQUES FINANCIERES ET ACTUARIELLES

CAHIER DE SEMINAIRE AVEC EXERCICES CORRIGES

PRESA UNIVERSITARĂ CLUJEANĂ

Gabriela Olteanu

MATHÉMATIQUES FINANCIÈRES ET ACTUARIELLES

Cahier de séminaire
avec exercices corrigés

PRESA UNIVERSITARĂ CLUJEANĂ

2026

Referenți științifici:

Lect. univ. dr. Voichița Radu

Lect. univ. dr. Alexandru-Darius Filip

ISBN 978-606-37-3216-4

© 2026 AUTOAREA VOLUMULUI. Toate drepturile rezervate.
Reproducerea integrală sau parțială a textului, prin orice mijloace, fără acordul autoarei, este interzisă și se pedepsește conform legii.

Universitatea Babeș-Bolyai
Presa Universitară Clujeană
Director: Codruța Săcelean
Str. B.P. Hasdeu nr. 51
400371 Cluj-Napoca, România
Tel.: (+40) 744 687 884
E-mail: editura@ubbcluj.ro
editura.ubbcluj.ro | libraria.ubbcluj.ro

Table des matières

1 L'intérêt simple et l'intérêt composé **1**

1.1 Résumé théorique 1

1.2 Exercices corrigés 2

1.2.1 L'intérêt simple 2

1.2.2 L'intérêt composé 6

1.2.3 Le taux d'intérêt nominal 11

1.3 Exercices proposés 14

2 Annuités constantes **19**

2.1 Résumé théorique 19

2.2 Exercices corrigés 20

2.3 Exercices proposés 25

3 Remboursements des prêts **27**

3.1 Résumé théorique 27

3.2 Exercices corrigés 29

3.2.1 Modèles directs (1D, 2D, 3D et 4D) 29

3.2.2 Modèles indirects (1I et 2I) 32

3.2.3 Fonds d'accumulation 33

3.3 Exercices proposés 35

4 Fonctions biométriques **41**

4.1 Résumé théorique 41

4.2 Exercices corrigés 41

4.3 Exercices proposés 46

5 Annuités de vie et de décès **49**

5.1 Résumé théorique 49

5.2 Exercices corrigés 50

5.3 Exercices proposés 57

6 Assurances de personnes **61**

6.1 Résumé théorique 61

6.2 Exercices corrigés 62

6.3 Exercices proposés 70

Appendice **75**

Bibliographie **77**

Chapitre 1

L'intérêt simple et l'intérêt composé

1.1 Résumé théorique

• L'intérêt est le montant d'argent qu'une personne physique ou morale (DÉBITEUR) paie à une autre personne (CRÉANCIER) pour l'utilisation de l'argent emprunté moyennant un certain taux pendant une période donnée.

• Notations :

s = le montant initial en unités monétaires (u.m.)

p = le pourcentage annuel

t = la durée (en années)

z = la durée en jours

l = la durée en mois

D = l'intérêt

i = le taux d'intérêt annuel / l'intérêt unitaire annuel

S = le montant final, $S = s + D$.

• L'intérêt simple est utilisé pour les prêts / dépôts à court terme. Le montant initial reste invariable pendant toute la durée d'un prêt / dépôt et produit un intérêt payé à l'échéance.

• Formule de base de l'intérêt simple : $D = i \cdot s \cdot t$.

Des variantes de la formule pour les différentes unités de mesure du temps : $D = \frac{i \cdot s \cdot z}{360}$, $D = \frac{i \cdot s \cdot l}{12}$. L'année financière compte 360 jours.

Le facteur de capitalisation : $u = 1 + i$.

Le facteur d'actualisation : $v = \frac{1}{1+i}$.

• Formule de base de l'intérêt composé : $S = s \cdot u^n$.

• Taux d'intérêt équivalents pour l'intérêt simple : $i_m = \frac{i}{m}$.

• Taux d'intérêt équivalents pour l'intérêt composé : $i_m = \sqrt[m]{1+i} - 1$.

• Un taux d'intérêt noté $\rho = \rho^{(m)}$ est appelé taux d'intérêt nominal si la période après laquelle se fait la capitalisation de l'intérêt ne coïncide pas avec la période pour laquelle est annoncé le taux d'intérêt (généralement 1 an).

• Formule : $\rho^{(m)} = i_m \cdot m \Longrightarrow i_m = \frac{\rho^{(m)}}{m}$. Alors $i_{\text{eff}} = (1 + i_m)^m - 1 = (1 + \frac{\rho^{(m)}}{m})^m - 1$.

• Le taux d'intérêt noté δ correspondant au processus de capitalisation continue de l'intérêt est appelé intérêt unitaire instantané. Si i est le taux d'intérêt effectif et δ est le taux d'intérêt instantané équivalent à i, alors $\delta = \ln(1+i)$ et $i = e^{\delta} - 1$.

On utilisera l'écriture décimale avec un point au lieu d'une virgule pour s'habituer à la saisie des données sur la plateforme Moodle, utilisée comme outil complémentaire.

1.2 Exercices corrigés

1.2.1 L'intérêt simple

1. Si l'intérêt unitaire annuel est de 0.14 [1], calculez l'intérêt pour 1000 unités monétaires :
a) pour 1 an ;
b) pour une demi-année ;
c) pour 200 jours.
Quel est le pourcentage annuel ?

(Réponse : a) $D_1 = 140$ u.m. ; b) $D_2 = 70$ u.m. ; c) $D_3 = 77.78$ u.m. ; $p = 14$.)

Solution. Nous avons les données du problème : $i = 0.14$, $s = 1000$ u.m.
a) Ici $t = 1$ et

$$D_1 = i \cdot s \cdot t = 0.14 \cdot 1000 \cdot 1 = 140 \text{ u.m.}$$

b) Dans ce cas, $l = 6$ mois et

$$D_2 = \frac{i \cdot s \cdot l}{12} = \frac{0.14 \cdot 1000 \cdot 6}{12} = 70 \text{ u.m.}$$

c) Dans ce cas, $z = 200$ jours et

$$D_3 = \frac{i \cdot s \cdot z}{360} = \frac{0.14 \cdot 1000 \cdot 200}{360} = 77.78 \text{ u.m.}$$

Le pourcentage annuel correspondant est $p = 100 \cdot i = 100 \cdot 0.14 = 14$.

2. Une personne a déposé sur son compte bancaire la somme de 10000 u.m. le 3 février 2020. Elle a ensuite déposé la somme de 15000 u.m. le 31 mai 2020.

Quel est l'intérêt total sur les sommes déposées, le 15 septembre 2020, si le pourcentage annuel est de 12 ?

Calculez l'intérêt pour la première somme déposée en fonction :
a) du nombre de jours ;
b) du nombre de mois entiers ;
c) du nombre de quinzaines entières.
(Réponse : $D = 1285$ u.m. ; a) $D_1 = 750$ u.m. ; b) $D_1 = 700$ u.m. ; c) $D_1 = 750$ u.m.)

Solution. Nous avons les données du problème : $s_1 = 10000$, $p_1 = 12$, $s_2 = 15000$, $p_2 = 12$.

1. Nous utiliserons l'écriture décimale avec un point au lieu d'une virgule.

- On compte le nombre de jours pour chaque dépôt :
- Pour le premier dépôt, nous avons : en février : $29 - 3 = 26$ jours, en mars : 31 jours, en avril : 30 jours, en mai : 31 jours, en juin : 30 jours, en juillet : 31 jours, en août : 31 jours, en septembre : 15 jours.
- Au total, nous avons 225 jours, donc $z_1 = 225$.
- Pour le second dépôt, nous avons : en mai : $31 - 31 = 0$ jours, en juin : 30 jours, en juillet : 31 jours, en août : 31 jours, en septembre : 15 jours.
- Au total, nous avons 107 jours, donc $z_2 = 107$.
- On calcule maintenant l'intérêt pour la première somme déposée :

$$D_1 = i_1 \cdot s_1 \cdot t_1 = \frac{p_1}{100} \cdot s_1 \cdot \frac{z_1}{360} = 0.12 \cdot 10000 \cdot \frac{225}{360} = 750 \text{ u.m.}$$

- L'intérêt pour la seconde somme déposée est :

$$D_2 = i_2 \cdot s_2 \cdot t_2 = \frac{p_2}{100} \cdot s_2 \cdot \frac{z_2}{360} = 0.12 \cdot 15000 \cdot \frac{107}{360} = 535 \text{ u.m.}$$

- L'intérêt total sur les sommes déposées est :

$$D = D_1 + D_2 = 750 + 535 = 1285 \text{ u.m.}$$

a) L'intérêt pour la première somme déposée en fonction du nombre de jours est

$$D_1 = i_1 \cdot s_1 \cdot t_1 = \frac{p_1}{100} \cdot s_1 \cdot \frac{z_1}{360} = 0.12 \cdot 10000 \cdot \frac{225}{360} = 750 \text{ u.m.}$$

b) L'intérêt pour la première somme déposée en fonction du nombre de mois entiers est

$$D_1 = i_1 \cdot s_1 \cdot t_1 = \frac{p_1}{100} \cdot s_1 \cdot \frac{l_1}{12} = 0.12 \cdot 10000 \cdot \frac{7}{12} = 700 \text{ u.m.}$$

où $l_1 = \left[\frac{225}{30}\right] = 7$ est le nombre de mois entiers dans 225 jours.

c) L'intérêt pour la première somme déposée en fonction du nombre de quinzaines entières est

$$D_1 = i_1 \cdot s_1 \cdot t_1 = \frac{p_1}{100} \cdot s_1 \cdot \frac{q_1}{24} = 0.12 \cdot 10000 \cdot \frac{15}{24} = 750 \text{ u.m.}$$

où $q_1 = \left[\frac{225}{15}\right] = 15$ est le nombre de quinzaines entières dans 225 jours.

3. Une personne a deux montants d'argent s_1 et s_2 tels que la somme s_1 vaut cinq fois la somme s_2. La personne dépose le montant s_1 pour 135 jours, avec un pourcentage annuel de 10, et le montant s_2 pour 3 mois, avec un pourcentage annuel de 9. Sachant que l'intérêt de s_1 est supérieur de 66 u.m. à celui produit par la somme s_2, déterminez les sommes initiales s_1 et s_2.

(Réponse : $s_1 = 2000$ u.m., $s_2 = 400$ u.m.)

Solution. Les données du problème sont : $s_1 = 5 \cdot s_2$, $z_1 = 135$, $p_1 = 10$, $l_2 = 3$, $p_2 = 9$, $D_1 = 66 + D_2$.

On calcule les intérêts pour les deux montants :

$$D_1 = i_1 \cdot s_1 \cdot t_1 = \frac{p_1}{100} \cdot s_1 \cdot \frac{z_1}{360}$$

$$D_2 = i_2 \cdot s_2 \cdot t_2 = \frac{p_2}{100} \cdot s_2 \cdot \frac{l_2}{12}$$

On peut maintenant écrire le système d'inconnues s_1 et s_2 :

$$\begin{cases} s_1 = 5 \cdot s_2 \\ 0.1 \cdot s_1 \cdot \frac{135}{360} = 66 + 0.09 \cdot s_2 \cdot \frac{3}{12} \end{cases}$$

La résolution du système donne $s_1 = 2000$ et $s_2 = 400$.

4. a) Quel est le pourcentage trimestriel équivalent au pourcentage annuel de 8 et l'intérêt unitaire trimestriel correspondant ?

b) Quel est le pourcentage semestriel équivalent au pourcentage annuel de 18 et l'intérêt unitaire semestriel correspondant ?

c) Quel est le pourcentage annuel équivalent au pourcentage mensuel de 2 ?

(Réponse : a) $p_4 = 2$, $i_4 = 0.02$; b) $p_2 = 9$, $i_2 = 0.09$; c) $p = 24$, $i = 0.24$.)

Solution. a) Dans ce cas $p = 8$, $m = 4$, donc

$$p_4 = \frac{p}{4} = \frac{8}{4} = 2 \quad \text{et} \quad i_4 = \frac{p_4}{100} = 0.02$$

b) Si le pourcentage annuel $p = 18$ et $m = 2$, alors le pourcentage semestriel équivalent est

$$p_2 = \frac{p}{2} = \frac{18}{2} = 9 \quad \text{et} \quad i_2 = \frac{p_2}{100} = 0.09$$

c) Si le pourcentage mensuel est $p_{12} = 2$, alors le pourcentage annuel équivalent est

$$p = 12 \cdot p_{12} = 12 \cdot 2 = 24 \quad \text{et} \quad i = \frac{p}{100} = 0.24 = 24\%.$$

5. Calculez le montant initial et l'intérêt pour un prêt de 200 jours, avec un pourcentage annuel de 36 si le montant final est de 6000 unités monétaires.

(Réponse : $s = 5000$ u.m., $D = 1000$ u.m.)

Solution. Les données du problème sont : $S = 6000$ u.m., $p = 36$, $z = 200$ jours. On utilise la formule de calcul de la somme initiale connaissant le montant final :

$$s = \frac{S}{1 + i \cdot t} = \frac{S}{1 + \frac{p}{100} \cdot \frac{z}{360}} = \frac{6000}{1 + \frac{36}{100} \cdot \frac{200}{360}} = 5000 \text{ u.m.}$$

L'intérêt est :

$$D = S - s = 6000 - 5000 = 1000 \text{ u.m.}$$

6. Déterminez :

a) les facteurs de capitalisation et d'actualisation quand le pourcentage annuel est de 8.

b) le pourcentage annuel, sachant que le facteur d'actualisation est 0.5.

c) le facteur d'actualisation, sachant que le facteur de capitalisation est 2.

(Réponse : a) $u = 1.08$, $v = 0.9259$; b) $p = 100$; c) $v = 0.5$.)

Solution. a) Sachant le pourcentage annuel $p = 8$, on peut calculer $i = \frac{p}{100} = \frac{8}{100} = 0.08 = 8\%$.

Le facteur de capitalisation est :

$$u = 1 + i = 1 + 0.08 = 1.08$$

Le facteur d'actualisation est :

$$v = \frac{1}{u} = \frac{1}{1+i} = \frac{1}{1.08} = 0.9259$$

b) Connaissant le facteur d'actualisation $v = 0.5$, on calcule :

$$v = \frac{1}{u} = \frac{1}{1+i} \Longrightarrow 1 + i = \frac{1}{v} \Longrightarrow i = \frac{1}{v} - 1 = \frac{1}{0.5} - 1 = 1 \Longrightarrow p = 100 \cdot i = 100.$$

c) Connaissant le facteur de capitalisation $u = 2$, on peut calculer le facteur d'actualisation :

$$v = \frac{1}{u} = \frac{1}{2} = 0.5$$

Le pourcentage annuel est

$$p = 100 \cdot i = 100 \cdot (u - 1) = 100 \cdot (2 - 1) = 100.$$

7. À quel taux annuel faut-il placer la somme de 1000 $ pour qu'au bout de 149 jours elle devienne 1050 $?

(Réponse : $p = 12.08$.)

Solution. Les données du problème sont : $s = 1000$ \$, $S = 1050$ \$, $z = 149$. Nous savons que

$$D = S - s = i \cdot s \cdot \frac{z}{360} \Longrightarrow i = (S - s) \cdot \frac{360}{s \cdot z} = 50 \cdot \frac{360}{1000 \cdot 149} = 0.1208$$

Le pourcentage annuel est donc

$$p = 100 \cdot i = 100 \cdot 0.1208 = 12.08$$

8. Vous pouvez recevoir la somme de 1000 unités monétaires aujourd'hui ou la somme de 1020 unités monétaires dans 45 jours. Sachant que le pourcentage annuel est de 8, quelle option choisissez-vous ?

(Réponse : la seconde option.)

Solution. Nous avons les données : $s_1 = 1000$, $z_1 = 45$, $S_2 = 1020$, $p = 8$, donc $i = 0.08$.

On calcule la valeur de la somme s_1 dans 45 jours :

$$S_1 = s_1 + D_1 = s_1 + i \cdot s_1 \cdot \frac{z_1}{360} = 1000 + 0.08 \cdot 1000 \cdot \frac{45}{360} = 1010.$$

On compare maintenant S_1 et S_2. Comme $S_1 < S_2$, on choisit la seconde option.

9.* [2] Quel montant a été placé en régime d'intérêt simple le 15 janvier 2011 avec un pourcentage annuel $p = 5$, de sorte que le 20 septembre 2011 le montant soit de 10000 lei ?

(Réponse : $s = 9667.02$ lei.)

10.* Calculez l'intérêt et le montant final pour un prêt de 10000 u.m. avec le pourcentage annuel 14 pendant 90 jours puis pour un prêt de 50000 u.m. avec le pourcentage annuel 6 pendant 267 jours.

(Réponse : $D_1 = 350$ u.m., $S_1 = 10350$ u.m., $D_2 = 2225$ u.m., $S_2 = 52225$ u.m.)

11.* Calculez l'intérêt total pour les capitaux suivants investis, les quatre premiers avec le pourcentage annuel de 11 et les trois derniers avec le pourcentage annuel de 12, pour les durées :

$s_1 = 1350$ u.m. pendant 129 jours, $s_2 = 1120$ u.m. pendant 143 jours,

$s_3 = 1290$ u.m. pendant 149 jours, $s_4 = 6350$ u.m. pendant 158 jours,

$s_5 = 1950$ u.m. pendant 170 jours, $s_6 = 3690$ u.m. pendant 174 jours,

$s_7 = 4650$ u.m. pendant 180 jours.

(Réponse : $D = 1070.97$ u.m.)

12.* Une personne dispose des sommes d'argent s_1 et s_2 telles que la somme s_1 est égale au quart de la somme s_2. La personne place la somme s_1 pendant 175 jours avec le pourcentage annuel 5.2 et la somme s_2 pendant 7 mois avec le pourcentage annuel 5.7. Sachant que l'intérêt obtenu par la somme s_1 est inférieur de 121 u.m. à celui produit par la somme s_2, déterminez les sommes initiales s_1 et s_2.

(Réponse : $s_1 = 1123.26$ u.m., $s_2 = 4493.04$ u.m..)

1.2.2 L'intérêt composé

13. Une personne effectue un dépôt bancaire de 3000 u.m. Sachant que le pourcentage annuel est de 15 pendant les 2 premières années et de 12 pendant les 3 dernières années, calculez le montant après 5 ans et la valeur de l'intérêt (composé).

(Réponse : $S = 5574.05$ u.m., $D = 2574.05$ u.m.)

Solution. Nous avons les données : $s = 3000$, $p_1 = 15$, $n_1 = 2$, $p_2 = 12$, $n_2 = 3$, donc $i_1 = 0.15$, $i_2 = 0.12$, $u_1 = 1.15$, $u_2 = 1.12$.

La somme finale après 5 ans représente la capitalisation successive de la somme initiale s avec les facteurs de capitalisation u_1 et u_2 pendant des durées respectives de n_1 et n_2 ans. Donc

$$S = (s \cdot u_1^{n_1}) \cdot u_2^{n_2} = s \cdot u_1^{n_1} \cdot u_2^{n_2} = 3000 \cdot 1.15^2 \cdot 1.12^3 = 5574.05 \text{ u.m.}$$

2. Les exercices marqués d'un astérisque sont facultatifs.

L'intérêt est alors

$$D = S - s = 5574.05 - 3000 = 2574.05 \text{ u.m.}$$

14. Une personne reçoit en héritage un dépôt bancaire effectué il y a 6 ans. Le pourcentage annuel a été de 15 pendant les 2 premières années et de 12 pendant les 4 dernières années. La somme finale qui peut être retirée de la banque est 20809,8 u.m. Calculez la somme initiale déposée.

(Réponse : $s = 10000$ u.m.)

Solution. Nous avons les données : $S = 20809.8$, $p_1 = 15$, $n_1 = 2$, $p_2 = 12$, $n_2 = 4$, donc $i_1 = 0.15$, $i_2 = 0.12$, $u_1 = 1.15$, $u_2 = 1.12$, $v_1 = \frac{1}{1.15} = 0.869565$, $v_2 = \frac{1}{1.12} = 0.892857$.

La somme initiale représente l'actualisation de la somme finale S avec les facteurs d'actualisation v_2 et v_1 pendant des durées respectives de n_2 et n_1 ans. Donc

$$s = (S \cdot v_2^{n_2}) \cdot v_1^{n_1} = S \cdot v_2^{n_2} \cdot v_1^{n_1} = 20809.8 \cdot 0.892857^4 \cdot 0.869565^2 = 10000 \text{ u.m.}$$

15. Quel est le pourcentage annuel auquel un montant de 75 lei a été placé pendant 3 ans pour atteindre 100 lei ?

(Réponse : $p = 10.0642$.)

Solution. Nous avons les données : $s = 75$, $n = 3$, $S = 100$. Alors

$$S = s \cdot u^n \Rightarrow u^n = \frac{S}{s} \Rightarrow u = 1 + i = \sqrt[n]{\frac{S}{s}} \Rightarrow i = \sqrt[n]{\frac{S}{s}} - 1.$$

En faisant les calculs, on obtient la valeur du taux d'intérêt annuel

$$i = \sqrt[3]{\frac{100}{75}} - 1 = \sqrt[3]{1.333333} - 1 = 1.100642 - 1 = 0.100642.$$

Finalement, le pourcentage annuel est

$$p = 100 \cdot i = 10.0642.$$

16. Pendant combien de temps faut-il placer une somme d'argent avec $p = 10$ en régime d'intérêt composé pour doubler la somme ?

(Réponse : $n = 7.2725$ ans.)

Solution. Nous avons $p = 10$, $i = 0.1$, $u = 1.1$, $S = 2 \cdot s$. Mais on sait que $S = s \cdot u^n$. Donc $2 \cdot s = s \cdot u^n$. On peut simplifier par $s \neq 0$, donc $2 = u^n$. Alors $n = \log_u 2$. En faisant les calculs avec les données numériques, nous avons

$$n = \log_{1.1} 2 = \frac{\ln 2}{\ln 1.1} = \frac{0.6931}{0.0953} = 7.2725 \text{ ans.}$$

17. Déterminez les pourcentages trimestriel, semestriel et mensuel équivalents au pourcentage annuel 8 dans le cas de l'intérêt composé.

(Réponse : $p_4 = 1,94$, $p_2 = 3,92$, $p_{12} = 0.643$.)

Solution. Le pourcentage annuel $p = 8$, donc le taux d'intérêt annuel est $i = 0.08$. La formule de calcul pour les taux d'intérêt fractionnés dans le cas de l'intérêt composé est

$$i_m = \sqrt[m]{1+i} - 1,$$

où m est le nombre de sous-périodes qui divisent l'année. Dans les trois cas, m prend respectivement les valeurs 4, 2 et 12. Donc,

$$i_4 = \sqrt[4]{1+i} - 1 = \sqrt[4]{1.08} - 1 = 0.0194 \Rightarrow p_4 = 1.94$$

$$i_2 = \sqrt{1+i} - 1 = \sqrt{1.08} - 1 = 0.0392 \Rightarrow p_2 = 3.92$$

$$i_{12} = \sqrt[12]{1+i} - 1 = \sqrt[12]{1.08} - 1 = 0.00643 \Rightarrow p_{12} = 0.643.$$

18. Une banque offre un taux d'intérêt nominal annuel de 10% pour les dépôts à terme d'un mois. a) Calculez l'intérêt reçu à l'échéance par une personne qui a déposé la somme de 10000 \$ pour 1 mois. b) En supposant que la personne choisisse la capitalisation de l'intérêt, calculez le montant dont elle disposera au bout de 5 mois et c) au bout d'un an. d) Calculez le pourcentage annuel équivalent.

(Réponse : $D = 83.33$ \$; $S_5 = 10423.67$ \$; $S_{12} = 11047.13$ \$; $p = 10.47$.)

Solution. Nous avons $s = 10000$ et le taux d'intérêt nominal $\rho^{(12)} = 10\% = 0.1$. Alors le taux d'intérêt mensuel est

$$i_{12} = \frac{\rho^{(12)}}{12} = \frac{0.1}{12} = 0.008(3).$$

Observation. On utilise **le taux d'intérêt nominal** quand la période après laquelle se fait la capitalisation de l'intérêt ne coïncide pas avec la période pour laquelle est annoncé le taux d'intérêt (généralement 1 an).

a) On peut calculer l'intérêt pour un mois avec la formule de l'intérêt simple (parce que la capitalisation se fait chaque mois, donc après un mois il n'y a pas encore de capitalisation) :

$$D_1 = s \cdot i_{12} \cdot t_{12} = 10000 \cdot 0.008(3) \cdot 1 = 83.3333.$$

On peut aussi calculer l'intérêt avec la formule pour l'intérêt composé :

$$D_1 = S - s = s \cdot u_{12}^1 - s = s(u_{12} - 1) = s \cdot i_{12} = 83.3333.$$

b) Dans ce cas nous devons utiliser la formule pour l'intérêt composé :

$$S_5 = s \cdot u_{12}^5 = 10000 \cdot \left(1 + \frac{0.1}{12}\right)^5 = 10423.67 \quad \text{et} \quad D_5 = S_5 - s = 423.67.$$

c) Après une année,

$$S_{12} = s \cdot u_{12}^{12} = 10000 \cdot \left(1 + \frac{0.1}{12}\right)^{12} = 11047.13 \text{ et } D_{12} = S_{12} - s = 1047.13.$$

d) Connaissant le taux d'intérêt mensuel $i_{12} = \sqrt[12]{1+i} - 1$, on peut calculer le taux d'intérêt annuel

$$i_{\text{eff}} = (i_{12} + 1)^{12} - 1 = \left(1 + \frac{0.1}{12}\right)^{12} - 1 = 0.104713.$$

Alors $p = 100 \cdot i = 100 \cdot 0.104713 = 10.4713$.

Observation. Connaissant le taux d'intérêt annuel i, on peut aussi calculer S_{12} avec la formule :

$$S_{12} = s \cdot u^1 = 10000 \cdot 1.104713 = 11047.13.$$

19. À la fin du mois d'avril 2011, la somme de 500 €a été placée avec capitalisation mensuelle et un taux nominal annuel de 15%. a) Quel sera le montant accumulé à la fin de 2011 ? b) Et à la fin de 2012 ? c) Et un an après la date de dépôt ? d) Quel est le pourcentage annuel équivalent ?

(Réponse : $S_8 = 552.243$ €, $S_{20} = 641.02$ €, $S_{12} = 580.38$ €, $p = 16.0755$.)

Solution. Nous avons $s = 500$ et le taux d'intérêt nominal $\rho^{(12)} = 15\% = 0.15$. Alors le taux d'intérêt mensuel est

$$i_{12} = \frac{\rho^{(12)}}{12} = \frac{0.15}{12} = 0.0125 \text{ et } u_{12} = 1.0125.$$

a) La somme finale après 8 mois est

$$S_8 = s \cdot u_{12}^8 = 500 \cdot 1.0125^8 = 552.243.$$

L'intérêt après 8 mois est

$$D_8 = S_8 - s = 552.243 - 500 = 52.243.$$

b) La somme finale après 20 mois est

$$S_{20} = s \cdot u_{12}^{20} = 500 \cdot 1.0125^{20} = 641.02.$$

L'intérêt après 20 mois est

$$D_{20} = S_{20} - s = 641.02 - 500 = 141.02.$$

c) La somme finale après 12 mois est

$$S_{12} = s \cdot u_{12}^{12} = 500 \cdot 1.0125^{12} = 580.38 \text{ et } D_{12} = S_{12} - s = 80.38.$$

d) Connaissant le taux d'intérêt mensuel $i_{12} = \sqrt[12]{1+i} - 1$, on peut calculer le taux d'intérêt annuel

$$i_{\text{eff}} = (i_{12} + 1)^{12} - 1 = (0.0125 + 1)^{12} - 1 = 0.160755.$$

Alors $p = 100 \cdot i = 100 \cdot 0.160755 = 16.0755$.

Observation. Connaissant le taux d'intérêt annuel i, on peut aussi calculer S_{12} avec la formule :

$$S_{12} = s \cdot u^1 = 500 \cdot 1.160755 = 580.38.$$

20. a) Quel est le taux d'intérêt nominal nécessaire pour doubler une somme en 8 ans, si le montant est capitalisé trimestriellement ?

b) Quel est le pourcentage effectif ?

(Réponse : $\rho^{(4)} = 8.7589\% = 0.087589$; $p = 9.0508$.)

Solution. Nous avons $n = 8$ ans, $m = 4$ et $S = 2 \cdot s$.

a) Alors

$$S = 2 \cdot s = s \cdot u^8 = s \cdot u_4^{4 \cdot 8} = s \cdot u_4^{32}.$$

Donc

$$2 = u_4^{32} \Rightarrow u_4 = 1 + i_4 = \sqrt[32]{2} = 1.0218971 \text{ et } i_4 = 0.0218971.$$

Le taux nominal annuel convertible trimestriellement d'intérêt est alors

$$\rho^{(4)} = 4 \cdot i_4 = 4 \cdot 0.0218971 = 8.7589\% = 0.087589$$

et le pourcentage nominal annuel est $p^{(4)} = 8.7589$.

b) Le pourcentage effectif $p_{\text{eff}} = 100 \cdot i_{\text{eff}}$, où $i_{\text{eff}} = (1+i_4)^4 - 1 = 0.090508$, donc $p_{\text{eff}} = 9.0508$.

21. Soit $\rho = 12\%$ le taux d'intérêt nominal pour une capitalisation mensuelle. Calculez le taux d'intérêt instantané δ équivalent.

(Réponse : $\delta = 11.94\%$.)

Solution. Nous avons $\rho = \rho^{(12)} = 12\% = 0.12$ et $m = 12$. Alors le taux d'intérêt mensuel est

$$i_{12} = \frac{\rho^{(12)}}{12} = \frac{0.12}{12} = 0.01.$$

Le taux d'intérêt annuel est

$$i = i_{\text{eff}} = (1 + i_{12})^{12} - 1 = 1.01^{12} - 1 = 0.126825.$$

Le taux d'intérêt instantané est

$$\delta = \ln(1 + i) = \ln(1.126825) = 0.119404 = 11.94\%.$$

22.* Une somme de 105 € est placée dans une banque. Quel sera le montant de cette somme après 6 ans si, pendant les 4 premières années, le pourcentage annuel est de 20 et si, pendant les 2 dernières années, il est de 15 ?

(Réponse : $S = 287.95$ €.)

23.* Quel montant a été placé il y a 5 ans au taux nominal annuel de 10%, avec capitalisation trimestrielle, de sorte que le montant accumulé aujourd'hui soit de 25640 lei ? Quel montant aurions-nous obtenu si l'intérêt avait été capitalisé annuellement ?

(Réponse : $s = 15647.35$ lei ; $S = 25200.21$ lei.)

24.* Soient deux fonds d'argent A et B placés en régime d'intérêt composé pendant 3 ans et 2 ans respectivement, avec les pourcentages annuels de 5 pour le fonds A et de 4 pour le fonds B. Sachant que la somme déposée dans le second fonds est cinq fois celle déposée dans le premier et que la différence entre les sommes finales correspondantes est de 34003 u.m., trouvez les sommes initiales déposées dans les deux fonds.

(Réponse : $A = 8000$ u.m., $B = 40000$ u.m.)

1.2.3 Le taux d'intérêt nominal

25. a) Calculez la somme finale après 3 ans pour un dépôt de 4000 euros, avec un taux nominal annuel d'intérêt de 8%, avec capitalisation trimestrielle.

b) Quelle est la somme finale si la capitalisation de l'intérêt est continue ?

c) Quel est le taux d'intérêt effectif ?

d) Quel est le taux d'intérêt instantané équivalent ?

(Réponse : a) $S = 5072.97$; b) $S = 5085.00$; c) $i_{\text{eff}} = 8.24\%$; d) $\delta = 7.92\%$)

Solution.

Le taux d'intérêt est annuel, mais la capitalisation est trimestrielle, donc $\rho^{(4)} = 8\% = 0.08$. Alors le taux d'intérêt trimestriel est

$$i_4 = \frac{\rho^{(4)}}{4} = \frac{0.08}{4} = 0.02.$$

La somme initiale est $s = 4000$ et la durée est de $n = 3$ ans.

a) La somme finale après 3 ans avec capitalisation trimestrielle est

$$S = s \cdot u_4^{n \cdot 4} = 4000 \cdot 1.02^{12} = 5072.97.$$

b) Si la capitalisation de l'intérêt est continue, alors on utilise l'intérêt instantané δ. On sait que $\delta = \ln(1 + i) = \ln(u)$, donc $u = e^{\delta}$. Alors la somme finale est

$$S = s \cdot u^n = s \cdot (e^{\delta})^n = s \cdot e^{n\delta} = 4000 \cdot e^{3 \cdot 0.08} = 4000 \cdot e^{0.24} = 4000 \cdot 1.271249 = 5085.00.$$

c) L'intérêt unitaire effectif est

$$i_{\text{eff}} = (1 + i_4)^4 - 1 = 1.02^4 - 1 = 0.082432 = 8.24\%.$$

d) Le taux d'intérêt instantané équivalent se calcule en utilisant la formule

$$\delta = \ln(1 + i_{\text{eff}}) = \ln(1.082432) = 0.0792 = 7.92\%.$$

26. a) Quel taux nominal annuel permettra de doubler un montant en 8 ans si la capitalisation se fait tous les 3 mois ?

b) Quel est le taux d'intérêt effectif ?

(Réponse : a) $\rho^{(4)} = 8.7589\%$; b) $i_{\text{eff}} = 9.0508\%$)

Solution.

a) La capitalisation se fait tous les 3 mois, alors $m = 4$ et $n = 8$ ans. La somme initiale se double, donc $S = 2 \cdot s$. Mais $S = s \cdot u_4^{32}$, donc $2 = u_4^{32}$. Cela implique que $u_4 = \sqrt[32]{2} = 1.021897$ et $i_4 = 0.021897$. Alors

$$\rho^{(4)} = 4 \cdot i_4 = 0.087589 = 8.7589\%.$$

b) L'intérêt unitaire effectif se calcule avec la formule

$$i_{\text{eff}} = (1 + i_4)^4 - 1 = 1.021897^4 - 1 = 0.090508 = 9.0508\%.$$

27. a) Si le taux d'intérêt nominal annuel est de 18% et la capitalisation est mensuelle, trouvez le taux d'intérêt effectif.

b) Quel est ce taux si la capitalisation se fait tous les six mois ?

(Réponse : a) $i_{\text{eff}} = 19.56\%$, b) $i_{\text{eff}} = 18.81\%$)

Solution.

a) Le taux d'intérêt est annuel et la capitalisation se fait chaque mois, donc $18\% = \rho^{(12)}$. Le taux d'intérêt mensuel est alors

$$i_{12} = \frac{\rho^{(12)}}{12} = \frac{0.18}{12} = 0.015.$$

Alors le taux d'intérêt effectif est

$$i_{\text{eff}} = (1 + i_{12})^{12} - 1 = 1.015^{12} - 1 = 0.195618 = 19.56\%.$$

b) Si la capitalisation se fait tous les six mois, alors $m = 2$ et $i_2 = \frac{0.18}{2} = 0.09$. Dans ce cas, l'intérêt unitaire effectif est

$$i_{\text{eff}} = (1 + i_2)^2 - 1 = 1.09^2 - 1 = 0.1881 = 18.81\%.$$

28. Quelle est la valeur actuelle d'un paiement de 3800 lei qui sera effectué en 5 ans, si le taux d'intérêt instantané pour cette période est $\delta = 3.8\%$?

(Réponse : $s = 3142.44$ lei)

Solution.

Le taux d'intérêt instantané pour cette période est $\delta = 3.8\% = 0.038 = \ln(1+i)$; ainsi,

$$1 + i = e^{\delta} = e^{0.038} = 1.038731 \Rightarrow i = 0.038731.$$

La valeur actuelle du paiement $S = 3800$ lei est l'actualisation de ce montant, donc

$$s = S \cdot e^{-n\delta} = 3800 \cdot e^{-5 \cdot 0.038} = 3142.44.$$

29. Une somme de 2000 € est investie pour une période de 10 ans, avec un taux d'intérêt nominal annuel de 10% au cours des 3 premières années et une capitalisation semestrielle, avec un taux d'intérêt nominal annuel de 8% au cours des 4 années suivantes et une capitalisation trimestrielle, puis avec un taux d'intérêt nominal annuel de 9% pour les 3 dernières années et une capitalisation mensuelle. Trouvez la somme finale après 10 ans.

(Réponse : $S = 4814.94$€)

Solution.

Pour les 3 premières années, $m = 2$ et le taux d'intérêt semestriel est

$$i_2 = \frac{0.1}{2} = 0.05.$$

La somme finale après les 3 premières années est

$$S_3 = s \cdot u_2^{3 \cdot 2} = 2000 \cdot 1.05^6 = 2680.19.$$

Pour les 4 années suivantes, $m = 4$ et le taux d'intérêt trimestriel est

$$i_4 = \frac{0.08}{4} = 0.02.$$

La somme finale après 7 années est

$$S_7 = S_3 \cdot u_4^{4 \cdot 4} = 2680.19 \cdot 1.02^{16} = 3679.33.$$

Pour les 3 dernières années, $m = 12$ et le taux d'intérêt mensuel est

$$i_{12} = \frac{0.09}{12} = 0.0075.$$

La somme finale après 10 années est

$$S_{10} = S_7 \cdot u_{12}^{3 \cdot 12} = 3679.33 \cdot 1.0075^{36} = 4814.94.$$

30. Une somme de 2000 € est investie pour une période de 10 ans, avec $i_2 = 10\%$ au cours des 3 premières années, avec $i_4 = 8\%$ au cours des 4 prochaines années et avec $i_{12} = 9\%$ pour les 3 dernières années. Trouvez la somme finale après 10 ans.

(Réponse : $S = 270097.22$€)

Solution.

Dans ce cas, nous savons déjà que $i_2 = 0.1$ au cours des 3 premières années, $i_4 = 0.08$ au cours des 4 prochaines années et $i_{12} = 0.09$ pour les 3 dernières années.

Les montants accumulés après les trois périodes successives sont :

$$S_3 = s \cdot u_2^6 = 2000 \cdot 1.1^6 = 3543.12$$

$$S_7 = S_3 \cdot u_4^{16} = 3543.12 \cdot 1.08^{16} = 12138.53$$

$$S_{10} = S_7 \cdot u_{12}^{36} = 12138.53 \cdot 1.09^{36} = 270097.22$$

31. En combien de temps un capital de 2000 € produira-t-il un intérêt de 800 € ? Le taux nominal annuel est de 10 % et la capitalisation est trimestrielle.

(Réponse : $\approx$ 1226 jours)

Solution.

Le taux nominal annuel est de 10 % avec une capitalisation trimestrielle, donc $\rho^{(4)} = 0.1$. Alors $i_4 = \frac{0.1}{4} = 0.025$.

La somme finale est

$$S = s + D = 2000 + 800 = 2800.$$

Elle est aussi la capitalisation de la somme initiale s avec le facteur de capitalisation trimestriel u_4, donc

$$S = s \cdot u_4^n = 2000 \cdot 1.025^n = 2800.$$

Alors

$$1.025^n = 1.4 \Rightarrow n = \log_{1.025}(1.4) = 13.626433 \text{ trimestres}$$

On peut aussi exprimer la durée en jours : 13.626433 trimestres correspondent approximativement à 1226 jours.

32.* La somme de 5000 lei est empruntée à une banque le 21.01.2010. Si le taux d'intérêt instantané est $\delta = 12\%$, déterminez :

a) la somme qui doit être remboursée le 21.01.2015 ;

b) l'intérêt unitaire effectif i utilisé pendant cette période ;

c) la valeur du taux d'intérêt nominal équivalent, si la capitalisation est mensuelle.

(Réponse : a) $S = 9110.59$ lei ; b) $i = 0.1275$; c) $\rho^{(12)} = 0.1206$.)

1.3 Exercices proposés

L'intérêt simple

1. On place un montant de 6500 u.m. pour 3 mois avec un taux d'intérêt annuel de 4.5%. Calculez l'intérêt et la somme finale obtenue.

   (Réponse : $D = 73.125$ u.m., $S = 6573.125$ u.m.)

2. À quel taux d'intérêt annuel le montant de 3000 lei a-t-il été emprunté pour 7 mois de sorte que le montant final dû soit de 3500 lei ? Quel est le taux semestriel équivalent ?
   (Réponse : $i = 28.57\%$, $i_2 = 14.29\%$)

3. Une personne obtient, en déposant une somme d'argent à la banque du 21 mars 2012 au 13 octobre 2012, à un taux d'intérêt annuel de 7.5%, le montant de 7509 u.m. Quel est le montant que cette personne a déposé à la banque ?
   (Réponse : $s = 7200$ u.m.)

4. Pendant combien de temps une personne doit-elle placer la somme de 5000 lei pour que, si la banque offre un taux d'intérêt annuel de 9%, le montant qui peut être retiré à la fin soit de 5225 lei ?
   (Réponse : $t = \frac{1}{2}$, 180 jours ou 6 mois)

5. Une personne réussit à économiser de l'argent et à le déposer sur un compte bancaire. Elle effectue un dépôt d'épargne de 2000 lei au début de l'année, un autre de 1000 lei après 2 mois et, trois mois plus tard, un nouveau dépôt de 3000 lei. Quel montant cette personne peut-elle retirer à la fin de l'année si le taux d'intérêt annuel est de 12% ?
   (Réponse : $S = 6550$ lei)

6. Pendant quatre mois, une personne dépose 1000 lei sur le même compte le 5 de chaque mois, avec un taux d'intérêt annuel de 7%. Quel montant aura-t-elle à la fin du quatrième mois ?
   (Réponse : $S = 4058.33$ lei)

7. Vous pouvez choisir de recevoir la somme de 990 u.m. aujourd'hui, 995 u.m. dans un mois ou 1000 u.m. dans 3 mois. Quelle option choisissez-vous pour un taux d'intérêt annuel de 8% ?
   (Réponse : 990 u.m.)

8. Une personne a deux sommes totalisant 24000 u.m. Elle place la première somme (la plus petite) pour 9 mois avec $i = 4\%$ et la seconde somme pour 8 mois avec $i = 6\%$. Sachant que l'intérêt produit par les deux montants est de 880 u.m., déterminez les deux montants initiaux.
   (Réponse : $s_1 = 8000$ u.m., $s_2 = 16000$ u.m.)

9. Une personne a 3 sommes d'argent en progression arithmétique de raison 3000 u.m. La personne place ces montants pour une période de trois ans, avec des taux d'intérêt annuels en progression géométrique de raison 3/2. Sachant que l'intérêt total est de 3300 u.m. et que la plus grande somme produit un intérêt égal à neuf fois celui produit par la plus petite somme, déterminez les trois montants initiaux et leurs taux d'intérêt annuels.
   (Réponse : $s_1 = 2000$ u.m., $s_2 = 5000$ u.m., $s_3 = 8000$ u.m., $i_1 = 4\%$, $i_2 = 6\%$, $i_3 = 9\%$.)

L'intérêt composé

10. Une personne dépose 5300 lei dans une banque. Sachant que le taux d'intérêt annuel est de 5.6%, calculez le montant que la personne retirera au bout de 3 ans et de 5 ans. Quelle est la valeur de l'intérêt accumulé pour les périodes concernées ? Quel est le taux d'intérêt trimestriel équivalent i_4 ?
(Réponse : $S_{3 \text{ ans}} = 6241.19$ lei, $D_{3 \text{ ans}} = 941.19$ lei, $S_{5 \text{ ans}} = 6959.78$ lei, $D_{5 \text{ ans}} = 1659.78$ lei, $i_4 = 0.0137 = 1.37\%$)

11. On place 1000 euros pour 4 ans. Quel est le taux d'intérêt annuel permettant d'obtenir 1200 euros ? Quel est ce taux si le placement dure 5 ans ?
(Réponse : $i = 4.66\%$ (4 ans), $i = 3.71\%$ (5 ans))

12. Pendant combien d'années devons-nous placer 150 euros afin de pouvoir retirer 190 euros ? Et pour doubler une somme d'argent ? Le taux d'intérêt annuel est de 3.75%.
(Réponse : n=7 ans, respectivement n=19 ans)

13. Quel montant une personne a-t-elle déposé si, après six ans, elle dispose de 125000 lei sur son compte ? Le taux d'intérêt annuel est de 8%.
(Réponse : $s = 78771.21$ lei)

14. Trouvez le montant final et l'intérêt produit par un dépôt de 4500 u.m. pendant 7 ans, sachant qu'au cours des 4 premières années le taux d'intérêt annuel était de 6.7% et qu'au cours des 3 années suivantes il était de 4.8%.
(Réponse : $S = 6713.58$ lei, $D = 2213.58$ lei)

15. Quel était le montant initial déposé sur un compte il y a 5 ans, si le montant final qui peut être retiré de la banque est maintenant de 8288.21 lei ? On sait que, durant les 3 premières années, le taux d'intérêt annuel était de 5.67% et que, durant les deux dernières années, il était de 8.2%.
(Réponse : $s = 6000$ lei)

Les taux d'intérêt nominal, effectif et instantané

16. Calculez le montant final après 3 ans pour un dépôt de 4780 lei à un taux d'intérêt nominal annuel de 4.8% avec capitalisation mensuelle. Quel est le taux d'intérêt effectif ?
(Réponse : $S = 5518.76$ lei, $i_{\text{eff}} = 4.91\%$)

17. Un capital de 7000 lei est passé en 10 mois à 7419.21 lei. Déterminez le taux nominal annuel et le taux effectif annuel pour un dépôt avec capitalisation mensuelle.
(Réponse : $\rho^{(12)} = 7\%$, $i_{\text{eff}} = 7.23\%$)

18. Quel taux nominal d'intérêt permettra de tripler un montant en trois ans si la capitalisation est mensuelle ? Quel sera le taux d'intérêt effectif ?
(Réponse : $\rho^{(12)} = 37.18\%$, $i_{\text{eff}} = 44.22\%$)

19. Quel taux nominal d'intérêt permettra de doubler un montant en 8 ans s'il est capitalisé tous les 3 mois ? Quel sera le taux d'intérêt effectif ?

(Réponse : $\rho^{(4)} = 8.7589\%$, $i_{\text{eff}} = 9.0508\%$)

20. Si le taux nominal d'intérêt est de 7.75% et que la capitalisation est semestrielle, trouvez le taux d'intérêt instantané équivalent.
(Réponse : $\delta = 2\ln(1 + 0.0775/2) = 7.6036\%$)

21. Déterminez la valeur actuelle d'un paiement de 5000 u.m. qui sera effectué dans 5 ans si le taux d'intérêt instantané au cours de cette période est de $\delta = 5.5\%$.
(Réponse : $s = 3797.86$ u.m.)

22. On dispose de 12000 lei à placer pendant trois ans. Le placement A offre un taux nominal annuel de 6% avec capitalisation trimestrielle. Le placement B offre un taux effectif annuel de 6.10%. Calculez le taux effectif annuel du placement A et le montant final de chaque placement. Quel placement donne le montant final le plus élevé ?
(Réponse : $i_A = 6.1364\%$, $S_A = 14347.42$ lei et $S_B = 14332.68$ lei. Le placement A donne le montant final le plus élevé.)

23. Un placement est rémunéré au taux d'intérêt instantané constant $\delta = 4.75\%$. Calculez le taux effectif annuel et les taux nominaux annuels équivalents pour une capitalisation semestrielle, puis mensuelle.
(Réponse : $i_{\text{eff}} = 4.8646\%$, $\rho^{(2)} = 4.8069\%$ et $\rho^{(12)} = 4.7594\%$.)

24. Une personne dépose 8500 lei pour quatre ans. Durant les 18 premiers mois, le taux nominal annuel est de 5.2% avec capitalisation trimestrielle. Durant les 30 mois suivants, le taux d'intérêt instantané est constant et vaut 5.5%. Calculez le montant final et le taux effectif annuel constant qui donnerait le même montant final sur quatre ans.
(Réponse : $S = 10538.80$ lei et $i_{\text{eff}} = 5.5220\%$.)

25. Deux paiements de 4000 u.m. et de 6500 u.m. sont prévus, le premier dans 18 mois et le second dans trois ans. Le taux d'intérêt instantané est constant et vaut 4.8%. Calculez la valeur actuelle de ces paiements, puis le montant d'un paiement unique équivalent qui serait effectué dans deux ans.
(Réponse : $s = 9350.39$ u.m. et $V_2 = 10292.53$ u.m.)

Chapitre 2

Annuités constantes

2.1 Résumé théorique

• Une annuité est un ensemble de versements effectués à des dates déterminées.

• La valeur de l'annuité au moment t, notée $V(t)$, est la somme des valeurs, au moment t, de tous les versements : $V(t) = \sum_{j=1}^{N} r_j \cdot v^{t_j - t}$.

• Notations :

r = le montant constant de chaque versement,

N = le nombre total de versements,

n = la durée de l'annuité en années,

i = le taux d'intérêt annuel,

t = le moment de l'évaluation,

t_j = le moment du j-ième versement,

$u = 1 + i$ = le facteur de capitalisation,

$v = \dfrac{1}{u}$ = le facteur d'actualisation,

m = le nombre de sous-périodes par année,

i_m = le taux d'intérêt d'une sous-période,

$u_m = 1 + i_m$, $v_m = \dfrac{1}{u_m}$.

• La valeur $V(t)$, au moment t, d'une annuité constante entière dont les versements sont effectués à la fin de chaque année (a.c.e. fin) est $V(t) = r \cdot \dfrac{1 - v^n}{i} \cdot u^t$.

• La valeur $V(t)$, au moment t, d'une annuité constante entière dont les versements sont effectués au début de chaque année (a.c.e. début) est $V(t) = r \cdot \dfrac{1 - v^n}{i} \cdot u^{t+1}$.

• La valeur $V_m(t)$, au moment t, d'une annuité constante fractionnée dont les versements sont effectués à la fin de chaque sous-période (a.c.f. fin) est $V_m(t) = r_m \cdot \dfrac{1 - v_m^{n \cdot m}}{i_m} \cdot u_m^{t \cdot m}$.

• La valeur $V_m(t)$, au moment t, d'une annuité constante fractionnée dont les versements sont effectués au début de chaque sous-période (a.c.f. début) est $V_m(t) = r_m \cdot \dfrac{1 - v_m^{n \cdot m}}{i_m} \cdot u_m^{t \cdot m + 1}$.

2.2 Exercices corrigés

1. Une personne achète un produit d'une valeur de 1000 unités monétaires. Le paiement est effectué en versements à intervalles réguliers pendant 2 ans, au taux d'intérêt annuel de 10%. Pour les versements annuels, ce taux est effectif. Pour les versements mensuels ou trimestriels, c'est un taux nominal convertible à la fréquence des versements. Calculez le montant de chaque versement et la valeur acquise du produit au bout de deux ans si les versements sont effectués :

a) à la fin de chaque année ; (Réponse : $r = 576.19$ u.m. ; FIN $= 1210$ u.m.)

b) au début de chaque année ; (Réponse : $r = 523.81$ u.m. ; FIN $= 1210$ u.m.)

c) à la fin de chaque mois ; (Réponse : $r_{12} = 46.14$ u.m. ; FIN $= 1220.39$ u.m.)

d) au début de chaque mois ; (Réponse : $r_{12} = 45.76$ u.m. ; FIN $= 1220.39$ u.m.)

e) à la fin de chaque trimestre ; (Réponse : $r_4 = 139.47$ u.m. ; FIN $= 1218.40$ u.m.)

f) au début de chaque trimestre. (Réponse : $r_4 = 136.07$ u.m. ; FIN $= 1218.40$ u.m.)

Solution.

Nous avons $n = 2$, $V(0) = \text{IN} = 1000$ u.m.

a) Versements effectués à la fin de chaque année, avec $i = 0.1$, $u = 1.1$ et $v = \dfrac{1}{1.1}$:

$$\begin{aligned} V(0) &= r \cdot \frac{1-v^2}{i}, \\ r &= 1000 \cdot \frac{0.1}{1-(1/1.1)^2} = 576.19 \text{ u.m.}, \\ V(2) &= V(0)u^2 = 1000 \cdot (1.1)^2 = 1210 \text{ u.m.} \end{aligned}$$

b) Versements effectués au début de chaque année :

$$\begin{aligned} V(0) &= r \cdot \frac{1-v^2}{i} \cdot u, \\ r &= 1000 \cdot \frac{0.1}{1.1\,(1-(1/1.1)^2)} = 523.81 \text{ u.m.}, \\ V(2) &= V(0)u^2 = 1210 \text{ u.m.} \end{aligned}$$

c) Versements effectués à la fin de chaque mois. Pour le taux nominal annuel 0.10, le taux mensuel est

$$i_{12} = \frac{\rho^{(12)}}{12} = \frac{0.10}{12} = \frac{1}{120},$$

d'où $u_{12} = 1 + i_{12}$ et $v_{12} = 1/u_{12}$. Alors

$$\begin{aligned} r_{12} &= 1000 \cdot \frac{i_{12}}{1-v_{12}^{24}} = 46.14 \text{ u.m.}, \\ V_{12}(2) &= V_{12}(0)u_{12}^{24} = 1000\left(1+\frac{0.10}{12}\right)^{24} = 1220.39 \text{ u.m.} \end{aligned}$$

d) Versements effectués au début de chaque mois :

$$\begin{aligned} r_{12} &= 1000 \cdot \frac{i_{12}}{u_{12}\left(1-v_{12}^{24}\right)} = 45.76 \text{ u.m.}, \\ V_{12}(2) &= V_{12}(0)u_{12}^{24} = 1220.39 \text{ u.m.} \end{aligned}$$

e) Versements effectués à la fin de chaque trimestre. Le taux trimestriel est

$$i_4 = \frac{\rho^{(4)}}{4} = \frac{0.10}{4} = 0.025,$$

d'où $u_4 = 1.025$ et $v_4 = 1/u_4$. Alors

$$\begin{aligned} r_4 &= 1000 \cdot \frac{i_4}{1 - v_4^8} = 139.47 \text{ u.m.}, \\ V_4(2) &= V_4(0)u_4^8 = 1000 \cdot (1.025)^8 = 1218.40 \text{ u.m.} \end{aligned}$$

f) Versements effectués au début de chaque trimestre :

$$\begin{aligned} r_4 &= 1000 \cdot \frac{i_4}{u_4\left(1 - v_4^8\right)} = 136.07 \text{ u.m.}, \\ V_4(2) &= V_4(0)u_4^8 = 1218.40 \text{ u.m.} \end{aligned}$$

2. Une somme de 1000 u.m. est versée à la fin de chaque année pendant 12 ans. Le taux d'intérêt annuel est de 16%.

a) Quel montant faut-il déposer au début de la première année pour couvrir les 12 versements ?

b) Déterminez la valeur acquise des versements à la fin de la douzième année.

(Réponse : IN = 5197.11 u.m. ; FIN = 30850.17 u.m.)

Solution. Nous avons une annuité constante entière dont les versements sont effectués à la fin de chaque année, avec $n = 12$, $r = 1000$ u.m., $i = 0.16$, $u = 1.16$ et $v = \frac{1}{1.16}$. Ainsi,

$$V(t) = r \cdot \frac{1 - v^n}{i} \cdot u^t.$$

a) La valeur initiale est

$$V(0) = \text{IN} = 1000 \cdot \frac{1 - (1/1.16)^{12}}{0.16} = 5197.11 \text{ u.m.}$$

b) La valeur finale est

$$V(12) = \text{FIN} = 1000 \cdot \frac{(1.16)^{12} - 1}{0.16} = 30850.17 \text{ u.m.}$$

Observation. La valeur finale vérifie aussi la relation

$$V(12) = V(0)u^{12} = 5197.107222 \cdot (1.16)^{12} = 30850.169011 \text{ u.m.}$$

3. Une personne souhaite acheter un produit d'une valeur de 5100 u.m. Elle verse un acompte de 20% du prix et paie le solde par des versements périodiques constants pendant 5 ans. Le taux d'intérêt annuel est de 10%. Pour les paiements fractionnés, ce taux est considéré comme un taux nominal annuel convertible à la fréquence des versements. Calculez le montant d'un versement si celui-ci est effectué :

a) à la fin de chaque année ;

b) au début de chaque mois ;

c) à la fin de chaque trimestre.

Quelle est, dans chaque cas, la valeur acquise des versements à la fin de la cinquième année ?
(Réponse : a) $r = 1076.29$ u.m., $V(5) = 6570.88$ u.m. ; b) $r_{12} = 85.97$ u.m., $V_{12}(5) = 6712.86$ u.m. ; c) $r_4 = 261.72$ u.m., $V_4(5) = 6685.56$ u.m.)

Solution. Nous avons $n = 5$ et

$$V(0) = 5100 - 20\% \cdot 5100 = 80\% \cdot 5100 = 4080 \text{ u.m.}$$

a) Dans ce cas, les versements sont effectués à la fin de chaque année. Ainsi,

$$V(0) = r \cdot \frac{1 - v^5}{i},$$

d'où

$$r = 4080 \cdot \frac{0.1}{1 - (1/1.1)^5} = 1076.29 \text{ u.m.}$$

et

$$V(5) = V(0)(1.1)^5 = 6570.88 \text{ u.m.}$$

b) Dans ce cas, les versements sont effectués au début de chaque mois. Nous avons

$$i_{12} = \frac{0.1}{12}, \qquad u_{12} = 1 + \frac{0.1}{12}, \qquad v_{12} = \frac{1}{u_{12}}.$$

Par conséquent,

$$r_{12} = 4080 \cdot \frac{i_{12}}{u_{12}\left(1 - v_{12}^{60}\right)} = 85.97 \text{ u.m.}$$

et

$$V_{12}(5) = V_{12}(0)u_{12}^{60} = 4080\left(1 + \frac{0.1}{12}\right)^{60} = 6712.86 \text{ u.m.}$$

c) Dans ce cas, les versements sont effectués à la fin de chaque trimestre. Nous avons

$$i_4 = \frac{0.1}{4} = 0.025, \qquad u_4 = 1.025, \qquad v_4 = \frac{1}{1.025}.$$

Par conséquent,

$$r_4 = 4080 \cdot \frac{0.025}{1 - (1/1.025)^{20}} = 261.72 \text{ u.m.}$$

et

$$V_4(5) = V_4(0)(1.025)^{20} = 6685.56 \text{ u.m.}$$

4. Après avoir travaillé pendant l'été, un ètudiant a èconomisé 2000 €, qu'il dépose sur un compte d'épargne. Le dépôt initial est capitalisé annuellement au taux de 8%. Pour les versements mensuels, le taux nominal annuel est de 8%, convertible mensuellement. Quelle somme doit-il

déposer sur ce compte à la fin de chaque mois afin de pouvoir acheter, dans quatre ans, un produit d'une valeur de 5500 €?

(Réponse : $r_{12} = 49.32$ €.)

Solution. Nous avons $n = 4$ et $\rho^{(12)} = 0.08$. Le taux mensuel applicable aux versements est

$$i_{12} = \frac{\rho^{(12)}}{12} = \frac{0.08}{12} = \frac{1}{150},$$

et $u_{12} = 1 + i_{12}$. La valeur acquise du dépôt initial au bout de quatre ans est

$$2000 \cdot (1.08)^4 = 2720.97792 \text{ euros.}$$

Les versements mensuels doivent donc produire une valeur acquise de

$$5500 - 2720.97792 = 2779.02208 \text{ euros.}$$

Comme ils sont effectués à la fin de chaque mois,

$$2779.02208 = r_{12} \cdot \frac{u_{12}^{48} - 1}{i_{12}},$$

d'où

$$r_{12} = 2779.02208 \cdot \frac{i_{12}}{u_{12}^{48} - 1} = 49.32 \text{ euros.}$$

5. Déterminez la durée d'une annuité constante entière dont les versements de 750 €sont effectués à la fin de chaque année, sachant que le taux d'intérêt annuel est de 10% et que la valeur initiale de l'annuité est de 4000 €.

(Réponse : $n \approx 8$ ans.)

Solution. Nous avons $i = 0.1$, $u = 1.1$, $v = \frac{1}{1.1}$, $r = 750$ et $V(0) = 4000$. Ainsi,

$$V(0) = r \cdot \frac{1 - v^n}{i},$$

donc

$$v^n = 1 - \frac{V(0)i}{r}.$$

Il s'ensuit que

$$n = \log_v \left(1 - \frac{V(0)i}{r}\right) = 7.9979 \approx 8 \text{ ans.}$$

6.* De 2000 à 2003 inclus, une société a reçu, au début de chaque année, un prêt de 50000 u.m. De 2002 à 2005 inclus, elle a réalisé, à la fin de chaque année, un bénéfice de 100000 u.m., puis elle a changé d'activité.

a) Comparez la valeur des prêts à la fin de 2003 avec la valeur des bénéfices à la fin de 2005, en tenant compte d'un taux d'intérêt annuel de 15%.

b) Déterminez la valeur, à la fin de 2005, de l'ensemble des bénéfices si l'entreprise réalise indéfiniment le même bénéfice de 100000 u.m. à la fin de chaque année.

(Réponse : valeur des prêts = 287119.06 u.m. ; valeur des bénéfices = 499337.50 u.m. ; valeur des bénéfices perpétuels = 1166004.17 u.m.)

7.* Déterminez la valeur d'une annuité dont les versements sont effectués au début de chaque année et qui est différée de 3 ans, puis la valeur d'une annuité dont les versements sont effectués à la fin de chaque année et dont la valeur est avancée de 4 ans, sachant que le taux d'intérêt annuel est de 5%, que le versement annuel est de 1000 u.m. et que la durée des versements est de 7 ans.

(Réponse : $V(-3,1) = 5248.41$ u.m. ; $V(4,0) = 7033.37$ u.m.)

Observation. Les valeurs des annuités constantes entières au moment $t = b$ peuvent s'écrire sous la forme

$$V(b,\mu) = r\frac{1-v^n}{i}u^{b+\mu}.$$

Si $\mu = 0$, les versements sont effectués à la fin de chaque année ; si $\mu = 1$, ils sont effectués au début de chaque année.

Si $b < 0$, la valeur est dite *différée* ; si $b > 0$, elle est dite *avancée* ; si $b = 0$, elle est dite *immédiate*.

8.* Déterminez la valeur initiale et la valeur finale d'une annuité constante entière dont les versements sont effectués à la fin de chaque année, sachant que le versement annuel est de 1000 u.m., que le taux d'intérêt annuel est de 6% et que la durée est de 12 ans.

(Réponse : IN = 8383.84 u.m. ; FIN = 16869.94 u.m.)

9.* Déterminez la valeur initiale d'une annuité constante entière dont les versements sont effectués au début de chaque année, sachant que le versement annuel est de 10000 u.m., que le taux d'intérêt annuel est de 5% et que la durée est de 7 ans.

(Réponse : IN = 60756.92 u.m.)

10.* Une somme de 800 u.m. est déposée à la fin de chaque trimestre pendant 3 ans. Le taux nominal annuel est de 5%, convertible trimestriellement.

a) Quel montant faut-il déposer au début de la première année pour couvrir les 12 versements ?

b) Quelle est la valeur acquise de ces dépôts au bout de 7 ans ?

(Réponse : $V_4(0) = \text{IN} = 8863.45$ u.m. ; $V_4(7) = 12550.58$ u.m.)

2.3 Exercices proposés

1. Une personne achète un produit d'une valeur de 5000 RON. Elle verse un acompte de 20% et paie le solde par des versements constants pendant 3 ans. Le taux nominal annuel est de 12%, convertible à la fréquence des versements. Déterminez le montant d'un versement et la valeur acquise de l'ensemble des versements à la fin de la troisième année, si les versements sont effectués :

   (a) à la fin, puis au début de chaque trimestre ;

   (b) à la fin, puis au début de chaque mois ;

   (c) à la fin, puis au début de chaque année.

   (Réponse : (a) fin : 401.85 RON, 5703.04 RON ; début : 390.14 RON, 5703.04 RON ;
   (b) fin : 132.86 RON, 5723.08 RON ; début : 131.54 RON, 5723.08 RON ;
   (c) fin : 1665.40 RON, 5619.71 RON ; début : 1486.96 RON, 5619.71 RON.)

2. Calculez la mensualité à verser à la fin de chaque mois pendant 15 ans pour rembourser un prêt de 40000 EUR, au taux nominal annuel de 13% convertible mensuellement.

   (Réponse : 506.10 EUR.)

3. Calculez le versement semestriel nécessaire pour rembourser un prêt de 43000 RON sur une période de 25 ans, avec un taux d'intérêt semestriel de 0.055, si les versements sont effectués au début de chaque semestre.

   (Réponse : 2407.24 RON.)

4. Calculez le versement annuel, effectué à la fin de chaque année, qui permet de rembourser un prêt de 78000 RON contracté pour une durée de 30 ans au taux d'intérêt annuel de 4.68%.

   (Réponse : 4890.44 RON.)

5. M. Q. souhaite comparer plusieurs modalités de remboursement d'un prêt de 15000 EUR sur 7 ans. La banque applique un taux nominal annuel de 14%, convertible à la fréquence des versements. Quel est le montant d'un versement si les paiements sont effectués à la fin de chaque année, de chaque mois ou de chaque trimestre ? En comparant les valeurs acquises de l'ensemble des versements, quelle modalité est la plus avantageuse pour la banque ?

   (Réponse : versement annuel : 3497.89 EUR ; mensualité : 281.10 EUR ; versement trimestriel : 849.04 EUR ; valeurs acquises respectives : 37534.03 EUR, 39740.77 EUR et 39302.58 EUR. La modalité mensuelle est la plus avantageuse pour la banque.)

6. Mme E. a contracté, il y a deux ans, un prêt de 12000 RON remboursable en 4 ans par des mensualités versées à la fin de chaque mois. Le taux nominal annuel est de 17%, convertible mensuellement. Quel est le montant de la mensualité ? Quelle est, aujourd'hui, la valeur èquivalente de l'ensemble des mensualités ?

   (Réponse : 346.26 RON ; 16819.20 RON.)

7. Considérons un crédit de 50000 RON remboursé par des versements semestriels effectués à la fin de chaque semestre. Dans laquelle des deux situations suivantes le versement est-il le plus faible ? Dans laquelle la valeur acquise de l'ensemble des versements est-elle la plus faible ?
   a) taux nominal annuel de 8%, convertible semestriellement, pendant 10 ans ;
   b) taux nominal annuel de 4%, convertible semestriellement, pendant 20 ans.
   (Réponse : (a) 3679.09 RON ; 109556.16 RON ; (b) 1827.79 RON ; 110401.98 RON. Le versement est plus faible dans le cas (b), tandis que la valeur acquise totale est plus faible dans le cas (a).)

8. Calculez le versement annuel, effectué au début de chaque année, qui permet de rembourser un crédit de 12500 EUR sur une période de 10 ans, au taux d'intérêt annuel de 0.055.
   (Réponse : 1571.89 EUR.)

9. Quel montant est accumulé sur un compte alimenté par des versements mensuels de 300 EUR effectués à la fin de chaque mois pendant 2 ans, si le taux nominal annuel est de 2.15%, convertible mensuellement ?
   (Réponse : 7350.32 EUR.)

10. Un acheteur choisit de payer un bien en 8 versements mensuels. Le premier versement, de 200 u.m., est effectué à la fin du premier mois ; chaque versement suivant est inférieur de 10 u.m. au précédent et est effectué à la fin du mois correspondant. Sachant que le taux d'intérêt mensuel est de 1.5%, déterminez la valeur du bien.
    (Réponse : pour une annuité à versements en progression arithmétique, de premier terme a et de raison d,
    $$V(t) = \left[\left(a + \frac{d}{i} + dn\right)\frac{1-v^n}{i} - \frac{dn}{i}\right]u^t.$$
    Ici, $a = 200$, $d = -10$, $n = 8$ et $i = 0.015$, donc $V(0) = 1241.03$ u.m.)

11. Dans la situation de l'exercice précédent, supposons que chaque versement soit ègal au précédent divisé par 1.25. Calculez la valeur du bien ainsi que les huit versements.
    (Réponse : pour une annuité à versements en progression géométrique de raison q,
    $$V(t) = av\frac{1-(qv)^n}{1-qv}u^t.$$
    Ici, $a = 200$, $q = 0.8$, $n = 8$ et $i = 0.015$, donc $V(0) = 791.69$ u.m. Les versements sont : 200, 160, 128, 102.40, 81.92, 65.54, 52.43 et 41.94 u.m.)

Chapitre 3

Remboursements des prêts

3.1 Résumé théorique

On note s le capital emprunté et i le taux d'intérêt annuel. Si le taux est exprimé sous la forme $p\%$, alors $i = p/100$. On pose $u = 1 + i$ et $v = 1/u$. Voici les éléments du plan d'amortissement pour des versements en fin d'année.

n = la durée de l'emprunt en années,

k = le numéro de l'année, $k = \overline{1, n}$,

R_k = le capital restant dû au début de l'année k,

D_k = les intérêts de l'année k, calculés sur R_k,

Q_k = l'amortissement du capital pour l'année k,
c'est-à-dire la part du capital remboursée en fin d'année,

r_k = le versement de l'année k,
effectué à la fin de cette année.

Tableau d'amortissement du modèle 1D (paiement unique à l'échéance). Les intérêts des années précédentes sont incorporés au capital.

k	R_k	D_k	Q_k	r_k
1	s	si	0	0
2	su	sui	0	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n-1$	su^{n-2}	$su^{n-2}i$	0	0
n	su^{n-1}	$su^{n-1}i$	su^{n-1}	su^n

Dans le modèle 2D, les intérêts sont payés en fin d'année et le capital est remboursé à l'échéance.

k	R_k	D_k	Q_k	r_k
1	s	si	0	si
2	s	si	0	si
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n-1$	s	si	0	si
n	s	si	s	su

Tableau d'amortissement du modèle 3D (amortissement du capital par parts constantes).

k	R_k	D_k	Q_k	r_k
1	$s = nQ$	nQi	Q	$(ni+1)Q$
2	$(n-1)Q$	$(n-1)Qi$	Q	$[(n-1)i+1]Q$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$k+1$	$(n-k)Q$	$(n-k)Qi$	Q	$[(n-k)i+1]Q$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	Q	Qi	Q	$(i+1)Q$

Tableau d'amortissement du modèle 4D (remboursement par versements constants).

k	R_k	D_k	Q_k	r_k
1	$s = r\frac{1-v^n}{i}$	$si = r(1-v^n)$	$r - D_1 = rv^n$	r
2	$s - rv^n = r\frac{1-v^{n-1}}{i}$	$r(1-v^{n-1})$	rv^{n-1}	r
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$r\frac{1-v}{i}$	$r(1-v)$	rv	r

Le tableau (FA) indique les versements et les intérêts du fonds d'accumulation (sinking fund) constitué auprès d'une tierce personne (TP).

k	r_k	S^k_{in}	D_k	S^k_{fin}	C_k

- r_k est le montant versé au fonds à la fin de l'année k.
- S^k_{in} est le solde du fonds au début de l'année k.
- S^k_{fin} est le solde du fonds à la fin de l'année k, après le versement.
- D_k désigne les intérêts crédités au fonds au titre de l'année k, calculés sur S^k_{in}.
- C_k est le montant qui reste à constituer pour atteindre la somme visée à l'échéance. Si cette somme est notée S, alors $C_k = S - S^k_{fin}$.

Pour des versements annuels constants de montant r' dans le fonds d'accumulation (FA), on note i' le taux annuel du fonds, $u' = 1 + i'$ et $v' = 1/u'$.

k	r_k	S_{in}^k	D_k	S_{fin}^k	C_k
1	r'	0	0	$r' = r'\frac{u'-1}{i'}$	$r'\frac{(u')^n-u'}{i'}$
2	r'	$r'\frac{u'-1}{i'}$	$r'(u'-1)$	$r'\frac{(u')^2-1}{i'}$	$r'\frac{(u')^n-(u')^2}{i'}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
$n-1$	r'	$r'\frac{(u')^{n-2}-1}{i'}$	$r'[(u')^{n-2}-1]$	$r'\frac{(u')^{n-1}-1}{i'}$	$r'\frac{(u')^n-(u')^{n-1}}{i'}$
n	r'	$r'\frac{(u')^{n-1}-1}{i'}$	$r'[(u')^{n-1}-1]$	$r'\frac{(u')^n-1}{i'} = S$	$r'\frac{(u')^n-(u')^n}{i'} = 0$

Les valeurs affichées dans les tableaux numériques sont arrondies individuellement à partir des valeurs exactes.

3.2 Exercices corrigés

3.2.1 Modèles directs (1D, 2D, 3D et 4D)

1. Une personne emprunte 6000 u.m. pour 4 ans, au taux d'intérêt annuel de 9%. Le contrat prévoit le remboursement intégral de la dette, capital et intérêts compris, à l'échéance. Dressez le tableau d'amortissement du prêt. (Modèle 1D)

Solution. Nous avons $s = 6000$, $n = 4$, $p = 9$, $i = 0.09$ et $u = 1.09$.

On applique le modèle 1D, puisque le remboursement intégral de la dette intervient à l'échéance.

Le tableau d'amortissement est le suivant.

k	R_k	D_k	Q_k	r_k
1	6000	540	0	0
2	6540	588.6	0	0
3	7128.6	641.57	0	0
4	7770.17	699.32	7770.17	8469.49

Observation. Le versement unique, effectué à la fin de la quatrième année, correspond au montant de la dette après quatre ans de capitalisation des intérêts, soit $S = s \cdot u^n = 6000 \cdot 1.09^4 = 8469.49$ u.m.

2. On considère un prêt de 4500 u.m. sur 5 ans, au taux d'intérêt annuel de 11%. Les intérêts sont versés à la fin de chaque année et le capital est remboursé à l'échéance. Dressez le tableau d'amortissement du prêt. (Modèle 2D)

Solution.

Nous avons $s = 4500$, $n = 5$, $p = 11$, $i = 0.11$ et $u = 1.11$.

On applique le modèle 2D, puisque les intérêts sont payés à la fin de chaque année et que le capital est remboursé à l'échéance.

Le tableau d'amortissement est le suivant.

k	R_k	D_k	Q_k	r_k
1	4500	495	0	495
2	4500	495	0	495
3	4500	495	0	495
4	4500	495	0	495
5	4500	495	4500	4995

Observation. Les montants sont les mêmes au cours des quatre premières années. À la cinquième année, le capital est remboursé en plus des intérêts, d'où $R_5 = Q_5$ et $r_5 = D_5 + Q_5$.

3. Pour acheter une maison, une personne emprunte 20000 u.m. à une banque pour 10 ans, au taux d'intérêt annuel de 10%. À la fin de chaque année, elle rembourse la même part du capital et paie les intérêts de l'année. Dressez le tableau d'amortissement du prêt. (Modèle 3D)

Solution.

Nous avons $s = 20000$, $n = 10$, $p = 10$, $i = 0.1$ et $u = 1.1$.

On applique le modèle 3D, puisque la part du capital remboursée chaque année est constante. Elle vaut

$$Q = \frac{s}{n} = \frac{20000}{10} = 2000.$$

Le tableau d'amortissement est le suivant.

k	R_k	D_k	Q_k	r_k
1	20000	2000	2000	4000
2	18000	1800	2000	3800
3	16000	1600	2000	3600
4	14000	1400	2000	3400
5	12000	1200	2000	3200
6	10000	1000	2000	3000
7	8000	800	2000	2800
8	6000	600	2000	2600
9	4000	400	2000	2400
10	2000	200	2000	2200

Observation. Dans le modèle 3D, les versements diminuent d'une année à l'autre, car les intérêts sont calculés sur un capital restant dû de plus en plus faible.

4. Dressez le tableau d'amortissement d'un prêt de 500 u.m. sur 4 ans, au taux d'intérêt annuel de 12%, sachant que les versements sont constants et effectués à la fin de chaque année. (Modèle 4D)

Solution.

Nous avons $s = 500$, $n = 4$, $p = 12$, $i = 0.12$, $u = 1.12$ et $v = \frac{1}{1.12}$.

On applique le modèle 4D, puisque les versements annuels sont constants. Leur montant est donné par

$$r = s \cdot \frac{i}{1 - v^n} = 500 \cdot \frac{0.12}{1 - \frac{1}{1.12^4}} = 164.62.$$

Le tableau d'amortissement est le suivant.

k	R_k	D_k	Q_k	r_k
1	500	60	104.62	164.62
2	395.38	47.45	117.17	164.62
3	278.21	33.39	131.23	164.62
4	146.98	17.64	146.98	164.62

Observation. On a $R_4 = Q_4$, puisque le dernier versement rembourse tout le capital restant dû.

5. Une personne emprunte 1000 u.m. pour 3 ans, au taux nominal annuel de 10%, convertible semestriellement. Les versements sont effectués à la fin de chaque semestre. Dressez le tableau d'amortissement lorsque la part de capital remboursée est constante, puis lorsque le montant de chaque versement est constant. (Modèles 3D et 4D fractionnés)

Solution. On procède comme dans les exercices 3 et 4, avec un taux semestriel proportionnel au taux nominal annuel 0.10, soit

$$i_2 = \frac{\rho^{(2)}}{2} = \frac{0.10}{2} = 0.05.$$

Les tableaux d'amortissement comportent chacun six lignes, une pour chaque semestre. Les intérêts sont calculés au taux semestriel $i_2 = 0.05$.

Pour le modèle 3D, la part de capital remboursée à chaque semestre, pour $s = 1000$, $n = 3$ et $m = 2$, vaut

$$Q = \frac{s}{n \cdot m} = \frac{1000}{3 \cdot 2} = \frac{500}{3} = 166.67.$$

Tableau d'amortissement semestriel du modèle 3D.

k	R_k	D_k	Q_k	r_k
1	1000	50	166.67	216.67
2	833.33	41.67	166.67	208.33
3	666.67	33.33	166.67	200
4	500	25	166.67	191.67
5	333.33	16.67	166.67	183.33
6	166.67	8.33	166.67	175

Pour le modèle 4D, avec $v_2 = 1/(1+i_2)$, le versement semestriel constant vaut

$$r_2 = s \cdot \frac{i_2}{1 - v_2^6} = 197.017.$$

Tableau d'amortissement semestriel du modèle 4D.

k	R_k	D_k	Q_k	r_k
1	1000	50	147.017	197.017
2	852.983	42.649	154.368	197.017
3	698.614	34.931	162.087	197.017
4	536.527	26.826	170.191	197.017
5	366.336	18.317	178.701	197.017
6	187.636	9.382	187.636	197.017

3.2.2 Modèles indirects (1I et 2I)

6. Une personne (DE) emprunte 2500 u.m. à une banque (CR) pour 5 ans, au taux d'intérêt annuel de 11%. Elle paie les intérêts au créancier à la fin de chaque année et constitue auprès d'une autre banque (TP) le capital à rembourser à l'échéance, par des versements constants effectués à la fin de chaque année pendant 5 ans, au taux d'intérêt annuel de 12%. Dressez les tableaux d'amortissement du prêt. Quel montant total le débiteur constituera-t-il auprès de la tierce personne ? (Modèle 1I)

Solution.

Le modèle indirect $1I$ combine les modèles directs $2D$ et $4D$.

$1I = 2D + 4D$: DÉBITEUR $\xrightarrow{2D}$ CRÉANCIER

DÉBITEUR $\xrightarrow{4D}$ TIERCE PERSONNE

La somme à constituer auprès de la tierce personne est le capital à rembourser à l'échéance, soit 2500 u.m. Appliquez le modèle 4D à la valeur actuelle de cette somme, calculée au taux de 12%, puis dressez les deux tableaux.

7. Dressez les tableaux d'amortissement d'un prêt de 2500 u.m. sur 3 ans, au taux d'intérêt annuel de 11%. Le débiteur rembourse l'intégralité de la dette au créancier à l'échéance. Il constitue la somme due auprès d'une tierce personne par des versements constants effectués à la fin de chaque année, au taux d'intérêt annuel de 12%. (Modèle 2I)

Solution.

Le modèle indirect $2I$ combine les modèles directs $1D$ et $4D$.

$2I = 1D + 4D$: DÉBITEUR $\xrightarrow{1D}$ CRÉANCIER

DÉBITEUR $\xrightarrow{4D}$ TIERCE PERSONNE

Appliquez le modèle 1D pour déterminer la somme due à l'échéance. Le modèle 4D s'applique à la valeur actuelle de cette somme, calculée au taux de 12%. Dressez les deux tableaux à partir de ces modèles.

3.2.3 Fonds d'accumulation

8. Une personne emprunte 15000 u.m. pour 5 ans, au taux d'intérêt annuel de 12%. Le débiteur (DE) paie les intérêts au créancier (CR) à la fin de chaque année. Il constitue le capital à rembourser à l'échéance auprès d'une autre banque (TP), par des versements constants effectués à la fin de chaque année pendant 5 ans, au taux d'intérêt annuel de 11%. Dressez les tableaux d'amortissement du prêt en faisant apparaître le fonds d'accumulation. (Modèle 1I avec FA)

Solution.

Le modèle indirect $1I$ avec fonds d'accumulation combine le modèle direct $2D$ et la constitution du fonds (FA).

Pour le remboursement selon le modèle $2D$, DÉBITEUR $\xrightarrow{2D}$ CRÉANCIER, on a $s = 15000$, $n = 5$, $p = 12$, $i = 0.12$ et $u = 1.12$. On a $R_k = 15000$ et $D_k = 1800$ pour les cinq années. Les quatre premiers versements sont de 1800 u.m. ($Q_k = 0$). Le dernier est de 16800 u.m. ($Q_5 = 15000$).

Le débiteur constitue le capital à rembourser par des versements annuels dans un fonds d'accumulation.

Pour le fonds, DÉBITEUR $\xrightarrow{(FA)}$ TIERCE PERSONNE, on a $n = 5$, $p' = 11$, $i' = 0.11$ et $u' = 1.11$.

On applique la formule du modèle $4D$ à la valeur actuelle s' du capital à constituer à l'échéance. On a

$$s' = s \cdot (v')^n = 15000 \cdot \frac{1}{1.11^5} = 8901.77.$$

Le montant de chaque versement est donc

$$r' = s' \cdot \frac{i'}{1 - (v')^n} = 2408.55.$$

Le tableau du fonds d'accumulation est le suivant.

k	r_k	S_{in}^k	D_k	S_{fin}^k	C_k
1	$r' = 2408.55$	0	0	2408.55	12591.45
2	2408.55	2408.55	264.94	5082.05	9917.95
3	2408.55	5082.05	559.03	8049.63	6950.37
4	2408.55	8049.63	885.46	11343.64	3656.36
5	2408.55	11343.64	1247.80	15000	0

9. Une personne emprunte 1000 u.m. pour 4 ans, au taux d'intérêt annuel de 10%. Le débiteur rembourse l'intégralité de la dette au créancier à l'échéance. Pour constituer la somme due, il

effectue des versements constants à la fin de chaque année pendant 4 ans dans un fonds d'accumulation auprès d'une tierce personne, au taux d'intérêt annuel de 8%. Dressez les tableaux d'amortissement du prêt. (Modèle 2I avec FA)

Solution.

Le modèle indirect $2I$ avec fonds d'accumulation combine le modèle direct $1D$ et la constitution du fonds (FA).

Pour le remboursement selon le modèle $1D$, DÉBITEUR $\xrightarrow{1D}$ CRÉANCIER, on a $s = 1000$, $n = 4$, $p = 10$, $i = 0.1$ et $u = 1.1$. On a $R_k = 1000(1.1)^{k-1}$ et $D_k = 0.1R_k$. Pour les trois premières années, $Q_k = r_k = 0$. La quatrième année, $Q_4 = 1331$ et $r_4 = 1464.10$.

Le débiteur constitue la somme due par des versements annuels dans un fonds d'accumulation.

Pour le fonds, DÉBITEUR $\xrightarrow{(FA)}$ TIERCE PERSONNE, on a $n = 4$, $p' = 8$, $i' = 0.08$ et $u' = 1.08$.

On applique la formule du modèle $4D$ à la valeur actuelle s' de la somme due à l'échéance, $S = s \cdot u^n = 1000 \cdot 1.1^4 = 1464.10$. On a

$$s' = S \cdot (v')^n = 1464.10 \cdot \frac{1}{1.08^4} = 1076.16.$$

Le montant de chaque versement est donc

$$r' = s' \cdot \frac{i'}{1 - (v')^n} = 324.9142.$$

Le tableau du fonds d'accumulation est le suivant.

k	r_k	S^k_{in}	D_k	S^k_{fin}	C_k
1	$r' = 324.91$	0	0	324.91	1139.19
2	324.91	324.91	25.99	675.82	788.28
3	324.91	675.82	54.07	1054.80	409.30
4	324.91	1054.80	84.38	1464.10	0

10. Une personne emprunte 1000 u.m. pour 4 ans, au taux d'intérêt annuel de 10%. Le débiteur paie les intérêts au créancier à la fin de chaque année. Il constitue le capital à rembourser par des versements constants effectués à la fin de chaque année pendant 4 ans dans un fonds d'accumulation auprès d'une autre banque, au taux d'intérêt annuel de 8%. Dressez les tableaux d'amortissement du prêt. (Modèle 1I avec FA)

Solution.

Comme dans l'exercice 8, le modèle indirect $1I$ avec fonds d'accumulation combine le modèle direct $2D$ et la constitution du fonds (FA).

Pour le remboursement selon le modèle $2D$, DÉBITEUR $\xrightarrow{2D}$ CRÉANCIER, on a $s = 1000$, $n = 4$, $p = 10$, $i = 0.1$ et $u = 1.1$. On a $R_k = 1000$ et $D_k = 100$ pour les quatre années. Les trois premiers versements sont de 100 u.m. ($Q_k = 0$). Le dernier est de 1100 u.m. ($Q_4 = 1000$).

Le débiteur constitue le capital à rembourser par des versements annuels dans un fonds d'accumulation.

Pour le fonds, DÉBITEUR $\overset{(FA)}{\longrightarrow}$ TIERCE PERSONNE, on a $n = 4$, $p' = 8$, $i' = 0.08$ et $u' = 1.08$.

On applique la formule du modèle $4D$ à la valeur actuelle s' du capital à constituer à l'échéance. On a

$$s' = s \cdot (v')^n = 1000 \cdot \frac{1}{1.08^4} = 735.03.$$

Le montant de chaque versement est donc

$$r' = s' \cdot \frac{i'}{1 - (v')^n} = 221.92.$$

Le tableau du fonds d'accumulation est le suivant.

k	r_k	S^k_{in}	D_k	S^k_{fin}	C_k
1	$r' = 221.92$	0	0	221.92	778.08
2	221.92	221.92	17.75	461.60	538.40
3	221.92	461.60	36.93	720.44	279.56
4	221.92	720.44	57.64	1000	0

11.* Une personne emprunte 80000 u.m. pour 4 ans, au taux d'intérêt annuel de 20%. Le débiteur paie les intérêts au créancier à la fin de chaque année. Il constitue le capital à rembourser auprès d'une autre banque (TP) selon le modèle 3D, avec des parts d'amortissement annuelles constantes sur 4 ans et un taux d'intérêt annuel de 18%. Dressez les tableaux d'amortissement du prêt en faisant apparaître le fonds d'accumulation. (Modèle 2D+3D avec FA)

3.3 Exercices proposés

Remboursements directs entiers

1. Une personne emprunte 500 u.m. pour 6 ans, au taux d'intérêt annuel de 12%. Le capital et les intérêts sont remboursés en un seul versement à l'échéance. Dressez le tableau d'amortissement du prêt.
   (Réponse : modèle 1D.)

2. On considère un prêt de 500 u.m. sur 6 ans, au taux d'intérêt annuel de 12%. Les intérêts sont payés à la fin de chaque année et le capital est remboursé à l'échéance. Dressez le tableau d'amortissement du prêt.
   (Réponse : modèle 2D.)

3. Une personne emprunte 50000 u.m. pour 5 ans, au taux d'intérêt annuel de 12%. À la fin de chaque année, elle rembourse la même part du capital et paie les intérêts de l'année. Dressez le tableau d'amortissement du prêt.

(Réponse : modèle 3D.)

4. Dressez le tableau d'amortissement d'un prêt de 2500 u.m. sur 6 ans, au taux d'intérêt annuel de 11%, sachant que les versements sont constants et effectués à la fin de chaque année.
   (Réponse : modèle 4D.)

5. Dressez le tableau d'amortissement d'un prêt de 2005 u.m. sur 5 ans, au taux d'intérêt annuel de 12%, avec remboursement du capital par parts annuelles constantes.
   (Réponse : modèle 3D, avec $Q = 401$ u.m.)

6. Dressez le tableau d'amortissement d'un prêt de 49000 RON sur 7 ans, au taux d'intérêt annuel de 16%. À la fin de chaque année, l'emprunteur rembourse la même part du capital et paie les intérêts de l'année.
   (Réponse : modèle 3D, avec $Q = 7000$ RON.)

7. Une personne emprunte 10000 lei à une banque pour 5 ans, au taux d'intérêt annuel de 15%. Dressez le tableau d'amortissement du prêt, sachant qu'à la fin de chaque année, elle rembourse la même part du capital et paie les intérêts de l'année. Déterminez la somme totale versée par le débiteur.
   (Réponse : modèle 3D, avec $Q = 2000$ lei. La somme totale versée est de 14500 lei.)

8. Une personne emprunte 10000 lei à une banque pour 5 ans, au taux d'intérêt annuel de 15%. Dressez le tableau d'amortissement du prêt, sachant que la dette est remboursée par des versements constants à la fin de chaque année. Déterminez la somme totale versée par le débiteur.
   (Réponse : modèle 4D, avec $r = 2983.16$ lei. La somme totale, calculée avant arrondi, est d'environ 14915.78 lei.)

9. Une personne achète un produit d'une valeur de 14000 RON. Elle le paie par des versements constants effectués à la fin de chaque année pendant 6 ans, au taux d'intérêt annuel de 13%. Dressez le tableau d'amortissement du prêt.
   (Réponse : modèle 4D, avec $r = 3502.15$ RON.)

10. Pour acheter une maison, une personne emprunte 45000 u.m. à une banque pour 6 ans, au taux d'intérêt annuel de 10%. Elle rembourse le prêt par des versements constants effectués à la fin de chaque année. Dressez le tableau d'amortissement du prêt.
    (Réponse : modèle 4D, avec $r = 10332.33$ u.m.)

11. Une personne emprunte 7000 lei pour 3 ans, au taux d'intérêt annuel de 4%. Quel montant constant doit-elle verser au début de chaque année ? Quelle est la valeur acquise de ces versements à la fin des trois ans ? Dressez le tableau d'amortissement du prêt.
    (Réponse : modèle 4D avec versements en début d'année, avec $r = 2425.42$ lei. La valeur acquise est d'environ 7874.05 lei.)

Remboursements directs fractionnés

12. Une personne emprunte 10035 u.m. pour 3 ans, au taux nominal annuel de 10%, convertible semestriellement. Les versements sont effectués à la fin de chaque semestre. Dressez le tableau d'amortissement lorsque les versements sont constants, puis lorsque les parts de capital remboursées sont constantes.

    (Réponse : modèles 4D et 3D fractionnés.)

13. Un prêt de 1000 lei est accordé pour 2 ans au taux nominal annuel de 10%, convertible trimestriellement. À la fin de chaque trimestre, l'emprunteur rembourse la même part du capital et paie les intérêts du trimestre. Dressez le tableau d'amortissement du prêt.

    (Réponse : modèle 3D fractionné, avec $Q = 125$ lei pour $k = \overline{1,8}$.)

14. Dressez le tableau d'amortissement d'un prêt de 2574 u.m. sur 6 mois, au taux nominal annuel de 12%, convertible mensuellement. À la fin de chaque mois, l'emprunteur rembourse la même part du capital et paie les intérêts du mois.

    (Réponse : modèle 3D fractionné, avec $Q = 429$ u.m. pour $k = \overline{1,6}$.)

15. Un prêt de 1000 lei est accordé pour 2 ans au taux nominal annuel de 10%, convertible trimestriellement. Dressez le tableau d'amortissement du prêt, sachant que l'emprunteur effectue un versement constant à la fin de chaque trimestre.

    (Réponse : modèle 4D fractionné, avec $r = 139.47$ lei pour $k = \overline{1,8}$.)

16. Une personne emprunte 12000 u.m. pour 3 ans, au taux nominal annuel de 10%, convertible semestriellement. Dressez le tableau d'amortissement du prêt, sachant qu'elle effectue un versement constant à la fin de chaque semestre.

    (Réponse : modèle 4D fractionné, avec $r = 2364.21$ u.m. pour $k = \overline{1,6}$.)

17. Dressez le tableau d'amortissement d'un prêt de 45678 u.m. sur 2 ans, au taux nominal annuel de 12%, convertible trimestriellement. Le remboursement s'effectue par des versements constants à la fin de chaque trimestre.

    (Réponse : modèle 4D fractionné, avec $r = 6507.12$ u.m. pour $k = \overline{1,8}$.)

Remboursements par fonds d'accumulation

18. Une personne emprunte 1000 u.m. pour 4 ans, au taux d'intérêt annuel de 10%. Elle paie les intérêts au créancier à la fin de chaque année. Elle constitue le capital à rembourser par des versements constants effectués à la fin de chaque année pendant 4 ans dans un fonds d'accumulation auprès d'une autre banque, au taux d'intérêt annuel de 8%. Dressez les tableaux d'amortissement du prêt.

    (Réponse : modèle 1I avec FA.)

19. Une personne emprunte 1000 u.m. pour 5 ans, au taux d'intérêt annuel de 10%. Elle rembourse l'intégralité de la dette au créancier à l'échéance. Elle constitue la somme

due par des versements constants effectués à la fin de chaque année pendant 5 ans dans un fonds d'accumulation auprès d'une tierce personne, au taux d'intérêt annuel de 9%. Dressez les tableaux d'amortissement du prêt.
(Réponse : modèle 2I avec FA.)

20. Une personne emprunte 80000 u.m. pour 4 ans, au taux d'intérêt annuel de 10%. Le débiteur paie les intérêts au créancier à la fin de chaque année. Il constitue le capital à rembourser auprès d'une autre banque selon le modèle 3D, avec des parts d'amortissement annuelles constantes pendant 4 ans et un taux d'intérêt annuel de 12%. Dressez les tableaux d'amortissement du prêt en faisant apparaître le fonds d'accumulation.
(Réponse : modèle 2D+3D avec FA.)

21. Une personne emprunte 15000 $ pour 4 ans, au taux d'intérêt annuel de 10%. Elle paie les intérêts au créancier à la fin de chaque année. Elle constitue le capital à rembourser auprès d'une autre banque par des versements constants effectués en fin d'année pendant 4 ans, au taux d'intérêt annuel de 11%. Dressez le tableau d'amortissement du prêt.
(Réponse : modèle 1FA, avec $r' = 3184.90$ $.)

22. Une personne emprunte 20000 € pour 4 ans, au taux d'intérêt annuel de 9%. Elle paie les intérêts au créancier à la fin de chaque année. Elle constitue le capital à rembourser dans un fonds d'accumulation auprès d'une autre banque, au taux d'intérêt annuel de 11%, par des versements constants effectués à la fin de chacune des quatre années. Dressez le tableau d'amortissement du prêt par fonds d'accumulation.
(Réponse : modèle 1FA, avec $r' = 4246.53$ €.)

23. Une personne emprunte 12500 u.m. pour 3 ans, au taux d'intérêt annuel de 10%. Elle rembourse l'intégralité de la dette au créancier à l'échéance. Elle constitue la somme due auprès d'une autre banque par des versements constants effectués à la fin de chaque année pendant 3 ans, au taux d'intérêt annuel de 12%. Dressez le tableau d'amortissement du prêt.
(Réponse : modèle 2FA, avec $r' = 4930.51$ u.m.)

24. Une personne emprunte 7500 € pour 5 ans, au taux d'intérêt annuel de 10%. Elle rembourse l'intégralité de la dette au créancier à l'échéance. Elle constitue la somme due dans un fonds d'accumulation auprès d'une autre banque, par des versements constants effectués à la fin de chaque année pendant 5 ans, au taux d'intérêt annuel de 9%. Dressez le tableau d'amortissement du prêt en faisant apparaître le fonds d'accumulation.
(Réponse : modèle 2FA, avec $r' = 2018.28$ €.)

25. Une personne emprunte 10000 lei pour 5 ans, au taux d'intérêt annuel de 12%. Elle paie les intérêts au créancier à la fin de chaque année. Deux ans après la signature du contrat, elle met en place un fonds d'accumulation auprès d'une autre banque pour constituer le capital à rembourser. Les versements sont constants et effectués à la fin de

chacune des trois dernières années, au taux d'intérêt annuel de 14%. Dressez le tableau d'amortissement du prêt.

(Réponse : modèle 1FA, avec $r' = 2907.31$ lei.)

26. Au début de l'année 2015, une personne emprunte 7500 € pour 6 ans, au taux d'intérêt annuel de 10%. Elle rembourse l'intégralité de la dette au créancier à l'échéance. Elle constitue la somme due auprès d'une autre banque par quatre versements annuels constants, effectués en fin d'année à partir de 2017, au taux d'intérêt annuel de 9%. Dressez le tableau d'amortissement du prêt.

(Réponse : modèle 2FA, avec $r' = 2905.39$ €.)

27. Pour acheter un bateau, une agence de voyages emprunte, au début de l'année 2010, la somme de 1000000 € pour 5 ans, au taux d'intérêt annuel de 6%. Elle paie les intérêts à l'établissement financier à la fin de chaque année. Au début de 2012, elle ouvre un fonds d'accumulation auprès d'une autre banque pour constituer un tiers du capital emprunté à l'échéance. Les versements sont constants et effectués à la fin de chacune des années 2012, 2013 et 2014, au taux d'intérêt annuel de 7%. Dressez le tableau d'amortissement du prêt.

(Réponse : modèle 1FA, avec $r' = 103683.89$ €.)

28. Une personne contracte un prêt de 100000 u.m. le 1er janvier 2010, au taux d'intérêt annuel de 10%. Elle rembourse l'intégralité de la dette le 31 décembre 2015. Elle constitue 75% du montant dû à cette date auprès d'une tierce personne, par des versements constants effectués le 31 décembre de chaque année, de 2012 à 2015 inclus, au taux d'intérêt annuel de 11%. Dressez le tableau d'amortissement du prêt.

(Réponse : modèle 2FA, avec $r' = 28211.18$ u.m.)

29. Une personne emprunte 21000 u.m. pour 4 ans, au taux d'intérêt annuel de 12%. Elle paie les intérêts au créancier à la fin de chaque année. Elle constitue le capital à rembourser auprès d'une autre banque selon le modèle 3D, avec des parts d'amortissement constantes et des versements effectués à la fin de chacune des quatre années, au taux d'intérêt annuel de 10%. Dressez le tableau d'amortissement du prêt.

(Réponse : modèle FA (2D+3D), avec $Q' = 3585.82$ u.m.)

30. Une personne emprunte 12000 u.m. à une autre personne pour 3 ans, au taux d'intérêt annuel de 7%. Le débiteur paie les intérêts au créancier à la fin de chaque année. Il constitue 40% du capital à rembourser dans un fonds d'accumulation auprès d'une banque, par des versements constants effectués en fin d'année pendant 3 ans, au taux d'intérêt annuel de 5%. Il constitue les 60% restants auprès d'une autre banque selon le modèle 3D, avec des parts d'amortissement annuelles constantes pendant 3 ans, au taux d'intérêt annuel de 3%. Dressez le tableau d'amortissement du prêt.

(Réponse : modèle FA (2D+4D+3D), avec $r' = 1522.60$ u.m. et $Q' = 2196.34$ u.m.)

Chapitre 4

Fonctions biométriques

4.1 Résumé théorique

Probabilités de survie et de décès

Dans la table de mortalité, l_x désigne l'effectif des survivants à l'âge de x ans. Cet effectif figure dans la colonne L_x de la table des nombres de commutation à 5%. Pour des âges entiers x et y tels que $l_x > 0$ et $y \geq x$, on a les relations suivantes.

- $p(x, y) = \dfrac{l_y}{l_x}$ est la probabilité qu'une personne âgée de x ans soit en vie à l'âge de y ans.
- On note ${}_np_x = p(x, x+n)$ et $p_x = p(x, x+1)$.
- $q(x, y) = 1 - p(x, y)$ est la probabilité qu'une personne âgée de x ans décède avant d'atteindre l'âge de y ans.
- On note ${}_nq_x = q(x, x+n)$ et $q_x = q(x, x+1)$. Pour $0 \leq a < b$, la probabilité de décéder entre les âges de $x+a$ et de $x+b$ ans, sachant que la personne est en vie à x ans, est

$$ {}_{a/b}q_x = p(x, x+a) - p(x, x+b) = \frac{l_{x+a} - l_{x+b}}{l_x}. $$

Espérance de vie résiduelle

On note e_x le nombre moyen d'années restant à vivre pour une personne âgée de x ans. Si les décès sont répartis uniformément dans chaque intervalle entre deux âges entiers consécutifs et si ω est le dernier âge entier pour lequel $l_\omega > 0$, alors

$$ e_x = \frac{1}{2} + \frac{1}{l_x} \sum_{k=x+1}^{\omega} l_k. $$

Dans la table fournie, $\omega = 100$ et l'on prend $l_{101} = 0$.

4.2 Exercices corrigés

1. Calculez la probabilité qu'une personne âgée de 45 ans soit en vie à 65 ans, puis la probabilité qu'elle décède avant d'atteindre cet âge. On donne $l_{45} = 83330$ et $l_{65} = 65068$.

(Réponse : $p(45, 65) = 0.78$ et $q(45, 65) = 0.22$.)

Solution.

- $p(x, y)$ est la probabilité qu'une personne âgée de x ans soit en vie à y ans.
- $q(x, y)$ est la probabilité qu'une personne âgée de x ans décède avant d'atteindre l'âge de y ans.
- l_x désigne l'effectif des survivants à l'âge de x ans dans la cohorte initiale de 100000 personnes.
- La table donne $l_{45} = 83330$ et $l_{65} = 65068$.
- La probabilité de survie est donnée par $p(x, y) = \dfrac{l_y}{l_x}$.
- Ici, $p(45, 65) = {}_{20}p_{45} = \dfrac{65068}{83330} = 0.78$.
- Pour la probabilité de décès, on obtient $q(45, 65) = {}_{20}q_{45} = 1 - p(45, 65) = 0.22$.

2. a) Quelle est la probabilité qu'une personne âgée de 24 ans décède entre 65 et 70 ans ? b) Quelle est la probabilité qu'une personne âgée de 25 ans décède entre 45 et 60 ans ?

(Réponse : a) ${}_{41/46}q_{24} = 0.1252$. b) ${}_{20/35}q_{25} = 0.1224$.)

Solution.

a) On considère l'événement

$$X = \text{"la personne de 24 ans décède entre 65 et 70 ans"}.$$

On introduit les événements suivants.

$$A = \text{"la personne de 24 ans est en vie à 65 ans"},$$
$$B = \text{"la personne décède avant d'atteindre l'âge de 70 ans"}.$$

Comme $X = A \cap B$, on a ${}_{41/46}q_{24} = P(X) = P(A)P(B \mid A)$. D'où

$${}_{41/46}q_{24} = p(24, 65)q(65, 70) = \frac{l_{65}}{l_{24}}\left(1 - \frac{l_{70}}{l_{65}}\right) = \frac{l_{65} - l_{70}}{l_{24}} = \frac{65068 - 54051}{88010} = 0.1252.$$

b) De même,

$${}_{20/35}q_{25} = p(25, 45)q(45, 60) = \frac{l_{45} - l_{60}}{l_{25}} = \frac{83330 - 72581}{87844} = 0.1224.$$

3. Calculez l'espérance de vie résiduelle d'une personne âgée de a) 98 ans, b) 90 ans, c) 87 ans et d) 45 ans.

(Réponse : a) $e_{98} = 1.227$ an. b) $e_{90} = 2.499$ ans. c) $e_{87} = 3.1192$ ans. d) $e_{45} = 28.3067$ ans.)

Solution.

L'espérance de vie résiduelle se calcule avec la formule

$$e_x = \frac{1}{2} + \frac{1}{l_x}\sum_{k=x+1}^{100} l_k = \frac{1}{2} + \frac{l_{x+1} + l_{x+2} + \ldots + l_{100}}{l_x}.$$

a) À 98 ans,

$$e_{98} = \frac{1}{2} + \frac{l_{99} + l_{100}}{l_{98}} = \frac{1}{2} + \frac{33 + 15}{66} = 1.227.$$

b) À 90 ans,

$$e_{90} = \frac{1}{2} + \frac{l_{91} + \ldots + l_{100}}{l_{90}} = \frac{1}{2} + \frac{6115}{3059} = 2.499.$$

c) À 87 ans,

$$e_{87} = \frac{1}{2} + \frac{l_{88} + \ldots + l_{100}}{l_{87}} = \frac{1}{2} + \frac{18937}{7230} = 3.1192.$$

d) À 45 ans,

$$e_{45} = \frac{1}{2} + \frac{l_{46} + \ldots + l_{100}}{l_{45}} = \frac{1}{2} + \frac{2317129}{83330} = 28.3067.$$

Vous pouvez appliquer la même formule pour calculer votre espérance de vie résiduelle. À 20 ans, par exemple,

$$e_{20} = \frac{1}{2} + \frac{l_{21} + \ldots + l_{100}}{l_{20}}.$$

4. Soit une personne âgée de 49 ans. Représentez dans l'arbre de survie et de décès le chemin qui correspond à une survie jusqu'à 51 ans, suivie d'un décès avant 52 ans. Répondez également aux questions suivantes.

a) Quelle est la probabilité que la personne soit en vie à 50 ans ?

b) Calculez ${}_2p_{49}$ et expliquez la signification de cette notation.

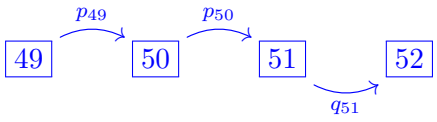
c) Calculez ${}_3q_{49}$ et expliquez la signification de cette notation.

d) Quelle est la probabilité que la personne décède entre 53 et 54 ans ?

e) Quelle est la probabilité qu'une personne âgée de 51 ans décède avant d'atteindre 52 ans ?

Solution.

Le chemin demandé est le suivant.



Les flèches supérieures indiquent une survie jusqu'à l'âge suivant. La flèche inférieure indique un décès entre 51 et 52 ans, sachant que la personne est en vie à 51 ans.

Les probabilités associées aux branches sont les suivantes.

$$\begin{aligned} p_{49} &= \frac{l_{50}}{l_{49}} = \frac{81077}{81603} = 0.9935542, \\ p_{50} &= \frac{l_{51}}{l_{50}} = \frac{80501}{81077} = 0.9928956, \\ q_{51} &= 1 - p_{51} = 1 - \frac{l_{52}}{l_{51}} = 1 - \frac{79867}{80501} = 0.0078757. \end{aligned}$$

a) La probabilité que la personne soit en vie à 50 ans est

$$p_{49} = p(49, 50) = \frac{l_{50}}{l_{49}} = 0.9935542.$$

b) La probabilité qu'une personne âgée de 49 ans soit en vie deux ans plus tard s'obtient par le produit des probabilités de survie successives.

$${}_2p_{49} = p_{49}p_{50} = \frac{l_{50}}{l_{49}} \cdot \frac{l_{51}}{l_{50}} = \frac{80501}{81603} = 0.9864956.$$

c) La probabilité qu'une personne âgée de 49 ans décède au cours des trois prochaines années est

$${}_3q_{49} = q(49, 52) = 1 - \frac{l_{52}}{l_{49}} = \frac{1736}{81603} = 0.0213.$$

d) La probabilité qu'une personne âgée de 49 ans décède entre 53 et 54 ans est

$${}_{4/5}q_{49} = p(49, 53)q(53, 54) = \frac{l_{53} - l_{54}}{l_{49}} = \frac{754}{81603} = 0.0092.$$

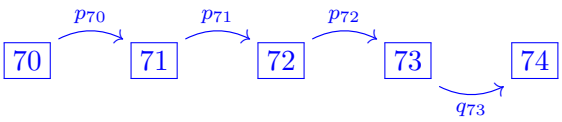
e) La probabilité qu'une personne âgée de 51 ans décède avant d'atteindre 52 ans est

$$q_{51} = q(51, 52) = 1 - \frac{l_{52}}{l_{51}} = 0.0078757.$$

5.* Soit une personne âgée de 70 ans. Représentez dans l'arbre de survie et de décès le chemin qui correspond à une survie jusqu'à 73 ans, suivie d'un décès avant 74 ans. Déterminez les probabilités p_{70}, p_{71}, p_{72}, q_{71}, ${}_{3/4}q_{70}$ et ${}_2p_{70}$. Expliquez la signification de ces probabilités.

Solution.

Comme dans l'exercice 4, les probabilités se calculent à partir des effectifs de la table.



Les probabilités p_{70}, p_{71} et p_{72} désignent les probabilités de survivre un an à partir de 70, 71 et 72 ans, respectivement. On a

$$p_{70} = \frac{51363}{54051} = 0.9503, \qquad p_{71} = \frac{48607}{51363} = 0.9463, \qquad p_{72} = \frac{45786}{48607} = 0.9420.$$

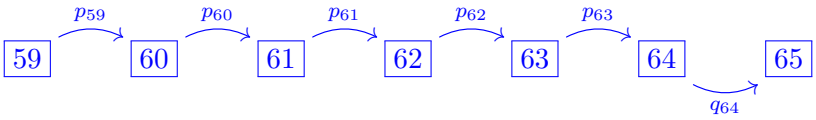
Pour une personne âgée de 71 ans, la probabilité de décès avant 72 ans est $q_{71} = 1 - p_{71} = 0.0537$. Pour une personne âgée de 70 ans, la probabilité de décès entre 73 et 74 ans et la probabilité de survie jusqu'à 72 ans valent respectivement

$${}_{3/4}q_{70} = \frac{45786 - 42920}{54051} = 0.0530, \qquad {}_2p_{70} = \frac{48607}{54051} = 0.8993.$$

6.* Soit une personne âgée de 59 ans. Représentez dans l'arbre de survie et de décès le chemin qui correspond à une survie jusqu'à 64 ans, suivie d'un décès avant 65 ans. Déterminez les probabilités p_{59}, q_{64}, ${}_3p_{60}$ et ${}_{5/6}q_{59}$. Expliquez la signification de ces probabilités.

Solution.

Comme dans l'exercice 4, les probabilités se calculent à partir des effectifs de la table.



Les probabilités de survie de 59 à 60 ans et de décès de 64 à 65 ans valent respectivement

$$p_{59} = \frac{72581}{73741} = 0.9843, \qquad q_{64} = \frac{66817 - 65068}{66817} = 0.0262.$$

La probabilité de survie de 60 à 63 ans et celle qu'une personne âgée de 59 ans décède entre 64 et 65 ans valent respectivement

$${}_3p_{60} = \frac{68438}{72581} = 0.9429, \qquad {}_{5/6}q_{59} = \frac{66817 - 65068}{73741} = 0.0237.$$

7. Construisez la table de mortalité d'une cohorte d'effectif initial $l_0 = 10000$. Aucun individu n'atteint l'âge de 10 ans. Les probabilités annuelles de survie sont $p_0 = 0.9$, $p_1 = 0.8$, $p_2 = 0.7$, $p_3 = 0.6$, $p_4 = 0.5$, $p_5 = 0.4$, $p_6 = 0.3$, $p_7 = 0.2$ et $p_8 = 0.1$.

Solution.

On utilise les notations suivantes.

x	=	l'âge en années
l_x	=	l'effectif attendu des survivants à l'âge de x ans
d_x	=	le nombre attendu de décès entre les âges de x et de $x+1$ ans
p_x	=	la probabilité de survie de x à $x+1$ ans
q_x	=	la probabilité de décès entre x et $x+1$ ans
e_x	=	l'espérance de vie résiduelle à l'âge de x ans

Puisque $l_{10} = 0$, on a $p_9 = 0$ et $q_9 = 1$. La table de mortalité est la suivante.

x	l_x	d_x	q_x	e_x
0	10000	1000	0.1	3.1602
1	9000	1800	0.2	2.4558
2	7200	2160	0.3	1.9447
3	5040	2016	0.4	1.5639
4	3024	1512	0.5	1.2732
5	1512	907.2	0.6	1.0464
6	604.8	423.36	0.7	0.8660
7	181.44	145.152	0.8	0.7200
8	36.288	32.6592	0.9	0.6000
9	3.6288	3.6288	1	0.5000

Les effectifs attendus peuvent être fractionnaires. On les conserve tels quels dans les calculs.

- On part de $l_0 = 10000$. Comme $p_0 = 0.9$, on a $q_0 = 0.1$ et $d_0 = l_0 q_0 = 1000$.
- On obtient $l_1 = l_0 - d_0 = 9000$. Comme $p_1 = 0.8$, on a $q_1 = 0.2$ et $d_1 = l_1 q_1 = 1800$.
- On poursuit avec $q_x = 1 - p_x$, $d_x = l_x q_x$ et $l_{x+1} = l_x - d_x$.
- Pour e_0 et e_1, on trouve

$$\begin{aligned} e_0 &= \frac{1}{2} + \frac{l_1 + l_2 + \ldots + l_9}{l_0} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{26602.1568}{10000} = 3.1602. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{1}{2} + \frac{l_2 + l_3 + \ldots + l_9}{l_1} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{17602.1568}{9000} = 2.4558. \end{aligned}$$

- On calcule de la même façon les valeurs de e_x pour les âges de 2 à 9 ans.

4.3 Exercices proposés

1. Calculez la probabilité qu'une personne âgée de 38 ans soit en vie à 57 ans, puis la probabilité qu'elle décède avant d'atteindre cet âge.

   (Réponse : $p(38, 57) = 0.8877$ et $q(38, 57) = 0.1123$.)

2. a) Quelle est la probabilité qu'une personne âgée de 30 ans décède entre 60 et 70 ans ? b) Quelle est la probabilité qu'une personne âgée de 20 ans décède entre 50 et 65 ans ?

   (Réponse : a) ${}_{30/40}q_{30} = 0.2129$. b) ${}_{30/45}q_{20} = 0.1807$.)

3. Calculez l'espérance de vie résiduelle d'une personne âgée de a) 95 ans, b) 92 ans, c) 85 ans et d) 65 ans.

   (Réponse : a) $e_{95} = 1.7057$ an. b) $e_{92} = 2.1543$ ans. c) $e_{85} = 3.6154$ ans. d) $e_{65} = 12.7341$ ans.)

4. Soit une personne âgée de 59 ans. Représentez dans l'arbre de survie et de décès le chemin qui correspond à une survie jusqu'à 62 ans, suivie d'un décès avant 63 ans. Répondez également aux questions suivantes.

   a) Quelle est la probabilité que la personne soit en vie à 60 ans ?

   b) Calculez ${}_2p_{59}$ et expliquez la signification de cette notation.

   c) Calculez ${}_3q_{59}$ et expliquez la signification de cette notation.

   d) Quelle est la probabilité que la personne décède entre 63 et 64 ans ?

   e) Quelle est la probabilité qu'une personne âgée de 61 ans décède avant d'atteindre 62 ans ?

   (Réponse : a) $p_{59} = 0.9843$. b) ${}_2p_{59} = 0.9672$. c) ${}_3q_{59} = 0.0516$. d) ${}_{4/5}q_{59} = 0.0220$. e) $q_{61} = 0.0194$.)

5. a) Pour une personne âgée de 50 ans, calculez la probabilité d'atteindre l'âge de 60 ans, puis celle d'atteindre l'âge de 75 ans. b) Calculez la probabilité d'atteindre l'âge de 75 ans sachant que la personne est en vie à 60 ans. Vérifiez que $p(50, 75) = p(50, 60)p(60, 75)$.

   (Réponse : a) $p(50, 60) = 0.8952$ et $p(50, 75) = 0.4937$. b) $p(60, 75) = 0.5515$.)

6. a) Quelle est la probabilité qu'une personne âgée de 56 ans décède entre 65 et 72 ans ? b) Calculez la probabilité de décès dans le même intervalle sachant que la personne est en vie à 65 ans.

   (Réponse : a) ${}_{9/16}q_{56} = 0.2145$. b) ${}_7q_{65} = 0.2530$.)

7. a) Calculez les espérances de vie résiduelles à 93 et à 94 ans. b) Calculez p_{93} et vérifiez la relation suivante à partir des valeurs exactes.

$$e_{93} = \frac{1}{2} + p_{93}\left(\frac{1}{2} + e_{94}\right).$$

   (Réponse : a) $e_{93} = 1.9975$ an et $e_{94} = 1.8487$ an. b) $p_{93} = 0.6376$.)

8. Soit une personne âgée de 72 ans. Représentez dans l'arbre de survie et de décès le chemin qui correspond à une survie jusqu'à 75 ans, suivie d'un décès avant 76 ans. Indiquez les probabilités associées aux branches et calculez la probabilité de ce chemin.

   (Réponse : $p_{72} = 0.9420$, $p_{73} = 0.9374$, $p_{74} = 0.9325$, $q_{75} = 0.0721$ et ${}_{3/4}q_{72} = 0.0594$.)

9. Soit une personne âgée de 60 ans. Quel est le plus grand âge entier y pour lequel la probabilité $p(60, y)$ est d'au moins 70% ? Justifiez la réponse à l'aide de la table de mortalité.

   (Réponse : $y = 71$ ans, puisque $p(60, 71) = 0.7077$ et $p(60, 72) = 0.6697$.)

10. Construisez la table de mortalité d'une cohorte d'effectif initial $l_0 = 12000$, pour laquelle aucun individu n'atteint l'âge de 5 ans. On donne $p_0 = 0.95$, $p_1 = 0.80$, $p_2 = 0.75$ et $p_3 = 0.50$. Calculez l_x, d_x, q_x et e_x pour $x = 0, \ldots, 4$.

    (Réponse : les effectifs l_x sont 12000, 11400, 9120, 6840 et 3420. Les nombres de décès d_x sont 600, 2280, 2280, 3420 et 3420. Les probabilités q_x sont 0.05, 0.20, 0.25, 0.50

et 1. Les espérances de vie résiduelles e_x, en années, valent 3.065, 2.2, 1.625, 1 et 0.5, respectivement.)

Chapitre 5

Annuités de vie et de décès

5.1 Résumé théorique

On utilise la table des nombres de commutation au taux annuel $i = 5\%$, avec $u = 1 + i$ et $v = 1/u$. L'effectif l_x correspond à la colonne L_x de la table. On pose $l_y = D_y = N_y = M_y = 0$ pour $y \geq 101$. Les nombres de commutation de la table sont donnés à deux décimales. Dans les exercices, on arrondit les résultats à la fin du calcul.

- Le facteur d'actualisation viagère ${}_nE_x$ est la valeur actuelle moyenne d'un versement unique de 1 u.m., payable dans n ans si la personne, actuellement âgée de x ans, est encore en vie.
- À partir de la probabilité de survie, on obtient ${}_nE_x = v^n \cdot \frac{l_{x+n}}{l_x}$.
- Avec les nombres de commutation, cette formule s'écrit ${}_nE_x = \dfrac{D_{x+n}}{D_x}$.
- Annuités viagères constantes entières payées à la fin de chaque année $\mathfrak{a}$. Le versement annuel unitaire est dû si la personne est en vie à la date du versement. Dans les exercices, on écrit a pour $\mathfrak{a}$.
  - A.v.c.e.fin immédiate et illimitée, avec un premier versement à la date 1. $\mathfrak{a}_x = \dfrac{N_{x+1}}{D_x}$.
  - A.v.c.e.fin différée de n ans et illimitée, avec un premier versement à la date $n+1$. ${}_{n|}\mathfrak{a}_x = \dfrac{N_{x+n+1}}{D_x}$.
  - A.v.c.e.fin immédiate et limitée à n ans, aux dates $1, \ldots, n$.

$$\mathfrak{a}_{x:\overline{n|}} = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x}.$$

  - On a $\mathfrak{a}_x = {}_{n|}\mathfrak{a}_x + \mathfrak{a}_{x:\overline{n|}}$.
- Annuités viagères constantes entières payées au début de chaque année $\ddot{\mathfrak{a}}$.
  - A.v.c.e.début immédiate et illimitée, avec un premier versement à la date 0. $\ddot{\mathfrak{a}}_x = \dfrac{N_x}{D_x}$.
  - A.v.c.e.début différée de n ans et illimitée, avec un premier versement à la date n. ${}_{n|}\ddot{\mathfrak{a}}_x = \dfrac{N_{x+n}}{D_x}$.
  - A.v.c.e.début immédiate et limitée à n ans, avec des versements possibles aux dates $0, \ldots, n-1$. $\ddot{\mathfrak{a}}_{x:\overline{n|}} = \dfrac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$.
  - On a $\ddot{\mathfrak{a}}_x = {}_{n|}\ddot{\mathfrak{a}}_x + \ddot{\mathfrak{a}}_{x:\overline{n|}}$.

- Annuités viagères constantes fractionnées payées à la fin de chaque sous-période $\mathfrak{a}^{(m)}$. Pour un montant annuel unitaire, chaque versement vaut $1/m$. Pour un versement de montant r par sous-période, on multiplie le facteur d'annuité par mr. On adopte les formules suivantes comme convention de calcul des annuités fractionnées dans ce chapitre.
  - A.v.c.f.fin immédiate et illimitée.

$$\mathfrak{a}_x^{(m)} = \mathfrak{a}_x + \frac{m-1}{2m} = \frac{N_x^{(m)}}{D_x} - \frac{1}{m}, \qquad N_x^{(m)} = N_x - \frac{m-1}{2m} D_x.$$

  - A.v.c.f.fin différée de n ans. ${}_{n|}\mathfrak{a}_x^{(m)} = {}_{n|}\mathfrak{a}_x + \dfrac{m-1}{2m}\,{}_nE_x$.
  - A.v.c.f.fin immédiate et limitée à n ans. $\mathfrak{a}_{x:\overline{n}|}^{(m)} = \mathfrak{a}_{x:\overline{n}|} + \dfrac{m-1}{2m}(1 - {}_nE_x)$.
- Annuités viagères constantes fractionnées payées au début de chaque sous-période $\ddot{\mathfrak{a}}^{(m)}$. On applique la même convention de calcul.
  - A.v.c.f.début immédiate et illimitée. $\ddot{\mathfrak{a}}_x^{(m)} = \ddot{\mathfrak{a}}_x - \dfrac{m-1}{2m} = \dfrac{N_x^{(m)}}{D_x}$.
  - A.v.c.f.début différée de n ans. ${}_{n|}\ddot{\mathfrak{a}}_x^{(m)} = {}_{n|}\ddot{\mathfrak{a}}_x - \dfrac{m-1}{2m}\,{}_nE_x$.
  - A.v.c.f.début immédiate et limitée à n ans. $\ddot{\mathfrak{a}}_{x:\overline{n}|}^{(m)} = \ddot{\mathfrak{a}}_{x:\overline{n}|} - \dfrac{m-1}{2m}(1 - {}_nE_x)$.
- Le facteur d'actualisation en cas de décès ${}_nD_x$ est la valeur actuelle moyenne d'un versement unique de 1 u.m. si une personne âgée de x ans décède entre $x+n$ et $x+n+1$ ans. Le versement est supposé intervenir au milieu de l'année du décès, à la date $n + \frac{1}{2}$.
- À partir de la probabilité de décès dans cet intervalle, on obtient

$${}_nD_x = v^{n+1/2} \cdot {}_{n/(n+1)}q_x = v^{n+1/2} \cdot \frac{l_{x+n} - l_{x+n+1}}{l_x}.$$

- Avec les nombres de commutation, on a ${}_nD_x = \dfrac{C_{x+n}}{D_x}$, où $C_x = \sqrt{u}\,(vD_x - D_{x+1})$.
- Les valeurs A se rapportent à une assurance en cas de décès versant un capital unique de 1 u.m., évalué selon la même convention de paiement. Pour une couverture immédiate et illimitée, on a $A_x = \dfrac{M_x}{D_x}$, avec $M_x = \sum_{k=x}^{100} C_k = \sqrt{u}\,(vN_x - N_{x+1})$.
- Pour une couverture limitée à l'intervalle de $x+m$ à $x+n$ ans, avec $0 \leq m < n$, on a

$${}_{m|n}A_x = \frac{M_{x+m} - M_{x+n}}{D_x}.$$

- Pour une couverture immédiate et limitée à n ans, on a $A_{x:\overline{n}|} = \dfrac{M_x - M_{x+n}}{D_x}$.
- Pour une couverture différée de n ans et illimitée, on a ${}_{n|}A_x = \dfrac{M_{x+n}}{D_x}$.

5.2 Exercices corrigés

1. Calculez par deux méthodes, au taux de 5%, le facteur d'actualisation viagère ${}_{22}E_{50}$ pour un versement de 1 u.m. à une personne de 50 ans si elle atteint l'âge de 72 ans. Procédez de même pour ${}_{10}E_{45}$ et ${}_7E_{51}$.

(Réponse : ${}_{22}E_{50} = 0.2049$, ${}_{10}E_{45} = 0.5717$ et ${}_{7}E_{51} = 0.6605$.)

Solution.

Le facteur ${}_{22}E_{50}$ est la valeur actuelle moyenne de 1 u.m. payable dans 22 ans sous condition de survie.

Méthode 1. On actualise le versement sur 22 ans et on multiplie par la probabilité de survie jusqu'à 72 ans.

$$ {}_{22}E_{50} = v^{22} \cdot \frac{l_{72}}{l_{50}} = \left(\frac{1}{1.05}\right)^{22} \cdot \frac{48607}{81077} = 0.2049. $$

Méthode 2. On utilise les valeurs de la colonne D_x.

$$ {}_{22}E_{50} = \frac{D_{72}}{D_{50}} = \frac{1449.00}{7070.22} = 0.2049. $$

Appliquez les deux méthodes à ${}_{10}E_{45}$ et à ${}_{7}E_{51}$.

2. Calculez par deux méthodes, au taux de 5%, le facteur d'actualisation de décès ${}_{18}D_{52}$. Procédez de même pour ${}_{11}D_{49}$ et ${}_{15}D_{43}$.

(Réponse : ${}_{18}D_{52} = 0.0136$, ${}_{11}D_{49} = 0.0088$ et ${}_{15}D_{43} = 0.0060$.)

Solution.

Le facteur ${}_{18}D_{52}$ est la valeur actuelle moyenne de 1 u.m. payable dans 18 ans et demi si la personne, actuellement âgée de 52 ans, décède entre 70 et 71 ans.

Méthode 1. On utilise la probabilité de décès entre 70 et 71 ans.

$$ {}_{18}D_{52} = v^{18.5} \cdot \frac{l_{70} - l_{71}}{l_{52}} = \left(\frac{1}{1.05}\right)^{18.5} \cdot \frac{54051 - 51363}{79867} = 0.0136. $$

Méthode 2. Avec les nombres de commutation, on obtient

$$ {}_{18}D_{52} = \frac{C_{70}}{D_{52}} = \frac{\sqrt{u}\,(vD_{70} - D_{71})}{D_{52}} = \frac{\sqrt{1.05}\left(\frac{1776.45}{1.05} - 1607.72\right)}{6317.19} = 0.0136. $$

Appliquez les deux méthodes à ${}_{11}D_{49}$ et à ${}_{15}D_{43}$.

3. Calculez le facteur d'actualisation de décès pour une personne âgée de 20 ans si le décès survient entre 30 et 31 ans. Utilisez la table au taux de 5%.

(Réponse : ${}_{10}D_{20} = 0.00119$.)

Solution.

Avec $x = 20$ et $n = 10$, la formule en nombres de commutation donne

$$ {}_{10}D_{20} = \frac{C_{30}}{D_{20}} = \frac{\sqrt{u}\,(vD_{30} - D_{31})}{D_{20}} = \frac{\sqrt{1.05}\left(\frac{20138.17}{1.05} - 19140.42\right)}{33395.05} = 0.00119. $$

4. Interprétez les expressions suivantes et calculez les valeurs actuelles moyennes correspondantes.

1) a_{51} 2) ${}_{3|}a_{35}$ 3) $a_{43:\overline{7}|}$ 4) $\ddot{a}_{42}$ 5) ${}_{3|}\ddot{a}_{29}$ 6) $\ddot{a}_{35:\overline{10}|}$ 7) $a_{42}^{(12)}$ 8) $\ddot{a}_{48}^{(12)}$ 9) ${}_{3|}a_{35}^{(2)}$ 10) ${}_{3|}\ddot{a}_{29}^{(4)}$ 11) $a_{43:\overline{7}|}^{(12)}$ 12) $\ddot{a}_{35:\overline{10}|}^{(4)}$ 13) A_{45} 14) ${}_{5|10}A_{65}$ 15) ${}_{10|}A_{37}$ 16) $A_{70:\overline{5}|}$.

Solution.

1) a_{51} est la valeur actuelle moyenne d'une annuité viagère immédiate et illimitée, versée en fin d'année à une personne de 51 ans.

$$a_{51} = \frac{N_{52}}{D_{51}} = \frac{83918.12}{6685.70} = 12.55.$$

2) ${}_{3|}a_{35}$ correspond à une annuité viagère illimitée pour une personne de 35 ans, différée de trois ans, avec un premier versement à la fin de la quatrième année.

$${}_{3|}a_{35} = \frac{N_{39}}{D_{35}} = \frac{206568.08}{15607.64} = 13.24.$$

3) $a_{43:\overline{7}|}$ correspond à sept versements possibles en fin d'année, pour une personne de 43 ans.

$$a_{43:\overline{7}|} = \frac{N_{44} - N_{51}}{D_{43}} = \frac{149214.05 - 90603.82}{10304.22} = 5.69.$$

4) $\ddot{a}_{42}$ correspond à une annuité viagère immédiate et illimitée, versée en début d'année à une personne de 42 ans.

$$\ddot{a}_{42} = \frac{N_{42}}{D_{42}} = \frac{170376.62}{10858.35} = 15.69.$$

5) ${}_{3|}\ddot{a}_{29}$ correspond à une annuité viagère illimitée pour une personne de 29 ans. Les versements ont lieu en début d'année, le premier dans trois ans.

$${}_{3|}\ddot{a}_{29} = \frac{N_{32}}{D_{29}} = \frac{316364.40}{21186.13} = 14.93.$$

6) $\ddot{a}_{35:\overline{10}|}$ correspond à dix versements possibles en début d'année pour une personne de 35 ans, de la date 0 à la date 9.

$$\ddot{a}_{35:\overline{10}|} = \frac{N_{35} - N_{45}}{D_{35}} = \frac{264460.38 - 139436.85}{15607.64} = 8.01.$$

7) $a_{42}^{(12)}$ correspond à une annuité viagère immédiate et illimitée pour une personne de 42 ans, avec des versements de 1/12 en fin de mois.

$$a_{42}^{(12)} = \frac{N_{43}}{D_{42}} + \frac{11}{24} = \frac{159518.28}{10858.35} + \frac{11}{24} = 15.15.$$

8) $\ddot{a}_{48}^{(12)}$ correspond à une annuité viagère immédiate et illimitée pour une personne de 48 ans, avec des versements de 1/12 en début de mois.

$$\ddot{a}_{48}^{(12)} = \ddot{a}_{48} - \frac{11}{24} = \frac{N_{48}}{D_{48}} - \frac{11}{24} = 13.86.$$

9) ${}_{3|}a^{(2)}_{35}$ correspond à une annuité viagère différée de trois ans pour une personne de 35 ans, avec des versements de 1/2 en fin de semestre. Le premier versement est prévu dans trois ans et demi.

$$ {}_{3|}a^{(2)}_{35} = {}_{3|}a_{35} + \frac{1}{4}\,{}_3E_{35} = \frac{N_{39}}{D_{35}} + \frac{1}{4}\frac{D_{38}}{D_{35}} = 13.45. $$

10) ${}_{3|}\ddot{a}^{(4)}_{29}$ correspond à une annuité viagère différée de trois ans pour une personne de 29 ans, avec des versements de 1/4 en début de trimestre. Le premier versement est prévu dans trois ans.

$$ {}_{3|}\ddot{a}^{(4)}_{29} = {}_{3|}\ddot{a}_{29} - \frac{3}{8}\,{}_3E_{29} = \frac{N_{32}}{D_{29}} - \frac{3}{8}\frac{D_{32}}{D_{29}} = 14.61. $$

11) $a^{(12)}_{43:\overline{7|}}$ correspond à une annuité limitée à sept ans pour une personne de 43 ans, avec des versements de 1/12 en fin de mois.

$$ \begin{aligned} a^{(12)}_{43:\overline{7|}} &= a^{(12)}_{43} - {}_{7|}a^{(12)}_{43} \\ &= \frac{N_{44} - N_{51}}{D_{43}} + \frac{11}{24}\left(1 - \frac{D_{50}}{D_{43}}\right) = 5.83. \end{aligned} $$

12) $\ddot{a}^{(4)}_{35:\overline{10|}}$ correspond à une annuité limitée à dix ans pour une personne de 35 ans, avec des versements de 1/4 en début de trimestre.

$$ \begin{aligned} \ddot{a}^{(4)}_{35:\overline{10|}} &= \ddot{a}^{(4)}_{35} - {}_{10|}\ddot{a}^{(4)}_{35} \\ &= \frac{N_{35} - N_{45}}{D_{35}} - \frac{3}{8}\left(1 - \frac{D_{45}}{D_{35}}\right) = 7.86. \end{aligned} $$

13) A_{45} est la valeur actuelle moyenne d'un capital de 1 u.m. versé au décès d'une personne de 45 ans, quel que soit l'âge au décès.

$$ A_{45} = \frac{M_{45}}{D_{45}} = \frac{2699.55}{9274.34} = 0.2911. $$

14) ${}_{5|10}A_{65}$ couvre le décès entre 70 et 75 ans, pour une personne actuellement âgée de 65 ans.

$$ {}_{5|10}A_{65} = \frac{M_{70} - M_{75}}{D_{65}} = \frac{1148.15 - 739.88}{2729.37} = 0.1496. $$

15) ${}_{10|}A_{37}$ couvre le décès à partir de 47 ans, pour une personne actuellement âgée de 37 ans.

$$ {}_{10|}A_{37} = \frac{M_{47}}{D_{37}} = \frac{2615.45}{14083.42} = 0.1857. $$

16) $A_{70:\overline{5|}}$ couvre le décès au cours des cinq prochaines années, pour une personne actuellement âgée de 70 ans.

$$ A_{70:\overline{5|}} = \frac{M_{70} - M_{75}}{D_{70}} = \frac{1148.15 - 739.88}{1776.45} = 0.2298. $$

5.* Interprétez les expressions suivantes et calculez les valeurs actuelles moyennes correspondantes.

1) a_{39} 2) $a_{40:\overline{15}|}$ 3) ${}_{10|}a_{45}$ 4) $\ddot{a}_{53}$ 5) $\ddot{a}_{29:\overline{20}|}$ 6) ${}_{7|}\ddot{a}_{51}$ 7) $a_{47}^{(12)}$ 8) $\ddot{a}_{38}^{(4)}$ 9) $a_{59:\overline{9}|}^{(2)}$ 10) ${}_{8|}a_{41}^{(4)}$ 11) $\ddot{a}_{55:\overline{11}|}^{(12)}$ 12) ${}_{5|}\ddot{a}_{46}^{(12)}$ 13) A_{66} 14) ${}_{3|12}A_{57}$ 15) $A_{58:\overline{6}|}$ 16) ${}_{4|}A_{47}$.

Solution. Appliquez les formules correspondantes, comme dans l'exercice 4.

On obtient les valeurs suivantes, arrondies à quatre décimales.

1) 15.2687 2) 10.0478 3) 6.5459 4) 13.0115 5) 12.8236 6) 7.6308 7) 14.0252 8) 16.0706 9) 6.5701 10) 8.7822 11) 7.9277 12) 9.9561 13) 0.5854 14) 0.1445 15) 0.0916 16) 0.2916.

6. Calculez la valeur actuelle moyenne des versements de 50 lei qu'une personne âgée de 43 ans effectuera, si elle est en vie, à la fin de chacune des sept prochaines années. Quelle valeur obtient-on pour des versements en début d'année ?

Observation. Dans les exercices qui suivent, on utilise les nombres de commutation de la table au taux de 5%.

Solution.

a) Pour des versements en fin d'année, le facteur d'annuité est

$$a_{43:\overline{7}|} = \frac{N_{44} - N_{51}}{D_{43}} = \frac{149214.05 - 90603.82}{10304.22} = 5.6880.$$

La valeur actuelle moyenne des versements de 50 lei est

$$V = 50 \cdot \frac{N_{44} - N_{51}}{D_{43}} = 284.40 \text{ lei.}$$

b) Pour des versements en début d'année, le facteur d'annuité est

$$\ddot{a}_{43:\overline{7}|} = \frac{N_{43} - N_{50}}{D_{43}} = \frac{159518.28 - 97674.03}{10304.22} = 6.0018.$$

La valeur actuelle moyenne des versements de 50 lei est

$$V = 50 \cdot \frac{N_{43} - N_{50}}{D_{43}} = 300.09 \text{ lei.}$$

7. Calculez la valeur actuelle moyenne des versements de 10 € effectués par une personne de 38 ans, tant qu'elle est en vie, a) au début de chaque trimestre, puis b) au début de chaque mois.

Solution.

a) Pour un versement unitaire au sens annuel, le montant par trimestre est de 1/4 €. Le facteur correspondant est

$$\ddot{a}_{38}^{(4)} = \ddot{a}_{38} - \frac{3}{8} = \frac{N_{38}}{D_{38}} - \frac{3}{8} = \frac{219942.02}{13373.94} - \frac{3}{8} = 16.0706.$$

Pour des versements de 10 €, on obtient

$$V = 10 \cdot 4 \left(\frac{N_{38}}{D_{38}} - \frac{3}{8} \right) = 642.82 \text{ €.}$$

b) Pour un versement unitaire au sens annuel, le montant par mois est de $1/12$ €. Le facteur correspondant est

$$\ddot{a}_{38}^{(12)} = \ddot{a}_{38} - \frac{11}{24} = \frac{N_{38}}{D_{38}} - \frac{11}{24} = \frac{219942.02}{13373.94} - \frac{11}{24} = 15.9872.$$

Pour des versements de 10 €, on obtient

$$V = 10 \cdot 12 \left(\frac{N_{38}}{D_{38}} - \frac{11}{24} \right) = 1918.47\,€.$$

8. Calculez la valeur actuelle moyenne d'un capital de 3500 € versé si une personne âgée de 56 ans décède a) entre 75 et 76 ans, puis b) avant d'atteindre l'âge de 75 ans.

Solution.

a) L'intervalle de couverture commence dans 19 ans et se termine dans 20 ans. On a

$${}_{19|20}A_{56} = \frac{M_{75} - M_{76}}{D_{56}} = \frac{739.88 - 667.33}{4993.36} = 0.0145293.$$

Pour un capital de 3500 €, on obtient

$$V = 3500 \cdot \frac{M_{75} - M_{76}}{D_{56}} = 50.85\,€.$$

b) La couverture est immédiate et limitée aux 19 prochaines années. On a

$$A_{56:\overline{19|}} = \frac{M_{56} - M_{75}}{D_{56}} = \frac{2154.39 - 739.88}{4993.36} = 0.2832782.$$

Pour un capital de 3500 €, on obtient

$$V = 3500 \cdot \frac{M_{56} - M_{75}}{D_{56}} = 991.47\,€.$$

9. a) Quelle prime unique une personne de 20 ans doit-elle verser pour recevoir 10000 € si elle atteint l'âge de 60 ans ? b) Quel capital recevra-t-elle à 60 ans, si elle est en vie, pour une prime unique de 10000 € ? c) Quel versement annuel peut-elle obtenir si cette même prime finance une annuité viagère payée en fin d'année, avec un premier versement à 61 ans ? On utilise le taux de 5%.

Solution.

a) On a $x = 20$, $n = 40$ et le capital assuré est $S = 10000$ €. La prime unique vaut

$$P = S \cdot {}_{40}E_{20} = 10000 \cdot \frac{D_{60}}{D_{20}} = 10000 \cdot \frac{3885.66}{33395.05} = 1163.54\,€.$$

Observation. Pour disposer de 10000 € après 40 ans en effectuant un dépôt bancaire au même taux, la personne doit déposer la somme

$$s = 10000 v^{40} = 1420.46\,€.$$

Ce dépôt est supérieur à la prime, car le capital assuré est versé sous condition de survie.

b) Pour une prime unique $P = 10000$ €, le capital payable à 60 ans si la personne est en vie s'obtient par

$$S = \frac{P}{{}_{40}E_{20}} = 10000 \cdot \frac{D_{20}}{D_{60}} = 10000 \cdot \frac{33395.05}{3885.66} = 85944.34\,€.$$

Observation. Un dépôt bancaire de 10000 € effectué au même taux produit au bout de 40 ans

$$S = 10000u^{40} = 70399.89\,€,$$

une somme inférieure au capital payable sous condition de survie.

c) Le premier versement est prévu à 61 ans, soit à la fin de la première année après le différé de 40 ans. Le facteur d'annuité est

$${}_{40|}a_{20} = \frac{N_{61}}{D_{20}} = \frac{38570.43}{33395.05} = 1.154974.$$

Pour la même prime de 10000 €, le montant annuel vaut

$$S = \frac{P}{{}_{40|}a_{20}} = 10000 \cdot \frac{D_{20}}{N_{61}} = 8658.20\,€.$$

10. Un grand-père souhaite que son petit-fils, actuellement âgé de 3 ans, reçoive 12000 lei par an, tant qu'il est en vie. Les versements sont prévus en fin d'année, le premier à l'âge de 22 ans. Quelle prime unique le grand-père doit-il verser aujourd'hui ?

Solution.

On a $x = 3$ et le différé est de $n = 21 - 3 = 18$ ans. Le premier versement a lieu un an après la fin du différé. La prime unique vaut

$$P = 12000 \cdot {}_{18|}a_3 = 12000 \cdot \frac{N_{22}}{D_3} = 12000 \cdot \frac{559348.15}{78216.18} = 85815.72 \text{ lei.}$$

11. Calculez la valeur actuelle moyenne d'un capital de 10000 € versé à la famille d'une personne âgée de 60 ans si le décès survient à partir de l'âge de 90 ans.

Solution.

La couverture est différée de $90 - 60 = 30$ ans. La valeur actuelle moyenne du capital est

$$V = 10000 \cdot {}_{30|}A_{60} = 10000 \cdot \frac{M_{90}}{D_{60}} = 10000 \cdot \frac{33.71}{3885.66} = 86.7549\,€.$$

5.3 Exercices proposés

Utilisez la table des nombres de commutation au taux de 5%.

Paiements viagers

1. Calculez par deux méthodes la valeur actuelle moyenne d'un versement de 1 u.m. à une personne âgée de 51 ans si elle atteint l'âge de 58 ans. Calculez aussi ${}_{20}E_{45}$ et ${}_{12}E_{37}$.
   (Réponse : ${}_{7}E_{51} = 0.6605$, ${}_{20}E_{45} = 0.2943$ et ${}_{12}E_{37} = 0.5305$.)
2. Interprétez les expressions suivantes et calculez les valeurs actuelles moyennes correspondantes.
   a_{39}, ${}_{10|}a_{40}$, $a_{47:\overline{15|}}$, $\ddot{a}_{53}$, ${}_{7|}\ddot{a}_{51}$, $\ddot{a}_{29:\overline{20|}}$, $a_{47}^{(12)}$, $\ddot{a}_{38}^{(4)}$, ${}_{8|}a_{41}^{(4)}$, ${}_{5|}\ddot{a}_{46}^{(12)}$, $a_{59:\overline{9|}}^{(2)}$, $\ddot{a}_{55:\overline{11|}}^{(12)}$.
   (Réponse dans l'ordre : 15.2687, 7.5169, 9.7816, 13.0115, 7.6308, 12.8236, 14.0252, 16.0706, 8.7822, 9.9561, 6.5701 et 7.9277.)
3. Calculez la prime unique qu'une personne âgée de 31 ans doit verser pour recevoir 10000 lei si elle atteint l'âge de 65 ans.
   (Réponse : 1425.9718 lei.)
4. Une personne âgée de 30 ans verse une prime unique de 1000 lei. Quel capital recevra-t-elle si elle atteint l'âge de 65 ans ?
   (Réponse : 7378.3217 lei.)
5. Calculez la valeur actuelle moyenne des versements viagers de 1700 lei effectués par une personne âgée de 25 ans, en début d'année, pendant les 20 prochaines années.
   (Réponse : 21870.4442 lei.)
6. Déterminez la prime unique qu'une personne âgée de 73 ans doit verser à la signature du contrat pour recevoir 12000 lei à la fin de chaque année tant qu'elle est en vie.
   (Réponse : 70549.1919 lei.)
7. Une personne souhaite que sa fille, actuellement âgée de 13 ans, reçoive 2000 lei en fin de mois tant qu'elle est en vie. Les versements commencent un mois après la fin d'un différé de cinq ans. Quelle prime unique faut-il verser aujourd'hui ?
   (Réponse : 342741.416 lei.)
8. Une personne âgée de 32 ans verse 700 lei à la fin de chaque année, pendant 17 ans au plus, tant qu'elle est en vie. Calculez la valeur actuelle moyenne de ces versements. Pour la même valeur actuelle moyenne, quel serait le montant annuel si la durée maximale était de 21 ans ?
   (Réponse : 7715.4313 lei et 619.5451 lei par an.)
9. Calculez la valeur actuelle moyenne des versements viagers de 300 lei effectués par une personne âgée de 41 ans à la fin de chaque trimestre pendant 19 ans au plus. Si la personne reçoit 15000 lei aujourd'hui, quel montant doit-elle verser chaque trimestre selon le même calendrier pour que la valeur actuelle moyenne des versements soit égale à cette somme ?
   (Réponse : 14121.904 lei et 318.6539 lei par trimestre.)

10. Une personne âgée de 37 ans effectue des versements viagers de 2400 lei pendant 18 ans au plus. Calculez leur valeur actuelle moyenne si le versement a lieu en début, puis en fin d'année. Faites le même calcul pour des versements de 2400 lei en fin de mois, puis en début de mois.

    (Réponse dans l'ordre : 28631.8721 lei, 27135.4589 lei, 333855.78 lei et 335352.1923 lei.)

11. Un parent souhaite que son enfant, actuellement âgé de 14 ans, reçoive 12000 lei par an en début d'année tant qu'il est en vie, avec un premier versement à 18 ans. Quelle prime unique doit-il verser aujourd'hui ?

    (Réponse : 185424.526 lei.)

12. Une personne âgée de 46 ans recevra 75 lei au début de chaque mois pendant 19 ans au plus, tant qu'elle est en vie. Calculez la valeur actuelle moyenne de ces versements. Quel montant mensuel obtiendrait-elle pour une prime unique de 30000 lei ?

    (Réponse : 10435.90 lei et 215.6018 lei par mois.)

Paiements en cas de décès

1. Calculez par deux méthodes les facteurs d'actualisation de décès ${}_{12}D_{63}$ et ${}_{9}D_{51}$. Interprétez chacun d'eux.

    (Réponse : ${}_{12}D_{63} = 0.0229$ et ${}_{9}D_{51} = 0.0099$.)

2. Calculez la valeur actuelle moyenne d'un versement de 1 u.m. dans 16 ans et demi si une personne actuellement âgée de 55 ans décède entre 71 et 72 ans.

    (Réponse : ${}_{16}D_{55} = 0.0159$.)

3. Interprétez les expressions A_{67}, ${}_{4|13}A_{58}$, ${}_{5|}A_{48}$ et $A_{59:\overline{7}|}$, puis calculez les valeurs actuelles moyennes correspondantes.

    (Réponse dans l'ordre : 0.6007, 0.1615, 0.2946 et 0.1201.)

4. Calculez la valeur actuelle moyenne d'un capital de 7400 € versé si une personne actuellement âgée de 61 ans décède entre 85 et 86 ans. Quelle valeur obtient-on si la couverture porte sur le décès avant l'âge de 85 ans ?

    (Réponse : 68.5392 € et 3444.1378 €.)

5. Calculez la valeur actuelle moyenne d'un capital de 12300 $ versé à la famille d'une personne actuellement âgée de 74 ans dans chacun des cas suivants.

    a) Le décès survient à partir de l'âge de 91 ans.

    b) Le décès survient avant l'âge de 90 ans.

    (Réponse : a) 243.1341 $ et b) 8294.1164 $.)

6. Calculez la valeur actuelle moyenne d'un capital de 5412 € versé si une personne actuellement âgée de 53 ans décède entre 75 et 80 ans. Quelle valeur obtient-on si la couverture porte sur le décès avant l'âge de 75 ans ?

    (Réponse : 309.1200 € et 1438.1861 €.)

7. Calculez la valeur actuelle moyenne d'un capital de 15500 € versé à la famille d'une personne de 86 ans en cas de décès, quel que soit l'âge au décès.
   (Réponse : 13265.6341 €.)
8. Une personne âgée de 37 ans verse une prime unique de 4500 lei. Quel capital sa famille recevra-t-elle en cas de décès, quel que soit l'âge au décès ?
   (Réponse : 21041.3853 lei.)
9. Calculez A_{88} de deux façons. Utilisez d'abord M_{88}, puis exprimez M_{88} à l'aide de N_{88} et de N_{89}. Donnez les deux valeurs de A_{88} à quatre décimales.
   (Réponse : $A_{88} = 0.8737$ par les deux méthodes.)
10. Une personne âgée de 62 ans souscrit une assurance qui verse un capital de 9000 lei en cas de décès. Calculez la valeur actuelle moyenne si la couverture porte sur a) les dix prochaines années, b) la période qui commence à 72 ans, sans limite de durée, et c) la vie entière. Vérifiez que la somme des valeurs obtenues en a) et en b), avant arrondi, donne celle de c).
    (Réponse : a) 2113.58 lei, b) 2591.19 lei et c) 4704.78 lei.)
11. Pour une personne âgée de 55 ans, un contrat prévoit un capital de 15000 lei si elle atteint l'âge de 67 ans, ou un capital de 10000 lei si elle décède avant d'atteindre cet âge. Calculez la valeur actuelle moyenne de chaque garantie et la prime unique pure du contrat.
    (Réponse : 6569.43 lei pour la garantie en cas de survie, 1541.53 lei pour la garantie en cas de décès et 8110.96 lei pour la prime unique.)
12. Une personne âgée de 60 ans souscrit une assurance vie entière qui verse un capital de 40000 lei en cas de décès. Elle paie des primes annuelles constantes en début d'année pendant huit ans au plus, tant qu'elle est en vie. Calculez la prime annuelle pure.
    (Réponse : 3105.80 lei par an.)
13. Pour une personne âgée de 52 ans, un contrat prévoit le versement d'un capital de 20000 lei si elle décède avant d'atteindre l'âge de 60 ans, ou de 12000 lei si elle décède à partir de 60 ans et avant 67 ans. Calculez la valeur actuelle moyenne de chaque garantie et la prime unique pure du contrat.
    (Réponse : 1483.06 lei pour la première garantie, 978.42 lei pour la seconde et 2461.48 lei pour la prime unique.)
14. Une personne âgée de 65 ans dispose de 5000 lei pour payer la prime unique pure d'une assurance temporaire en cas de décès qui verse un capital de 20000 lei. La couverture prend effet à la souscription. Quelle est la durée maximale de couverture, en années entières, que cette personne peut financer ? Justifiez votre réponse.
    (Réponse : huit ans. La prime est de 4837.97 lei pour huit ans et de 5419.86 lei pour neuf ans.)
15. Un contrat prévoit, pour une personne âgée de 58 ans, des versements de 600 lei en début de trimestre pendant huit ans au plus, tant qu'elle est en vie. Le premier versement est

prévu à la souscription. Si elle décède au cours de ces huit années, le contrat verse en outre un capital de 15000 lei au bénéficiaire. Calculez la valeur actuelle moyenne de l'annuité, celle du capital décès et la prime unique pure du contrat.

(Réponse : 15003.81 lei pour l'annuité, 1901.00 lei pour le capital décès et 16904.81 lei pour la prime unique.)

Chapitre 6

Assurances de personnes

6.1 Résumé théorique

Le principe d'équivalence actuarielle consiste à égaliser la valeur actuelle moyenne des primes et celle des prestations. On note x l'âge à la souscription, P le montant de chaque prime et k le nombre maximal d'années de paiement des primes. Les primes sont versées en début de période, tant que l'assuré est en vie. La première prime, ou la prime unique, est versée à la souscription. On écrit a pour $\mathfrak{a}$ dans les exercices.

Sauf indication contraire, on utilise la table des nombres de commutation au taux annuel de 5%. Pour les prestations en cas de décès, on retient la convention d'un versement au milieu de l'année du décès. Dans les calculs, on arrondit le résultat final.

Les relations suivantes s'appliquent aux primes annuelles.

- Pour une assurance en cas de vie, le capital S est versé dans n ans si l'assuré est en vie.

$$P \cdot \ddot{\mathfrak{a}}_{x:\overline{k|}} = S \cdot {}_nE_x.$$

- Pour une assurance de pension, l'assuré reçoit S en début d'année à partir de la date n, tant qu'il est en vie.

$$P \cdot \ddot{\mathfrak{a}}_{x:\overline{k|}} = S \cdot {}_{n|}\ddot{\mathfrak{a}}_x.$$

- Pour une assurance en cas de décès, le capital S est versé si le décès survient à partir de l'âge de $x+m$ ans et avant l'âge de $x+n$ ans. $P \cdot \ddot{\mathfrak{a}}_{x:\overline{k|}} = S \cdot {}_{m|n}A_x$.
- Pour une assurance mixte, le capital S_1 est versé dans n ans si l'assuré est en vie. Le capital S_2 est versé au bénéficiaire si l'assuré décède avant cette date. $P \cdot \ddot{\mathfrak{a}}_{x:\overline{k|}} = S_1 \cdot {}_nE_x + S_2 \cdot A_{x:\overline{n|}}$.

Si la prime est unique, on utilise $\ddot{\mathfrak{a}}_{x:\overline{1|}} = 1$. Si la prime de montant P est versée m' fois par an, sa valeur actuelle moyenne cumulée est $Pm'\ddot{\mathfrak{a}}^{(m')}_{x:\overline{k|}}$. De même, pour une pension de montant S versée m'' fois par an et différée de n ans, la valeur actuelle moyenne cumulée est $Sm'' \, {}_{n|}\ddot{\mathfrak{a}}^{(m'')}_x$, selon les formules de fractionnement du chapitre précédent.

6.2 Exercices corrigés

1. Une personne âgée de 32 ans souscrit une assurance qui lui versera 1500 € dans 18 ans si elle est encore en vie. Calculez les primes suivantes.

a) La prime unique.

b) La prime annuelle payable pendant 18 ans au plus.

c) La prime annuelle payable pendant six ans au plus.

d) La prime semestrielle payable pendant six ans au plus.

On utilise le taux annuel de 5%.

Solution.

Il s'agit d'une **assurance en cas de vie**, avec $x = 32$, $n = 18$ et $S = 1500$. Pour des primes annuelles, le principe d'équivalence donne

$$P \cdot \ddot{a}_{x:\overline{k}|} = S \cdot {}_nE_x.$$

a) Pour la prime unique, on a

$$P = 1500 \cdot {}_{18}E_{32} = 1500 \cdot \frac{D_{50}}{D_{32}} = 1500 \cdot \frac{7070.22}{18190.78} = 583.0058\,€.$$

b) Pour les primes annuelles sur 18 ans, on a

$$\begin{aligned} P \cdot \ddot{a}_{32:\overline{18}|} &= 1500 \cdot {}_{18}E_{32}, \\ P &= \frac{1500 \cdot {}_{18}E_{32}}{\ddot{a}_{32:\overline{18}|}} = 1500 \cdot \frac{D_{50}}{N_{32} - N_{50}} = 48.4947\,€. \end{aligned}$$

Si les 18 primes sont toutes versées, leur total est de 872.9051 €.

c) Pour les primes annuelles sur six ans, on a

$$\begin{aligned} P \cdot \ddot{a}_{32:\overline{6}|} &= 1500 \cdot {}_{18}E_{32}, \\ P &= \frac{1500 \cdot {}_{18}E_{32}}{\ddot{a}_{32:\overline{6}|}} = 1500 \cdot \frac{D_{50}}{N_{32} - N_{38}} = 109.9883\,€. \end{aligned}$$

Si les six primes sont toutes versées, leur total est de 659.9296 €.

d) Pour les primes semestrielles sur six ans, on utilise $m' = 2$.

$$\begin{aligned} P \cdot 2 \cdot \ddot{a}^{(2)}_{32:\overline{6}|} &= 1500 \cdot {}_{18}E_{32}, \\ P &= \frac{1500 \cdot {}_{18}E_{32}}{2\ddot{a}^{(2)}_{32:\overline{6}|}} = 55.6896\,€. \end{aligned}$$

Si les douze primes sont toutes versées, leur total est de 668.2756 €.

2. Une personne âgée de 25 ans souscrit une assurance qui lui versera 50000 € dans 30 ans si elle est encore en vie. Calculez les primes suivantes.

a) La prime unique.

b) La prime annuelle payable pendant 30 ans au plus.

c) La prime annuelle payable pendant dix ans au plus.

d) La prime mensuelle payable pendant dix ans au plus.

On utilise le taux annuel de 5%.

Solution.

Il s'agit d'une **assurance en cas de vie**, avec $x = 25$, $n = 30$ et $S = 50000$. Pour des primes annuelles, le principe d'équivalence donne

$$P \cdot \ddot{a}_{x:\overline{k}|} = S \cdot {}_nE_x.$$

a) La prime unique est

$$P = 50000 \cdot {}_{30}E_{25} = 50000 \cdot \frac{D_{55}}{D_{25}} = 10220.1454\,€.$$

b) Pour les primes annuelles sur 30 ans, on obtient

$$P = \frac{50000 \cdot {}_{30}E_{25}}{\ddot{a}_{25:\overline{30}|}} = 50000 \cdot \frac{D_{55}}{N_{25} - N_{55}} = 651.1510\,€.$$

Si les 30 primes sont toutes versées, leur total est de 19534.5299 €.

c) Pour les primes annuelles sur dix ans, on obtient

$$P = \frac{50000 \cdot {}_{30}E_{25}}{\ddot{a}_{25:\overline{10}|}} = 50000 \cdot \frac{D_{55}}{N_{25} - N_{35}} = 1270.3162\,€.$$

Si les dix primes sont toutes versées, leur total est de 12703.1625 €.

d) Pour les primes mensuelles sur dix ans, on obtient

$$P = \frac{50000 \cdot {}_{30}E_{25}}{12\ddot{a}^{(12)}_{25:\overline{10}|}} = 108.3177\,€.$$

Si les 120 primes sont toutes versées, leur total est de 12998.1211 €.

3. Une personne âgée de 45 ans souscrit une assurance qui versera un capital de 1000 € à sa famille si elle décède au cours des 35 prochaines années. Calculez les primes suivantes.

a) La prime unique.

b) La prime annuelle, payable au début de chaque année pendant la durée de la couverture.

Solution.

Il s'agit d'une **assurance temporaire en cas de décès**. On a $x = 45$, $n = 35$ et $S = 1000$. Pour des primes annuelles, le principe d'équivalence donne

$$P \cdot \ddot{a}_{x:\overline{k}|} = S \cdot A_{x:\overline{n}|}.$$

a) La prime unique est

$$P = 1000 \cdot A_{45:\overline{35|}} = 1000 \cdot \frac{M_{45} - M_{80}}{D_{45}} = 1000 \cdot \frac{2699.55 - 399.23}{9274.34} = 248.03\,€.$$

b) Pour les primes annuelles, on a $k = 35$. Ainsi,

$$\begin{aligned} P &= 1000 \cdot \frac{A_{45:\overline{35|}}}{\ddot{a}_{45:\overline{35|}}} = 1000 \cdot \frac{M_{45} - M_{80}}{N_{45} - N_{80}} \\ &= 1000 \cdot \frac{2699.55 - 399.23}{139436.85 - 2452.23} = 16.79\,€. \end{aligned}$$

4. Une personne âgée de 60 ans souscrit une assurance qui versera un capital de 200000 € à sa famille si elle décède à partir de l'âge de 70 ans. Calculez les primes suivantes.

a) La prime unique.

b) La prime annuelle, payable au début de chacune des dix années qui précèdent le début de la couverture.

Solution.

Il s'agit d'une **assurance en cas de décès** différée de dix ans. On a $x = 60$, $n = 10$ et $S = 200000$.

a) La prime unique est

$$P = 200000 \cdot {}_{10|}A_{60} = 200000 \cdot \frac{M_{70}}{D_{60}} = 59096.78\,€.$$

b) Les primes annuelles sont versées avant le début de la couverture, aux dates $0, \ldots, 9$, si l'assuré est en vie. L'équivalence s'écrit

$$P \cdot \ddot{a}_{60:\overline{10|}} = 200000 \cdot {}_{10|}A_{60}.$$

On en déduit

$$P = 200000 \cdot \frac{M_{70}}{N_{60} - N_{70}} = 8006.43\,€.$$

5. Une personne âgée de 40 ans souhaite recevoir une pension viagère de 100 € au début de chaque trimestre, ou de 100 € au début de chaque mois, selon l'option choisie. Le premier versement de la pension est prévu à l'âge de 70 ans. Calculez, dans chaque cas, la prime mensuelle à payer en début de mois pendant les 30 années qui précèdent le premier versement de la pension.

Solution.

Pour cette **assurance de pension**, $x = 40$, $n = k = 30$ et $S = 100$. Le principe d'équivalence pour des versements annuels donne

$$P \cdot \ddot{a}_{x:\overline{k|}} = S \cdot {}_{n|}\ddot{a}_x.$$

Lorsque les primes sont mensuelles et la pension est versée m'' fois par an, l'équation devient

$$P \cdot 12 \cdot \ddot{a}^{(12)}_{40:\overline{30|}} = 100 \cdot m'' \cdot {}_{30|}\ddot{a}^{(m'')}_{40}.$$

a) Pour une pension trimestrielle ($m'' = 4$), la prime mensuelle est

$$P = 100 \cdot \frac{4}{12} \cdot \frac{{}_{30|}\ddot{a}^{(4)}_{40}}{\ddot{a}^{(12)}_{40:\overline{30|}}} = 2.4915\,€.$$

b) Pour une pension mensuelle ($m'' = 12$), la prime mensuelle est

$$P = 100 \cdot \frac{{}_{30|}\ddot{a}^{(12)}_{40}}{\ddot{a}^{(12)}_{40:\overline{30|}}} = 7.39\,€.$$

6. Une personne âgée de 30 ans souhaite recevoir une pension viagère de 350 € au début de chaque mois, ou de 350 € au début de chaque semestre, selon l'option choisie. Le premier versement de la pension est prévu à l'âge de 65 ans. Calculez, dans chaque cas, la prime mensuelle à payer en début de mois pendant 20 ans au plus, dès la souscription.

Solution.

Pour cette **assurance de pension**, $x = 30$, $n = 35$, $k = 20$ et $S = 350$. Les primes sont mensuelles et la pension est versée m'' fois par an. Le principe d'équivalence donne

$$P \cdot 12 \cdot \ddot{a}^{(12)}_{30:\overline{20|}} = 350 \cdot m'' \cdot {}_{35|}\ddot{a}^{(m'')}_{30}.$$

a) Pour une pension mensuelle ($m'' = 12$), la prime mensuelle est

$$P = 350 \cdot \frac{{}_{35|}\ddot{a}^{(12)}_{30}}{\ddot{a}^{(12)}_{30:\overline{20|}}} = 33.5850\,€.$$

b) Pour une pension semestrielle ($m'' = 2$), la prime mensuelle est

$$P = 350 \cdot \frac{2}{12} \cdot \frac{{}_{35|}\ddot{a}^{(2)}_{30}}{\ddot{a}^{(12)}_{30:\overline{20|}}} = 5.7291\,€.$$

7. Une personne âgée de 40 ans souscrit une assurance mixte. L'assureur lui versera 50000 u.m. à l'âge de 60 ans si elle est en vie. Si elle décède avant cet âge, sa famille recevra le même capital. Calculez la prime annuelle payable en début d'année pendant 20 ans au plus.

Solution.

Dans cette **assurance mixte**, $x = 40$, $n = k = 20$ et $S_1 = S_2 = 50000$. La garantie décès couvre les 20 années qui précèdent l'échéance. Le principe d'équivalence donne

$$P \cdot \ddot{a}_{40:\overline{20|}} = 50000 \cdot {}_{20}E_{40} + 50000 \cdot A_{40:\overline{20|}}.$$

La prime annuelle est

$$P = 50000 \cdot \frac{D_{60} + M_{40} - M_{60}}{N_{40} - N_{60}} = 1607.08 \,\text{u.m.}$$

8. Une personne âgée de 50 ans souscrit une assurance mixte. Si elle est en vie à 65 ans, l'assureur lui versera 20000 u.m. Si elle décède avant cet âge, sa famille recevra 30000 u.m. Calculez la prime mensuelle payable en début de mois pendant dix ans au plus.

Solution.

Pour cette **assurance mixte**, $x = 50$, $n = 15$, $k = 10$, $m' = 12$, $S_1 = 20000$ et $S_2 = 30000$. Le principe d'équivalence donne

$$P \cdot 12 \cdot \ddot{a}^{(12)}_{50:\overline{10|}} = 20000 \cdot {}_{15}E_{50} + 30000 \cdot A_{50:\overline{15|}}.$$

La prime mensuelle est

$$P = \frac{20000 \cdot {}_{15}E_{50} + 30000 \cdot A_{50:\overline{15|}}}{12\ddot{a}^{(12)}_{50:\overline{10|}}} = 127.5374 \,\text{u.m.}$$

9. Une personne âgée de 36 ans souhaite recevoir une pension viagère de 250 € par mois, avec un premier versement à l'âge de 62 ans et les suivants en début de mois. Calculez la prime trimestrielle, payable en début de trimestre, si les primes sont versées pendant 26 ans au plus. Reprenez le calcul si les primes sont versées uniquement pendant la première année.

Solution.

Pour cette **assurance de pension**, $x = 36$, $n = 26$ et $S = 250$. Les primes sont trimestrielles et la pension est mensuelle. Si les primes sont versées pendant k ans au plus, le principe d'équivalence donne

$$P \cdot 4 \cdot \ddot{a}^{(4)}_{36:\overline{k|}} = 250 \cdot 12 \cdot {}_{26|}\ddot{a}^{(12)}_{36}.$$

a) Si $k = 26$, la prime trimestrielle est

$$P = 250 \cdot \frac{12}{4} \cdot \frac{{}_{26|}\ddot{a}^{(12)}_{36}}{\ddot{a}^{(4)}_{36:\overline{26|}}} = 119.4150 \,€.$$

Observation. Si les $26 \cdot 4 = 104$ primes sont toutes versées, leur total est de 12419.1593 €.

b) Si $k = 1$, la prime trimestrielle est

$$P = 250 \cdot \frac{12}{4} \cdot \frac{{}_{26|}\ddot{a}^{(12)}_{36}}{\ddot{a}^{(4)}_{36:\overline{1|}}} = 1720.6901\,€.$$

Observation. Si les quatre primes sont toutes versées, leur total est de 6882.7604 €.

10. Une personne âgée de 48 ans souscrit une assurance qui versera 2000 € à sa famille si elle décède au cours des 20 prochaines années. Calculez les primes suivantes.

a) La prime unique.

b) La prime annuelle, payable pendant les 20 ans de couverture.

c) La prime trimestrielle, payable pendant cinq ans au plus.

Solution.

Il s'agit d'une **assurance temporaire en cas de décès**, avec $x = 48$, $n = 20$ et $S = 2000$. La valeur actuelle moyenne du capital décès est $2000 \cdot A_{48:\overline{20|}}$.

a) La prime unique est

$$P = 2000 \cdot A_{48:\overline{20|}} = 2000 \cdot \frac{M_{48} - M_{68}}{D_{48}} = 318.8248\,€.$$

b) Pour les primes annuelles, le principe d'équivalence donne

$$P \cdot \ddot{a}_{48:\overline{20|}} = 2000 \cdot A_{48:\overline{20|}}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} P &= 2000 \cdot \frac{A_{48:\overline{20|}}}{\ddot{a}_{48:\overline{20|}}} \\ &= 2000 \cdot \frac{M_{48} - M_{68}}{N_{48} - N_{68}} = 26.4360\,€. \end{aligned}$$

c) Il y a au plus $5 \cdot 4 = 20$ primes trimestrielles. On a

$$P \cdot 4 \cdot \ddot{a}^{(4)}_{48:\overline{5|}} = 2000 \cdot A_{48:\overline{20|}}.$$

Ainsi,

$$P = \frac{2000}{4} \cdot \frac{A_{48:\overline{20|}}}{\ddot{a}^{(4)}_{48:\overline{5|}}} = 18.12089\,€.$$

11. Une personne âgée de 52 ans souscrit une assurance qui lui versera 3200 € si elle est en vie à 67 ans. Si elle décède avant cet âge, sa famille recevra le même capital. Calculez les primes suivantes.

a) La prime unique.

b) La prime annuelle, payable pendant dix ans au plus.

Solution.

Dans cette **assurance mixte**, $x = 52$, $n = 15$ et $S_1 = S_2 = 3200$. La garantie décès couvre les 15 années qui précèdent l'échéance. On a

$$P \cdot \ddot{a}_{x:\overline{k}|} = S_1 \cdot {}_nE_x + S_2 \cdot A_{x:\overline{n}|}.$$

a) Pour la prime unique, on obtient

$$P = 3200 \left({}_{15}E_{52} + A_{52:\overline{15}|} \right) = 3200 \cdot \frac{D_{67} + M_{52} - M_{67}}{D_{52}} = 1674.5319\,€.$$

b) Pour les primes annuelles, $k = 10$. On obtient

$$P = 3200 \cdot \frac{{}_{15}E_{52} + A_{52:\overline{15}|}}{\ddot{a}_{52:\overline{10}|}} = 3200 \cdot \frac{D_{67} + M_{52} - M_{67}}{N_{52} - N_{62}} = 215.9548\,€.$$

12.* Une personne âgée de 47 ans dispose de 100000 €. Elle peut verser cette somme comme prime unique d'une assurance en cas de vie qui lui versera un capital si elle atteint l'âge de 60 ans, ou la placer sur un compte d'épargne pendant 13 ans. Dans les deux cas, on retient un taux nominal annuel de 8% avec capitalisation trimestrielle. Comparez le capital assuré et la valeur acquise du placement.

Solution.

Pour cette **assurance en cas de vie**, $x = 47$, $n = 13$ et la prime unique est $P = 100000$. Le capital assuré S vérifie

$$P = S \cdot {}_{13}E_{47}.$$

Le taux trimestriel et le taux annuel effectif sont

$$i_4 = \frac{\rho}{4} = \frac{0.08}{4} = 0.02, \qquad i = (1 + i_4)^4 - 1 = 1.02^4 - 1 = 0.08243216.$$

On a donc $u = 1.08243216$ et $v = 1/u$. On utilise les effectifs de la table de mortalité et le facteur d'actualisation correspondant à ce taux. Ainsi,

$${}_{13}E_{47} = v^{13} \frac{l_{60}}{l_{47}} = \frac{72581}{82536 \cdot 1.02^{52}} = 0.314030.$$

Le capital assuré est

$$S = 100000 \cdot 1.02^{52} \cdot \frac{82536}{72581} = 318441.31\,€.$$

Après 13 ans, la valeur acquise du placement bancaire est

$$S' = 100000 \cdot 1.02^{52} = 280032.82\,€.$$

Si la personne atteint l'âge de 60 ans, le capital assuré est supérieur à la valeur acquise du placement. Il est versé sous condition de survie.

13. Une personne âgée de 25 ans souhaite recevoir une pension viagère de 350 € par mois. Le premier versement est prévu à l'âge de 65 ans, puis la pension est versée en début de mois. Calculez la prime semestrielle, payable en début de semestre, si les primes sont versées pendant 40 ans au plus. Reprenez le calcul si les primes sont versées uniquement pendant la première année.

Solution.

Pour cette **assurance de pension**, $x = 25$, $n = 40$ et $S = 350$. Si les primes semestrielles sont versées pendant k ans au plus, le principe d'équivalence donne

$$P \cdot 2 \cdot \ddot{a}^{(2)}_{25:\overline{k|}} = 350 \cdot 12 \cdot {}_{40|}\ddot{a}^{(12)}_{25}.$$

a) Si $k = 40$, la prime semestrielle est

$$P = 350 \cdot \frac{12}{2} \cdot \frac{{}_{40|}\ddot{a}^{(12)}_{25}}{\ddot{a}^{(2)}_{25:\overline{40|}}} = 114.8974\,€.$$

Observation. Si les $40 \cdot 2 = 80$ primes sont toutes versées, leur total est de 9191.7926 €.

b) Si $k = 1$, la prime semestrielle est

$$P = 350 \cdot \frac{12}{2} \cdot \frac{{}_{40|}\ddot{a}^{(12)}_{25}}{\ddot{a}^{(2)}_{25:\overline{1|}}} = 1981.8558\,€.$$

Observation. Si les deux primes sont versées, leur total est de 3963.7116 €.

14. Une personne âgée de 55 ans souscrit une assurance qui versera 25000 € à sa famille si elle décède au cours des 17 prochaines années. Calculez les primes suivantes.

a) La prime unique.

b) La prime annuelle payable pendant les 17 ans de couverture.

c) La prime mensuelle payable pendant trois ans au plus.

Solution.

Pour cette **assurance temporaire en cas de décès**, $x = 55$, $n = 17$ et $S = 25000$.

a) La prime unique est

$$P = 25000 \cdot A_{55:\overline{17|}} = 25000 \cdot \frac{M_{55} - M_{72}}{D_{55}} = 5820.65\,€.$$

b) Le principe d'équivalence donne

$$P \cdot \ddot{a}_{55:\overline{17|}} = 25000 \cdot A_{55:\overline{17|}}.$$

La prime annuelle est donc

$$P = 25000 \cdot \frac{M_{55} - M_{72}}{N_{55} - N_{72}} = 554.89\,€.$$

c) Pour une durée maximale de trois ans, il y a au plus $3 \cdot 12 = 36$ primes mensuelles. On a

$$P \cdot 12 \cdot \ddot{a}^{(12)}_{55:\overline{3|}} = 25000 \cdot A_{55:\overline{17|}}.$$

La prime mensuelle est donc

$$P = \frac{25000}{12} \cdot \frac{A_{55:\overline{17|}}}{\ddot{a}^{(12)}_{55:\overline{3|}}} = 176.31\,€.$$

15. Une personne âgée de 61 ans souscrit une assurance qui lui versera 100000 € si elle est en vie à 70 ans. Si elle décède avant cet âge, sa famille recevra le même capital. Calculez les primes suivantes.

a) La prime unique.

b) La prime mensuelle payable pendant quatre ans au plus.

Solution.

Pour cette **assurance mixte**, $x = 61$, $n = 9$ et $S_1 = S_2 = 100000$.
a) La prime unique est

$$P = 100000 \left({}_9E_{61} + A_{61:\overline{9|}}\right) = 100000 \cdot \frac{D_{70} + M_{61} - M_{70}}{D_{61}} = 67991.17\,€.$$

b) Il y a au plus $4 \cdot 12 = 48$ primes mensuelles. On a

$$P \cdot 12 \cdot \ddot{a}^{(12)}_{61:\overline{4|}} = 100000 \left({}_9E_{61} + A_{61:\overline{9|}}\right).$$

La prime mensuelle est donc

$$P = \frac{100000}{12} \cdot \frac{{}_9E_{61} + A_{61:\overline{9|}}}{\ddot{a}^{(12)}_{61:\overline{4|}}} = 1619.18\,€.$$

6.3 Exercices proposés

Utilisez la table des nombres de commutation au taux de 5%. Les primes sont payables en début de période, tant que l'assuré est en vie.

1. Une personne âgée de 42 ans souhaite que sa famille reçoive 120 u.m. si elle décède avant l'âge de 90 ans. Calculez la prime payable au début de chaque année pendant dix ans au plus.

   (Réponse : $P = 3.857$ u.m.)

2. Monsieur Trandafir, âgé de 30 ans, souscrit une assurance qui lui versera 5000 u.m. s'il est en vie à 50 ans. Calculez la prime payable au début de chaque année pendant 20 ans au plus.

   (Réponse : $P = 137$ u.m.)

3. Une personne âgée de 40 ans souscrit une assurance mixte. Elle recevra 3000 u.m. si elle atteint l'âge de 70 ans. Si elle décède avant cet âge, sa famille recevra 2800 u.m. Calculez la prime annuelle, payable pendant 20 ans au plus.

   (Réponse : $P = 67.427$ u.m.)

4. Madame Margareta, âgée de 45 ans, souhaite recevoir une pension annuelle de 1000 u.m. tant qu'elle est en vie. Le premier versement est prévu à l'âge de 70 ans, puis la pension est versée en début d'année. De quel type d'assurance s'agit-il ? Calculez la prime annuelle payable pendant 15 ans au plus.

   (Réponse : assurance de pension, avec $P = 142.042$ u.m.)

5. Une personne âgée de 50 ans verse une prime de 150 u.m. en début de mois, pendant dix ans au plus. En contrepartie, elle recevra une pension viagère en début de trimestre, dont le premier versement est prévu à l'âge de 60 ans. Calculez le montant de chaque versement de la pension.

   (Réponse : $S = 590.046$ u.m.)

6. Une personne âgée de 65 ans souscrit une assurance qui versera un capital S à sa famille si elle décède à partir de l'âge de 85 ans et avant l'âge de 100 ans. La prime est de 1000 u.m. au début de chaque semestre pendant 15 ans au plus. Calculez le capital assuré.

   (Réponse : $S = 295925.069$ u.m.)

7. Une personne âgée de 32 ans souscrit une assurance qui lui versera 15000 $ dans 18 ans si elle est encore en vie.

   a) Calculez la prime unique.

   b) Calculez la prime annuelle payable pendant les 18 ans du contrat.

   (Réponse : a) 5830.0579 $ et b) 484.9473 $.)

8. Madame Rus dispose de 10000 € à l'âge de 40 ans. Elle verse cette somme comme prime unique d'une assurance qui lui versera un capital à 70 ans si elle est encore en vie. Calculez ce capital en utilisant la table à 5%. Comparez-le à la valeur acquise d'un placement de la même somme sur 30 ans, au taux nominal annuel de 5% avec capitalisation trimestrielle.

(Réponse : 67850.43 € pour le capital assuré et 44402.1323 € pour la valeur acquise du placement.)

9. Madame Marinescu, âgée de 35 ans, souhaite recevoir une pension viagère de 1000 lei par mois à partir de l'âge de 60 ans. Les versements ont lieu en début de mois. Calculez la prime mensuelle payable pendant les 25 prochaines années au plus.

   (Réponse : 187.76 lei.)

10. Une personne âgée de 45 ans souhaite que son fils reçoive 1000000 lei si elle décède au cours des 20 prochaines années.

    a) Calculez la prime unique.
    b) Calculez la prime annuelle payable pendant les 20 ans de couverture.

    (Réponse : a) 123312.28 lei et b) 10031.35 lei.)

11. Une personne âgée de 52 ans souhaite recevoir 4000 lei si elle est en vie à l'âge de 67 ans. Si elle décède avant cet âge, sa famille recevra le double de ce montant.

    a) Calculez la prime unique.
    b) Calculez la prime annuelle payable pendant les 15 ans du contrat.

    (Réponse : a) 2715.9164 lei et b) 269.1772 lei.)

12. Monsieur Rus, âgé de 30 ans, souscrit une assurance de pension. Il recevra 800 lei en début de mois, tant qu'il est en vie, à partir de l'âge de 60 ans.

    a) Calculez la prime trimestrielle payable pendant les 30 années qui précèdent le premier versement de la pension.
    b) Calculez la prime semestrielle si les primes sont versées pendant les dix premières années seulement.

    (Réponse : a) 317.8862 lei et b) 1222.1571 lei.)

13. Monsieur Ionescu, âgé de 40 ans, souscrit une assurance mixte. Il recevra un capital S s'il est en vie à 60 ans. S'il décède avant cet âge, sa famille recevra $S/2$. Déterminez S si Monsieur Ionescu verse une prime de 150 lei en début de trimestre pendant dix ans au plus.

    (Réponse : $S = 12932.926$ lei.)

14. Une personne âgée de 49 ans souscrit une assurance qui versera 30000 lei à sa famille si elle décède à partir de l'âge de 55 ans et avant l'âge de 65 ans. Calculez la prime unique, puis la prime semestrielle si les primes sont versées pendant les six années qui précèdent le début de la couverture.

    (Réponse : 2635.32 lei pour la prime unique et 255.11 lei pour la prime semestrielle.)

15. Une personne âgée de 40 ans verse des primes mensuelles pendant 20 ans au plus. Elle paie 120 lei par mois pendant les 15 premières années, puis 200 lei par mois pendant les

cinq suivantes. Elle recevra une pension viagère en début de mois à partir de l'âge de 65 ans. Calculez la valeur actuelle moyenne des primes et le montant mensuel de la pension.

(Réponse : 19466.55 lei pour la valeur actuelle moyenne des primes et 808.67 lei par mois pour la pension.)

16. Une personne âgée de 45 ans souscrit une assurance mixte. Elle recevra 18000 lei si elle est en vie à 63 ans. Si elle décède avant cet âge, sa famille recevra un capital S. Calculez S si la prime annuelle est fixée à 1200 lei et payable pendant 12 ans au plus.

(Réponse : $S = 43701.18$ lei.)

17. Une personne âgée de 38 ans souscrit une assurance qui lui versera 60000 lei si elle atteint l'âge de 58 ans. Elle verse 5000 lei à la souscription et paie ensuite des primes trimestrielles constantes pendant 12 ans au plus. La première prime trimestrielle est due à 41 ans. Calculez la valeur actuelle moyenne du capital assuré et le montant de chaque prime trimestrielle.

(Réponse : 19810.77 lei pour la valeur actuelle moyenne du capital et 484.71 lei pour la prime trimestrielle.)

18. Une personne âgée de 54 ans souscrit une assurance en cas de décès. Sa famille recevra un capital S si elle décède avant 64 ans, et un capital $2S$ si elle décède à partir de 64 ans et avant 74 ans. La personne verse une prime annuelle de 1300 lei pendant huit ans au plus, dès la souscription. Calculez les deux capitaux assurés.

(Réponse : $S = 21038.97$ lei et $2S = 42077.94$ lei.)

19. Une personne âgée de 43 ans souhaite recevoir une pension de 1500 lei en début de mois, à partir de l'âge de 63 ans et tant qu'elle est en vie. Elle verse des primes semestrielles pendant les 15 premières années du contrat. Calculez la prime semestrielle si la pension est versée a) jusqu'à l'âge de 73 ans exclu, puis b) sans limite de durée.

(Réponse : a) 1828.19 lei et b) 2530.03 lei.)

20. Une personne âgée de 47 ans souscrit une assurance mixte qui lui versera 50000 lei si elle est en vie à 65 ans, ou qui versera 70000 lei à sa famille si elle décède avant cet âge. La personne souhaite que la prime annuelle soit au plus de 3000 lei. Déterminez le plus petit nombre d'années de paiement des primes et le montant de la prime correspondante. Justifiez votre réponse.

(Réponse : 11 ans. Pour dix ans, $P = 3208.25$ lei. Pour onze ans, $P = 2993.99$ lei.)

Appendice : Numéros de commutation avec 5%

x	L_x	D_x	N_x	M_x
0	100000	100000,00	1811317,38	14086,27
1	91992	87611,43	1711317,38	6271,26
2	91000	82539,68	1623705,95	5349,27
3	90545	78216,18	1541166,27	4946,52
4	90286	74278,52	1462950,10	4728,17
5	90101	70596,49	1388671,58	4579,64
6	89951	67122,82	1318075,09	4464,95
7	89837	63845,48	1250952,27	4381,93
8	89735	60736,18	1187106,79	4311,18
9	89644	57785,32	1126370,61	4251,08
10	89562	54983,30	1068585,29	4199,49
11	89484	52319,44	1013601,99	4152,76
12	89407	49785,16	961282,55	4108,83
13	89330	47373,61	911497,38	4066,98
14	89250	45077,31	864123,78	4025,58
15	89165	42889,89	819046,46	3983,68
16	89070	40803,99	776156,57	3939,09
17	88967	38816,01	735352,58	3893,04
18	88856	36921,50	696536,57	3845,78
19	88737	35116,24	659615,07	3797,52
20	88607	33395,05	624498,83	3747,32
21	88470	31755,63	591103,78	3696,93
22	88322	30192,86	559348,15	3645,08
23	88167	28704,65	529155,28	3593,37
24	88010	27289,08	500450,64	3543,49
25	87844	25940,58	473161,56	3493,26
26	87686	24660,88	447220,98	3447,73
27	87527	23443,96	422560,11	3404,09
28	87368	22287,02	399116,15	3362,53
29	87205	21186,13	376829,13	3321,95
30	87036	20138,17	355643,00	3281,88
31	86860	19140,42	335504,83	3242,14
32	86678	18190,78	316364,40	3203,00
33	86488	17286,58	298173,62	3164,09
34	86295	16426,67	280887,05	3126,44
35	86092	15607,64	264460,38	3088,73
36	85877	14827,30	248852,74	3050,69
37	85647	14083,42	234025,44	3011,94
38	85399	13373,94	219942,02	2972,14
39	85132	12697,26	206568,08	2931,33
40	84855	12053,29	193870,81	2891,02
41	84571	11440,90	181817,52	2851,65
42	84278	10858,35	170376,62	2812,97
43	83976	10304,22	159518,28	2774,99
44	83665	9777,20	149214,05	2737,75
45	83330	9274,34	139436,85	2699,55
46	82951	8792,53	130162,51	2658,38
47	82536	8331,94	121369,98	2615,45
48	82088	7892,11	113038,04	2571,32
49	81603	7471,89	105145,92	2525,81

x	L_x	D_x	N_x	M_x
50	81077	7070,22	97674,03	2478,81
51	80501	6685,70	90603,82	2429,79
52	79867	6317,19	83918,12	2378,41
53	79172	5964,02	77600,93	2324,76
54	78418	5625,92	71636,91	2269,33
55	77603	5302,33	66010,99	2212,27
56	76735	4993,36	60708,66	2154,39
57	75810	4698,25	55715,30	2095,65
58	74815	4415,80	51017,05	2035,47
59	73741	4145,15	46601,25	1973,61
60	72581	3885,66	42456,09	1909,97
61	71320	3636,34	38570,43	1844,09
62	69937	3396,02	34934,10	1775,28
63	68438	3164,98	31538,07	1704,24
64	66817	2942,88	28373,09	1631,08
65	65068	2729,37	25430,22	1555,91
66	63112	2521,26	22700,84	1475,84
67	61036	2322,22	20179,58	1394,90
68	58836	2131,92	17857,36	1313,22
69	56508	1950,06	15725,44	1230,90
70	54051	1776,45	13775,38	1148,15
71	51363	1607,72	11998,93	1061,93
72	48607	1449,00	10391,21	977,75
73	45786	1299,91	8942,21	895,68
74	42920	1160,52	7642,30	816,27
75	40025	1030,70	6481,78	739,88
76	37138	910,82	5451,08	667,33
77	34184	798,45	4540,26	596,62
78	31175	693,49	3741,81	528,04
79	28136	596,08	3048,32	462,06
80	25097	506,38	2452,23	399,23
81	22097	424,62	1945,85	340,16
82	19178	350,98	1521,23	285,42
83	16384	285,57	1170,25	235,52
84	13758	228,38	884,69	190,85
85	11338	179,24	656,31	151,65
86	9155	137,84	477,06	117,97
87	7230	103,67	339,22	89,68
88	5575	76,14	235,55	66,52
89	4188	54,47	159,41	48,04
90	3059	37,89	104,94	33,71
91	2168	25,58	67,05	22,94
92	1487	16,71	41,48	15,10
93	985	10,54	24,77	9,59
94	628	6,40	14,23	5,86
95	384	3,73	7,83	3,44
96	224	2,07	4,10	1,92
97	125	1,10	2,03	1,03
98	66	0,55	0,93	0,52
99	33	0,26	0,38	0,25
100	15	0,11	0,11	0,11

Bibliographie

[1] C. Baratay, *Mathématiques financières : pour maîtriser les calculs financiers en finance et en gestion de l'entreprise*, 8e édition, Editura Gualino, Paris-La Défense, 2025.

[2] S.A. Broverman, *Mathematics of Investment & Credit*, 8e édition, Editura ACTEX Learning, Greenland (New Hampshire), 2023.

[3] T. Cipra, *Basic Calculations in Finance and Insurance*, Editura Cambridge Scholars Publishing, Newcastle upon Tyne, 2026.

[4] P. Curt, *Introduction to Financial and Actuarial Mathematics*, Editura Alma Mater, Cluj-Napoca, 2022.

[5] P. Devolder, M. Fox, F. Vaguener, *Mathématiques financières*, 4e édition, Editura Pearson, Paris, 2025.

[6] D.C.M. Dickson, M.R. Hardy, H.R. Waters, *Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks*, 3e édition, Editura Cambridge University Press, Cambridge, 2020.

[7] E. Ginglinger, J.-M. Hasquenoph, *Mathématiques financières*, Editura Economica, Paris, 1995.

[8] K. Louineau, *Mathématiques financières : exercices corrigés*, Editura Dunod, Paris, 1992.

[9] M.A. Milevsky, *How to Build a Modern Tontine : Algorithms, Scripts and Tips*, Editura Springer, Cham, 2022.

[10] A.S. Mureşan, D.A. Filip, P. Curt, *Elemente de matematici financiare şi actuariale*, ediția a 2-a, revizuită și completată, Editura Mega, Cluj-Napoca, 2011.

[11] A.S. Mureşan, D.A. Filip, P. Curt, R.I. Lung, G. Olteanu, V. Radu, A. Roşca, T. Coconeţ, A.-D. Filip, F. Pop, K. Sipos, *Matematici financiare și actuariale. Teorie și probleme*, Editura Mega, Cluj-Napoca, 2013.

[12] G. Neuberg, *Mathématiques financières et actuarielles*, Editura Dunod, Paris, 2012.

[13] M.M. Parmenter, K.L. Shirley, *Theory of Interest and Life Contingencies with Pension Applications : A Problem-Solving Approach*, 4e édition, Editura ACTEX Learning, Greenland (New Hampshire), 2022.

[14] V. Radu, Á. Páll-Szabó, *Matematici financiare și actuariale. Caiet de seminar*, Presa Universitară Clujeană, Cluj-Napoca, 2025.

[15] I. Taşcu, I. Zelina, *Elemente de calcul financiar şi matematici manageriale*, Editura Risoprint, Cluj-Napoca, 2006.



ISBN 978-606-37-3216-4